中国科学技术大学 2021-2022 第二学期
统计信号分析与处理 期末考试（回忆版）

一、简答题（15 分）

1. 随机信号 $x(t)$ 通过线性时不变系统，写出输入输出信号的频谱与功率谱与系统函数的关系。

2. 写出窄带信号的正交表示。

3.$x(t) = s(t) + n(t)$，信号和噪声的功率谱密度分别是 $S(\omega), S_n(\omega)$，请写出信噪比在时刻 T 和系统函数之间的关系

4. 写出确定单参量的 Cramer-Rao 不等式。

二、（10 分） 证明稳定的 ARMA(p,q) 系统可以等价于一个无穷阶的 MA 系统。

三、（15 分） 二元假设：

$$H_0:\ y = -1 + n$$
$$H_1:\ y = 1 + n$$

其中 n 的概率密度函数是 $f(n) = \frac{1}{\pi(1+n^2)}$，若 H_0, H_1 以等概率发生，请用最小平均错误概率准则计算判决规则和平均错误概率。

四、（20 分） 分集接收 BASK 信号。n_i 之间是相互独立的高斯白噪声，A 和 ω_c 已知，一共进行了 N 次接收；

$$\begin{aligned} H_0:&\ x_i = n_i(t) \\ H_1:&\ x_i = A\cos\omega_c t + n_i(t) \end{aligned}\ , i = 1, 2, \cdots, N$$

用纽曼-皮尔逊准则设计最佳接收机，在虚警概率是 α 时写出检测概率，画出最佳接收机框图。

五、（20 分） 在噪声中估计参数 s。s 以相同的概率取 $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$，噪声 n_k 相互独立，以相同的概率取 $\{-1, 0, 1\}$，n_k 同分布，$\mathbf{E}\{sn_k\} = 0$。

$$x_k = s + n_k,\ \ k = 1, 2, \cdots$$

使用 x_1, x_2 两个样本，用线性最小均方误差估计求估计量，计算估计的均方误差。

六、（20 分） 离散信号 $x(m) = s(m) + n(m)$ $(m \le k)$，$P_s(z) = \frac{0.98}{(1-0.2z^{-1})(1-0.2z)}$，$P_n(z) = 1$，设计维纳滤波器：

（1）估计 $s(k)$（时域和频域形式）

（2）估计 $s(k+1)$（时域和频域形式）

一、解 1. 设系统函数是 $H(j\omega)$，则有：

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

$$S(j\omega) = |H(j\omega)|^2 X(j\omega)$$

2. 窄带信号的正交表示如下：

$$\begin{aligned} n(t) &= \mathrm{Re}\{\tilde{n}(t)\} = \mathrm{Re}\left\{\tilde{a}(t)e^{j\omega_0 t}\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{[x(t) + jy(t)]e^{j\omega_0 t}\right\} \\ &= x(t)\cos\omega_0 t - y(t)\sin\omega_0 t \end{aligned}$$

其中 $x(t), y(t)$ 称为 $n(t)$ 的两个正交分量，上式称为窄带信号 $n(t)$ 的正交表示。有：

$$\begin{aligned} x(t) &= n(t)\cos\omega_0 t + \hat{n}(t)\sin\omega_0 t \\ y(t) &= -n(t)\sin\omega_0 t + \hat{n}(t)\cos\omega_0 t \end{aligned}$$

3. 设系统函数是 $H(j\omega)$，则有：

$$SNR = \frac{s_o^2(t)}{\mathbf{E}\left\{n_o^2(t)\right\}} = \frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} H(j\omega)S(j\omega)e^{j\omega T}d\omega\right|^2}{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |H(j\omega)|^2 S_n(\omega)d\omega}$$

4.

$$\mathbf{E}\left\{(\theta - \tilde{\theta})^2\right\} = -\frac{1}{\mathbf{E}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(x|\theta)\right\}}$$

二、解 见书本 P71.

三、解 易得：

$$f(x|H_0) = \frac{1}{\pi(1 + (x+1)^2)}$$

$$f(x|H_1) = \frac{1}{\pi(1 + (x-1)^2)}$$

则有似然比函数：

$$\lambda(x) = \frac{f(x|H_1)}{f(x|H_0)} = \frac{1 + (x+1)^2}{1 + (x-1)^2} <> \frac{P(H_0)}{P(H_1)} = 1$$

则有判决规则：

$$x <> 0$$

下面计算平均错误概率:

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{2}P(D_1|H_0) + \frac{1}{2}P(D_0|H_1) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi(1 + (n+1)^2)}dn \\ &= \frac{1}{\pi}\arctan x\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

四、解 见书本 P140. 信号的分集接收。

五、解 由于 LMS 的计算公式：$\hat{s}_{LMS}=\mathbf{E}\{s\}+Cov(s,\mathbf{x})Cov^{-1}(\mathbf{x},\mathbf{x})\left[\mathbf{x}-\mathbf{E}\{\mathbf{x}\}\right]$，其中：

$$\mathbf{E}\{s\}=0,\ \mathbf{E}\{n_k\}=0,\ \mathbf{E}\{s^2\}=2,\ \mathbf{E}\{n_k^2\}=\frac{2}{3}$$

故而：

$$Cov(s,\mathbf{x})=\mathbf{E}\left\{\begin{pmatrix}sx_1 & sx_2\end{pmatrix}\right\}=\mathbf{E}\left\{\begin{pmatrix}s^2+sn_1 & s^2+sn_2\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}Cov(\mathbf{x},\mathbf{x})&=\mathbf{E}\left\{(\mathbf{x}-\mathbf{E}\{\mathbf{x}\})(\mathbf{x}-\mathbf{E}\{\mathbf{x}\})^{\mathbf{T}}\right\}=\mathbf{E}\left\{\begin{pmatrix}x_1x_1 & x_1x_2\\ x_1x_2 & x_2x_2\end{pmatrix}\right\}\\&=\mathbf{E}\left\{\begin{pmatrix}s^2+n_1^2 & s^2+n_1n_2\\ s^2+n_1n_2 & s^2+n_1^2\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}\frac{8}{3} & 2\\ 2 & \frac{8}{3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以：

$$\hat{s}_{LMS}=\begin{pmatrix}2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{8}{3} & 2\\ 2 & \frac{8}{3}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\frac{3}{7}(x_1+x_2)$$

估计的均方误差：

$$\mathbf{E}\left\{(s-\hat{s}_{LMS})^2\right\}=\frac{2}{7}$$

在考场上可以用正交条件验证 LMS 估计量的正确性：

$$\mathbf{E}\{(s-\hat{s}_{LMS})x_1\}=\mathbf{E}\left\{sx_1-\frac{3}{7}x_1^2-\frac{3}{7}x_1x_2\right\}=\mathbf{E}\left\{s^2-\frac{3}{7}(s^2+n_1^2)-\frac{3}{7}s^2\right\}=0$$

同理可得

$$\mathbf{E}\{(s-\hat{s}_{LMS})x_2\}=0\text{；综合两式，也即：}\mathbf{E}\{(s-\hat{s}_{LMS})\mathbf{x}\}=0$$

六、解 本题中要求的是物理可实现的维纳滤波器，因为题中声明了信号只有在 k 时刻之前有值，而物理不可实现滤波器要求知道信号在所有时刻的值。 有物理可实现的维纳滤波器的公式：

$$H(z)=\frac{1}{P_x^+(z)}\left[\frac{P_{gx}(z)}{P_x^-(z)}\right]^+$$

（1）上式中的：

$$\begin{aligned}P_x(z)=P_s(z)+P_n(z)&=\frac{0.98}{(1-0.2z^{-1})(1-0.2z)}+1\\&=\frac{2(1-0.1z^{-1})(1-0.1z)}{(1-0.2z^{-1})(1-0.2z)}=\frac{2(1-0.1z^{-1})}{1-0.2z^{-1}}\times\frac{1-0.1z}{1-0.2z}\\&=P_x^+(z)P_x^-(z)\end{aligned}$$

又有：

$$\begin{aligned}\frac{P_{gx}(z)}{P_x^-(z)}=\frac{P_s(z)}{P_x^-(z)}&=\frac{0.98}{(1-0.2z^{-1})(1-0.1z)}=\frac{0.98z^{-1}}{(1-0.2z^{-1})(z^{-1}-0.1)}\\&=\frac{1}{1-0.2z^{-1}}+\frac{0.1}{z^{-1}-0.1}=\left[\frac{P_{gx}(z)}{P_x^-(z)}\right]^++\left[\frac{P_{gx}(z)}{P_x^-(z)}\right]^-\end{aligned}$$

所以：

$$H(z)=\frac{1-0.2z^{-1}}{2(1-0.1z^{-1})}\frac{1}{1-0.2z^{-1}}=\frac{0.5}{1-0.1z^{-1}}$$

$$h(n)=0.5(0.1)^n u(n)$$

（2）如果取信号 $g(n)=s(n+1)$ 则有：

$$P_{gx}(z)=\mathrm{ZT}\left[\mathbf{E}\left\{s(n+1+m)s(n)\right\}\right]=\mathrm{ZT}\left[R_s(m+1)\right]=zP_s(z)$$

可设：

$$H_1(z)=\frac{P_{gx}(z)}{P_x^-(z)}=\frac{z}{1-0.2z^{-1}}+\frac{0.1z}{z^{-1}-0.1}$$

那么它在时域中的信号和正时间部分是：

$$h_1(n)=(0.2)^{n+1}u(n+1)+(0.1)^{-n-1}u(-n-2)$$

$$h_1^+(n)=(0.2)^{n+1}u(n+1)u(n)+(0.1)^{-n-1}u(-n-2)u(n)=(0.2)^{n+1}u(n)$$

所以：

$$\left[\frac{P_{gx}(z)}{P_x^-(z)}\right]^+=\frac{0.2}{1-0.2z^{-1}},\ H(z)=\frac{1-0.2z^{-1}}{2(1-0.1z^{-1})}\frac{0.2}{1-0.2z^{-1}}=\frac{0.1}{1-0.1z^{-1}}$$

$$h(n)=(0.1)^{n+1}u(n)$$