近世代数第十二次作业

请于 2022 年 5 月 25 日周三上课前在教室里交,

或者当天 11:59pm 之前在 Blackboard 系统里提交.

补充习题可视作思考题, 不作硬性要求, 但是学有余力的同学强烈建议认真完成.

2022 年 5 月 18 日布置的作业

习题 1 (教材 P113: #17). 设 F 为, p 为素数, 而 $f(x) = x^p - c \in F[x]$.

(a) 若 F 是特征为 p 的域, 证明: $\alpha \in F$ 是 $f(x)$ 的根的充要条件是 $f(x) = (x-\alpha)^p$.

(b) 在对 F 的特征不作要求的条件下, 证明: $f(x)$ 不可约的充要条件是 $f(x)$ 在 F 中无根. (提示: 在 $f(x)$ 的分裂域上考察)

习题 2 (教材 P112: #18). 设 F 为特征 p 域, p 为素数, 而 $f(x) = x^p - x - c \in F[x]$.

(a) 证明: $\alpha \in F$ 是 $f(x)$ 的根的充要条件是 $\alpha + 1$ 也是 $f(x)$ 的根.

(b) 证明: $f(x)$ 不可约的充要条件是 $f(x)$ 在 F 中无根. (提示: 在 $f(x)$ 的分裂域上考察)

(c) 通过分解 $x^5 - x + 15 \in \mathbb{Q}[x]$ 说明 (2) 的结论在零特征的域上是不成立的.

习题 3 (教材 P112: #19). 在课堂里我们证明了若 F 是特征不等于 2 的域, 则 F 上的二次扩张必形如 $F(\sqrt{a})$, 其中 $a \in F$ 不是平方元. 试问: 若 F 的特征为 2, 该结论是否仍然成立?

习题 4 (教材 P113: #20). 设 $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ 为 $\mathbb{Q}$ 的单扩张, 其中 α 在 $\mathbb{Q}$ 上代数. 证明 $|\operatorname{Aut}(K)| \leqslant [K : \mathbb{Q}]$.

Thm

补充习题 5. 设 K/F 为域扩张, $a \in K$. 若 $a \in F(a^m)$, $m > 1$, 证明 a 在 F 上代数.

补充习题 6. 设 K/F 与 L/F 为两个域扩张, $\alpha \in K$ 和 $\beta \in L$ 皆为 F 上的代数元. 证明: 存在 F-同构 $\sigma : F(\alpha) \to F(\beta)$ 使得 α 被映射成为 β, 当且仅当 α 与 β 在 F 上的最小多项式一致. (这是课堂上的结论的一个简化版本, 请直接证明)

补充习题 7. 简要描述下列 $\mathbb{Q}[x]$ 中的多项式的分裂域, 并确定其分裂域的保持 $\mathbb{Q}$ 不变的自同构的个数:

(1) x^2+3;

(2) x^5-1;

(3) $(x^2-2)(x^3-2)$;

(4) x^5-3.

2022 年 5 月 20 日布置的作业

习题 8 (教材 P126: #1)**.** 构造一个 8 元域, 并写出它的加法表和乘法表. (提示: x^3+x+1 是 $\mathbb{F}_2$ 上的不可约多项式)

习题 9 (教材 P126: #2)**.** 列出 $\mathbb{F}_2$ 上全部次数 $\leqslant 4$ 的不可约多项式, 列出 $\mathbb{F}_3$ 上全部 2 次不可约多项式.

补充习题 10. 在域 $\mathbb{F}_3$ 上分解 x^9-x 和 $x^{27}-x$.

习题 11 (教材 P126: #3)**.** 设 α 是 $x^2+1\in\mathbb{F}_3[x]$ 的一个根. 证明 α 不是 9 元有限域 $\mathbb{F}_3(\alpha)$ 的乘法群的生成元, 并找出这个乘法群作为循环群的所有的生成元.

习题 12. 设 K 是有限域. 证明 K 中非零元素的乘积为 -1. (提示: 韦达定理)

习题 13 (教材 P126: #7)**.** 设 K 是有限域, n 是正整数, 证明: 必存在 K 上的 n 次不可约多项式.

wait

补充习题 14 (教材 P126: #4)**.** 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{F}_p[x]$ 中首一 n 次不可约多项式.

(1) 若 u 为 $f(x)$ 的一个根, 证明 $f(x)$ 共有彼此不同的 n 个根, 并且它们为 $u, u^p, u^{p^2}, \ldots, u^{p^{n-1}}$;

(2) 若 $f(x)$ 的一个根 u 为域 $F=\mathbb{F}_p(u)$ 的乘法循环群 $F^\times$ 的生成元, 证明 $f(x)$ 每个根也都是 $\mathbb{F}^\times$ 的生成元. 这样的多项式称为 $\mathbb{F}_p[x]$ 中的 n 次**本原多项式**.

(3) 证明 $\mathbb{F}_p[x]$ 中 n 次本原多项式共有 $\varphi(p^n-1)/n$ 个, 其中 φ 是欧拉函数.

补充习题 15. 设 F 为一个有限域. 证明每个函数 $f: F\to F$ 都是一个多项式函数, 即存在 $a_0, a_1, \ldots, a_n\in F$ 使得 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 对于每个 $x\in F$ 都成立. (提示: 若 $|F|=q$, 则多项式 $1-x^{q-1}$ 给出了一个在点 0 处取值为 1, 在其它点处取值为 0 的函数)