近世代数第十一次作业

请于 2022 年 5 月 18 日周三上课前在教室里交,

或者当天 11:59pm 之前在 Blackboard 系统里提交.

补充习题可视作思考题, 不作硬性要求, 但是学有余力的同学强烈建议认真完成.

2022 年 5 月 11 日布置的作业

习题 1. 设域扩张 E/F 的次数为某个素数 p. 若 $\alpha \in E \setminus F$, 证明: $E = F(\alpha)$.

习题 2. 设有域扩张 E/F, 而 S 为 E 的子集. 证明以下三条:

(1) $F(S)$ 是 $F[S]$ 在 E 中的分式域;

ring is field

(2) 对任意的非零元素 $\alpha \in F(S)$, 存在有限子集 $S' \subseteq S$, 使得 $\alpha \in F(S')$;

(3) 若域扩张 $F(S)/F$ 是有限的, 则 $F(S) = F[S]$.

DCT

DCT Thm

2022 年 5 月 13 日布置的作业

习题 3 (教材 P111: #1). 设 F/K 为域的扩张, $u \in F$ 是 K 上的奇数次代数元素. 求证 $K(u) = K(u^2)$.

x^2-u^2 $p-1$ 4

习题 4 (教材 P111: #3). 设 p 为素数, 求扩张 $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{Q}(\zeta_8)/\mathbb{Q}$ 的次数, 其中 $\zeta_n = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}} \in \mathbb{C}$ 为 n 次本原单位根. 对一般的 n, 扩张 $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ 的次数估计是什么?

习题 5 (教材 P111: #4). 求元素 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 在域 K 上的极小多项式, 其中

(1) $K = \mathbb{Q}$;

(2) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$;

(3) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$.

习题 6 (教材 P111: #6). 设 u 是域 K 的某个扩域中的元素, 并且 $x^n - a$ 是 u 在 K 上的极小多项式. 对于 $m \mid n$, 求 u^m 在域 K 上的极小多项式.

习题 7 (教材 P112: #10). 设 u 是多项式 $x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ 的一个根.

(1) 求证 $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] = 3$.

(2) 试将 $u^4, (u+1)^{-1}, (u^2-6u+8)^{-1}$ 表示成 $1, u, u^2$ 的 $\mathbb{Q}$-线性组合.

补充习题 8. 证明 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. 逆

补充习题 9. 令 $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ 其中 α 是方程 $x^3 - x - 1 = 0$ 的一个根. 求 $\gamma = 1 + \alpha^2$ 在 $\mathbb{Q}$ 的最小多项式.

补充习题 10. 设 a 是正有理数且不是 $\mathbb{Q}$ 中数的平方. 证明 $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{a}) : \mathbb{Q}] = 4$.