

近世代数第四次作业

请于 2022 年 3 月 23 日周三上课前在教室里交,

或者当天 11:59pm 之前在 Blackboard 系统里提交.

补充习题可视作思考题, 不作硬性要求, 但是学有余力的同学强烈建议认真完成.

2022 年 3 月 16 日布置的作业

习题 1. 证明当 $n > 2$ 时 \mathcal{S}_n 不是交换群, 当 $n > 3$ 时 \mathcal{A}_n 也不是交换群.

习题 2 (教材 P30: #6). 试确定 \mathcal{S}_4 的全部正规子群.

习题 3 (教材 P30: #7). 证明 \mathcal{A}_4 没有 6 阶子群.

习题 4 (教材 P25: #8). 试证: 当 $n \geq 3$ 时, 中心 $Z(\mathcal{S}_n) = 1$.

习题 5 (教材 P30: #9). 当 $n \geq 3$ 时, 试证: $n - 2$ 个 3-轮换 $(1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \dots, (1\ 2\ n)$ 是 \mathcal{A}_n 的一组生成元.

补充习题 6. 设 $\sigma \in \mathcal{A}_n$. 证明 σ 在 \mathcal{S}_n 中的共轭等价类要么是 \mathcal{A}_n 中的共轭等价类, 要么分成两个阶相同的 \mathcal{A}_n 中的共轭等价类的无交并. 证明第二种情形出现当且仅当 σ 与所有奇置换不交换, 并且当且仅当与 σ 相对应的 n 的分拆里仅出现不同的奇数.

补充习题 7. 若 p 为素数, 证明对称群 \mathcal{S}_p 可以由任何一个对换和任何一个 p -轮换生成.

补充习题 8. (1) 给出 \mathcal{S}_9 中一个阶为 20 的元素.

(2) 证明 \mathcal{S}_9 中不存在阶为 18 的元素.

补充习题 9. 试计算:

(1) \mathcal{S}_6 中 2 阶元的个数;

(2) \mathcal{A}_8 中阶最大的元素个数.

补充习题 10. 计算 \mathcal{S}_n 中使任意指标都变动的置换的个数.

补充习题 11. 证明: 当 $n \geq 2$ 时, \mathcal{A}_n 是 \mathcal{S}_n 唯一的指数为 2 的子群.

2022 年 3 月 18 日布置的作业

N 为示表记

习题 12 (教材 P34: #3). 设群 G 在集合 X 上的作用是可迁的, N 是 G 的正规子群, 则 X 在 N 作用下的每个轨道有同样多的元素.

补充习题 13 (教材 P35: #4). 设有限群 G 作用在有限集合 Σ 上. 令 t 表示 Σ 在 G 作用下的轨道个数. 对任意 $g \in G$, 令 $f(g)$ 表示 Σ 在 g 作用下的不动点个数. 试证

$$\sum_{g \in G} f(g) = t|G|.$$

easy

这就是说, G 的每个元素在 Σ 上的作用平均使得 t 个元素不动.

习题 14. 若 H 是群 G 的一个子群, 则 $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ 是最大的包含于 H 中的 G 的正规子群.

补充习题 15. 若 G 可迁地作用在集合 X 上, 那么对任意的 $x_0 \in X$, 子群 $\ker(G \rightarrow \text{Sym}(X))$ 是最大的包含于 $\text{Stab}(x_0)$ 中的 G 的正规子群.

习题 16. 在上课的最后, 我们提到了若 $q = p^m$ 为素数的幂, 则存在阶恰为 q 的域 \mathbb{F}_q . 考虑 \mathbb{F}_q 上的一般线性群 $\text{GL}(n, \mathbb{F}_q)$, 这是系数在 \mathbb{F}_q 中的 n 阶可逆方阵的全体, 在正常的矩阵乘法下构成的群. 求这个群的阶.