近世代数第九次作业

请于 2022 年 5 月 4 日周三上课前在教室里交,

或者当天 11:59pm 之前在 Blackboard 系统里提交.

补充习题可视作思考题, 不作硬性要求, 但是学有余力的同学强烈建议认真完成.

2022 年 4 月 27 日布置的作业

习题 1 (教材 P88: #3)**.** 设 R 为 PID. 证明:

(1) $(a)\cap(b)=(a)(b)$ 当且仅当 $(a,b)=1$; UFD

(2) 方程 $ax+by=c$ 在 R 中有解 (x,y) 的充要条件是 $(a,b)\mid c$.

习题 2 (教材 P89: #5)**.** 设 a 为主理想整环 D 中的非零元素. 求证: 若 a 为素元, 则商环 $D/(a)$ 为域; 若 a 不是素元, 则 $D/(a)$ 不是整环.

习题 3 (教材 P89: #7)**.** 设 D 是 PID, E 是整环, 并且 D 是 E 的子环, $a,b\in D\setminus\{0\}$. 如果 d 是 a 和 b 在 D 中的最大公因子, 证明 d 也是 a 和 b 在 E 中的最大公因子.

补充习题 4. 设 R 是一个交换环. 证明: 多项式环 $R[x]$ 是 PID 当且仅当 R 是域.

补充习题 5. 设 R 是含幺环. 定义集合 R为field

$$R[\![x]\!]=\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n : a_n\in R\ (n=0,1,2,\ldots)\right\},$$

每个元素 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 叫做 R 上关于 x 的**形式幂级数** (formal power series). 与 $\mathbb{C}$ 上的幂级数的方法类似, 我们定义如下的加法与乘法:

$$\sum_n a_nx^n+\sum_n b_nx^n=\sum_n(a_n+b_n)x^n,$$

$$\left(\sum_n a_nx^n\right)\left(\sum_n b_nx^n\right)=\sum_n\left(\sum_{i+j=n}a_ib_j\right)x^n.$$

这儿的形容词 "形式" 表明我们并不关心级数的收敛问题, 从而上面的形式幂级数一般来说不能视作 R 上的函数.

(1) 证明 $R[\![x]\!]$ 对于上述加法和乘法形成含幺环, 叫作环 R 上关于 x 的**形式幂级数环**.

(2) 若 R 为交换环, 证明 $R[\![x]\!]$ 也是交换环.

(3) 证明多项式环 $R[x]$ 可自然看成是 $R[\![x]\!]$ 的子环.

(4) 验证 $1-x$ 是 $R[\![x]\!]$ 中的一个单位, 其乘法逆元为 $1+x+x^2+\cdots$.

(5) 设 R 是含幺交换环, $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[\![x]\!]$. 证明 $f(x)$ 可逆当且仅当 $a_0 \in R^{\times}$.

仅看 a_0 only

(6) 若 R 是一个整环, 证明 $R[\![x]\!]$ 也是一个整环.

(7) 若 R 为域, 证明 $R[\![x]\!]$ 中的所有非零理想都形如 (x^n), 其中 $n \geq 0$. 特别地, $R[\![x]\!]$ 是一个 PID, 仅有一个极大理想.

(x) $n \geq 0$

2022 年 4 月 29 日布置的作业

习题 6 (教材 P92: #2). 将 60 和 $81+8\sqrt{-1}$ 在环 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ 中分解成不可约元之积.

补充习题 7. 设 $n \geq 3$ 为无平方因子的整数, $R=\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]=\{a+b\sqrt{-n}: a,b\in\mathbb{Z}\}$.

(1) 证明 2, $\sqrt{-n}$ 和 $1+\sqrt{-n}$ 在 R 上均为不可约元.

(2) 证明 $\sqrt{-n}$ 和 $1+\sqrt{-n}$ 在 R 上不能同时为素元.

补充习题 8. 令 R 为环 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, 而函数 $N: R\to\mathbb{N}$ 由 $N(a+b\sqrt{-5})=a^2+5b^2$ 给出.

(1) 验证 $N(\alpha)=0$ 当且仅 $\alpha=0$.

(2) 验证 $\alpha\in R$ 是一个单位当且仅当 $N(\alpha)=1$.

(3) 验证 $2, 3, (1+\sqrt{-5})$ 和 $(1-\sqrt{-5})$ 都是 R 中的不可约元.

$6 \quad 2-2\sqrt{-5}$

(4) 验证 2 和 $1-\sqrt{-5}$ 都是 6 和 $2-2\sqrt{-5}$ 的公因子, 但是 6 和 $2-2\sqrt{-5}$ 没有最大公因子.

PID $\Rightarrow$ GCD

(5) 说明 R 不是一个主理想整环.

补充习题 9. 设 R 是非零的含幺交换环, $0\neq f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in R[x]$. 证明:

(1) $f(x)$ 可逆当且仅当 a_0 是 R 中的单位, 而 $a_1,\ldots,a_n$ 是 R 中的幂零元.

(2) $f(x)$ 幂零当且仅当 $a_0,a_1,\ldots,a_n$ 均幂零.

(3) $f(x)$ 是零因子当且仅当存在 $0\neq a\in R$, 使得 $af(x)=0$.

注: 环 R 中的元素 r 称为幂零的, 是指存在正整数 n 使得 $r^n=0\in R$.