7.1.4 级数的乘积

由于级数是有限和的推广, 有限和相乘所得乘积是一个数, 因此, 很自然地要考虑两个收敛的级数是否可以相乘.

设 $A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $B=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 是两个收敛级数, 并设 $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, $B_m=\sum\limits_{k=1}^{m}b_k$. 于是 $A_nB_m=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}a_ib_j$ 它是把所有可能的乘积

$$a_ib_j \quad (i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m)$$

相加. 对于所给的两个级数, 把所有可能的乘积写出来:

$$\begin{array}{cccc} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

这是一个无穷矩阵. 通常考虑两种顺序的加法.

1°　按方块形式相加

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_2) + (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1) + \cdots$$

此级数的部分和是

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k = A_nB_n.$$

2°　按对角线形式相加

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \cdots$$

此级数的通项是

$$c_n = \sum_{i+j=n+1} a_ib_j = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1.$$

此时称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的 Cauchy 乘积.

例 1 设 $a_n = b_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$. 则

$$c_n = \sum_{i+j=n+1} (-1)^{i-1}\frac{1}{\sqrt{i}}(-1)^{j-1}\frac{1}{\sqrt{j}} = (-1)^{n-1}\sum_{i+j=n+1}\frac{1}{\sqrt{ij}}.$$

所以

$$|c_n| \geqslant \sum_{i+j=n+1}\frac{2}{i+j} = \frac{2n}{n+1} \geqslant 1.$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛.

此例说明, 两个收敛的级数的 Cauchy 乘积可能是发散的.

例 2 设 $a_0 = b_0 = 1$, $a_n = -(\frac{3}{2})^n$, $b_n = (\frac{3}{2})^{n-1}(2^n + \frac{1}{2^{n+1}})$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 的 Cauchy 乘积为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, 其中

$$\begin{aligned}
c_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_n b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} \\
&= (\tfrac{3}{2})^{n-1}(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}) - (\tfrac{3}{2})^n - \sum_{k=1}^{n-1} (\tfrac{3}{2})^k (\tfrac{3}{2})^{n-k-1}(2^{n-k} + \frac{1}{2^{n-k+1}}) \\
&= (\tfrac{3}{2})^{n-1}(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}) - (\tfrac{3}{2})^n - (\tfrac{3}{2})^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} (2^{n-k} + \frac{1}{2^{n-k+1}}) \\
&= (\tfrac{3}{2})^{n-1}(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}) - (\tfrac{3}{2})^n - (\tfrac{3}{2})^{n-1}(2^n - 2 + \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2^n}) \\
&= (\tfrac{3}{4})^n.
\end{aligned}$$

因此 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛, 但 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 都发散.

||◀　▶||　◀　▶　返回　全屏　关闭　退出

定理 1 (Cauchy) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛, 其和分别为 A 和 B, 则把 $a_i b_j \quad (i=1,2,\cdots,\infty,\ j=1,2,\cdots,\infty)$ 按任意方式相加所得的级数都绝对收敛, 其和等于 AB.

证明 设 $a_{i_l} b_{j_l}\ (l=1,2,\cdots)$ 是 $a_i b_j\ (i=1,2,\cdots,\infty,\ j=1,2,\cdots,\infty)$ 的任意一种排列, 并设 $\{i_1,\cdots,i_n,j_1,\cdots,j_n\}$ 中最大指标为 N, 则

$$\sum_{l=1}^{n}|a_{i_l}b_{j_l}| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{N}|a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{N}|b_j|\right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|\right),$$

所以 $\sum\limits_{l=1}^{\infty} a_{i_l} b_{j_l}$ 绝对收敛. 因为对于绝对收敛的级数交换无穷多项的次序不改变收敛性且和也不变, 所以

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{i_l} b_{j_l} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right) = AB.$$

引理 1 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1) = 0.$$

证明 因为 $\{b_n\}$ 收敛, 所以有界, 设 $|b_n| < M$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 所以对任意 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 m, 当 $n > m$ 时, 有

$$|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_n| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, 知存在 N, 当 $n \geqslant N$ 时, 有

$$|b_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(|a_1| + \cdots + |a_m| + 1)}.$$

因此当 $n > N + m - 1$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
&|a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1| \\
\leqslant\ & |a_1 b_n + \cdots + a_m b_{n+1-m}| + |a_{m+1} b_{n-m} + \cdots + a_n b_1| \\
\leqslant\ & (|a_1| + \cdots + |a_m|) \frac{\varepsilon}{2(|a_1| + \cdots + |a_m| + 1)} + (|a_{m+1}| + \cdots + |a_n|) M \\
<\ & \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

于是引理得证.

定理 2 (Mertens) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 其和分别为 A 和 B. 如果两个级数中至少有一个是绝对收敛的, 那么它们的 Cauchy 乘积收敛, 且和等于 AB.

证明 不妨设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛. 记

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i+j=k+1} a_i b_j \right).$$

只需证明 $\lim_{n\to\infty} C_n = AB$. 这由下面的推导和引理即知.

$$\begin{aligned} C_n &= a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \cdots \\ &\quad + (a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1) \\ &= a_1B_n + a_2B_{n-1} + \cdots + a_nB_1 \\ &= a_1(B_n - B) + a_2(B_{n-1} - B) + \cdots + a_n(B_1 - B) + A_nB. \end{aligned}$$

定理 3 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 其和分别为 A 和 B. 如果它们的 Cauchy 乘积收敛, 则 Cauchy 乘积的和等于 AB.

例 3 由 D'Alembert 判别法知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 对一切实数 x 都绝对收敛, 设其和为 $E(x)$. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ 的 Cauchy 乘积为 $E(x)E(y)$. 因为

$$\sum_{n=0}^{m}\left(\sum_{i+j=n}\frac{x^i}{i!}\cdot\frac{y^j}{j!}\right)=\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!}\sum_{i+j=n}\frac{n!}{i!j!}x^iy^j$$
$$=\sum_{n=0}^{m}\frac{(x+y)^n}{n!}\to E(x+y)\quad(m\to\infty),$$

所以 $E(x)E(y)=E(x+y)$.

问题 1 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个非负数列满足 $a_{n+1} < a_n + b_n$, 而且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛. 求证 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在.

证明 记 $B_0 = 0$, $B_n = b_1 + \cdots + b_n$, $\lim_{n\to\infty} B_n = B$. 由条件, 有

$$a_{n+1} - B_n < a_n - B_{n-1}.$$

这说明数列 $\{a_n - B_{n-1}\}$ 单调递减有下界 $-B$, 因此, 这个数列收敛. 又 $\{B_{n-1}\}$ 收敛, 所以 $\{a_n\}$ 收敛.

问题 2 设 $\Phi(x)$ 是 $(0,\infty)$ 上正的严格增函数, 且 $\Phi(0)=0$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 是三个非负数列使得 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 且

$$a_{n+1} \leqslant a_n - b_n\Phi(a_n) + c_n a_n, \tag{1}$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

证明 由 (1) 知, 若 $a_k=0$, 则其后的 a_n 都为零. 因此, 不妨设 $a_n>0$. 若 $a_{n+1}\leqslant a_n$, 则 $\ln a_{n+1}-\ln a_n\leqslant c_n$. 若 $a_{n+1}>a_n$, 则

$$\ln a_{n+1}-\ln a_n = \ln\left(1+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right) < \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n} \leqslant c_n.$$

因此, 总有

$$\ln a_{n+1}-\ln a_n \leqslant c_n. \tag{2}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 对上式求和可知 $\{\ln a_n\}$ 有界, 因而 $\{a_n\}$ 有界. 再从 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 知 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k$ 收敛. 从 (1) 可得

$$a_{n+1} \leqslant a_n + c_n a_n,$$

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

根据问题1的结论知 $\{a_n\}$ 收敛.

若 $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n>0$, 则存在正数 δ 使得 $a_n>\delta$ 对一切 n 成立, 此时 $\Phi(a_n)>\Phi(\delta)$. 由 (1) 得

$$a_{n+1}+\Phi(\delta)b_n\leqslant a_n+c_na_n.$$

此式蕴含 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 这与条件不符. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

问题 3 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 若数列 $\{a_n - a_{n+1}\}$ 严格递减, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = +\infty$$

证明 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 所以 $a_n \to 0$, 因而 $a_n - a_{n+1} \to 0$, 又因为 $\{a_n - a_{n+1}\}$ 严格递减, 所以 $a_n - a_{n+1} > 0$.

$$\begin{aligned} 0 &< \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right)^{-1} = \frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} < \frac{a_n^2}{a_n - a_{n+1}} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k^2 - a_{k+1}^2}{a_n - a_{n+1}} = \sum_{k=n}^{\infty} (a_k + a_{k+1}) \frac{a_k - a_{k+1}}{a_n - a_{n+1}} \\ &\leqslant \sum_{k=n}^{\infty} (a_k + a_{k+1}) \to 0,\ \ n \to +\infty. \end{aligned}$$

所以结论成立.

问题 4 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 记 $r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$. 则对于 $0 < p < 1$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n^p}$ 收敛, 而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n^p} < \frac{1}{1-p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)^{1-p},$$

其中右端的系数 $\frac{1}{1-p}$ 是最佳的.

证明 显然 $r_n > 0$ 且 $\{r_n\}$ 单调递减趋于 0. 在 $[r_{n+1}, r_n]$ 上对函数 $f(x) = x^{1-p}$ 用中值定理, 得

$$r_n^{1-p} - r_{n+1}^{1-p} = (1-p)\frac{r_n - r_{n+1}}{\xi^p} = (1-p)\frac{a_n}{\xi^p},$$

其中 $\xi \in (r_{n+1}, r_n)$. 因此, 有

$$\frac{a_n}{r_n^p} < \frac{1}{1-p}(r_n^{1-p} - r_{n+1}^{1-p}).$$

由此得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{r_n^p} &< \frac{1}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty}(r_n^{1-p} - r_{n+1}^{1-p}) \\ &= \frac{1}{1-p}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)^{1-p}.\end{aligned}$$

取 $a_n = \frac{1}{a^n}$ $(a > 1)$. 则 $r_n = \frac{1}{(a-1)a^{n-1}}$. 因而

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n^p} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(a-1)^p}{a^{n-(n-1)p}} = \left(\frac{a-1}{a}\right)^p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(a^{1-p})^n} \\ &= \left(\frac{a-1}{a}\right)^p \frac{\frac{1}{a^{1-p}}}{1-\frac{1}{a^{1-p}}} = \left(\frac{a-1}{a}\right)^p \frac{1}{a^{1-p}-1} \\ &= \frac{(a-1)^p}{a-a^p}.\end{aligned}$$

又

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)^{1-p} = \frac{1}{(a-1)^{1-p}},$$

因此

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n^p} \Bigg/ \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)^{1-p} = \frac{a-1}{a-a^p} \to \frac{1}{1-p}, \quad (a \to 1^+).$$

这说明系数 $\frac{1}{1-p}$ 是最佳的.

问题 5 设 $\{a_n\}$ 是正的递增数列. 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界.

证明 (充分性) 若 $\{a_n\}$ 有界, 则收敛于 $a>0$. 令 $A_n=a_{n+1}-a_n$, $B_n=\frac{1}{a_n}$. 则 $\{B_n\}$ 单调递减趋于 $\frac{1}{a}$, 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛, 所以根据 Abel 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_nB_n$ 收敛, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛.

(必要性) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛于 S. 则有

$$\begin{aligned}S&>\sum_{n=1}^{m}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{a_n}\,dx\\&\geqslant\sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{x}\,dx=\int_{a_1}^{a_{m+1}}\frac{1}{x}\,dx=\ln a_{m+1}-\ln a_1.\end{aligned}$$

由此知 $\{a_n\}$ 有界.

问题 6 设 $\alpha > 0$, $\{a_n\}$ 是递增正数列. 求证级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}$ 收敛.

证明 因为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}^{\alpha+1}}=\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{dx}{a_{k+1}^{\alpha+1}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{dx}{x^{\alpha+1}}=\int_{a_1}^{a_{n+1}}\frac{dx}{x^{\alpha+1}}$$
$$=\frac{1}{\alpha}(a_1^{-\alpha}-a_{n+1}^{-\alpha})<\frac{1}{\alpha}a_1^{-\alpha}.$$

所以 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}^{\alpha+1}}$ 收敛. 显然级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_k^{\alpha}}-\frac{1}{a_{k+1}^{\alpha}}\right)$ 收敛, 因而级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}}\left(\frac{1}{a_k^{\alpha}}-\frac{1}{a_{k+1}^{\alpha}}\right)$$

收敛. 由

$$\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}a_k^{\alpha}}=\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}^{\alpha+1}}+\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}}\left(\frac{1}{a_k^{\alpha}}-\frac{1}{a_{k+1}^{\alpha}}\right)$$

知所给的级数收敛.

|◀　▶|　◀　▶　返回　全屏　关闭　退出