近世代数第二次作业

请于 2022 年 3 月 9 日周三上课前在教室里交,

或者当天 11:59pm 之前在 Blackboard 系统里提交.

补充习题可视作思考题, 不作硬性要求, 但是学有余力的同学强烈建议认真完成.

2022 年 3 月 2 日布置的作业

习题 1 (教材 P17: #9). 如果 $\{a_i \mid i \in I\}$ 是 G 关于子群 H 的右陪集代表元系, 证明: $\{a_i^{-1} \mid i \in I\}$ 是 G 关于 H 的左陪集代表元系.

$d|n$

习题 2. (1) 确定 $\mathbb{Z}$ 的所有子群. $d\mathbb{Z}$ 带余/循环!

(2) 确定 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的所有子群, 其中 $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

习题 3. 如果 H 与 K 是有限群 G 的子群且阶互素, 证明 $H \cap K = 1$. $|H\cap K| \mid |H|, |K|$

习题 4 (教材 P20: #4). 设 a 和 b 是群 G 的元素, 阶数分别是 n 和 m, $(n, m) = 1$ 且 $ab = ba$. 试证 $\langle ab\rangle$ 是 G 的 mn 阶循环子群. $|ab| = mn$

习题 5 (教材 P20: #5). 对于任意正整数 n, 证明下列恒等式:

$$n = \sum_{1 \leq d | n} \varphi(d),$$

easy

其中 φ 为欧拉函数.

补充习题 6. 设 H 是群 G 的子群, $g \in G$. 验证 gHg^{-1} 仍为 G 的子群, 并有 $(G : H) = (G : gHg^{-1})$.

$G = \bigcup a_i H$

2022 年 3 月 4 日布置的作业

习题 7. 设 G 是奇数阶交换群. 证明由 $\varphi(x) = x^2$ 定义的映射 $\varphi : G \to G$ 是一个自同构.

可开根号 Aut

习题 8 (教材 P25: #3). 证明群 G 的中心 $Z(G)$ 是 G 的正规子群.

习题 9 (教材 P25: #8). 设 $f : G \to H$ 是群同态, $M \leqslant G$. 试证 $f^{-1}(f(M)) = KM$, 这里 $K = \ker f$.

easy

习题 10 (教材 P25: #10). 若 $G/\mathrm{Z}(G)$ 是循环群, 则 G 是交换群.

补充习题 11. 证明群 $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 没有指数有限的真子群. 另一方面, 对于每个正整数 t, 证明 G 存在唯一的阶为 t 的循环子群.

wait

补充习题 12. 设 S, T 为两个等势的集合, $f : S \to T$ 为一个双射. 任一元素 $\sigma \in \mathrm{Sym}(S)$ 都会如下地诱导出 T 到自身的一个映射

$$\varphi_\sigma : T \to T, \quad t \mapsto f(\sigma(f^{-1}(t))).$$

(1) 证明: 这样的 $\varphi_\sigma \in \mathrm{Sym}(T)$.

双射

(2) 证明: 如下定义的 Φ_f 是一个同构, 其中

$$\Phi_f : \mathrm{Sym}(S) \to \mathrm{Sym}(T), \quad \sigma \mapsto \varphi_\sigma.$$

注意: 这说明若两个集合 S 与 T 等势, 则 $\mathrm{Sym}(S) \cong \mathrm{Sym}(T)$. 特别地，若 S 是 n 元集合, 可以选取 $T = \{1, 2, \ldots, n\}$, 从而 $\mathrm{Sym}(S) \cong \mathcal{S}_n$.

补充习题 13 (教材 P18: #17). 设 G 是交换群, $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ 且 $\alpha^2 = 1$. 令

$$G_1 = \{g \in G \mid \alpha(g) = g\}, \quad G_{-1} = \{g \in G \mid \alpha(g) = g^{-1}\}.$$

(1) 如果 G 是奇数阶有限群, 证明: $G = G_1 G_{-1}$ 且 $G_1 \cap G_{-1} = 1$.

(2) 设 G 满足对任意 $g \in G$, 存在唯一的 $h \in G$ 使得 $h^2 = g$. 证明 (1) 中结论仍然成立, 并由此证明:

(i) 任何 F 上的方阵都可以写成同阶的对称阵和反对称阵之和, 其中 $F = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

(ii) 任何函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 可以写成奇函数和偶函数之和.