运筹学Ⅱ习题

第一次作业：2，3，5，6，7，9，10

2、该系统为最简单的 $M/M/1/\infty/\infty$ 模型，$\lambda=4$，$\mu=10$

(1) P_0 (2) P_3 (3) $1-P_0$ (4) L_s (5) W_s (6) L_q (7) W_q

(8) 必须在店内消耗 15 分钟以上的概率即$W>15\ min$ 的概率。用公式$(12-20)$，有

$$P(W>15\,min)=1-F\left(\frac{15}{60}\right)=e^{-\frac{\mu-\lambda}{4}}=e^{-\frac{3}{2}}=0.2231$$

3、该系统为最简单的 $M/M/1/\infty/\infty$ 模型，$\lambda=3$，$\mu=4$

(1) P_0 (2) L_s (3) W_s (4) $W_s=\frac{1}{\mu-\lambda}>1.25$

5、(1) 等待所费时间为 W_q，服务时间为 $\frac{1}{\mu}$

根据定义 $R=W_q\mu=\frac{\rho\mu}{\mu-\lambda}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$

6、在单服务台系统中，每次接受服务的只有一个人。系统中的顾客数=队列中等候的顾客数+正在服务的顾客数：$n_s=n_q+1$

$$E(n_s)=L_s=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n$$

$$E(n_q)=L_q=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n-\sum_{n=1}^{\infty}P_n=L_s-(1-P_0)=L_s-\rho$$

7、单服务台模型

(1) 每天损失的期望值=每个工人平均在系统中时间 X 每天平均工人到达数 X 每个工人每小时给工厂造成的损失=$W_s*\lambda*24*30=2880$ 元

(2) 工厂每天损失减少一半需要 W_s 减少一半。

9、虽然 $\lambda=\mu$ ，但是系统的状态转移过程没变，因此

$$\begin{cases}\lambda P_0=\mu P_1\\ \mu P_{n+1}+\lambda P_{n-1}=(\lambda+\mu)P_n, n\le N-1\\ \mu P_N=\lambda P_{N-1}\end{cases}$$

可以得出 $P_0=P_1=\cdots=P_N$，所以 $\sum_{n=0}^{N}P_n=1\Longrightarrow P_0=P_1=\cdots=P_N=\frac{1}{N+1}$

$$L_s=\sum_{n=0}^{N}nP_n=\frac{N}{2}$$

10、根据 (13 − 24) 和第 9 题，有

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\rho^n & \lambda \neq \mu \\ \dfrac{1}{N+1} & \lambda = \mu \end{cases}$$

当 $\lambda = \mu$ 时：

$$\lambda(1-P_N) = \mu(1-P_0)$$

当 $\lambda \neq \mu$ 时：

$$\lambda(1-P_N) = \lambda\left(1-\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\rho^N\right) = \lambda\frac{1-\rho^{N+1}-\rho^N+\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}}$$
$$= \lambda\frac{1-\rho^N}{1-\rho^{N+1}} = \mu\frac{\rho-\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}} = \mu(1-P_0)$$

第二次作业：11，12，13，15，16

11、题目改为：完成每个工作满足平均 0.25 小时的指数分布。$\lambda = 3$，$\mu = 4$。
在 90% 的时间里容下全部达到的工作，即 $1-P_N = 0.9$。每次只能执行一个工作说明是单服务台模型。

$$1-\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\rho^N = 0.9 \Rightarrow N = \log_{\frac{3}{4}}\frac{4}{13} \approx 4$$

12、本题为 $M/M/1/N/\infty$ 模型，用 (13 − 24) 和 (13 − 25) 进行求解。

13、本题为 $M/M/2$ 排队模型

(1) $\frac{\lambda}{\mu} > 1$，系统的流入量大于流出量，无法及时处理到来的顾客，队伍会无限制增长。

(2) 求 P_0 和 $P(n \geq 2) = 1 - P_0 - P_1$

(3) 用 (13 − 29) 和 (13 − 30) 求解

15、根据 (13 − 27) 用定义证明：

$$L_s = \sum_{n=0}^{m} nP_n = \sum_{n=0}^{m} n\frac{m!}{(m-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

原证明问题可以变换为：

$$\sum_{n=0}^{m} n\frac{m!}{(m-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 - \frac{\mu}{\lambda}P_0 = m - \frac{\mu}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{m} n\frac{m!}{(m-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n - \frac{\mu}{\lambda} = (m-\frac{\mu}{\lambda})\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{(m-i)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{m} \frac{(m-n)m!}{(m-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \left(\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{(m-i)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i - 1\right)\frac{\mu}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{m} \frac{m!}{(m-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} = \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{(m-i)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i} - 1$$

等式成立，即可得 $L_s = m - \frac{\mu(1-P_0)}{\lambda}$

16、(1) 根据 $(13-29)$ 用定义证明：

$$L_s - L_q = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n - \sum_{n=c+1}^{\infty}(n-c)P_n = \sum_{n=0}^{c} nP_n + c\sum_{n=c+1}^{\infty} P_n = c - \sum_{n=0}^{c}(c-n)P_n$$

$$= \mathrm{c} - \sum_{n=0}^{c}(c-n)\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathrm{n}} P_0 = \mathrm{c} - \frac{\sum_{n=0}^{c}(c-n)\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathrm{n}}}{\sum_{k=0}^{c}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k} + \frac{1}{c!} * \frac{\rho}{1-\rho} * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c}}$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{c} n\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathrm{n}} + c * \frac{1}{c!} * \frac{\rho}{1-\rho} * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c}}{\sum_{k=0}^{c}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k} + \frac{1}{c!} * \frac{\rho}{1-\rho} * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c}} = \frac{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathrm{n}} * \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{c!} * \frac{1}{1-\rho} * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c} * \frac{\lambda}{\mu}}{\sum_{k=0}^{c-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k} + \frac{1}{c!} * \frac{1}{1-\rho} * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c}} = \frac{\lambda}{\mu}$$

证明完毕

第三次作业：17，18，19，20，21，22

17、(1) 起飞和降落跑道为两个独立的 $M/M/1$ 模型，$\lambda = 25$，$\mu = 30$。即求等待时间 $W_q = \frac{1}{6}h = 10\,min$

(2) 两个跑道公用之后为 $M/M/2$ 模型，$\lambda = 50$，$\mu = \frac{60}{2.16}$。套用公式求 $W_q = 0.153h$

(3) 通过计算可得第二种办法的等待时间比第一种少，所以第二种好。

18、使用公式 $(13-36)$：

$$\frac{W_s}{\frac{1}{\lambda} + W_s} = \frac{\frac{L_s}{\lambda(m-L_s)}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{L_s}{\lambda(m-L_s)}} = \frac{L_s}{m}$$

19、该系统为 $M/G/1$ 模型，$\lambda = 0.4$，$\mu = 0.625$。根据题意，使用自动售票机服务时间将减少 20%。根据此时服务时间分布的概率密度函数，可以求出 $Var(z) = 0.64$。使用 $P-K$ 公式：

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 Var[z]}{2(1-\rho)} = 1.35$$

$L_q = L_s - \rho$，$W_s = \frac{L_s}{\lambda}$，$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$

20、使用 $P-K$ 公式求 L_s

21、题目改为核对每份申请书的每张表格需要 1 分钟。该系统为 Erlang 服务时间 $M/E_k/1$ 模型。使用公式 $(13-40)$ 求 P_0, L_s, L_q, W_s, W_q

22、对单服务台模型，有

$$L_q = \frac{(k+1)\rho^2}{2k(1-\rho)}$$

$$W_q = \frac{(k+1)\rho^2}{2k\lambda(1-\rho)}$$

令 $\mathrm{k}=1$ 即为负指数服务队列，即 $M/M/1$ 模型

$$L_q^{(2)} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$W_q^{(2)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

令 $\mathrm{k}\longrightarrow\infty$ 即为定长服务队列，即 $M/D/1$ 模型

$$L_q^{(1)} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = L_q^{(2)}/2$$

$$W_q^{(1)} = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)} = W_q^{(2)}/2$$