近世代数第五次作业

请于 2022 年 3 月 30 日周三上课前在教室里交,

或者当天 11:59pm 之前在 Blackboard 系统里提交.

补充习题可视作思考题, 不作硬性要求, 但是学有余力的同学强烈建议认真完成.

2022 年 3 月 23 日布置的作业

习题 1. 证明: $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \cong \mathcal{S}_3$. (提示: $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ 在 $\mathbb{F}_2^{2\times 1}$ 上有自然的矩阵左乘的作用. 可以研究其局限在 $\mathbb{F}_2^{2\times 1} \setminus 0$ 这个 3 元集合上的作用)

习题 2 (教材 P40: #2)**.** 设 G 是 n 阶群, p 是 n 的素因子. 证明方程 $x^p = 1$ 在群 G 中的解的个数是 p 的倍数.

whether H 正规

习题 3 (教材 P40: #3 改编)**.** 证明: 任一 6 阶群 G 或者同构于 $\mathcal{S}_3$, 或者同构于 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. (提示: G 有 2 阶子群 H. 可以研究 G 关于 H 的左诱导表示)

补充习题 4. 考虑教案例 2.2.14 中 G 关于 H 的左诱导表示. 注意到我们有同态 $\Phi : G \to \mathrm{Sym}(G/H)$, 其核为 $\ker(\Phi) = \bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$. 由此出发, 验证以下三点事实.

(1) 若 $H \neq G$, 并且 G 是一个单群, 那么 G 在 H 上的左诱导表示是忠实的, 即 Φ 是一个单同态.

(2) (教材 P35: #7 改编) 若子群 H 在 G 中的指数有限, 那么正规子群 $\bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$ 在 G 中的指数也是有限的.

(3) 如果 G 为有限群, 子群 H 满足 $(G : H) = p$, 其中 p 为 $|G|$ 的最小素因子, 则 $H \trianglelefteq G$.

$(G: \ker\varphi) = (G:H)(H:\ker\varphi)$

补充习题 5. (1) 若 G 是一个有限群, H 是 G 的真子群, 证明: G 不是 H 的共轭子群的并.

$N_G(H)$

(2) 证明 (1) 中的结果在 G 为无限群但是 $(G : H)$ 有限时也是对的.

化归

(3) 举例说明 (1) 中的结果对于一般的无限群 G 并不成立.

(4) 举一个例子, 其中 G 为有限群, S 为 G 的真子集, 使得 $G = \bigcup_{g\in G} gSg^{-1}$.

S_n

补充习题 6. 设 K 是有限群 G 的一个共轭类, 并且包含于 G 的某个正规子群 H 中. 证明: K 可以写成 k 个阶数相同的 H 中的共轭类的并, 其中 $k = (G : H \cdot C_G(x))$, 而 $x \in K$.

2022 年 3 月 25 日布置的作业

习题 7 (教材 P40: #8)**.** 设 G 是有限群, N 是 G 的正规子群, P 是 G 的一个 Sylow p-子群. 证明:

(1) $N \cap P$ 是 N 的 Sylow p-子群;

(2) PN/N 是 G/N 的 Sylow p-子群;

(3) G/N 的 Sylow p-子群一定是 G 的 Sylow p-子群的像;

(4) $\mathrm{N}_G(P)N/N \cong \mathrm{N}_{G/N}(PN/N)$.

习题 8. 设 p 为素数.

(1) 计算 $\mathcal{S}_p$ 中所有不同的 Sylow p-子群个数 s_p.

(2) 证明**Wilson 定理**: $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

习题 9. 阅读教案上命题 2.4.15 和命题 2.4.16 的证明.

(*) **补充习题 10.** 证明 112 阶群都不是单群. ?

补充习题 11 (教材 P40: #7)**.** 设 N 是有限群 G 的正规子群. 如果 p 和 $|G/N|$ 互素, 则 N 包含 G 的所有 Sylow p-子群.

补充习题 12 (教材 P41: #13)**.** 设 P 是 G 的 Sylow p 子群且 $\mathrm{N}_G(P)$ 是 G 的正规子群. 证明 P 是 G 的正规子群.

补充习题 13 (教材 P41: #10)**.** 令 G 是集合 Σ 上的置换群, P 是 G 的 Sylow p-子群, $a \in \Sigma$. 如果 p^m 整除 $|Ga|$, 则 p^m 整除 $|Pa|$.