近世代数第六次作业

请于 2022 年 4 月 6 日周三上课前在教室里交,

或者当天 11:59pm 之前在 Blackboard 系统里提交.

补充习题可视作思考题, 不作硬性要求, 但是学有余力的同学强烈建议认真完成.

2022 年 3 月 30 日布置的作业

习题 1. 证明四元数群 $Q = \{\pm 1, \pm \mathrm{i}, \pm \mathrm{j}, \pm \mathrm{k}\}$ 可以表现为

$$\langle x, y : x^4 = x^2 y^{-2} = yxy^{-1}x = 1 \rangle .$$

习题 2. 设 H 是群 G 的一个子群, 而 G' 是 G 的换位子群. 证明如下几条性质.

(1) $H \trianglelefteq G$ 当且仅当 $[G, H] \le H$.

(2) G' 是 G 的正规子群, 并且商群 G/G' 是一个交换群.

(3) G/G' 是 G 的最大的交换的商群, 即若 $H \le G$ 且 G/H 是个交换群, 则必有 $G' \le H$. 反过来, 若 $G' \le H$, 则 $H \trianglelefteq G$ 并且 G/H 是个交换群.

(4) 若 $\varphi : G \to A$ 是从群 G 到某个交换群 A 的同态, 则 $G' \le \ker(\varphi)$ 并且存在群同态 $\psi : G/G' \to A$ 使得 $\psi\pi = \varphi$, 其中 π 为 G 到 G/G' 的自然的满同态.

习题 3 (教材 P45: #2)**.** 若 n 为正奇数, 求证: $D_{2n} \cong D_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

习题 4 (教材 P46: #8)**.** 设 G_1 和 G_2 是两个非交换单群. 证明 $G_1 \times G_2$ 的非平凡正规子群只有 $G_1 \times 1$ 和 $1 \times G_2$.

补充习题 5. 正规子群的交集仍然是一个正规子群 (证明这一点!). 因此, 我们可以定义 G 的子集 X **生成的正规子群**为包含 X 的所有正规子群的交集. 若对所有的 $g \in G$ 都满足 $gXg^{-1} \subset X$, 我们称 X 是一个**正规的集合**或者**在共轭作用下封闭**.

(1) 证明集合 X 生成的子群 $\langle X \rangle$ 为 $\{ a_1 \cdots a_m : m \ge 0, a_i \in X \cup X^{-1} \}$.

(2) 若集合 X 是正规的, 证明子群 $\langle X \rangle$ 是一个正规子群.

(3) 对于 G 的任意子集 X, 证明集合 $\bigcup_{g \in G} gXg^{-1}$ 是正规的, 并且是包含 X 的最小的正规的集合.

(4) 证明子集 X 生成的正规子群是 $\left\langle\bigcup_{g\in G} gXg^{-1}\right\rangle$.

(5) 在置换群 $\mathcal{S}_4$ 中, 详细列出 $\{(1\ 2),(3\ 4)\}$ 生成的子群和生成的正规子群的元素.

补充习题 6. 设 $G=\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ $(n>1)$. 证明换位子群 $[G,G]=\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. 提示: [超链接]

2022 年 4 月 1 日布置的作业

习题 7. 设 $G_1,\dots,G_n$ 为群 G 的正规子群, 并且对每个 j 都有

$$G_j\cap(G_1\cdots G_{j-1}G_{j+1}\cdots G_n)=\{1_G\}.$$

证明: 若 $i\neq j$, 则 G_i 与 G_j 中的元素乘法可交换, 并且 $G_1G_2\cdots G_n$ 是 G 的正规子群. 进一步地, 证明如下给出的映射

$$\prod_{i=1}^{n} G_i\to G_1G_2\cdots G_n,\quad (g_1,g_2,\dots,g_n)\mapsto g_1g_2\cdots g_n$$

是一个群同构. 当 $G=G_1G_2\cdots G_n$ 时, 我们称该同构给出了 G 的**内直积**分解.

习题 8. 设 G 是一个有限群, 对整除 $|G|$ 的每一个素因子 p, G 都只有一个 Sylow p-子群. 证明 G 同构于这些不同的 Sylow p-子群的直积.

补充习题 9. 设 G 是一个有限群 (事先并不特别要求为交换群), 对于每个正整数 n, G 中至多有 n 个阶整除 n 的元素. 证明: G 是一个循环群. 提示: 先证明每个 Sylow p-子群是循环群.

补充习题 10 (教材 P46: #11)**.** 证明 $5\cdot7\cdot13$ 阶群一定是循环群.

补充习题 11 (教材 P46: #13)**.** 令 $G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$, 且对任意 $i\neq j$, $|G_i|$ 和 $|G_j|$ 互素. 证明 G 的任意子群 H 都是它的子群 $H\cap G_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 的直积.

习题 12 (教材 P50: #1)**.** 证明: 有限生成交换群 G 是自由交换群当且仅当 G 的每个非零元素都是无限阶元素.

习题 13 (教材 P50: #2)**.** 证明:

(1) 正有理数乘法群 $\mathbb{Q}^+$ 是自由交换群, 全部素数是它的一组基;

(2) $\mathbb{Q}^+$ 不是有限生成的.

习题 14 (教材 P50: #4)**.** 设 A 为有限交换群. 证明: 对于 $|A|$ 的每个正因子 d, A 均有 d 阶子群和 d 阶商群.