一、15%

解：记重物质量为m，重力加速度为g。

（1）动能

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 - m\dot{x}\dot{u}\cos\theta + m\dot{u}^2$$

势能

$$V = -mgu\sin\theta$$

拉氏函数

$$L = T - V = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 - m\dot{x}\dot{u}\cos\theta + m\dot{u}^2 + mgu\sin\theta$$

动能 3 分，势能 2 分，拉氏函数 1 分；共 6 分

（2）运动方程

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} - m\cos\theta\,\ddot{u} = 0 \\ 2m\ddot{u} - m\cos\theta\,\ddot{x} = mg\sin\theta \end{cases}$$

每个方程 2 分；共 4 分

（3）广义能量积分

$$H = T + V = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 - m\dot{x}\dot{u}\cos\theta + m\dot{u}^2 - mgu\sin\theta$$

广义动量

$$p_x = (M+m)\dot{x} - m\dot{u}\cos\theta$$

广义能量 3 分，广义动量 2 分；共 5 分

二、15%

解：拉格朗日函数

$$L(t,\vec{x},\dot{\vec{x}}) = m\sqrt{\dot{\vec{x}}^2 - 1} - q(\phi - \vec{A}\cdot\dot{\vec{x}})$$

5 分

运动方程

$$\frac{d}{dt}\left\{m\frac{\dot{\vec{x}}}{\sqrt{\dot{\vec{x}}^2-1}} + q\vec{A}\right\} = q\{-\nabla\phi + \nabla(\vec{A}\cdot\dot{\vec{x}})\}$$

$$\Longrightarrow m\left\{\frac{\ddot{\vec{x}}}{\sqrt{\dot{\vec{x}}^2-1}} - \frac{\dot{\vec{x}}}{(\dot{\vec{x}}^2-1)^{3/2}}\dot{\vec{x}}\cdot\ddot{\vec{x}}\right\} = q(\vec{E} + \dot{\vec{x}}\cdot\vec{B}),$$

$$\vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} -\nabla\phi - \partial\vec{A}, \qquad \vec{B} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla\times\vec{A}$$

10 分

三、20%

解：（1）

$$\Delta(Ldt) = L\left(t',r',\theta',\frac{dr'}{dt'},\frac{d\theta'}{dt'}\right)dt' - Ldt = \epsilon(-\mu k+2)e^{\mu t}\left\{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 - \omega^2 r^2\right\}dt$$

6 分

$$\Longrightarrow k = \frac{2}{\mu}$$

4 分

（2）广义动量

$$p_r = 2e^{\mu t}\dot{r}, \qquad p_\theta = 2e^{\mu t}r^2\dot{\theta}$$

广义能量

$$H = e^{\mu t}\left\{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \omega^2 r^2\right\}$$

所以诺特守恒量是

$$\frac{2}{\mu}e^{\mu t}\left\{\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\omega^2r^2\right\}+2e^{\mu t}\dot{r}r$$

p_r, p_θ, H 各 2 分，守恒量 4 分；共 10 分

四、20%

解：（1）势能

$$V[x,y]=\int_0^l\left\{-\rho A d\tau\, g\, y(\tau)+\frac{1}{2}\frac{EA}{d\tau}\left(\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}d\tau-d\tau\right)^2\right\}$$
$$=\int_0^l\left\{-\rho Agy+\frac{1}{2}EA\left(\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}-1\right)^2\right\}d\tau$$

重力势能 3 分，弹性势能 5 分；共 8 分

（2）拉格朗日函数是

$$F(x,y,\dot{x},\dot{y})=-\rho Agy+\frac{1}{2}EA\left(\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}-1\right)^2$$

由虚功原理

$$\delta V=0\Longrightarrow\begin{cases}\dfrac{d}{d\tau}\left[\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)\dot{x}\right]=0\\ \dfrac{d}{d\tau}\left[\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)\dot{y}\right]=\dfrac{\rho g}{E}\end{cases}$$

会写方程 2 分，表达式正确 4 分；共 6 分

（3）首次积分

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0\Longrightarrow\frac{\partial F}{\partial\dot{x}}=EA\left(1-\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)\dot{x}=\text{constant}\Longrightarrow\left(1-\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)\dot{x}=c_1$$
$$\frac{\partial F}{\partial\tau}=0\Longrightarrow\frac{\partial F}{\partial\dot{x}}\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial\dot{y}}\dot{y}-F=\text{constant}\Longrightarrow(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{2\rho g}{E}y=c_2$$

广义动量 1 分，广义动量表达式 1 分；广义能量 2 分，广义能量表达式 2 分；共 6 分

五、30%

解：（1）坐标、速度和加速度

$$x_i=a\sum_{j=1}^{i}\sin\theta_j,\qquad y_i=a\sum_{j=1}^{i}\cos\theta_j,\qquad i=1,2,\cdots,n$$
$$\dot{x}_i=a\sum_{j=1}^{i}\dot{\theta}_j\cos\theta_j,\qquad \dot{y}_i=-a\sum_{j=1}^{i}\dot{\theta}_j\sin\theta_j$$
$$\ddot{x}_i=a\sum_{j=1}^{i}\left(\ddot{\theta}_j\cos\theta_j-\dot{\theta}_j^2\sin\theta_j\right),\qquad \ddot{y}_i=-a\sum_{j=1}^{i}\left(\ddot{\theta}_j\sin\theta_j+\dot{\theta}_j^2\cos\theta_j\right)$$

每错一个扣 1 分，扣完为止；共 4 分

（2）动能是

$$T=\frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2\right)=\frac{1}{2}ma^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k\cos\left(\theta_j-\theta_k\right)$$

势能

$$V=-mg\sum_{i=1}^{n}y_i=-mga\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\cos\theta_j=-mga\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)\cos\theta_i$$

动能 3 分，势能 3 分；共 6 分

（3）广义动量

$$t=0\Longrightarrow\theta_i(0)=0\Longrightarrow\cos\left(\theta_j-\theta_k\right)=1$$

$$p_l(t=0)=\frac{\partial T}{\partial\dot\theta_l}(t=0)=\frac{1}{2}ma^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}(\delta_{jl}\dot\theta_k+\dot\theta_j\delta_{kl})$$

$$=\frac{1}{2}ma^2\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i}h_{li}\dot\theta_k+\sum_{j=1}^{i}\dot\theta_j h_{li}\right)=ma^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\dot\theta_j h_{li}=ma^2\sum_{i=l}^{n}\sum_{j=1}^{i}\dot\theta_j$$

其中h_{li}定义为

$$h_{li}\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}1, & l\le i;\\ 0, & l>i.\end{cases}$$

把组合系数写成矩阵，那么

$$p_i(t=0)=ma^2A_{ij}\dot\theta_j$$

$$A_{i,j}=(n+1)-\frac{1}{2}(i+j)-\frac{1}{2}|i-j|$$

4 分

（4）冲量

$$I_1=(K,0)\begin{pmatrix}\partial x_1/\partial\theta_1\\ \partial y_1/\partial\theta_1\end{pmatrix}=(K,0)\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}=Ka$$

$$I_2=(K,0)\begin{pmatrix}\partial x_1/\partial\theta_2\\ \partial y_1/\partial\theta_2\end{pmatrix}=0,\qquad I_3=0,\cdots,I_n=0$$

$$n=3\to I_1=Ka,\qquad I_2=0,\qquad I_3=0$$

每个冲量 1 分，共 3 分

$t=0$时有冲击力的拉格朗日方程给出

$$ma^2A\dot{\vec\theta}(0+)=(Ka,0,\cdots,0)^T$$

$$n=3\to A=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

方程的形式和表达式各 1 分，共 2 分

解出

$$\dot{\vec\theta}(0+)=\frac{1}{ma^2}A^{-1}(Ka,0,\cdots,0)^T$$

$$\Leftrightarrow\dot\theta_1(0+)=\frac{K}{ma},\qquad\dot\theta_2(0+)=-\frac{K}{ma},\qquad\dot\theta_3(0+)=0,\qquad\cdots,\qquad\dot\theta_n(0+)=0$$

这里的逆矩阵A^{-1}的矩阵元是

$$(A^{-1})_{ij}=2\delta_{i,j}-\delta_{i,1}\delta_{j,1}-\delta_{i+1,j}-\delta_{i,j+1}$$

$$n=3\to\ A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\Rightarrow\dot\theta_1(0+)=\frac{K}{ma},\qquad\dot\theta_2(0+)=-\frac{K}{ma},\qquad\dot\theta_3(0+)=0$$

每个角速度 1 分，共 3 分

（5）在打击后的瞬间，各小球受到作用力的水平分量是零，

$$\ddot x_i(0+)=0\Rightarrow a\sum_{j=1}^{i}\left(\ddot\theta_j\cdot 1-\dot\theta_j^2\cdot 0\right)=0\Rightarrow\ddot\theta_i(0+)=0$$

$$n=3\to\ddot\theta_i(0+)=0,\qquad i=1,2,3.$$

共 2 分

（6）当$t=0+$时，

$$\ddot y_i(0+)=-a\sum_{j=1}^{i}\left(\ddot\theta_j\sin\theta_j+\dot\theta_j^2\cos\theta_j\right)=-a\sum_{j=1}^{i}\dot\theta_j^2$$

垂直方向的牛顿方程：

$$-T_1+T_2+mg=m\ddot y_1(0+)=-ma\dot\theta_1^2(0+)=-ma\left(\frac{K}{ma}\right)^2=-\frac{K^2}{ma}$$

$$-T_2+T_3+mg=m\ddot y_2(0+)=-ma\{\dot\theta_1^2(0+)+\dot\theta_2^2(0+)\}=-2\frac{K^2}{ma}$$

$$-T_3+mg=m\ddot{y}_3(0+)=-ma\left\{\dot{\theta}_1^2(0+)+\dot{\theta}_2^2(0+)+\dot{\theta}_3^2(0+)\right\}=-2\frac{K^2}{ma}$$

每个方程 1 分，共 3 分

解出

$$T_3=mg+\frac{2K^2}{ma}$$
$$T_2=T_3+mg+\frac{2K^2}{ma}=2mg+\frac{4K^2}{ma}$$
$$T_1=T_2+mg+\frac{K^2}{ma}=3mg+\frac{5K^2}{ma}$$

每个张力 1 分，共 3 分