

近世代数第三次作业

请于 2022 年 3 月 16 日周三上课前在教室里交,

或者当天 11:59pm 之前在 Blackboard 系统里提交.

补充习题可视作思考题, 不作硬性要求, 但是学有余力的同学强烈建议认真完成.

2022 年 3 月 9 日布置的作业

习题 1. (1) 证明直积群 $G_1 \times G_2$ 的子集 $G_1 \times 1$ 是一个与 G_1 同构的正规子群, 且 $(G_1 \times G_2)/(G_1 \times 1) \cong G_2$.

(2) 设有正规子群 $H_1 \trianglelefteq G_1, H_2 \trianglelefteq G_2$. 证明: $H_1 \times H_2$ 是 $G_1 \times G_2$ 的正规子群, 并且

$$(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \cong (G_1/H_1) \times (G_2/H_2).$$

补充习题 2. (i) 设 H_1 和 H_2 是群 G 的子群. 证明以下 (a) 与 (b) 是等价的:

(a) (1) $G = H_1 H_2$ (集合的乘法),

(2) $H_1 \cap H_2 = \{1_G\}$,

(3) H_1 与 H_2 都是 G 的正规子群,

(b) (1) $G = H_1 H_2$,

(2) $H_1 \cap H_2 = \{1_G\}$,

(3) 对任意的 $h_1 \in H_1$ 和 $h_2 \in H_2$ 有 $h_1 h_2 = h_2 h_1$.

若 G 满足上面的等价条件, 则我们称 G 为其子群 H_1 与 H_2 的内直积.

(ii) 若 G 为其子群 H_1 与 H_2 的内直积, 证明: $G \cong H_1 \times H_2$. 反之, 若 $G = G_1 \times G_2$, 证明: G 是其子群 $G_1 \times 1$ 与 $1 \times G_2$ 的内直积. 鉴于此, 我们常将内直积与直积等同起来.

习题 3 (教材 P45: #4). 设 G_1, G_2, G_3 为群, 证明:

(1) $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$;

(2) $(G_1 \times G_2) \times G_3 \cong G_1 \times (G_2 \times G_3)$. 因此, 我们将其记作 $G_1 \times G_2 \times G_3$, 称为 G_1, G_2 与 G_3 的直积.

习题 4 (教材 P45: #5). 设 G_i ($1 \leq i \leq n$) 为群, 则

(1) $Z(G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n) = Z(G_1) \times Z(G_2) \times \cdots \times Z(G_n)$;

(2) $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ 为交换群当且仅当每个 G_i 均为交换群.

2022 年 3 月 11 日布置的作业

习题 5 (教材 P25: #5). 设 $N \trianglelefteq G$, M 是 G 的子群且 $N \leq M$. 证明: 正规化子 $N_G(M)/N = N_{\overline{G}}(\overline{M})$, 其中 $\overline{G} = G/N$, $\overline{M} = M/N$.

习题 6 (教材 P25: #9). 设 $N \trianglelefteq G$, g 是群 G 的任意一个元素. 如果 g 的阶和 $|G/N|$ 互素, 则 $g \in N$.

习题 7 (教材 P30: #1). 把置换 $\sigma = (4\ 5\ 6)(5\ 6\ 7)(7\ 6\ 1)$ 写成不相交轮换的积.

习题 8 (教材 P30: #2). 讨论置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

的奇偶性.

习题 9 (教材 P30: #5). 证明: 一个置换的阶等于它的轮换表示中各个轮换的长度的最小公倍数.

习题 10. 证明: G 为交换的单群当且仅当 G 是素数阶的群. 注意: 这儿不能直接假定 G 为有限群.

补充习题 11 (教材 P30: #11). 验证当 $n \geq 2$ 时,

(1) $(1\ 2)$ 和 $(1\ 2\ 3\ \cdots\ n)$ 是 S_n 的一组生成元,

(2) $(1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1\ n)$ 也是 S_n 的一组生成元.