

## 近世代数第十次作业

请于 2022 年 5 月 11 日周三上课前在教室里交,

或者当天 11:59pm 之前在 Blackboard 系统里提交.

补充习题可视作思考题, 不作硬性要求, 但是学有余力的同学强烈建议认真完成.

### 2022 年 5 月 4 日布置的作业

习题 1. 试求方程  $x^2 + y^2 = 585$  的所有整数解.

习题 2 (教材 P102: #8). 设  $R$  为 UFD,  $F$  为  $R$  的分式域.  $f(x)$  为  $R[x]$  中首一多项式. 证明:  $f(x)$  在  $F[x]$  中的每个首一多项式因子必属于  $R[x]$ . easy

习题 3 (教材 P102: #12). 设  $R$  为唯一分解整环,  $f(x) \in R[x]$ ,  $c \in R$ ,  $g(x) = f(x+c) \in R[x]$ . 证明:

(1)  $f(x)$  在  $R[x]$  中本原  $\Leftrightarrow g(x)$  在  $R[x]$  中本原;

(2)  $f(x)$  在  $R[x]$  中不可约  $\Leftrightarrow g(x)$  在  $R[x]$  中不可约.  $C(f) \sim C(g)$

补充习题 4. 证明两个整多项式在  $\mathbb{Q}[x]$  中互素当且仅当它们在  $\mathbb{Z}[x]$  中生成的理想含有一个正整数.  $(x, 7)$  easy!

### 2022 年 5 月 6 日布置的作业

习题 5 (教材 P101: #1). 如果  $R$  为整环, 但不是域, 求证  $R[x]$  不是主理想整环.

习题 6 (教材 P101: #3). 设  $c_0, \dots, c_n$  是整环  $D$  中两两相异的  $n+1$  个元素,  $d_0, \dots, d_n$  是  $D$  中任意  $n+1$  个元素. 证明:

(1) 在  $D[x]$  中至多存在一个次数  $\leq n$  的多项式  $f(x)$ , 使得  $f(c_i) = d_i$  ( $0 \leq i \leq n$ );

(2) 如果  $D$  为域, 则 (1) 中所述的多项式是存在的.

习题 7 (教材 P102: #11). 将  $x^n - 1$  ( $3 \leq n \leq 10$ ) 在  $\mathbb{Z}[x]$  中作素因子分解.

习题 8. 判断下列元素是否为  $\mathbb{Z}[x]$ ,  $\mathbb{Q}[x]$ ,  $\mathbb{R}[x]$ ,  $\mathbb{C}[x]$ ,  $\mathbb{Z}[[x]]$  中的可逆元? 是否为不可约元? =

(1)  $2x + 2$ ;

(2)  $x^2 + 1$ ;

(3)  $x + 1$ ;

(4)  $x^2 + 3x + 2$ .

习题 9. 设  $F$  为域,  $a, b \in F$  且  $a \neq 0$ . 证明  $f(x)$  在  $F[x]$  中不可约当且仅当  $f(ax + b)$  在  $F[x]$  中不可约.

补充习题 10. 证明  $x^3 + nx + 2$  对所有  $n \neq 1, -3, -5$  是  $\mathbb{Z}$  上的不可约多项式.