数学分析 A2 第三次单元测试

共 8 道大题；答题纸顶端请一定写上学号和姓名；考试时不能使用智能电子设备。

题目中黑体表示向量或向量场，手写时可通过在字母上方加箭头表示。

2018 年 6 月 27 日

1. 设 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ 为常数。(20 分)

   (a) 证明 $r^\alpha \mathbf{r}$ 是 $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ 上的无旋场，并且求出一个势函数 φ.

   (b) 设 S 表示椭球面 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{5} + \dfrac{z^2}{6} = 1$，单位外法向量为 $\mathbf{n}$，计算第二型曲面积分：

   $$\int\limits_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} \, \mathrm{d}\sigma.$$

2. 证明 $\mathbb{R}^3$ 上向量场 $\mathbf{v} = (z, x, y)$ 为无源场，然后计算出 $\mathbf{v}$ 的一个向量势函数，其各分量均为关于 x, y, z 的不超过 2 次的多项式。(10 分)

3. 利用 Green 公式计算 $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 围成的面积。(10 分)

4. 设曲线 Γ 为 $z \geqslant 0$ 时 $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ 与 $x^2 + y^2 = 2x$ 的交线，从点 $(1, 0, 0)$ 看曲线，Γ 是顺时针方向绕行的。利用 Stokes 公式计算第二型曲线积分：(10 分)

   $$\int\limits_\Gamma (y^2 + z^2) \, \mathrm{d}x + (z^2 + x^2) \, \mathrm{d}y + (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}z.$$

5. 设曲面 $x^2 + z^2 = 2z$ 与 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的交线为 L, 计算第一型曲线积分：(15 分)

   $$\int\limits_L \sqrt{(z-1)(2-z)} \, \mathrm{d}s.$$

6. 叙述区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上有势场和保守场的定义，并且证明若场函数在 Ω 上连续，两者是等价的。(10 分)

7. 设 $V \subset \mathbb{R}^3$ 是有界区域，∂V 为光滑曲面，$\mathbf{n}$ 是 ∂V 的单位外法向量，$\mathbf{v}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑向量场，证明：(15 分)

   $$\int\limits_{\partial V} \mathbf{n} \times \mathbf{v} \, \mathrm{d}\sigma = \int\limits_V \nabla \times \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mu.$$

8. 设 $P(x,y)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数。L 为 $\mathbb{R}^2$ 中一条光滑有向曲线段，起点为 A, 终点为 B. 对于 $\delta>0$, 定义

$$D_\delta=\bigcup_{\mathbf{p}\in L}B_\delta(\mathbf{p}),$$

其中 $B_\delta(\mathbf{p})$ 表示以 $\mathbf{p}$ 为圆心，以 δ 为半径的开球。（10 分）

(a) 证明或否定：对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对于 D_δ 内任一条以 A 为起点，以 B 为终点的光滑曲线段 L', 我们有

$$\left|\int_L P\,\mathrm{d}x-\int_{L'}P\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

(b) 证明或否定：对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对于 D_δ 内任一条以 A,B 为端点的光滑曲线段 L', 我们有

$$\left|\int_L P\,\mathrm{d}s-\int_{L'}P\,\mathrm{d}s\right|<\varepsilon.$$