近世代数第十三次作业

请于 2022 年 6 月 1 日周三上课前在教室里交,

或者当天 11:59pm 之前在 Blackboard 系统里提交.

补充习题可视作思考题, 不作硬性要求, 但是学有余力的同学强烈建议认真完成.

2022 年 5 月 25 日布置的作业

习题 1 (教材 P127: #12). 设 F 为 $q=p^n$ 元域, p 为素数, H 是 $\mathrm{Aut}(F)$ 的 m 阶子群, 而

$$K=\{a\in F \mid \text{对每个 } \sigma\in H, \sigma(a)=a\}.$$

证明:

(1) $m \mid n$;

(2) K 是 F 中唯一的 $p^{n/m}$ 元子域.

习题 2 (教材 P127: #13). 设 $F=\mathbb{F}_{p^n}$, 其中 p 为素数, 而 $f(x)$ 为 $F[x]$ 中不可约多项式. 证明: $f(x)$ 在代数闭包 $\overline{F}=\Omega_p$ 中有重根的充要条件是存在 $g(x)\in F[x]$ 使得 $f(x)=g(x^p)$.

习题 3 (教材 P127: #14). 设 $\mathbb{F}_{p^m}\subseteq\mathbb{F}_{p^n}$, 其中 p 为素数. 证明: $\{\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{p^n}):$ 对每个 $a\in\mathbb{F}_{p^m}$ 都有 $\sigma(a)=a\}$ 是一个 n/m 阶循环群.

习题 4 (教材 P127: #15). 设 p 是素数, $q=p^n$, $\mathbb{F}_q$ 为 q 元有限域.

(1) 求群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ 的阶.

(2) 证明 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$ 中对角线全为 1 的上三角阵构成 p^3 阶非阿贝尔群 (注意 p^2 阶群是阿贝尔群).

补充习题 5 (教材 P139: #2). 设 $\mathbb{F}_q$ 为 $q=p^m$ 元有限域, $\gcd(n,q)=1$, 而 E 为 x^n-1 在 $\mathbb{F}_q$ 上的分裂域. 证明: $[E:\mathbb{F}_q]$ 等于满足 $n \mid (q^k-1)$ 的最小正整数 k.

2022 年 5 月 27 日布置的作业

习题 6 (教材 P139: #4). 设 E 为 x^8-1 在 $\mathbb{Q}$ 上的分裂域, 求 $E/\mathbb{Q}$ 的扩张次数, 并确定 Galois 群 $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$.

K4

习题 7 (教材 P145: #1)**.** 设 F 是特征为 0 的域, $f(x)$ 为 $F[x]$ 中的非常值首一多项式, $d(x)=(f,f')$. 求证: $g(x)=f(x)/d(x)$ 和 $f(x)$ 有同样的根, 并且 $g(x)$ 无重根.

习题 8 (教材 P145: #3)**.** 设 $F\subset M\subset E$ 为域扩张, 求证若 E/F 是可分扩张, 则 E/M 和 M/F 均是可分扩张.

习题 9 (教材 P145: #7)**.** 设 $E=\mathbb{Q}(\alpha)$, 其中 $\alpha^3+\alpha^2-2\alpha-1=0$. 证明:

(1) α^2-2 也是 $x^3+x^2-2x-1=0$ 的根;

(2) $E/\mathbb{Q}$ 是正规扩张.

补充习题 10. 求 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ 的 Sylow p-子群的个数, 其中 p 为素数.