中国科学技术大学2018-2019学年第一学期
(数学分析(B1)期末考试试卷, 2019年1月11日)

一、(本题 10 分) 设 $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$. 求 $f^{(n)}(0)$.

解　e^x 的幂级数展开为 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$, $\frac{1}{1-x}$ 的幂级数展开为 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. 根据级数的 Cauchy 乘积, 有

$$f(x) = \frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

其中

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

(........... 6 分)

根据幂级数的知识, 应有 $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. 故,

$$f^{(n)}(0) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

(........... 10 分)

解法2　显然在 0 的一个小邻域内, $f(x)$ 有任意阶导数. 对 $(1-x)f(x) = e^x$ 两边求 n 阶导数, 得

$$(1-x)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x) = e^x.$$

特别有

$$f^{(n)}(0) = 1 + nf^{(n-1)}(0).$$ (........... 6 分)

注意到 $f(0) = 1$, 利用上式可归纳可证明

$$f^{(n)}(0) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

(........... 10 分)

二、 (本题 20 分, 每小题 5 分) 求积分和不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{2x}}\,dx$;　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x^2-x-1}\,dx$;

(3) $\displaystyle\int_0^1 x\arctan x\,dx$;　　(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$.

解 (1)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^{2x}}\,dx &= \int \left(1-\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)\,dx = x - \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx \\ &= x - \frac{1}{2}\int \big(\ln(1+e^{2x})\big)'\,dx \\ &= x - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+x^2-x-1}\,dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx \\ &= \int \left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)-\frac{1}{2(x+1)^2}\right]dx \\ &= \frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+C\end{aligned}$$

注意, 不写常数 C 扣 1 分.

(3)

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\arctan x\,dx &= \frac{1}{2}x^2\arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx \\ &= \frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi-2}{4}.\end{aligned}$$

(4) 作变换 $t=\sqrt{x-1}$, 有

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)t}\cdot 2t\,dt = 2\arctan t\Big|_0^{+\infty} = \pi.$$

三、(本题 20 分, 每小题 10 分) 求解下面的微分方程:

(1) 求 $(1+x^2)y''+2xy'=x$ 的通解.

解 原方程可写为 $((1+x^2)y')'=x$. 故,

$$(1+x^2)y'=\frac{1}{2}x^2+C_1.$$

因此

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{C_0}{1+x^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}+\frac{C_0}{1+x^2}.$$

故,

$$y=\frac{1}{2}x+C_1+C_2\arctan x.$$

(2) 求 $y''-3y'+2y=2x-3$ 的通解.

解 相应的齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$, 有两个实根 $\lambda_1=1$ 和 $\lambda_2=2$. 故, 齐次方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$. 显然 $y=x$ 是原方程的一个特解. 故, 原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+x.$$

四、 (本题 10 分) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上连续函数. 求证:

$$\int_0^{\pi}xf(|\cos x|)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)\,dx.$$

证明

$$\int_0^{\pi}xf(|\cos x|)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}xf(|\cos x|)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}xf(|\cos x|)\,dx.$$

对上式右边第二个积分作变换 $t=\pi-x$, 得

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}xf(|\cos x|)\,dx&=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\pi-t)f(|\cos t|)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-t)f(|\cos t|)dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-x)f(|\cos x|)dt.\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^{\pi}xf(|\cos x|)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)\,dx.$$

五、 (本题 10 分) 研究函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^2}{n^x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上是否一致收敛.

解 函数 $u_n(x)=\frac{(x-1)^2}{n^x}$ 的导数为 $u_n'(x)=\frac{(x-1)(2-(x-1)\ln n)}{n^x}$, 当 $n\geqslant 2$ 时, 它在 $(1,1+\frac{2}{\ln n})$ 为正, 在 $(1+\frac{2}{\ln n},+\infty)$ 为负. 因此 $u_n(x)$ 在 $x=1+\frac{2}{\ln n}$ 取最大值

$$\frac{4}{n^{1+\frac{2}{\ln n}}\cdot\ln^2 n}<\frac{4}{n\ln^2 n}.$$

因为级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ 收敛, 所以根据 Weierestrass 判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^2}{n^x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上一致收敛.

注意, 只写出一致收敛的结论而不证明, 或证明完全错误都得 2 分.

六、 (本题 10 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛区域以及和函数.

解 设 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$. 则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+2}\to 1\ (n\to\infty).$$

故, 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛半径为 1. 当 $x=1$ 和 $x=-1$ 时, 该幂级数显然收敛. 故, 收敛区域为 $[-1,1]$. (........... 4 分)

令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. 则 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$. 故, $f(x)=-\ln(1-x)$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)x^n=f(x)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n\\&=f(x)-\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n}=f(x)-\frac{1}{x}(f(x)-x)\\&=(1-\frac{1}{x})f(x)+1\\&=\frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1.\end{aligned}$$

(........... 10 分)

座位号:________ 考场:________ 所在院系:________ 姓名:________ 学号:________

密封线 答题时不要超过此线

七、(本题 10 分) 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 满足

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} + \frac{1}{n^2}, \quad (n \geqslant 2).$$

试证明 (1) $\frac{a_n n \ln n}{a_{n+1}(n+1)\ln(n+1)} < 1 + \frac{1}{n^2}$; (2) 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ 发散.

证明 因为 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$ $(n \geqslant 2)$, 所以根据条件, 有

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}} &\leqslant 1 + \frac{1}{n} + \frac{n+1}{n \ln n} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n^2} \\
&< 1 + \frac{1}{n} + \frac{n+1}{n \ln n} \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n} + \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

令 $c_n = (n \ln n) a_n$, 则从上式可得

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n^2}.$$

.... (5 分)

取对数, 得

$$\ln c_n - \ln c_{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

于是

$$\ln c_2 - \ln c_n < \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k^2},, \ (n \geqslant 3).$$

由于 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛. 故, 由上式可知存在常数 c 使得

$$c \leqslant \ln c_n, \ (n \geqslant 3).$$

即,

$$a_n \geqslant \frac{e^c}{n \ln n}, \ (n \geqslant 3).$$

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, 所以由上式可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. .... (10 分)

八、（本题 10 分）设 f 是 $\mathbb{R}$ 上取值为正的可微函数, 且对所有 $x, y \in \mathbb{R}$, 有

$$|f'(x)-f'(y)|^2 \leqslant |x-y|.$$

求证: 对所有 $x \in \mathbb{R}$, 有 $\left|f'(x)\right|^3 < 3f(x)$.

证明 对固定的 $x \in \mathbb{R}$, 若 $f'(x)=0$, 则 $\left|f'(x)\right|^3 < 3f(x)$ 成立. 记 $h=(f'(x))^2$. 并设 $h \neq 0$.

若 $f'(x)<0$, 则根据 Newton-Leibniz 公式和条件, 得

$$\begin{aligned}
0 < f(x+h) &= f(x) + \int_x^{x+h} f'(t)\,dt \\
&= f(x) + \int_x^{x+h} \big(f'(t)-f'(x)\big)\,dt + f'(x)h \\
&\leqslant f(x) + \int_x^{x+h} (t-x)^{\frac{1}{2}}\,dt + f'(x)h \\
&= f(x) + \frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}} + f'(x)h.
\end{aligned}$$

故

$$\frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}} + f'(x)h + f(x) > 0. \qquad (\ldots\ldots\ 5\text{ 分})$$

将 $h=(f'(x))^2$ 代入上式, 即得

$$\left|f'(x)\right|^3 < 3f(x).$$

若 $f'(x)>0$, 则根据 Newton-Leibniz 公式和条件, 得

$$\begin{aligned}
0 < f(x-h) &= -\int_{x-h}^{x} f'(t)\,dt + f(x) \\
&= \int_{x-h}^{x} \big(f'(x)-f'(t)\big)\,dt - f'(x)h + f(x) \\
&\leqslant \int_{x-h}^{x} (x-t)^{\frac{1}{2}}\,dt - f'(x)h + f(x) \\
&= \frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}} - f'(x)h + f(x).
\end{aligned}$$

将 $h=(f'(x))^2$ 代入上式, 仍得

$$\left|f'(x)\right|^3 < 3f(x).$$

总之, 始终有 $\big(f'(x)\big)^3 < 3f(x)$. 证毕. .... (10 分)