近世代数第七次作业

请于 2022 年 4 月 13 日周三上课前在教室里交,

或者当天 11:59pm 之前在 Blackboard 系统里提交.

补充习题可视作思考题, 不作硬性要求, 但是学有余力的同学强烈建议认真完成.

2022 年 4 月 6 日布置的作业

习题 1 (教材 P50: #6)**.** 如果有限交换群 A 不是循环群, 则存在素数 p 使得 A 有子群同构于 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.

习题 2 (教材 P50: #7)**.** 求出 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的不变因子和初等因子.

习题 3 (教材 P50: #8)**.** 求出 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$ 的不变因子和初等因子.

补充习题 4 (教材 P50: #9)**.** 设 p 是一个素数, 问 $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ 有多少个 p^2 阶子群?

补充习题 5. 仿照线性代数里的类似方法, 定义整数矩阵的 Smith 标准形, 并利用这一工具来描述下列交换群的结构:

(1) $\mathbb{Z}^2/H$, 其中 $H = \langle (9,7),(5,11) \rangle$;

(2) $\mathbb{Z}^3/H$, 其中 $H = \langle (8,2,22),(-2,16,20) \rangle$.

习题 6 (教材 P66: #14)**.** 设 U 是一个集合. S 是 U 的全部子集构成的集族, 即 $S = \{V \mid V \subseteq U\}$. 对于 $A, B \in S$, 定义

$$\begin{aligned} A - B &= \{c \in U \mid c \in A, c \notin B\}, \\ A + B &= (A - B) \cup (B - A), \\ A \cdot B &= A \cap B. \end{aligned}$$

未证

求证 $(S, +, \cdot)$ 是含幺交换环.

习题 7 (教材 P66: #15)**.** 设 R 为环. 如果每个元素 $a \in R$ 均满足 $a^2 = a$, 称 R 为**布尔 (Boole) 环**. 求证:

(1) 布尔环 R 必为交换环, 并且 $a + a = 0_R$ (对每个 $a \in R$);

(2) 习题 6 中的环 S 是布尔环.

2022 年 4 月 8 日布置的作业

R(G)

习题 8 (教材 P65-66: #7, #24). 设 G 是乘法群, R 为含幺环. 定义集合

$$R[G] := \left\{ \sum_{g\in G} r_g g : \ r_g \in R, \text{并且只有有限多个 } r_g \neq 0 \right\}.$$

在集合 $R[G]$ 上定义

$$\sum_{g\in G} r_g g + \sum_{g\in G} t_g g = \sum_{g\in G} (r_g + t_g)\, g, \quad \left(\sum_{g\in G} r_g g\right)\left(\sum_{g\in G} t_g g\right) = \sum_{g\in G}\left(\sum_{g'g''=g} r_{g'} t_{g''}\right) g.$$

(1) 求证: 上面定义的加法和乘法是集合 $R[G]$ 中的二元运算, 并且 $R[G]$ 由此形成环, 称为群 G 在环 R 上的**群环**.

(2) $R[G]$ 是交换环当且仅当 R 是交换环且 G 是阿贝尔群.

(3) 如果环 R 的单位元为 1_R, 群 G 的单位元为 e, 则 $1_R \cdot e$ 是群环 $R[G]$ 的单位元.

(4) 试确定 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$ 和 $R[\mathbb{Z}]$ 的单位群, 其中 R 为整环, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ 与 $(\mathbb{Z}, +)$ 为循环群. ?

习题 9 (教材 P66: #16). 非零有限整环必为域.

习题 10 (教材 P66: #19). 环 R 中元素 a 叫做**幂零的**, 是指存在正整数 m, 使得 $a^m = 0$.

(1) 证明当 R 是交换环时, 若 a 和 b 均为幂零元素, 则 $a + b$ 也是幂零元素.

(2) 如果 R 不为交换环时, (1) 中结论是否仍旧成立?

(3) 证明如果 x 幂零, 则 $1 + x$ 是单位.

补充习题 11 (教材 P66: #20). 设 a, b 是含幺环 R 中的元素, 则 $1 - ab$ 可逆等价于 $1 - ba$ 可逆.

习题 12 (教材 P66: #21). 设 D 为有限体. 证明对任意 $a \in D$, $a^{|D|} = a$.

补充习题 13. 令 $R = \{a = (a_1, a_2, \ldots) \mid a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant a_n \leqslant p^n - 1, a_n \equiv a_{n+1} \bmod p^n\}$. 设 $a, b \in R$, 定义

$$a + b = c, \ 0 \leqslant c_n \leqslant p^n - 1, c_n \equiv a_n + b_n \mod p^n,$$

$$ab = d, \ 0 \leqslant d_n \leqslant p^n - 1, d_n \equiv a_n b_n \mod p^n.$$

(1) 证明 R 成为一个含幺交换环. 我们将称之为 p **进整数环**, 记为 $\mathbb{Z}_p$ (不要与 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 相混淆).

(2) 找出 $\mathbb{Z}_p$ 的单位群

all?