

近世代数第一次作业

请于 2022 年 3 月 2 日周三上课前在教室里交,

或者当天 11:59pm 在 Blackboard 习题里提交.

补充习题可视作思考题, 不作硬性要求, 但是学有余力的同学强烈建议认真完成.

2022 年 2 月 23 日布置的作业

教材习题. P10: # 4, # 5.

习题 1. 自行阅读教材的第一节 §1.1 集合论预备知识.

习题 2. 证明集合 $\bigcup_{n \geq 1} \mu_n$ 在复数乘法意义下构成群.

习题 3. 设 G 是含么半群, 证明 G 中的可逆元集合 G^\times 构成群. (这在教材中有证明, 但是建议独立完成)

习题 4 (教材 P17: #1). 试证群 G 的任意多个子群的交仍是 G 的子群.

习题 5 (教材 P17: #4 改编). (1) 设 A, B, H 是群 G 的子群, 且 $H \subseteq A \cup B$. 证明 $H \subseteq A$ 或者 $H \subseteq B$.

(2) 设 A 和 B 分别是群 G 的两个子群. 试证: $A \cup B$ 是 G 的子群当且仅当 $A \leq B$ 或 $B \leq A$. 利用这个事实证明: 群 G 不能表为两个真子群的并.

2022 年 2 月 25 日布置的作业

习题 6 (教材 P17: #5). 设 A, B 是群 G 的两个子群. 我们令 $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$, 并类似定义 BA . 证明: AB 是 G 的子群当且仅当 $AB = BA$.

习题 7. 设 $f: G \rightarrow H$ 是群同态. 如果 g 是 G 的有限阶元, 则 $f(g)$ 的阶整除 g 的阶.

习题 8 (教材 P18: #13). 设 a, b 是群 G 的任意两个元素. 试证: a 和 a^{-1} , ab 和 ba 有相同的阶.

习题 9 (教材 P18: #10 改编). 设 g_1, g_2 是群 G 的元素, H_1, H_2 是 G 的子群. 证明下列两条件等价:

(1) $g_1 H_1 \subseteq g_2 H_2$;

$g_1 \in g_2 H_2 \implies \Delta!!!$

(2) $H_1 \subseteq H_2$ 且 $g_2^{-1}g_1 \in H_2$.

keep calculator
Su 11

补充习题 10 (教材 P11: #18(1)). 证明有理数加法群 \mathbb{Q} 和乘法群 \mathbb{Q}^\times 不同构.

补充习题 11: 设 a, b 是群 G 的两个元素, a 的阶是 7 且 $a^3b = ba^3$. 证明 $ab = ba$.

补充习题 12. 设 G 是一个乘法群, H 是 G 的一个非空有限子集, 满足对任意的 $h_1, h_2 \in H$ 都有 $h_1h_2 \in H$. 证明 H 是 G 的子群.

有限+封闭