线性代数(B1)期末试卷　参考答案

一、【每小题 5 分】填空题:

1. $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ 中任取两个向量,或 $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ 中其它两个线性无关的生成元.

2. $\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&-1\\0&0&3\end{pmatrix}$

3. 5

4. $(k-1)(k-2)(k-3)$

5. $\sqrt{5}$.

6. $\dfrac{-1-\sqrt{105}}{4} < t < \dfrac{-1+\sqrt{105}}{4}$.

二、【每小题 5 分(判断正误 2 分，理由 3 分)】判断题

1. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 则 A 与它的伴随矩阵 A^* 必相合.

错. 反例: 考虑 $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$. 此时 $A^* = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$. 正惯性指数不一样，不相合.

2. 设 V 是 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性变换. 若 $\mathcal{A}$ 在 V 的任意基下的矩阵都相等, 则 $\mathcal{A}$ 是 V 上的数乘变换.

对. 设 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵为 A. 由条件可知, 对任意的可逆矩阵 P, 都有 $AP = PA$, 所以 A 只能为数量矩阵.

3. 设 A, B 为 n 阶正交矩阵, 满足 $|A| + |B| = 0$. 则 $|A + B| = 0$.

对. 由 $|A+B| = |BB^{\mathrm{T}} \cdot A + B \cdot A^{\mathrm{T}}A| = |B||B^{\mathrm{T}} + A^{\mathrm{T}}||A| = -|A|^2|(B+A)^{\mathrm{T}}| = -|A+B|$, 得 $|A+B| = 0$.

4. 设 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & D \end{pmatrix}$ 为实对称正定矩阵，其中 A, D 皆为 n 阶方阵. 则有 $|M| \leq |A||D|$, 且等号成立当且仅当 $B = O$.

对. 首先, 由 M 正定, 可知 A, D 正定, $\therefore$ 存在可逆矩阵 P, Q, s.t. $P^{\mathrm{T}}AP = I_n$, $Q^{\mathrm{T}}DQ = I_n$.

考虑 $\widetilde{M} = \begin{pmatrix} P^{\mathrm{T}} & \\ & Q^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & \\ & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & P^{\mathrm{T}}BQ \\ Q^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P & I_n \end{pmatrix}$.

$\widetilde{M}$ 与 M 相合,所以也正定. 由习题八可知 $|\widetilde{M}| \leqslant 1$, 且等号成立当且仅当 $\widetilde{M}$ 是对角阵.

$\therefore |M||P|^2|Q|^2 = |M||A|^{-1}|D|^{-1} \leqslant 1$, 即 $|M| \leqslant |A||D|$.

等号成立当且仅当 $P^{\mathrm{T}}BQ = O$, 当且仅当 $B = O$.

三、【5+10=15分】

设 $\mathbb{R}^3$ 中的线性变换 $\mathcal{A}$ 将

$$\alpha_1 = (0,\,0,\,1)^{\mathrm{T}}, \quad \alpha_2 = (0,\,1,\,1)^{\mathrm{T}}, \quad \alpha_3 = (1,\,1,\,1)^{\mathrm{T}}$$

变换到

$$\beta_1 = (-3,\,1,\,0)^{\mathrm{T}}, \quad \beta_2 = (-3,\,-1,\,0)^{\mathrm{T}}, \quad \beta_3 = (5,\,1,\,4)^{\mathrm{T}}.$$

(1) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵 A.

(2) 求 $\mathbb{R}^3$ 中的另一组基 ξ_1, ξ_2, ξ_3, 使得 $\mathcal{A}$ 在 ξ_1, ξ_2, ξ_3 下的矩阵为对角阵 C, 并写出 C.

解: (1) $\mathcal{A}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix} A$

$$\therefore A = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -4 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) $p_A(\lambda) = |\lambda I_3 - A| = (\lambda-6)(\lambda-2)(\lambda+2)$

解方程组 $(6I_3 - A)X = 0$, 得基础解系 $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\therefore \xi_1 = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix} X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

解方程组 $(2I_3 - A)X = 0$, 得基础解系 $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\therefore \xi_1 = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix} X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

解方程组 $(-2I_3 - A)X = 0$, 得基础解系 $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\therefore \xi_1 = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix} X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$C = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}.$$

注: 也可以先算出 $\mathcal{A}$ 在 e_1, e_1, e_3 下的矩阵 $\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

再求 ξ_1, ξ_2, ξ_3.

四、【2+8=10分】

记 V 为所有的 2 阶实对称方阵构成的实线性空间. 对于 V 中任意两个矩阵, 定义

$$(A,\, B) = \mathrm{tr}(AB)$$

易知 $(V, (\cdot,\cdot))$ 构成一个欧式空间.

(1) 考虑 V 中向量 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 将 A_1, A_2 扩充成 V 的一组基 Γ_1.

(2) 利用 Schmidt 正交化, 从 Γ_1 构造 V 的一组标准正交基 Γ_2.

解: (1)可取 $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 Γ_1: A_1, A_2, A_3.　(答案不唯一)

(2) 取 $C_1 = \dfrac{A_1}{|A_1|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

取 $B_2 = A_2 - (A_2,\, C_1)C_1 = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

则 $C_2 = \dfrac{B_2}{|B_2|} = \sqrt{\dfrac{3}{5}} \cdot \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

取 $B_3 = A_3 - (A_3,\, C_1)C_1 - (A_3,\, C_2)C_2 = \dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

则 $C_3 = \dfrac{B_3}{|B_3|} = \sqrt{\dfrac{5}{2}} \cdot \dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\therefore \Gamma_2$: $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.　(答案唯一, 最多相差正负号)

五、【12+5=17分】考虑二次曲面

$$x^2-y^2-4xz-4yz+2y+z=0 \qquad (\star)$$

(1) 通过旋转和平移变换将 $(\star)$ 化为标准形式. 写清楚变换过程和最后的标准方程, 并指出该曲面的类型.

(2) 求(1)中所用旋转变换的旋转轴的方向及旋转角度.

解:

(1) $A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&-1&-2\\-2&-2&0\end{pmatrix}$. $p_A(\lambda)=\lambda_3-9\lambda=\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)$, A 的特征值为 3, -3, 0.

解方程组 $(3I_3-A)X=0$, 得基础解系 $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$. 单位化, 得 $\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

解方程组 $(-3I_3-A)X=0$, 得基础解系 $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$. 单位化, 得 $\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

解方程组 $AX=0$, 得基础解系 $\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$. 单位化, 得 $\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

令 $P=\begin{pmatrix}\eta_1&\eta_2&\eta_3\end{pmatrix}$, 作 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\\\bar{z}\end{pmatrix}$, $(\star)$ 式化为

$$3\bar{x}^2-3\bar{y}^2+2\bar{y}-\bar{z}=0.$$

配方, 得

$$3\bar{x}^2-3(\bar{y}-\frac{1}{3})^2-(\bar{z}-\frac{1}{3})=0 \qquad (\star\star)$$

作平移

$$\tilde{x}=\bar{x}, \quad \tilde{y}=\bar{y}-\frac{1}{3}, \quad \tilde{z}=\bar{z}-\frac{1}{3},$$

方程 $(\star\star)$ 化为

$$3\tilde{x}^2-3\tilde{y}^2=\tilde{z}.$$

所求二次曲面为双曲抛物面.

(2) 旋转变换对应矩阵为 $P^{-1}=P^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

旋转轴方向为特征值 1 对应的特征向量的方向, 可取 $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. 旋转角度为 $\arccos\dfrac{1}{3}$.

注:

若在(1)中所做的旋转变换对应为 $\begin{pmatrix}\eta_2 & \eta_3 & \eta_1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$,

则旋转轴方向为 $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, 旋转角度为 π.

若在(1)中所做的旋转变换对应为 $\begin{pmatrix}\eta_3 & \eta_1 & \eta_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$,

则旋转轴方向为 $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, 旋转角度为 $\arccos\dfrac{1}{3}$.

六、【8分】考虑实对角阵 $A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$, 其中 $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$. 设 P, Q 为 n 阶正交矩阵, 且 $PA = AQ$. 证明: $P = Q$.

证明:

设 $P=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \end{pmatrix} = (p_{ij})_{n\times n}$, $Q=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix}$.

则由 $PA = AQ$, 知 $Q = A^{-1}PA = (a_i^{-1}p_{ij}a_j)_{n\times n}$. 用数学归纳法证明 P 为对角阵.

(1) 由 P, Q 正交, 且 $\dfrac{a_1}{a_i} > 1\ (\forall\, 2 \leqslant i \leqslant n)$, 可得

$$1 = |\eta_1|^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i^{-1}p_{i1}a_1)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_{i1}^2 = |\xi_1|^2 = 1.$$

比较不等式两端, 可得 $p_{i1} = 0\ (\forall\, 2 \leqslant i \leqslant n)$.

类似地, 由 $1 = |\beta_1|^2 \geqslant |\alpha_1|^2 = 1$, 可得 $p_{1j} = 0\ (\forall\, 2 \leqslant j \leqslant n)$.

(2) 假设对 $s \geqslant 1$, 满足 $p_{ij} = 0, (\forall\, 1 \leqslant i \leqslant s,\ i+1 \leqslant j \leqslant n$ 以及 $1 \leqslant j \leqslant s,\ j+1 \leqslant i \leqslant n)$.

由 P, Q 正交, 且 $\dfrac{a_{s+1}}{a_i} > 1\ (\forall\, s+2 \leqslant i \leqslant n)$, 可得

$$1 = |\eta_{s+1}|^2 = \sum_{i=s+1}^{n} (a_i^{-1}p_{i,s+1}a_{s+1})^2 \geqslant \sum_{i=s+1}^{n} p_{i,s+1}^2 = |\xi_{s+1}|^2 = 1.$$

比较不等式两端, 可得 $p_{i,s+1} = 0\ (\forall\, s+2 \leqslant i \leqslant n)$.

类似地, 由 $1 = |\beta_{s+1}|^2 \geqslant |\alpha_{s+1}|^2 = 1$, 可得 $p_{s+1,j} = 0\ (\forall\, s+2 \leqslant j \leqslant n)$.

由(1)(2)知 $P=\begin{pmatrix} p_{11} & & & \\ & p_{22} & & \\ & & \cdots & \\ & & & p_{nn} \end{pmatrix}$, 因此 $Q = A^{-1}PA = P$.