Fourier 级数的均值收敛性*

定义 1 设 S_n 是无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 的部分和, 即 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. 令

$$\sigma_n = \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n}. \tag{12.1}$$

若 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ 是有限的, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 在均值意义下 (或在 Cesàro 意义下) 收敛到 σ. 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sigma \ \ (C)$. ($\sigma$ 称为级数的均值).

显然, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛到 s, 则它在均值意义下也收敛到 s. 反之不一定对.

例如, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = \frac{1}{2} \ \ (C)$. 但此级数通常意义下并不收敛.

现设 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积函数. a_n, b_n 是其 Fourier 系数, 即

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right).$$

则将 Fourier 系数的定义表达式

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

代入 Fourier 级数的部分和, 可得

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(f(x+t)+f(x-t)\Big)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt \end{aligned}$$

记 $T_0(x) = \frac{a_0}{2}$, 因而

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T_k(x) \\ &= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\Big(f(x+t)+f(x-t)\Big)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt.\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}2\sin\frac{t}{2}\sin(k+\frac{1}{2})t &= \cos\left((k+\frac{1}{2})t-\frac{t}{2}\right)-\cos\left((k+\frac{1}{2})t+\frac{t}{2}\right) \\ &= \cos kt - \cos(k+1)t\end{aligned}$$

所以

$$2\sin\frac{t}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k+\frac{1}{2})t = 1-\cos nt = 2\sin^2\frac{nt}{2}.$$

故,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\,(k+\frac{1}{2})t = \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}, \tag{12.2}$$

所以

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi} \Big(f(x+t)+f(x-t)\Big)\left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}\right)^2 dt. \tag{12.3}$$

特别, 令 $f=1$, 则 $T_n=1$, 所以 $\sigma_n(x)=1$, 由上式, 得

$$1 = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}\right)^2 dt. \tag{12.4}$$

由此, 并按照 Dirichlet 收敛性定理的类似证明方法, 可以证明下面的 Fejér 收敛定理.

定理 1 (**可积函数 Fejér 定理**) 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期, 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积. 若 $f(x)$ 在 x_0 处有左极限 $f(x_0-0)$ 和右极限 $f(x_0+0)$, 则在 x_0 处 $f(x)$ 的 Fourier 级数在均值意义下收敛于 $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

证明 记 $s=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$,

$$\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s.$$

根据 (12.3), (12.4) 得

$$\begin{aligned}\sigma_n(x_0)-s&=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\Big(f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s\Big)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt\\&=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\varphi(t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt\end{aligned}\tag{12.5}$$

因为 f 在 x_0 的左极限和右极限都存在, 故, 对任意正数 ε, 存在 $\delta\in(0,\pi)$ 使得

$$|f(x_0+t)-f(x_0+0)|<\frac{\varepsilon}{2},\ (0<t<\delta)$$
$$|f(x_0-t)-f(x_0-0)|<\frac{\varepsilon}{2},\ (0<t<\delta).$$

因此

$$|\varphi(t)|<\varepsilon,\ (0<t<\delta).$$

现在把 (12.5) 中的积分分成两部分, 有

$$\sigma_n(x_0) - s = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\delta}\varphi(t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt + \frac{1}{2n\pi}\int_{\delta}^{\pi}\varphi(t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt$$
$$= I_1 + I_2$$

下面分别对 I_1, I_2 估计.

$$|I_1| \leqslant \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\delta}|\varphi(t)|\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2n\pi}\int_0^{\delta}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2n\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt$$
$$= \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{2n\pi}\int_\delta^\pi |\varphi(t)| \left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt \leqslant \frac{1}{2n\pi}\int_\delta^\pi |\varphi(t)| \left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt$$
$$\leqslant \frac{1}{2n\pi\sin^2\frac{\delta}{2}}\int_0^\pi |\varphi(t)|\, dt$$
$$= \frac{A}{n},$$

其中

$$A = \frac{1}{2\pi\sin^2\frac{\delta}{2}}\int_0^\pi |\varphi(t)|\, dt$$

是一个常数. 当 $n > \frac{2A}{\varepsilon}$ 时, 就有 $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. 因此

$$|\sigma_n(x_0) - s| < \varepsilon.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x_0) = s.$$

推论 1 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期, 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积. 若 $f(x)$ 在 x_0 处有左极限 $f(x_0-0)$ 和右极限 $f(x_0+0)$, 且在 x_0 处 $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛于 s, 则必有 $s=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

证明 若在 x_0 处 $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛于 s, 则它按均值也收敛于 s. 但根据 Fejér 定理, $f(x)$ 的 Fourier 级数按均值应收敛于 $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$. 故,

$$s=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

定理 2 (连续函数 Fejér 定理) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数. 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在均值意义下一致收敛于 $f(x)$.

证明 根据 (12.5), 有

$$\sigma_n(x_0)-s=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\Big(f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s\Big)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2dt$$

因此

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi} \varphi_x(t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt \tag{12.6}$$

其中

$$\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x).$$

因为 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数且以 2π 为周期, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续. 因此存在 $M > 0$ 使得 $|f(x)| < M$, 且对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta \in (0, \pi)$ 使得

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (|x-y| < \delta).$$

故, 当 $0 \leqslant t < \delta$ 时, 有

$$|\varphi_x(t)| < \varepsilon, \text{对一切 } x \in \mathbb{R} \text{ 成立}.$$

将 (12.6) 式右端的积分写成两项:

$$\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\delta} \varphi_x(t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt + \frac{1}{2n\pi}\int_{\delta}^{\pi} \varphi_x(t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt = I_1 + I_2.$$

并分别进行估计,

$$|I_1| \leqslant \frac{1}{2n\pi}\int_0^\delta |\varphi_x(t)|\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2n\pi}\int_0^\delta \left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2n\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $|f(x)| < M$, 可得 $|\varphi_x(t)| < 4M$. 故,

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{2n\pi}\int_\delta^\pi |\varphi_x(t)|\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt \leqslant \frac{1}{2n\pi}\int_\delta^\pi 4M\left(\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}\right)^2 dt$$
$$\leqslant \frac{2M}{n\sin^2\frac{\delta}{2}}.$$

故, 当 $n > 4M/\left(\varepsilon\sin^2\frac{\delta}{2}\right)$ 时, 有

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant |I_1| + |I_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

这就证明了 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛于 $f(x)$.

推论 2 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数. 若 $f(x)$ 的 Fourier 系数 a_n, b_n 都为零, 则 $f(x) \equiv 0$.

证明 因为 $f(x)$ 的 Fourier 系数都为零, 所以 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right) = 0.$$

因而它们的均值

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_{n-1}(x)}{n} = 0,$$

其中 $S_0(x) = \frac{a_0}{2}$. 根据定理 2, $\{\sigma_n(x)\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛于 $f(x)$. 因此 $f(x) \equiv 0$.

注 此结论以前利用 Parseval 等式也证明过, 这里没有用 Parseval 等式.