近世代数第八次作业

请于 2022 年 4 月 27 日周三上课前在教室里交,

或者当天 11:59pm 之前在 Blackboard 系统里提交.

补充习题可视作思考题, 不作硬性要求, 但是学有余力的同学强烈建议认真完成.

2022 年 4 月 13 日布置的作业

习题 1 (教材 P65: #11)**.** 证明复数域 $\mathbb{C}$ 可嵌入到环 $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ 中.

习题 2 (教材 P65: #12)**.** 设 R 为环, $a \in R$. 求证 $\{r \in R \mid ra = ar\}$ 为 R 的子环.

习题 3 (教材 P70: #1)**.** 证明含幺交换环 R 中全部幂零元素组成的集合 $N = \mathrm{Nil}(R)$ 是环 R 的理想.

习题 4 (教材 P70: #2)**.** 设 I 是含幺交换环 R 中的理想. 定义

$$\sqrt{I} := \{r \in R \mid \text{存在 } n \geqslant 1, \text{使得 } r^n \in I\}.$$

证明以下几条:

(1) $\sqrt{I}$ 是 R 的理想;

(2) $\sqrt{I} = R$ 当且仅当 $I = R$;

(3) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$;

(4) $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}, \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{IJ}$.

习题 5 (教材 P71: #11)**.** 设 $I_1, \cdots, I_n, \cdots$ 均是环 R 的理想, 并且 $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$. 证明: $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ 也是环 R 的理想.

补充习题 6 (教材 P70: #3)**.** 设 R 为含幺环. 集合 $C(R) := \{c \in R \mid \text{对于每个 } r \in R, rc = cr\}$ 叫做环 R 的**中心**.

(1) 证明: $C(R)$ 是 R 的子环, 但不一定是 R 的理想.

(2) 如果 F 为域, 证明: 矩阵环 $\mathrm{M}_n(F)$ 的中心为 $\{\, a\boldsymbol{I}_n : a \in F \,\}$, 其中 $\boldsymbol{I}_n$ 为 n 阶单位阵.

2022 年 4 月 15 日布置的作业

习题 7 (教材 P70: #4). (1) 设 I 是含幺交换环 R 中的理想, 而 $\mathrm{M}_n(I)$ 是系数为 I 中元素的 n 阶方阵的全体. 证明: $\mathrm{M}_n(I)$ 为 $\mathrm{M}_n(R)$ 的理想, 并有环同构

$$\mathrm{M}_n(R)/\mathrm{M}_n(I) \cong \mathrm{M}_n(R/I).$$

(2) 设 R 为含幺交换环. 证明环 $\mathrm{M}_n(R)$ 中每个理想均有形式 $\mathrm{M}_n(I)$, 其中 I 是 R 的某个理想.

(3) 若 F 为域, 证明 $\mathrm{M}_n(F)$ 是单环, 即没有非平凡理想. 对于 $n \geq 1$, 是否存在从 $M_{n+1}(F)$ 到 $\mathrm{M}_n(F)$ 的环的满同态?

$M_{n+1}(F) \geq M(F)$

习题 8 (教材 P78: #2). 证明: 有限环的特征必然为正数.

习题 9 (教材 P78: #3). 设 D 为整环, m 和 n 为互素的正整数. $a, b \in D$, 如果 $a^m = b^m$, $a^n = b^n$, 证明 $a = b$.

补充习题 10. 设 J 是环 $\mathbb{Z}[x]$ 中由 $x - 7$ 和 15 生成的理想. 证明商环 $\mathbb{Z}[x]/J$ 与 $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ 同构.

2022 年 4 月 20 日布置的作业

习题 11 (教材 P79: #8). 环 R 中元素 e 叫做**幂等元素**, 是指 $e^2 = e$. 如果 e 又属于环 R 的中心 (即 e 与环中的所有元素都乘法可交换), 则称 e 为**中心幂等元素**. 设 R 是含幺环, e 为 R 的中心幂等元素. 证明

(1) $1 - e$ 也是中心幂等元素;

(2) 证明 Re 和 $R(1 - e)$ 都是 R 的双边理想, 其自身也构成含幺环, 分别以 e 与 $1 - e$ 为单位元, 且有环同构 $R \cong Re \times R(1 - e)$.

习题 12 (教材 P79: #11). 证明: 有限的含幺交换环的素理想必是极大理想.

习题 13 (教材 P79: #12). 设 $\mathfrak{p}$ 是含幺交换环 R 的素理想, $I_1, \ldots, I_n$ 是 R 的理想. 如果 $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^n I_i$, 证明 $\mathfrak{p}$ 必等于某个 I_i.

easy

习题 14 (教材 P79: #13). 设 $f : R \to S$ 是环的满同态, $K = \ker(f)$. 证明:

(1) 若 $\mathfrak{p}$ 是 R 的素理想并且 $\mathfrak{p} \supseteq K$, 则 $f(\mathfrak{p})$ 也是 S 的素理想;

(2) 若 $\mathfrak{q}$ 是 S 的素理想, 则原像 $f^{-1}(\mathfrak{q})$ 也是 R 的素理想;

(3) S 中的素理想和 R 中包含 K 的素理想是一一对应的, 而将 "素理想" 改成 "极大理想" 则此论断也成立.

补充习题 15. 设 R 是非零的含幺交换环, $\mathfrak{m}$ 是 R 的一个真理想. 假设 R 的每个不属于 $\mathfrak{m}$ 的元素是 R 中的单位. 证明 $\mathfrak{m}$ 是 R 的唯一极大理想.

2022 年 4 月 22 日布置的作业

习题 16 (教材 P88: #1). 设 R 为整环, $a, b \in R - 0$, $a \sim b$. 求证:

(1) 若 a 为不可约元, 则 b 也为不可约元;

(2) 若 a 为素元, 则 b 也为素元.

习题 17 (教材 P89: #6). 证明: $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ 是欧几里得整环.

def

Ed