时间缩放 $x(t) \Leftrightarrow x(\alpha t+\beta)$ $|\alpha|<1$. 线性拉伸 $|\alpha|>1$. 线性压缩.

信号与系统
JL22050004
申向阳

对于信号变换，建议先平移，再对t缩放.

$x(t)=Ev\{x(t)\}+Od\{x(t)\}$ $Ev\{x(t)\}=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$ $Od\{x(t)\}=\frac{1}{2}[x(t)-x(-t)]$

$\boxed{2. LTISystem\_1:}$

冲激函数的筛选性质：$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta[n-k]$ eg: $u[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u[k]\delta[n-k]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$

$\delta[n-k]\longrightarrow\boxed{\text{LIT 系统}}\longrightarrow h_k[n]=h[n-k]$.

$x[n]\longrightarrow\boxed{\text{LTI系统}}\longrightarrow y[n]$ $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]$ $\boxed{y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]}$

$y[n]=x[n]*h[n]$

eg: $y[n]=\cdots+x[-1]h[n+1]+x[0]h[n]+x[1]h[n-1]+\cdots$

计算 $x[n]*h[n]$ $x[n]=\alpha^n u[n]$, $h[n]=u[n]$, $0<\alpha<1$

解：$n\geq0$时，$x[k]h[n-k]=\begin{cases}\alpha^k, & 0\leq k\leq n\\ 0, & else\end{cases}$ $\therefore y[n]=\sum_{k=0}^{n}\alpha^k=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$. $n\geq0$.

$y[n]=\left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right)u[n]$

☆ 任意函数与单位阶跃函数的卷积.

$x[n]*u[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]u[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$ 累加器

$\boxed{1}$

连续时间复指数信号 $x(t)=e^{jw_0t}$ 是t的周期函数.

离散时间复指数信号 $x[n]=e^{jw_0n}$ 是 w_0 的周期函数. 不一定是 n 的周期函数.

(当 $\frac{2\pi}{w_0}$ 为有理数时为周期函数)

☆ 基波周期：$N=m\left(\frac{2\pi}{w_0}\right)$

$\boxed{1.4}$ 单位冲激函数，单位阶跃函数

$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$ $u(t)=\int_0^{\infty}\delta(t-\sigma)d\sigma$ $\delta[n]=u[n]-u[n-1]$

采样性质：$x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$ $u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$

$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$ $x[n]\delta[n]=x[0]\delta[n]$

筛选性质：$\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=x(t)$ $x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$

~~指数表示：~~ $\cancel{\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-jkt}dk}$ $\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]=x[n]$

左边单位阶跃：$u[-n-1]=\begin{cases}1, & n\leq-1\\ 0, & n\geq0\end{cases}$

系统的基本性质：$\boxed{\text{记忆性}}$：输出依赖于前后时刻的信号输入

$\boxed{\text{可逆性}}$

$\boxed{\text{因果性}}$ 仅依赖当前及过去时刻的输入. $y[n]=x[-n]$ 非因果

$y(t)=x(t)\cos(t+1)$ 因果

△ $\boxed{\text{稳定性}}$：特例法. 推导法.

$\boxed{\text{输入有界}\Rightarrow\text{输出有界}}$

$y(t)=tx(t)$，非稳.

$\boxed{y(t)=e^{x(t)}}$ $\because$ $|x(t)|<B$，$e^{-B}<|y(t)|<e^{B}$ $\therefore$ 稳.

累加器 $y[n]=\sum\limits_{k=-\infty}^{n}x[k]$ 输入$\underbrace{u[n]}_{\text{有界}}$ $\Rightarrow y[n]=\sum\limits_{k=-\infty}^{n}u[k]=\underbrace{(n+1)u[n]}_{\text{无界}}$

△ $\boxed{\text{时不变性}}$ $\cancel{x(t)\to y(t)}$

$\cancel{x(t-t_0)\to y(t-t_0)}$

t_1时刻： $x_1(t)$ $y_1(t)$

t_2时刻： $x_1(t-t_0)$ $y_1(t-t_0)$

$(t_0=t_2-t_1)$

eg：判断 ① $y(t)=\sin[x(t)]$ ② $y[n]=nx[n]$ ③ $y(t)=x(2t)$.

① t_1时刻：$\begin{cases} y_1(t)=\sin[x_1(t)] \\ y_1(t-t_0)=\sin[x_1(t-t_0)] \end{cases}$ t_2时刻：$\begin{cases} x_2(t)=x_1(t-t_0) ☆ \\ y_2(t)=\sin[x_2(t)]=\sin[x_1(t-t_0)]=y_1(t-t_0) \end{cases}$ $\therefore$ 时不变.

② t_1时刻 $\begin{cases} y_1[n]=nx_1[n] \\ y_1[n-n_0]=(n-n_0)x_1[n-n_0] \end{cases}$ t_2时刻：$\begin{cases} x_2[n]=x_1[n-n_0] \\ y_2[n]=nx_2[n]=nx_1[n-n_0]\neq y_1[n-n_0] \end{cases}$ $\therefore$ 时变.

③ t_1时刻 $\begin{cases} y_1(t)=x_1(2t) \\ y_1(t-t_0)=x_1(2t-2t_0) \end{cases}$ t_2时刻：$\begin{cases} x_2(t)=x_1(t-t_0) \\ y_2(t)=x_2(2t)=x_1(2t-t_0)\neq y_1(t-t_0) \end{cases}$ $\therefore$ 时变

△ $\boxed{\text{线性}}$ $\begin{cases} \text{叠加性质} \quad (a,b\text{为复常数}) \\ \text{零入零出性质} \quad x[n]\to 0,\ y[n]\to 0. \end{cases}$

eg：判断：① $y(t)=tx(t)$ ② $y(t)=x^2(t)$ ③ $y[n]=Re\{x[n]\}$ ④ $y[n]=2x[n]+3$

① 任意两个输入及输出：$x_1(t)\to y_1(t)=tx_1(t)$ $x_2(t)\to y_2(t)=tx_2(t)$

线性组合： $x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t)$.

线性组合的输出： $y_3(t)=tx_3(t)=t(ax_1(t)+bx_2(t))=atx_1(t)+btx_2(t)=ay_1(t)+by_2(t)$

$\therefore$ 线性

② $x_1(t)\to y_1(t)=x_1^2(t)$ $x_2(t)\to y_2(t)=x_2^2(t)$

$x_3\overset{\text{设}}{=}ax_1(t)+bx_2(t)$

$y_3(t)=x_3^2(t)=(ax_1(t)+bx_2(t))^2\neq ay_1(t)+by_2(t)$ $\therefore$ 非线性.

③ $x_1[n]\to y_1[n]=Re\{x_1[n]\}$ $x_2[n]\to y_2[n]=Re\{x_2[n]\}$ $x_3[n]=ax_1[n]+bx_2[n]$

$y_3[n]=Re\{x_3[n]\}=Re\{ax_1[n]+bx_2[n]\}\neq aRe\{x_1[n]\}+bRe\{x_2[n]\}$ $\therefore$ 非线性

(a.b为复常数)

④ 不满足 零入零出

2.2 连续时间 LTI 系统：卷积积分

$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$　　$u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty}\delta(t-\tau)d\tau$

$h_\tau(t)=h(t-\tau)$　$h_0(t)=h(t)$

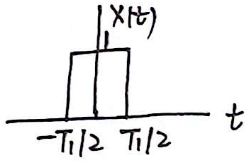
$$\boxed{y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

例：求 $x(t)*h(-t)$.　令 $g(t)=h(-t)$　$x(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)g(t-\tau)d\tau$.

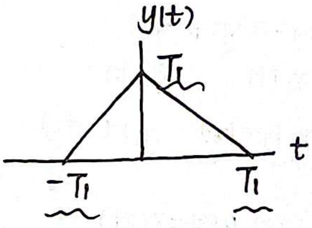
$\because g(t-\tau)=h(-(t-\tau))=h(\tau-t)$

$\therefore x(t)*h(-t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(\tau-t)d\tau$

☆方波信号与自己的卷积



$\Rightarrow$



（脑子里要有动态）

2.3 LTI 系统的基本性质

交换律　分配律　结合律：$x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]=[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)$

$\boxed{\text{记忆性}}$ 无记忆离散时间 LTI 系统必须满足：当 $n\neq0$ 时，$h[n]=0$　$\therefore h[n]=K\delta[n]$. K 为常数
连续　$t\neq0$，$h(t)=0$　$\therefore h(t)=K\delta(t)$.

$\boxed{\text{可逆性}}$ 需满足 $h(t)*h_1(t)=\delta(t)$
$h[n]*h_1[n]=\delta[n]$

卷的话不保留 δ. 乘积保留 δ.

~~例：求 $y(t)=x(t-t_0)$ 时~~

$x(t)*\delta(t)=x(t)$　$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$

☆如果 LTI 系统的冲激响应为 $\delta(t-t_0)$，其逆系统的冲激响应为 $\delta(t+t_0)$
$\delta[n-n_0]$　$\delta[n+n_0]$

累加器与差分器

一个 LTI 系统的冲激响应为 $h[n]=u[n]$

系统输出 $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]u[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$　累加器.

其逆系统 $y[n]=x[n]-x[n-1]$ 差分器

逆系统的冲激响应 $h_1[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$

$\boxed{\text{因果性}}$ 当 $n<0$ 时，$h[n]=0$　$t<0$ 时，$h(t)=0$

线性系统：因果性与初始松弛条件等价.

不稳定.
积分器 —— 累加器
$h(t)=u(t)$　$h[n]=u[n]$
$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$　$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$

$\boxed{\text{稳定性}}$ 输入有界 $\Rightarrow$ 输出有界

if：$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|h[k]|<\infty$.　$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(\tau)|d\tau<\infty$. 则系统稳定.

$\boxed{\text{LTI 系统的单位阶跃响应}}$　$s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]$　$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$.

2.4 线性常系数微分方程 、框图表示

2.5 奇异函数

$x(t)*u_1(t)=\frac{dx(t)}{dt}$ $u_1(t)=\frac{d\delta(t)}{dt}$ 单位冲激偶

$x(t)*u_2(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}=x(t)*u_1(t)*u_1(t)$ $u_2(t)=u_1(t)*u_1(t)$

$$\boxed{x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau}$$

$u_{-2}(t)=u(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{t}u(\tau)d\tau=tu(t)$ 单位斜坡函数.

第三章 周期信号的Fourier 级数表示. CTFS DTFS

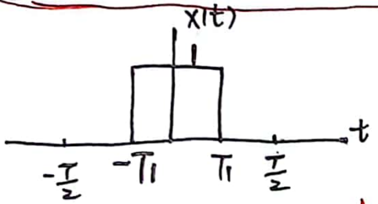
CTFS: $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$

实周期信号的Fourier 级数表示 $x(t)=x^*(t)$ $a_{-k}^*=a_k$ $a_{-k}=a_k^*$ ("*"在哪都一样)

系数: $a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$, $a_0=\frac{1}{T}\int_T x(t)dt$

eg: 常数为1的CTFS: $x(t)=1$ $a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_T e^{-jk\omega_0 t}dt=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & else\end{cases}$

☆ 周期矩形波函数信号x(t)的Fourier 级数展开系数.



$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1\\ 0, & T_1<|t|<T/2\end{cases}$

☆
$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1}e^{-jk\omega_0 t}dt$$
$$=-\frac{1}{jk\omega_0 T}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1}=\frac{2}{k\omega_0 T}\left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1}-e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right]$$
$$=\frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}=\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}\quad(k\neq 0)$$
$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1}dt=\frac{2T_1}{T},\quad(k=0).$$

CTFS展开的误差 $e_N(t)=x(t)-x_N(t)$
$=x(t)-\sum_{k=-N}^{+N}a_k e^{jk\omega_0 t}$ 误差度量: $E_N=\int_T|e_N(t)|^2dt$

~~Fourier~~ FS收敛条件: 一. 单周期内能量有限(平方可积) $\int_T|x(t)|^2dt<\infty$

二. 绝对可积 $\int_T|x(t)|dt<\infty$
$\forall$ 有限t内, 有限振荡; 有限不连续点

3.4 CTFS 性质

时移: $x(t)\xleftrightarrow{FS}a_k$. $x(t-t_0)\xleftrightarrow{FS}e^{-jk\omega_0 t_0}a_k=e^{-jk(2\pi/T)t_0}a_k$

时间反转: $x(-t)\xleftrightarrow{FS}a_{-k}$

若x(t)为偶/奇, 则 $a_{-k}=a_k$ / $a_{-k}=-a_k$

时间缩放 $y(t)=x(\alpha t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk(\alpha\omega_0)t}$

乘积 $x(t)\xleftrightarrow{FS}a_k$ $x(t)y(t)\xleftrightarrow{FS}h_k=\sum_{l=-\infty}^{\infty}a_l b_{k-l}$
$y(t)\xleftrightarrow{FS}b_k$

共轭 $x(t)\xleftrightarrow{FS}a_k$ $x^*(t)\xleftrightarrow{FS}a_{-k}^*$ ⇒ 若x(t)为实信号 $x^*(t)=x(t)$, $a_k=a_{-k}^*$

实偶 ⇒ FS系数为实偶 $a_k=a_{-k}$, $a_k^*=a_k$

微分 $x(t)\xleftrightarrow{FS}a_k$ $\frac{dx(t)}{dt}\xleftrightarrow{FS}jk\omega_0 a_k$

实奇 ⇒ 纯虚奇函数 $a_{-k}=-a_k$, $a_k^*=-a_k$, $a_0=0$

积分 $x(t)\xleftrightarrow{FS}a_k$ if $a_0=0$ 且积分有界 $\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\xleftrightarrow{FS}\frac{a_k}{jk\omega_0}, k\neq 0.$

Parseval 定理 $\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$

☆例3.6 非标准周期方波　　找到信号与周期方波之间的关系．即周期方波 $x(t) \xrightarrow{how} g(t)$

☆例3.7 周期三角波　~~周期~~ 微分 方波　　$w_0 = \frac{2\pi}{T}$

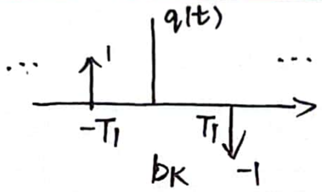
周期三角波 $\xrightarrow{微分}$ 非标准周期方波 $\longrightarrow$ 标准周期方波

例3.8 冲激串 FS 系数

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$

$a_k = \frac{1}{T}\int_T \delta(t) e^{-jkw_0t} dt = \frac{1}{T}$

Q：利用冲激串与矩形波间的关系，求周期矩形波的FS系数 C_k



$b_k = jkW_0 C_k$

求 b_k：　$q(t) = \delta(t+T_1) - \delta(t-T_1)$

$\therefore b_k = (e^{jkW_0T_1} - e^{-jkW_0T_1})\frac{1}{T}$

$= \frac{2j}{T} \cdot \sin(kW_0T_1)$

$\therefore C_k = \frac{1}{jkW_0} b_k = \frac{2j\sin(kW_0T_1)}{T \cdot jkW_0} = \frac{\sin(kW_0T_1)}{k\pi}$

$C_0 = \frac{2T_1}{T}$

☆例3.9 FS性质的综合应用　　$a_k = a_{-k}^*$

☆共轭：实信号的共轭对称性

DTFS

$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jkw_0n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$

$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jkw_0n} = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$

(1) a_k是周期序列　$a_k = a_{k+N}$ ☆

(2) $a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]$ 一个周期上的平均值

例：求周期为N的常数序列1的DTFS

$x[n] = 1$

$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jkw_0n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} = \begin{cases} 1, & k=0,\pm N,\pm 2N \\ 0, & else \end{cases}$

（好像直流没变呀）

例3.10 离散时间周期正弦信号

$x[n] = \sin w_0 n$，$N = (\frac{2\pi}{w_0})m$

例 离散冲激串FS系数　$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN]$

$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} = \frac{1}{N}$　（∵一个周期内只有1个地方有值）

☆例3.12 离散时间周期方波信号

离散时间周期信号

DTFS 性质

周期性 $x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k$ $a_k = a_{k+N}$

乘积 $x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k$ $y[n] \xleftrightarrow{FS} b_k$ $x[n]y[n] \xleftrightarrow{FS} c_k = \sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l} = \sum_{l=0}^{N-1} a_l b_{k-l}$

周期卷积 $x[n]$, $y[n]$ 周期为N. $\therefore w[n] = \sum_{r=\langle N\rangle} x[r]y[n-r] \xleftrightarrow{FS} N a_k b_k$

一阶差分 $x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k$ $x[n]-x[n-1] \xleftrightarrow{FS} (1-e^{-jk(2\pi/N)})a_k$

Parseval : $\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N\rangle} |a_k|^2$

时移: $x[n-n_0] \xleftrightarrow{FS} a_k e^{-jkw_0 n_0}$ $w_0 = \frac{2\pi}{N}$

频移: $e^{jMw_0 n} x[n] \xleftrightarrow{FS} a_{k-M}$

例3.13 非标准周期方波 $\longrightarrow$ 拆开

例3.15 ☆ 求周期信号 $w[n]$.

例3.14 ☆ 性质的综合运用 — 求周期信号 $x[n]$.

其中条件3: $\sum_{n=2}^{7}(-1)^n x[n] = 1$ 已知 $w_0 = \frac{\pi}{3}$.

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{7}(-1)^n x[n] = \sum_{n=2}^{7} e^{-j\pi n} x[n] = \sum_{n=2}^{7} e^{-j3w_0 n} x[n] = 1.$$

$$\therefore \frac{1}{6}\sum_{n=2}^{7} e^{-j3w_0 n} x[n] = \frac{1}{6} \quad \therefore \boxed{a_3 = \frac{1}{6}}$$

3.7 LTI系统的特征函数和特征值.

$$x(t) = e^{st} \text{时}, \ y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

$$\therefore y(t) = H(s)e^{st} \quad \boxed{H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau}$$

有点FT的意味了.

$$x[n] = z^n \text{时}, \ y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

$$\therefore y[n] = H(z)\cdot z^n \quad \boxed{H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}.}$$

☆ 例3.16 LTI系统对CTFS的响应

☆ 例3.17 LTI系统对DTFS的响应

学完再回过头来看.

滤波器

导数滤波器 $y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$ $x(t)=e^{j\omega t}$ $y(t)=j\omega e^{j\omega t}$ $H(j\omega)=j\omega$.

两点平均滤波器 $y[n]=\frac{1}{2}(x[n]+x[n-1])$ $h[n]=\frac{1}{2}(\delta[n]+\delta[n-1])$

$H(e^{j\omega})=\frac{1}{2}(1+e^{-j\omega})$

☆ 离散时间频率选择滤波器 $H(e^{j\omega})$

周期为2π. $\begin{cases}\text{低频出现在偶数}\pi\text{附近}\\ \text{高频出现在奇数}\pi\text{附近.}\end{cases}$

接第四章

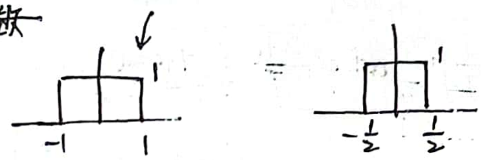
例4.21 正弦幅度调制

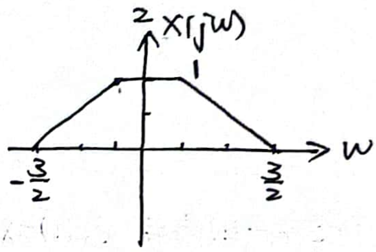
4.23 两个sinc函数的乘积.

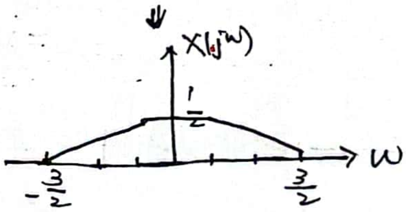
$$x(t)=\frac{\sin(t)\sin(t/2)}{\pi t^2}=\pi\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)\left(\frac{\sin(t/2)}{\pi t}\right)$$

$$X(j\omega)=\frac{\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}}F\left[\frac{\sin(t)}{\pi t}\right]*F\left[\frac{\sin(t/2)}{\pi t}\right]$$

~~别忘了"$\frac{1}{2}$"系数~~







$\boxed{4.7}$ 由线性常系数微分方程表征的LTI系统的频率响应.

咪了

第四章 CTFT

对∀非周期信号 $x(t)$，可以通过周期延拓，得到 $\tilde{x}(t)$. $\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t}$，$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\tilde{x}(t)e^{-jkw_0 t}dt$

可改写为 $a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jkw_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-jkw_0 t}dt$

定义 $X(jw)=Ta_k=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-jwt}dt \quad w=kw_0.$

$a_k=\frac{1}{T}X(jkw_0)$ 或 $a_k=\frac{1}{T}X(jw)|_{w=kw_0}$

$X(jw)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-jwt}dt$ $\qquad X(0)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)dt$

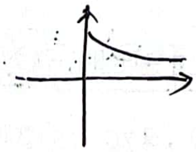
$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(jw)e^{jwt}dw.$ $\qquad x(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(jw)dw.$

收敛条件：（充分非必要条件）
- 有限能量 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt<\infty$
- 绝对可积 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|dt<\infty$
- 有限振荡，有限不连续点

$x(t)=e^{-at}u(t)$，$a>0$，a为实数. $X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-jwt}dt=\int_0^{\infty}e^{-at}e^{-jwt}dt=\frac{1}{a+jw}$，$a>0.$

若a为复数且$Re(a)>0$.

① $e^{-at}u(t),\ Re(a)>0 \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a+jw}$



② 双边指数信号 $x(t)=e^{-a|t|}$，$a>0$

$X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|t|}e^{-jwt}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{at}e^{-jwt}dt+\int_0^{\infty}e^{-at}e^{-jwt}dt$

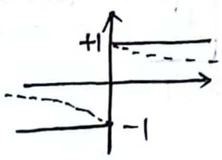
$=\frac{1}{a-jw}+\frac{1}{a+jw}=\frac{2a}{a^2+w^2}$ （实偶信号）

③ $\delta(t)$

$X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-jwt}dt=1$ $\qquad \delta(t)\xleftrightarrow{F}1$

$1\xleftrightarrow{F}2\pi\delta(w)$ $\qquad$ 冲激函数的指数表示：$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-jwt}dw$

④ 符号函数 $sgn(t)$ （不满足收敛条件，但存在FT）.



由 $x(t)=e^{-a|t|}sgn(t)=e^{-at}u(t)-e^{at}u(-t)$

$sgn(t)=\lim_{a\to 0}x(t)$

$\therefore X(jw)=\left(\frac{1}{a+jw}-\frac{1}{a-jw}\right)=\frac{-2jw}{a^2+w^2}$ $\quad \therefore sgn(t)\xleftrightarrow{F}\frac{2}{jw}\ (w\neq 0)$

这个证明挺完整，但我直接 $u(t)-u(-t)$ 岂不更快.

⑤ $u(t)=\frac{1}{2}(1+sgn(t)) \Rightarrow F[u(t)]=\frac{1}{2}F[1+sgn(t)]=\pi\delta(w)+\frac{1}{jw}$

★ $u(t)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{jw}+\pi\delta(w)$

⑥ 矩形波信号

$\rightarrow rect(\frac{t}{2T_1})$

$$X(jw)=\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jwt}dt = \frac{2\sin wT_1}{w}$$

定义 $sinc(x) = \frac{\sin\pi x}{\pi x}$

$\therefore$ $rect(\frac{t}{2T_1}) \xleftrightarrow{F} \frac{2\sin wT_1}{w}$ 记

由 $X(jw) \Longrightarrow a_k$. $\because Ta_k = X(jw)|_{w=kw_0}$, $w_0=\frac{2\pi}{T}$

$\therefore$

$$\therefore \begin{cases} a_k = \frac{1}{T}\cdot\frac{2\sin kw_0T_1}{kw_0} = \frac{\sin kw_0T_1}{k\pi} & k\neq 0 \\ a_k = \frac{2T_1}{T}, & k=0 \end{cases}$$

妙.

对于离散的一致推.

利用对偶性 if $F\{x(t)\}=X(jw)$ 则 $F\{X(t)\}=2\pi x(-jw)$

$$\therefore \frac{2\sin Wt}{t} \xleftrightarrow{F} rect(\frac{-w}{2W})\cdot 2\pi$$

$$\therefore \frac{\sin Wt}{\pi t} \xleftrightarrow{F} rect(\frac{w}{2W})$$

4.2 连续时间周期信号FT

可以由其FS得到

$\therefore X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-jwt}dt$ $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jkw_0t}$ $1 \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(w)$.

$$\therefore X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jkw_0t}\cdot e^{-jwt}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(w-kw_0)t}dt$$

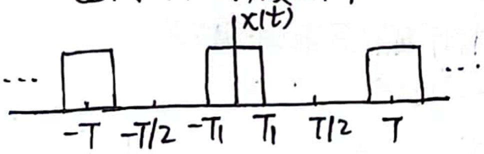
$(\delta(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-jwt}dt)$

$$\therefore X(jw) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k\delta(w-kw_0)$$

① 求1的FT $\because a_k=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & else\end{cases}$

$$\therefore X(jw)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(w-kw_0)=2\pi\delta(w).$$

② 周期矩形波的FT



$\because FS: a_k=\frac{\sin kw_0T_1}{k\pi}$

$$\therefore X(jw)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\cdot\frac{\sin kw_0T_1}{k\pi}\delta(w-kw_0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\sin kw_0T_1}{k}\delta(w-w_0).$$

③ $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$ $\because FS: a_k=\frac{1}{T}\int_T\delta(t)e^{-jkw_0t}dt=\frac{1}{T}$

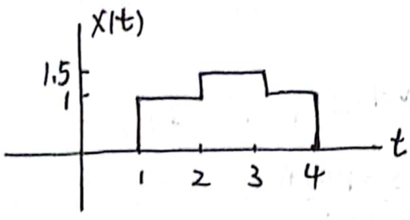
$$\therefore FT: X(jw)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-k\cdot\frac{2\pi}{T}).$$

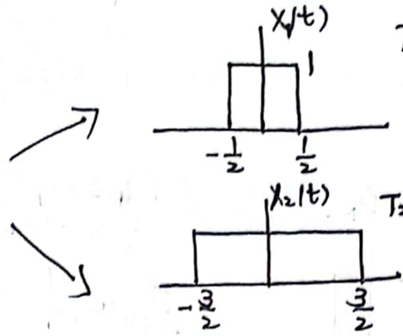
CTFT性质

时移 $x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$.

符号别反!

☆ 例4.9 线性与时移综合应用



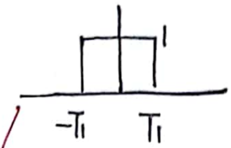


$T_1=\frac{1}{2}$

$T_2=\frac{3}{2}$

$\therefore x(t)=\frac{1}{2}x_1(t-\frac{5}{2})+x_2(t-\frac{5}{2})$

$\because$



$rect(\frac{t}{2T_1}) \xleftrightarrow{F} \frac{2\sin\omega T_1}{\omega}$

$\therefore X_1(j\omega)=\frac{2\sin(\omega/2)}{\omega}$

$X_2(j\omega)=\frac{2\sin(3\omega/2)}{\omega}$

$\therefore X(j\omega)=e^{-j\omega\cdot\frac{5}{2}}\left(\frac{\sin(\omega/2)+2\sin(3\omega/2)}{\omega}\right)$.

共轭

if $x(t)\xleftrightarrow{F}X(j\omega)$，则 $x^*(t)\xleftrightarrow{F}X^*(-j\omega)$

跟 FS 的 a^*_{-k} 相似.

☆推论1: $x(t)$为实信号

$x(t)=x^*(t)$ $X(j\omega)=X^*(-j\omega)$

直角坐标系下, $X(j\omega)$的实部为偶函数. 虚部为奇函数.

极坐标系下, $X(j\omega)$的幅度为偶函数. 相位为奇函数.

推论2: (1) if $x(t)$实偶, 即$x(t)=x(-t)$, 则$X(j\omega)$也是实偶.

(2) 实奇 纯虚奇函数.

推论3: $x(t)$的奇偶分解(实)

$$x(t)=\underbrace{Ev\{x(t)\}}_{\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]}+\underbrace{Od\{x(t)\}}_{\frac{1}{2}[x(t)-x(-t)]}$$

$Ev\{x(t)\} \xrightarrow{F} Re\{X(j\omega)\}$

$Od\{x(t)\} \xrightarrow{F} jIm\{X(j\omega)\}$

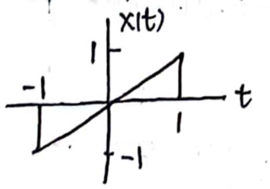
微分 $\frac{dx(t)}{dt}\xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega)$

积分 $\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$

$u(t)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$

(微分操作可能会取消常数项)

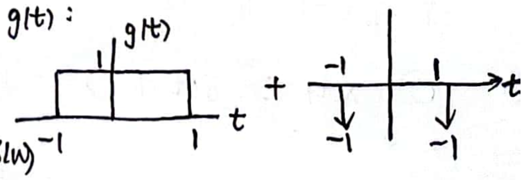
eg. 求$x(t)$的FT



$g(t)=\frac{dx(t)}{dt}$

$\therefore x(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$

$g(t)$:



$\therefore X(j\omega)=\frac{1}{j\omega}G(j\omega)+\pi G(0)\delta(\omega)$

$\because G(j\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega}-e^{j\omega}-e^{-j\omega}$ $G(0)=0$

$\therefore X(j\omega)=\frac{2\sin\omega}{j\omega^2}-\frac{2\cos\omega}{j\omega}$

时频缩放 $x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{jw}{a}\right)$ $\quad x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-jw)$

对偶性 计: $F[x(t)] = X(jw)$，则 $F[X(t)] = 2\pi x(-jw)$

例4.13 ☆利用对偶性质求FT: $g(t) = \frac{2}{1+t^2}$

假设 $X(jw) = \frac{2}{1+w^2}$ 变换对 $e^{-|t|} \xleftrightarrow{F} X(jw) = \frac{2}{1+w^2}$

$\therefore F\left[\frac{2}{1+t^2}\right] = 2\pi e^{-|w|}$.

常用对偶关系

频移 $e^{jw_0t}x(t) \xleftrightarrow{F} X(j(w-w_0))$

频域微分 $-jtx(t) \xleftrightarrow{F} \frac{dX(jw)}{dw}$ 证: $\frac{dX(jw)}{dw} = \int_{-\infty}^{\infty} -jtx(t)e^{-jwt}dt$

parseval $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(jw)|^2dw$.

△

FT的FT $F^2[x(t)] = F[X(jw)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)e^{-jwt}dw = 2\pi x(-t)$

$\therefore F[X(jw)] = 2\pi x(-t)$

卷积 $y(t) = h(t)*x(t) \xleftrightarrow{F} Y(jw) = H(jw)X(jw)$

通常认为当一个系统稳定时，认为其存在频率响应

例4.19. $h(t) = e^{-at}u(t)$, $a>0$ $\quad x(t) = e^{-bt}u(t)$, $b>0$.

求 $y(t)$ $\quad H(jw) = \frac{1}{a+jw}$ $\quad X(jw) = \frac{1}{b+jw}$ $\quad Y(jw) = \frac{1}{(a+jw)(b+jw)}$

$\cancel{\therefore Y(jw) = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{a+jw} - \frac{1}{b+jw}\right]}$

① $a\neq b$ 时，$y(t) = \frac{1}{b-a}\left[e^{-at}u(t) - e^{-bt}u(t)\right]$

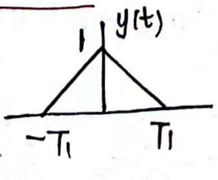
② $a=b$ 时，$Y(jw) = \frac{1}{(a+jw)^2}$ $\quad \because -jtx(t) \xleftrightarrow{F} \frac{dX(jw)}{dw}$

$\therefore -jte^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{d}{dw}\left(\frac{1}{a+jw}\right) = -j\frac{1}{(a+jw)^2}$

变换对. $te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{(a+jw)^2}$ $\quad \therefore y(t) = te^{-at}u(t)$

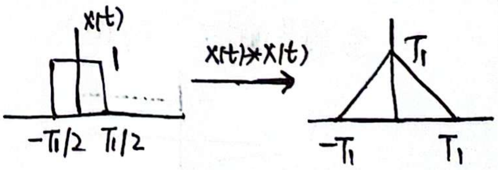
例4.20 两个sinc函数的卷积

例 求三角波的FT



求 $Y(jw)$

$\because$



$\because y(t) = \frac{1}{T_1}[x(t)*x(t)]$

$\therefore Y(jw) = \frac{1}{T_1}X(jw)X(jw) = \frac{1}{T_1}\left[\frac{2\sin wT_1/2}{w}\right]^2$

√ 乘积 ☆ $r(t) = s(t)p(t) \xleftrightarrow{F} R(jw) = \frac{1}{2\pi}S(jw)*P(jw)$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(jv)P(j(w-v))dv$

(调制性质)

5.1 离散时间非周期的FT　DTFT

$$\begin{cases} X(e^{jw})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-jwn} \\ x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{jw})e^{jwn}dw \end{cases}$$

$$X(0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]$$

$$x[0]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{jw})dw$$

$$Na_k=X(e^{jw})\quad w=kw_0$$

$X(e^{jw})$ 具有周期性，2π. 综合方程中积分区间为 $\forall 2\pi$ 范围

重建信号

$$\hat{x}[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} X(e^{jw})e^{jwn}dw$$

当 $W=\pi$ 时，$\hat{x}[n]=x[n]$

DTFT可以精确重建原信号，不存在Gibbs现象

① $x[n]=a^n u[n]\quad |a|<1$

$$X(e^{jw})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n]e^{-jwn}=\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-jw})^n=\frac{1}{1-ae^{-jw}}$$

$$\therefore\ a^n u[n],\ |a|<1 \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-ae^{-jw}}$$

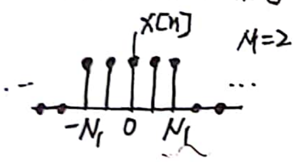
② 双边指数信号　$x[n]=a^{|n|},\ |a|<1$

$$X(e^{jw})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|}e^{-jwn}=\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jwn}+\sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n}e^{-jwn}\qquad 令 m=-n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-jw})^n+\sum_{m=1}^{\infty}(ae^{jw})^m$$

$$=\frac{1}{1-ae^{-jw}}+\frac{ae^{jw}}{1-ae^{jw}}$$

③ 离散矩形波信号



$$X(e^{jw})=\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jwn}=\frac{\sin w(N_1+\frac{1}{2})}{\sin(w/2)}$$

$$\therefore\ x[n]=\begin{cases}1, & |n|\le N_1\\ 0, & |n|>N_1\end{cases} \xleftrightarrow{F} \frac{\sin w(N_1+\frac{1}{2})}{\sin(w/2)}$$

由 $X(e^{jw})\Rightarrow a_k$

$$\because\ Na_k=X(e^{jw})\big|_{w=kw_0}\qquad w_0=\frac{2\pi}{N}.$$

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T_1}\right)\xleftrightarrow{F}\frac{2\sin wT_1}{w}\to\frac{\sin wT_1}{w/2}$$

记　对像

$$\therefore\begin{cases} a_k=\frac{1}{N}\cdot\frac{\sin[kw_0(N_1+\frac{1}{2})]}{\sin[kw_0/2]}, & k\ne 0,\pm N,\pm 2N.\\ a_k=\frac{2N_1+1}{N}, & k=0,\pm N,\pm 2N.\end{cases}$$

④ sinc 函数.

首先，$\frac{\sin Wt}{\pi t}\xleftrightarrow{F}\mathrm{rect}\left(\frac{w}{2W}\right)$

$$\Rightarrow\ \frac{\sin Wn}{\pi n},\ 0<W<\pi \xleftrightarrow{F} X(e^{jw})=\begin{cases}1, & 0\le|w|\le W\\ 0, & W<|w|\le\pi\end{cases}$$

⑤ $\delta[n]$

$$X(e^{jw})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n]e^{-jwn}=\delta[0]=1$$

$$\therefore\ \delta[n]\xleftrightarrow{F} 1$$

离散时间周期信号的FT：

已知 FS： $x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jkw_0 n}$

$$X(e^{jw})=\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(w-kw_0) \qquad w_0=\frac{2\pi}{N}$$

① 常数序列 $x[n]=1$.

FS: $a_k=\begin{cases}1, & k=lN\\ 0, & else\end{cases}$ $\quad \therefore FT: X(e^{jw})=\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(w-\frac{2\pi}{N}k)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(w-2\pi l)$

② 离散余弦函数

$$\cos w_0 n \xleftrightarrow{F} \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(w-w_0-2\pi k)+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(w+w_0-2\pi k)$$

③离散冲激序列

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]$$

$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jkw_0 n}=\frac{1}{N}$ $\quad \Rightarrow FT: X(e^{jw})=\frac{2\pi}{N}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(w-\frac{2\pi}{N}k)$

DTFT性质

① 周期性 $X(e^{j(w+2\pi)})=X(e^{jw})$ $\quad 2\pi$

② 时移 $x[n-n_0]\xleftrightarrow{F} e^{-jwn_0}X(e^{jw})$

频移 $e^{jw_0 n}x[n]\xleftrightarrow{F} X(e^{j(w-w_0)})$

③ 共轭. $x^*[n]\xleftrightarrow{F} X^*(e^{-jw})$. 推论：

① $x[n]$为实，则 $X^*(e^{-jw})=X(e^{jw})$

$X(e^{jw})$的实部为偶，虚部为奇.

$X(e^{jw})$的幅度为偶，相位为奇.

② (1) ~~若~~ $x[n]$ 实偶，$X(e^{jw})$ 也实偶.

(2) $x[n]$ 实奇. $X(e^{jw})$ 纯虚奇.

③ $x[n]$的奇偶分解 $x[n]=Ev[x[n]]+Od[x[n]]$.

$Ev\{x[n]\}\xleftrightarrow{F} Re\{X(e^{jw})\}$

$Od\{x[n]\}\xleftrightarrow{F} jIm\{X(e^{jw})\}$.

④差分. 累加.

$$x[n]-x[n-1]\xleftrightarrow{F}(1-e^{-jw})X(e^{jw}).$$

$$\sum_{m=-\infty}^{n}x[m]\xleftrightarrow{F}\underbrace{\frac{1}{1-e^{-jw}}X(e^{jw})}_{w\neq 0}+\underbrace{\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-2\pi k)}_{w=0}$$

例: $u[n]\xleftrightarrow{F}\frac{1}{1-e^{-jw}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(w-2\pi k)$.

$x[nN]\xleftrightarrow{F}X(e^{jw/N})$

⑤ 时间反转 $x[-n]\xleftrightarrow{F}X(e^{-jw})$.

⑥ 时域膨胀 $x_k[n]\xleftrightarrow{F}X(e^{jkw})$.

即 $x[\frac{n}{k}]$

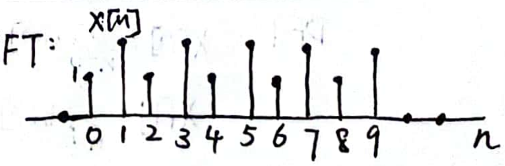
⑦ 微分(频域)

$$-jnx[n]\xleftrightarrow{F}\frac{dX(e^{jw})}{dw}$$

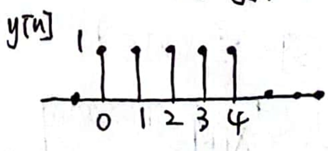
⑧ parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(e^{jw})|^2dw.$$

例5.9: 求FT:



$x[n]=y_{(2)}[n]+2y_{(2)}[n-1]$



$y_{(2)}[n]=y[\frac{n}{2}]$

$\because Y(e^{jw})=e^{-j2w}\cdot\frac{\sin(5w/2)}{\sin(w/2)}$

$\therefore y_{(2)}[n]\xleftrightarrow{F}e^{-j4w}\frac{\sin(5w)}{\sin w}$

$2y_{(2)}[n-1]\xleftrightarrow{F}2e^{-j5w}\frac{\sin(5w)}{\sin w}.$

例5.10 性质的综合应用 ☆ 时域周期 $\longleftrightarrow$ 频域离散.

(冲激)

卷积 $y[n]=x[n]*h[n]$ $Y(e^{jw})=X(e^{jw})H(e^{jw})$

☆ 当一个离散系统稳定时，其冲激响应绝对可加 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]|<\infty$

$$(n+1)a^n u[n] \xleftrightarrow{F} \left(\frac{1}{1-ae^{-jw}}\right)^2$$

$$(-1)^n x[n]=e^{j\pi n}x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j(w-\pi)}).$$

乘积 $y[n]=x_1[n]x_2[n] \xleftrightarrow{F} Y(e^{jw})=\frac{1}{2\pi}X_1(e^{jw})\circledast X_2(e^{jw})$

~~$Y(e^{jw})=X_1(e^{jw})*X_2$~~

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(w-\theta)})d\theta$$

5.7 由线性常系数差分方程表征的LTI系统分析

eg: $y[n]-ay[n-1]=x[n]$ $|a|<1.$

$$H(e^{jw})=\frac{1}{1-ae^{-jw}}. \quad \therefore h[n]=a^n u[n]$$

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=2x[n]$$

$$H(e^{jw})=\frac{2}{1-\frac{3}{4}e^{-jw}+\frac{1}{8}e^{-j2w}}=\frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-jw})(1-\frac{1}{4}e^{-jw})}$$

$$=\frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}-\frac{2}{1-\frac{1}{4}e^{-jw}}$$

5.8 DFT. ~~FFT~~.

$$\therefore h[n]=4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

DFT正变换 $X[K]=Na_k=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$, $k=0,1,\cdots,N-1.$

DFT逆变换 $x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[K]e^{jk(2\pi/N)n}$, $n=0,1,\cdots,N-1$

eg: 求4点离散时间信号$x[n]=(1,2,4,4)$的DFT和iDFT.

$N=4$, $N-1=3$

DFT: $X[0]=\sum_{n=0}^{3}x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}\Big|_{k=0}=\sum_{n=0}^{3}x[n]=11$

$X[1]=\sum_{n=0}^{3}x[n]e^{-j(2\pi/N)n}=-3+2j$

$X[2]=\sum_{n=0}^{3}x[n]e^{-j2(2\pi/N)n}=-1$

$X[3]=\sum_{n=0}^{3}x[n]e^{-j3(2\pi/4)n}=-3-2j$

iDFT $=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[K]e^{jk(2\pi/N)n}\Big|_{n=0}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}X[K]=\frac{1}{4}(11-3+2j-1-3-2j)=1$

连续性与周期性的关系

周期 $\longleftrightarrow$ 离散.

第六章　信号与系统的时频域表征.

群延时：与频率 w 有关，定义为相位导数的相反数.

$$\tau(w) = -\frac{d}{dw}\{\angle H(jw)\}.$$

第七章　采样

第八章 Laplace变换

系统函数：$H(s)$. $H(z)$

$x(t)=e^{st} \rightarrow y(t)=H(s)e^{st}$，$\underline{H(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau}$

推导：$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau=e^{st}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$

$x[n]=z^n \rightarrow y[n]=H(z)z^n$，$\underline{H(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}}$

(双边)LT $\boxed{X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt}$，$s=\sigma+j\omega$.

(一) $s=j\omega$时，$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$　$L\{x(t)\}=F\{x(t)\}$.

(二) $\underline{s=\sigma+j\omega\text{时}}$，$X(\sigma+j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}}dt=\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t}dt}$

$\underline{L\{x(t)\}=F\{x(t)e^{-\sigma t}\}}$.

$F[u(t)]=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$

$L[u(t)]=\frac{1}{s}$

~~8.3~~右边指数信号

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a}，\underline{Re\{s\}>-a}.$$

~~8.4~~左边指数信号

$$-e^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a}\quad \underline{Re\{s\}<-a}.$$

零极点图：

Laplace变换的收敛域

1.

2. <u>有理Laplace变换的ROC不包含任何极点.</u>

3. <u>如果$x(t)$为有限时宽且绝对可积，则LT的ROC为整个s平面.</u>

eg：$x(t)=\begin{cases} e^{-at}, & 0<t<T \\ 0, & else \end{cases}$

$$\therefore X(s)=\int_0^T e^{-at}e^{-st}dt=-\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_0^T=\frac{1}{s+a}(1-e^{-(s+a)T})$$

ROC：整个s平面．　对于极点$s=-a$？　$\lim_{s\to -a}X(s)=T$.

4. 左边信号
5. 右边信号
6. 双边信号.
7.
8.

△ Laplace 逆变换

$\because X(\sigma+j\omega)=\mathcal{L}[x(t)]=\mathcal{F}[x(t)e^{-\sigma t}]$

$\therefore x(t)e^{-\sigma t}=\mathcal{F}^{-1}[X(\sigma+j\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

即 $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\sigma+j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega$.

$\because s=\sigma+j\omega$. $ds=jd\omega$

$$\therefore \boxed{x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}dt}$$

例：求 $X(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$ 的 Laplace 逆变换

① $Re\{s\}>-1$ 时，$[e^{-t}-e^{-2t}]u(t)\xleftrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$. $Re\{s\}>-1$.

② $Re\{s\}<-2$ 时，$(-e^{-t}+e^{-2t})u(-t)\xleftrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$ $Re\{s\}<-2$.

③ $-2<Re\{s\}<-1$ 时，$\cancel{e^{-t}+e^{-2t}}$ $-e^{-t}u(-t)-e^{-2t}u(t)\xleftrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$，$-2<Re\{s\}<-1$

ROC 不同，逆变换不同

△ 由零极点图对 FT 进行几何求值

△ Laplace 变换的性质.

1. 线性 $ax_1(t)+bx_2(t)\xleftrightarrow{\mathcal{L}}aX_1(s)+bX_2(s)$ ，ROC 包括 $R_1\cap R_2$.

例8.13 信号的线性组合可能会扩展ROC.　　　　(可能是空的，也可能比交大)

2. 时域平移　$x(t)\xleftrightarrow{\mathcal{L}}X(s)$　with ROC=R　　(R表示一个区域，不是全平面)

$x(t-t_0)\xleftrightarrow{\mathcal{L}}e^{-st_0}X(s)$　with ROC=R.

3. s域平移　$x(t)\xleftrightarrow{\mathcal{L}}X(s)$ ，with ROC = R.

$e^{s_0t}x(t)\xleftrightarrow{\mathcal{L}}X(s-s_0)$　with ROC = R + $Re\{s_0\}$.

平移 $Re\{s_0\}$.

4. 时频缩放　$x(at)\xleftrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{|a|}X(\frac{s}{a})$　with ROC $R_1=aR$.

若 a 为负，收敛域就要进行倒置再加一个尺度变换.

$a>1$. 放大.
$0<a<1$ 压缩

时间反转　$x(-t)\xleftrightarrow{\mathcal{L}}X(-s)$　ROC = -R

5. 共轭　$x^*(t)\xleftrightarrow{\mathcal{L}}X^*(s^*)$　with ROC=R

$x(t)$ 为实数　$X^*(s^*)=X(s)$

6. 卷积　$x_1(t)*x_2(t)\xleftrightarrow{\mathcal{L}}X_1(s)X_2(s)$　with ROC containing $R_1\cap R_2$

7. 时域微分　$\frac{dx(t)}{dt}\xleftrightarrow{\mathcal{L}}sX(s)$　with ROC containing R.

8. s域微分　$\boxed{-tx(t)\xleftrightarrow{\mathcal{L}}\frac{dX(s)}{ds}}$　with ROC=R.

9. 时域积分　$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\xleftrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s}X(s)$　ROC 包括 $R\cap\{Re\{s\}>0\}$.

$\hookrightarrow =u(t)*x(t)$

10. 初值和终值定理　条件：$t<0$. $x(t)=0$ 且在原点处无冲激或高阶奇异函数.

且当 $t\to\infty$ 时，$x(t)$ 极限存在　$\lim_{t\to0^+}x(t)=\lim_{s\to\infty}sX(s)$　$\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{s\to0}sX(s)$

$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a}$ $\quad Re\{s\}>-a$

$te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{(s+a)^2}$ $\quad Re\{s\}>-a$

反复利用： $\frac{t^2}{2}e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^3}$ $\quad Re\{s\}>-a$

$$\boxed{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^n} \quad Re\{s\}>-a.}$$

△ LTI 系统的因果性

因果LTI系统 $\Longrightarrow$ H(s)的ROC在右半平面

$\not\Longleftarrow$

H(s) ROC在右半平面只能推出冲激响应为右边信号.

if LTI H(s)的有理 那么 因果性 $\Longleftrightarrow$ ROC在最右侧极点的右半平面.

△ 反因果性

△ LTI系统稳定性：要求冲激响应h(t)绝对可积. 此时h(t)的FT收敛.

☆当且仅当 H(s)的ROC包括jω轴时，LTI系统稳定.

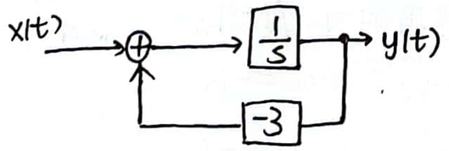
如果因果LTI系统的系统函数H(s)是有理的，当且仅当H(s)的所有极点在s平面的左半平面时，该系统稳定.

△ 线性常系数微分方程表征的LTI系统.

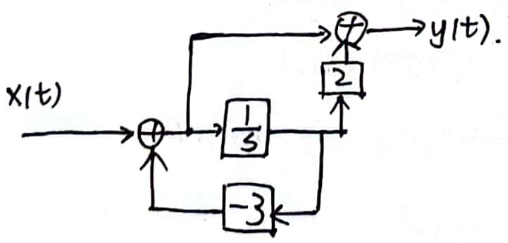
[例8.26 8.27] ☆.

△ 有理系统函数描述的因果LTI系统的框图表示.

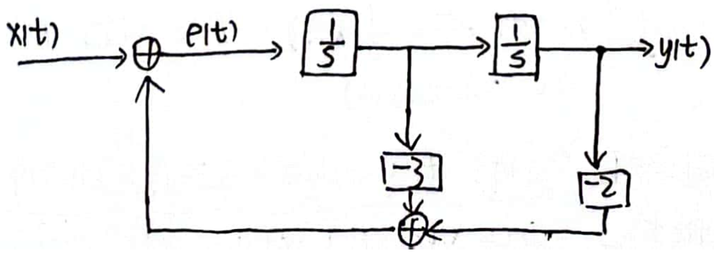
eg: $H(s)=\frac{1}{s+3}$：



$H(s)=\frac{s+2}{s+3}$：

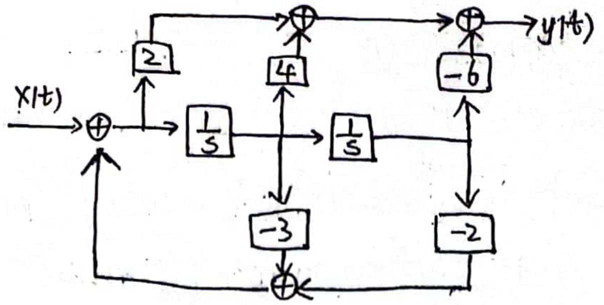


$H(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s^2+3s+2}$



$$H(s)=\frac{2s^2+4s-6}{s^2+3s+2}$$

直接型式:



$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+1}$$

时移的性质

$$e^{-(t+1)}u(t+1) \xleftrightarrow{L} \frac{e^{s}}{s+1}$$

第九章 Z变换

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$