图论复习提纲

made by PB22111679 sjw (aka Sanae)

往年题重点：算法实际应用 & 证明题；匹配；网络流

$Ch1-2$

$1.Definition$

- 阶：顶点个数 $|V(G)|$ 称为 G 的阶
- 简单图、完全图、二分图（完全二分图）
- 顶点度数：无向图 $deg(v)$ $\delta(v)$ $\Delta(v)$，有向图 $deg^+(v)$ $deg^-(v)$
- 生成子图：所有顶点，选一些边
- 顶点导出子图：一些顶点及其间的所有边
- 边导出子图：一些边及其间所有顶点
- 补图：G 与 G^C 顶点相同，$G+G^C=$ 完全图
- 边图：原图中的边和定点地位互换
- 图的和、差、积、对称差($\bigoplus$)
- 行迹、轨道、回路、圈
- 图的连通片：个数 ω ，G_1 G_2 $\ldots G_\omega$
- 树的等价定义：无圈连通图 $\Leftrightarrow$ 任意两点间只有一条轨道 $\Leftrightarrow$ 连通图且 $e(G)=v(G)-1$ $\Leftrightarrow$ 不含圈且 $e(G)=v(G)-1$ $\Leftrightarrow$ 删去任意一条边之后连通性改变（不连通） $\Leftrightarrow$ 添加任意一条边之后圈的个数从无到 1
- 树上顶点离心率：$l(v)$，到树上其他顶点的最远距离
- 树的半径：$min\{l(v)\}$
- 树枝和弦的概念
- G 的生成树个数：$\tau(G)$

$2.Theorem\ \&\ Colorary\ \&\ldots$

- $(Euler)\ \forall$ 无向图 G , $\Sigma\, deg(G)=2e(G)$
- G 是二分图 $\Leftrightarrow$ G 中无奇圈
- “最长轨道” 思想
- 每个连通图都有生成树

$Ch3$

1.$Definition$

- uv 顶割集：在 $\{V(G)-u-v\}$ 中选一些点，使删去它们后 uv 不连通
  - 最小 uv 割集：选出最少的点删去。其个数为 $c(u,\ v)$
  - uv 顶连通度： $c(u,v)$
- G 顶割集：在 $V(G)$ 中选一些点，使删去它们后 G 不连通；记为点集 S
  - 若 $|S|=k:k-$ 顶割集
  - 最小割集：k 最小；其大小记为 $\kappa(G)$
  - G 的顶连通度（连通度）： $\kappa(G)$
  - 若 $\kappa(G)\geq k$，称 G 是 $k-$ 连通 的
- uv 边割集、G 边割集：有类似定义；$c'(u,v)\quad \kappa'(G)$
- 桥：边割集为 $\{e\}$； $\kappa'(G)=1$
- 割顶：顶割集为 $\{v\}$； $\kappa(G)=1$
- 块：没有割顶的简单图

2.$Theorem\ \&\ Colorary\ \&\ldots$

- $\kappa(G)=min\{c(u,v)\}=min\{p(u,v)\}$，其中 $p(u,v)$ 是 u v 之间两两无公共内顶的轨道数量
- $(Menger)\ \ p(u,v)=c(u.v)$
- $\kappa(G)\leq\kappa'(G)\leq\delta(G)$

$Ch4$

1.$Definition$

? （自行看书，感觉没什么）

2.$Theorem$ & $Colorary$ &...

- 平面图 $Euler$ 公式：$v-\epsilon+\phi=2$
- 面度数 $\Sigma\, deg(f)=2|E(G)|$
- 对于每个面至少有 n 条边的多面体，$\phi\, n\leq\Sigma\, deg(f)$
- 若 G 是连通简单平面图，则 $\delta(G)\leq 5$
- 若 G 是 $v(G)\geq 3$ 的简单连通平面图，则每个面至少有 3 条边，即 $deg(f)\geq 3$ 且 $\epsilon\leq 3v-6$，当且仅当每个面都是三角形取等

$Ch5$

1.$Definition$

- 完备匹配：所有顶点都被边子集 M 许配
- 最大匹配：边数最多（许配的顶点最多）的一个匹配
- 若 M 是 G 的最大匹配，则定义 G 的匹配数 $\alpha(G) = |M|$
- 交错轨道：轨道/ 圈上，属于 M 和不属于 M 的边（匹配边和非匹配边）交替出现
- 可增广轨道： 第一条边和最后一条边都是非匹配边的交错轨道（首末端点未被许配）
- 覆盖：顶点子集，使其覆盖所有的边
  - 极小覆盖：C 的任何子集都不是 G 的覆盖
  - 最小覆盖：$|C|$ 最小，记作 C^*
  - 若 C^* 是 G 的最小覆盖，则定义 G 的覆盖数 $\beta(G) = |C^*|$
- 奇片与偶片：G 的连通片，按顶点个数是奇是偶划分

2.$Theorem$ & $Colorary$ &...

- $(Hall)$ 二分图 G 中存在将所有 X 中顶点都许配的匹配
  $\Leftrightarrow\ \forall S \subseteq X,$ 邻顶集大小 $|N(G)| \geq |S|$
- 对图 G 的匹配 M 和覆盖 C ，有 $|C| \geq |M|$，取等时表示“最大匹配等于最小覆盖”
- $(Konig)$ 二分图的匹配数 = 覆盖数
- $(Tutte)$ G 有完备匹配 $\Leftrightarrow \forall S \subseteq V(G),\ o(G-S) \leq |S|$
- 最大匹配算法：找交错轨道（可增广轨道）
- 最佳匹配算法：$K-M$ 算法（修改可行顶标）

$Ch6$

1.$Definition$

- $Euler \quad vs \quad Hamilton$：经过每条边 - 经过每个顶点
- $Euler$ 图的等价定义：含有欧拉圈 $\Leftrightarrow$ 每个顶点的度数都是偶数 $\Leftrightarrow$ 可以表示成无公共边的圈之并
- 图 G 的闭包 $c(G)$：反复连接 G 中度数之和不小于 $|v(G)|$ 的点对

2.$Theorem$ & $Colorary$ &...

- 连通图有欧拉迹 $\Leftrightarrow$ 至多有两个奇度数顶点
- 旅行商问题：最近邻法（贪心）、最小生成树法（加树枝）、最小权匹配法（加最小全匹配边）
- 中国邮递员问题：$E-J$ 算法 （创造欧拉回路；思想类似于最小全匹配，但过程不同）
- 找 $Euler$ 回路：$Fleury$ 算法、插入法
- $Hamilton$ 图判定的（必要）条件：
  - $V(G)$ 的每个非空真子集 S，均有 $\omega(G-S) \leq |S|$
  - $v(G) \geq 3,\ \delta(G) \geq v(G)/2$
  - G 是 $Hamilton$ 图 $\Leftrightarrow$ $c(G)$ 是 $Hamilton$ 图
  - 设 G 中两不相邻的顶点 uv 满足 $deg(u)+deg(v) \geq v(G)$，则 G 是 $Hamilton$ 图 $\Leftrightarrow$ $G+uv$ 是 $Hamilton$ 图
  - 设 $v(G) \geq 3$，对 $\forall u \neq v \in G$，若 $deg(u)+deg(v) \geq v(G)-1$，$G$ 有 $Hamilton$ 轨道；若 $deg(u)+deg(v) \geq v(G)$，G 是 $Hamilton$ 图
- 完全二分图 $K_{n,n}$ 有 k 个无公共边的哈密顿圈 $(k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$

$Ch7$

$1.Definition$

- G 的顶点色数 $\chi(G)$：使 G 可以正常顶点着色的最少色数
- 正常 $k-$ 顶点着色 vs $k-$ 顶点着色：任意相邻顶点不同色
- 边着色有类似定义，其中边色数为 $\chi'(G)$

$2.Theorem\ \&\ Colorary\ \&\ldots$

- 排课问题 -- 边色数（课时数对应有多少不相交匹配，教室数对应每个匹配中最多有多少条边）
- 安排考试 -- 顶点色数
- 连通无环平面图 G 与其对偶图 G^* 在以下方面对偶：边与面、面着色性与顶点着色性、桥和环
- 任何平面图都可以 $5-$ 顶点着色

$Ch8$

1.$Definition$

强连通、弱连通、底图、可达

2.$Theorem$ & $Colorary$ &...

- 有向图中含有长度为 $\chi(G)-1$ 的轨道，最长轨的长度 $\geq \chi(G)-1$
  - 又 $\chi(K_{n,n}=n) \quad \Rightarrow$ 竞赛图存在有向 $Hamilton$ 轨道
- $\chi(G)=2$ 当且仅当 G 是有边二分图
- $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$
- 若 G 是简单图，$\chi'(G)=\Delta(G)\ or\ \Delta(G)+1$
- $\chi'(G)=\Delta(G)$ 当且仅当 G 是有边二分图

$Ch9$

1.$Definition$

流：网络 $N=(D,s,t,c)$ 上的流函数 $f:E(D)\to\mathbb{R}$ 满足：

① $\forall e\in E(D),\ c(e)\geq f(e)\geq 0$ （容量大于等于流量，且均为非负实数）

② $\forall v\in V(D)-\{s,t\},\ \sum_{e\in\alpha(v)}f(e)-\sum_{e\in\beta(v)}f(e)=0$ （除源点汇点外，所有点流入量等于流出量）

③ $Val(f)=\sum_{e\in\alpha(t)}f(e)-\sum_{e\in\beta(f)}f(e)$

$=\sum_{e\in\alpha(s)}f(e)-\sum_{e\in\beta(s)}f(e)$ （无论有没有下界均成立）

截：本质是中间某些边容量之和，刻画了网络流量的上界

$Val(f)=\sum_{e\in(S,\bar{S})}f(e)-\sum_{e\in(\bar{S},S)}f(e)\leq C(S,\bar{S})=\sum_{e\in(S,\bar{S})}c(e)$ （截量，取等时“最大流等于最小截”）

2.$Theorem\ \&\ Colorary\ \&\ldots$

- 普通最大流：找可增载轨道
- 有供需的可行流：建超级源点汇点 $s'\ t'$ 转化为普通最大流
- 有流量上下界的最大流：建立伴随网络，抽取下界转化为普通最大流

$Ch10$

$Topics$

- 无向图的关联矩阵（行、列、秩特点）
- 有向图的关联矩阵（行、列、秩特点）
- 最小生成树计数
- $Warshall$ 算法利用可达矩阵求强连通分片