中国科学技术大学 2021年秋季学期
(数学分析(B1) 期末考试试卷参考解答, 及评分标准)

考试形式: 闭卷　考试时间: 120 分钟　满分: 100 分

一、(10 分) 判断下面的函数在 $[0,1]$ 上是否黎曼可积, 并说明理由.

(1). $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$　　(2). $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$

解　(1) 因为 $f(x)$ 连续, 所以可积. (2) 因为 $f(x)$ 无界, 所以不可积.

注意, 每小题5分, 结果3分,理由2分

二、(10 分) 求下面的极限(每小题5分):

(1). $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t}{\int_0^x\left(\int_0^u \arctan t\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u}$;　　(2). $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^{n}\left(n^2+k^2\right)^{\frac{1}{n}}$.

解　(1) 用洛比塔法则, 可得极限为 6.

(2) 记 $a_n=\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(n^2+k^2\right)^{\frac{1}{n}}$. 则

$$\ln a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\to\int_0^1\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}\ (n\to\infty).$$

故, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=2e^{\frac{\pi}{2}-2}$.

三、(20 分) 求下面的定积分或不定积分(每小题5分):

(1). $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x+1)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$;　　(2). $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$;

(3). $\displaystyle\int_0^2 x\cdot|\sin(\pi x)|\,\mathrm{d}x$;　　(4). $\displaystyle\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$.

解　(1) 因为 $x\sqrt{4-x^2}$ 是奇函数, 所以

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}(x+1)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x&=\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=2\int_{-1}^{1}\sqrt{4-4x^2}\mathrm{d}t\\&=8\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,\mathrm{d}x\\&=2\pi.\end{aligned}$$

(2) $$\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t = \arctan e - \frac{\pi}{4}.$$

(3)

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x\cdot|\sin(\pi x)|\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x\sin(\pi x)\mathrm{d}x - \int_1^2 x\sin(\pi x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x\sin(\pi x)\mathrm{d}x - \int_0^1 (x+1)\sin(\pi x+\pi)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x\sin(\pi x)\mathrm{d}x + \int_0^1 (x+1)\sin(\pi x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (2x+1)\sin(\pi x)\mathrm{d}x \\
&= -(2x+1)\frac{\cos \pi x}{\pi}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\cos\pi x}{\pi}\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{\pi}.
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{\arctan x}{x^2} - \frac{\arctan x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left(-\frac{1}{x}\arctan x + \int \frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}t\right) - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 \\
&= -\frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x^2 - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 \\
&= -\frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C.
\end{aligned}$$

注意, 若遗漏常数 C 扣 1 分.

四、(10 分) 求方程 $y''+3y'+2y=2x$ 的通解.

解 该微分方程的特征方程 $\lambda^2+3\lambda+2=0$ 有两个实根 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$. 因此齐次方程 $y''+3y'+2y=0$ 的通解为 $y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$. (4 分).

设 $y_0=a+bx$ 是非齐次方程 $y''+3y'+2y=2x$ 一个特解, 将 y_0 代入此方程可得

$$3b+2(a+bx)=2x,$$

比较系数可得 $b=1$, $a=-\frac{3}{2}$. 故, 原方程的通解为

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+x-\frac{3}{2}.$$

(6 分).

五、(10 分) 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+\frac{1}{n})}{n}$ 的收敛性和绝对收敛性.

解

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+\frac{1}{n})}{n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\cos\frac{1}{n}-\sin n\sin\frac{1}{n}}{n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos n}{n}-\frac{\cos n(1-\cos\frac{1}{n})}{n}-\frac{\sin n\sin\frac{1}{n}}{n}\right).\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos n}{n}-\frac{2\cos n\sin^2\frac{2}{n}}{n}-\frac{\sin n\sin\frac{1}{n}}{n}\right)\end{aligned}$$

因为 $\left|\frac{2\cos n\sin^2\frac{2}{n}}{n}\right|\leqslant\frac{8}{n^3}$, $\left|\frac{\sin n\sin\frac{1}{n}}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$, 所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\cos n\sin^2\frac{2}{n}}{n}+\frac{\sin n\sin\frac{1}{n}}{n}\right)$ 绝对收敛. 由书上例题可知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 条件收敛. 故, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+\frac{1}{n})}{n}$ 是条件收敛的.

注意, 仅得出收敛给 6 分, 再得出条件收敛给 10 分. 若不加证明直接指出收敛给 2 分, 直接指出条件收敛给 3 分.

六、(10 分) 设 $a_0=1, a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=\dfrac{2(n+1)a_n-na_{n-1}}{n+2}$, $n=1,2,\cdots$. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径, 收敛域以及和函数.

解 由条件可证明 $a_n=\frac{1}{n+1}$, (2 分). 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$. 故, 该级数的收敛半径为 1, (2 分). 该级数在 -1 收敛, 在 1 发散, 故收敛域为 $[-1,1)$ (2 分). 设和函数为 $f(x)$ $(|x|<1)$. 则 $xf(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$. 因此

$$(x(f(x))'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.$$

积分可得 $xf(x) = -\ln(1-x)$. 于是 $f(x) = -\frac{1}{x}\ln(1-x)$ $(0 \neq x \in [-1,1))$, $f(0) = a_0 = 1$. (4 分).

七、(10 分) 设 $\varphi(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的连续函数, 且 $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数. 试证:

(1) 令 $G(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $G(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界;

(2) 令 $a_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\varphi(nx)\,\mathrm{d}x$, 则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

证明 (1) 因为 $\varphi(x)$ 连续, 所以 $G(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的一个原函数. 对于任意 x 有

$$\begin{aligned} G(x+1) &= \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{x+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ &= G(x) + \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = G(x). \end{aligned}$$

故, $G(x)$ 也是以 1 为周期的连续函数. 因此 $G(x)$ 有界.(5 分).

(2) 因为 $G(n) = G(0) = 0$, 所以根据分部积分

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 f(x)\varphi(nx)\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot\frac{1}{n}G(nx)\Big|_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 f'(x)G(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{n}\int_0^1 f'(x)G(nx)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

又因为 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界, $G(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界, 存在 $M > 0$ 使得

$$|f'(x)G(nx)| \leqslant M,\ \ x \in [0,1].$$

故, $a_n^2 \leqslant \frac{M^2}{n^2}$. 因而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.(5 分).

八、(10 分) 设 $\{a_n\}$ 是单调增加的正数列, 函数 $f(x)$ 在 $[a_1,+\infty)$ 大于零且单调增加, 又 $\displaystyle\int_{a_1}^{+\infty} \frac{1}{xf(x)}\,\mathrm{d}x < +\infty$.

(1) 求证: 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}f(a_{n+1})}$ 收敛. (2) 求证: 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}f(a_n)}$ 收敛.

证明 (1) 由条件可设 $\displaystyle\int_{a_1}^{+\infty} \frac{1}{xf(x)}\,\mathrm{d}x < M$. 因此

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}f(a_{n+1})} = \sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{1}{a_{n+1}f(a_{n+1})}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{1}{xf(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{a_1}^{a_{n+1}} \frac{1}{xf(x)}\,\mathrm{d}x < M.$$

因此级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}f(a_{n+1})}$ 收敛. (5 分).

(2) 由于

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}f(a_n)} &= \sum_{n=1}^{m}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}\left(\frac{1}{f(a_{n+1})}+\frac{1}{f(a_n)}-\frac{1}{f(a_{n+1})}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{m}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}f(a_{n+1})}+\sum_{n=1}^{m}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}\left(\frac{1}{f(a_n)}-\frac{1}{f(a_{n+1})}\right)\\
&\leqslant M+\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{f(a_n)}-\frac{1}{f(a_{n+1})}\right)\\
&\leqslant M+\frac{1}{f(a_1)}.
\end{aligned}
$$

故, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}f(a_n)}$ 收敛. (5 分).

九、(10 分) 设 $\{a_n\}$ 是实数列, $a_1=1$, 且 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.

(1) 求证: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛;

(2) 设上面的函数项级数的和函数为 $f(x)$. 求证: 存在实数 x, 使得 $|f(x)|>\frac{\pi}{4}$.

证明 (1) 因为 $|a_n\cos nx|\leqslant|a_n|$, 由 Weierstrass 判别法, 可知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛. (4 分).

(2) 设 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$, 则 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数. 记 $M=\max\limits_{x\in[0,2\pi]}|f(x)|$. 因为

$$
\int_0^{\pi}\cos nx\cos x\,\mathrm{d}x=0,\ \ n=2,3,\cdots,
$$

所以利用逐项积分性质可得

$$
\begin{aligned}
4M=M\int_0^{2\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x &\geqslant \int_0^{2\pi}|f(x)\cos x|\,\mathrm{d}x\\
&\geqslant \int_0^{2\pi}f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\pi.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

于是 $M\geqslant\frac{\pi}{4}$. 若 $M=\frac{\pi}{4}$, 则

$$
\int_0^{2\pi}(M-|f(x)|)|\cos x|)\,\mathrm{d}x=0.
$$

因此由 $f(x)$ 的连续性, 有 $f(x)\equiv M$ 或 $f(x)\equiv -M$. 此时有

$$
\int_0^{2\pi}f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=0\neq\pi.
$$

这与 (1) 矛盾! 故, $M>\frac{\pi}{4}$. (6 分).