运筹学教程答案

胡运权主编　　郭耀煌副主编

清华大学出版社（第四版）

贡献者：　愚庸

QQ:1315028362

第一章

线性规划与单纯形法

内容提要

一、线性规划的实际模型

1.规划问题数学模型三个要素

(1) 决策变量

(2) 目标函数

(3) 约束条件

2.线性规划问题的数学模型

(1)一般形式

目标函数：$\max(\text{或}\min) z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

约束条件：$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (=,\geqslant) b_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ x_j \geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$

其中 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$为决策变量，$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$为工艺系数，$b_i(i=1,2,\cdots,m)$为资源系数，$c_j(j=1,2,\cdots,n)$为价值系数。

(2)标准型式(也称规范形式)

$$\max z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ x_j \geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

二、线性规划的求解方法

1. 图解法

(1)优缺点：

① 图解法：图解法简单直观，求解线性规划问题时不需将数学模型化为标准型，可以直接在平面上作图，但此法只适用于二维问题，故有一定局限性。

②用图解法求解，有助于了解线性规划问题求解的基本原理。它可以直接看出线性规划问题解的几种情况：

1° 有惟一最优解；

2° 有无穷多组最优解；

3° 无可行解；

4° 无有限最优解(即为无界解)。

(2)图解法的步骤：

① 建立平面直角坐标系；

② 图示约束条件，找出可行域；

③ 图示目标函数，即为一条直线；

④ 将目标函数直线沿其法线方向在可行域内向可行域边界平移直至目标函数。

2. 单纯形法

(1)单纯形法原理

①基本思想：从可行域中的某个基本可行解开始到另一个基本可行解，直到目标函数达到最优。

②理论基础：

定理 1 若 LP 问题可行域存在，则可行域是个凸集。

定理 2 LP 问题的基可行解与可行域的顶点一一对应。

定理 3 若 LP 问题存在最优解，则一定存在一个基可行解是最优解。

(2) 单纯形法的步骤及解法

① 找出初始可行基，确定初始基本可行解，建立初始单纯形表。

②检验此基本可行解是否为最优解. 即检验各非基变量 x_j 的检验数 σ_j，若所有 $\sigma_j \leqslant 0(j=m+1,\cdots,n)$ 则已经得到最优解，计算停止；否则转下一步。

③在 $\sigma_j>0(j=m+1,\cdots,n)$ 中若有某个检验数 σ_k 对应的非基变量 x_k 的系数列向量 $P_k=(a_{1k},a_{2k},\cdots,a_{mk})^{\mathrm{T}}\leqslant 0$，则此问题为无界解，停止计算；否则转下一步。

④ 根据 $\max(\sigma_j>0)=\sigma_k$，确定非基变量 x_k 为换入变量；再根据 θ 法则

$$\theta=\min_i\left(\frac{b_i}{a_{ik}}\,\middle|\,a_{ik}>0\right)=\frac{b_l}{a_{lk}}$$

确定基变量 x_l 为换出变量。

⑤ 实施枢轴运算，即以 a_{lk} 为主元素进行枢轴运算(亦即进行矩阵的行变换)，使 P_k 变换为第 l 行的元素为 1，其余的元素为 0；并将 X_B 列中的 x_l 换为 x_k，从而得新的单纯形表；重复②～⑤，直到终止。

3. 两阶段法、大 M 法以及运用人工变量法求解非规范型的线性规划问题

(1)两阶段法

① 原理:此方法是将加入人工变量后的线性规划问题分成两个阶段来求解。

第一阶段:其目的是为原问题求初始基本可行解。为此,对于求极大化(或极小化)的线性规划问题,建立一个新的人工变量的目标函数——人工变量的系数均为-1或$(+1)$,对新的问题:

$$\max w=-x_{n+1}-x_{n+2}-\cdots-x_{n+m}$$

或

$$\min w=x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+m}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1} & =b_1\\ \quad\cdots & \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n & +x_{n+m}=b_m\\ x_1,\cdots,x_n\geqslant 0,x_{n+1},\cdots,x_{n+m}\geqslant 0\end{cases}$$

用单纯形法求解.若 $w=0$,即所有的人工变量都变换为非基变量,说明原问题已得到了初始基本可行解;反之,若目标函数 w 的值为负(或为正),则人工变量中至少有一个为正,这表示原问题无可行解,应停止计算。

第二阶段:将第一阶段求得的基本可行解对原问题的目标函数进行优化,即将目标函数换成原目标函数,以第一阶段得到的最终单纯形表除去人工变量的列后作为第二阶段计算的初始表,继续用单纯形法以求得问题的最优解。

② 计算方法:单纯形法。

(2)大 M 法

① 原理:人工变量在目标函数中的系数确定:若目标函数为 $\max z$,则系数为 $-M$;否则为 M。

② 计算方法:单纯形法。

三、了解线性规划的解及其几何意义

1. 可行解:凡满足线性规划约束条件的解称为可行解。
2. 最优解:使目标函数达到最大的可行解称为最优解。
3. 基:设 A 是约束方程组 m×n 维系数矩阵,其秩为 m,B 是矩阵 A 中 m×n 阶非奇异子矩阵,则称 B 是线性规划问题的一个基。
4. 解的几何意义:

(1)若线性规划问题有可行解,其所有可行解构成的区域称为可行域,则此可行域

$$D=\{X\mid\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,i=1,2,\cdots,m;x_j\geqslant 0\}$$

必是一个凸集。

(2)线性规划问题的基本可行解与可行域 D 的顶点一一对应。

(3)如果线性规划问题有有限的最优解,则其目标函数的最优值一定可以在可行域的顶点上达到。

典型例题与解题技巧

【例 1】 市场对Ⅰ、Ⅱ两种产品的需求量为:产品Ⅰ在 1~4 月每月需 10 000 件,5~9 月每月 30 000 件,10~12 月为每月 150000 件;产品Ⅱ在 3~9 月每月 15 000 件,其他月每月 50 000 件。某厂生产这两种产品成本为:产品Ⅰ在 1~5 月内生产每件 5 元,6~12月内生产每件 4.50 元;产品Ⅱ在 1~5 月内生产每件 8 元,6~12 月内生产每件 7 元。该厂每月生产两种产品能力总和应不超过 120 000 件。产品Ⅰ容积每件 $0.2m^3$,产品Ⅱ每件 $0.4m^3$,而该厂仓库容积为 $15\ 000m^3$,要求:(a)说明上述问题无可行解;(b)若该厂仓库不足时,可从外厂租借。若占用本厂每月每 m^3 库容需 1 元,而租用外厂仓库时上述费用增加为 1.5 元,试问在满足市场需求情况下,该厂应如何安排生产,使总的生产加库存费用为最少(建立模型,不需求解)。

解题分析 要建立线性规划的数学模型,需从三个方面进行考虑:第一,决策变量是什么;第二,要达到什么样的目标,即目标函数的表达式;第三,如果要达到目标,受哪些条件约束。此题属供求问题,供求问题需从供应和需求入手。

解题过程 (a) 因 10~12 月份需求总计 450 000 件,这三个月最多只能生产 360 000 件,故需 10 月初有 90 000 件的库存,超过该厂最大仓库容积,故按上述条件,本题无解;

(b) 考虑到生产成本、库存费用和生产能力,该厂 10~12 月份需求的不足只需在 7~9 月份生产出来留用即可,故设

x_i——第 i 个月生产的产品Ⅰ数量,

y_i——第 i 个月生产的产品Ⅱ数量,

z_i,w_i 分别为第 i 个月末产品Ⅰ、Ⅱ库存数,

s_{1i},s_{2i}分别为用于第$(i+1)$个月库存的原有及租借的仓库容积(m^3)。则可建立如下模型

$$\min z=\sum_{j=7}^{12}(4.5x_i+7y_i)+\sum_{i=7}^{11}(s_{1i}+1.5s_{2i})$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_7-30\ 000=z_7 & y_7-15\ 000=w_7 \\ x_8+z_7-30\ 000=z_8 & y_8+w_7-15\ 000=w_8 \\ x_9+z_8-30\ 000=z_9 & y_9+w_8-15\ 000=w_8 \\ x_{10}+z_9-100\ 000=z_{10} & y_{10}+w_9-50\ 000=w_{10} \\ x_{11}+z_{10}-100\ 000=z_{11} & y_{11}+w_{10}-50\ 000=w_{11} \\ x_{12}+z_{11}=100\ 000 & y_{12}+w_{11}=50\ 000 \\ x_i+y_i\leqslant 120\ 000 & (7\leqslant i\leqslant 12) \\ 0.2z_i+0.4w_i=s_{1i}+s_{2i} & (7\leqslant i\leqslant 11) \\ s_{1i}\leqslant 15\ 000 & (7\leqslant i\leqslant 12) \\ x_i,y_i,z_i,w_i,s_{1i},s_{2i}\geqslant 0 \end{cases}$$

【例 2】 $\max z=2x_1+4x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2\leqslant 6\\x_1+2x_2\leqslant 8\\x_2\leqslant 3\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解题分析　题目中只有两个变量,故可用单纯形方法求解外还可用图解法求解。而图解法比单纯形法简单直观,故用图解法求解。

解题过程　图解法求解:

① 建立平面直角坐标系,确定决策变量的可行域。如图 1－1(a)所示,区域 $0ABCD$ 为可行域。

图 1-1(a)

图 1-1(b)

② 画出目标函数等值线,确定优化方向。

目标函数为 $z=2x_1+4x_2$ 是斜率为 $-1/2$,在纵轴上的截距为 $z/4$ 的平行直线族。若取 z 为一确定的值,如令 $z=0$,则得一条等值线 $0=2x_1+4x_2$,即 $x_2=-x_1/2$;如令 $z=12$,则得另一条等值线 $12=2x_1+4x_2$,即 $x_2=-x_1/2+3$,如图 1-1(b)所示。容易看出,沿着目标函数的法线方向向右上方平行移动,是它等值线的优化方向。

③ 确定最优解。

在可行域 $0ABCD$ 中找令 z 值达到最大的点。由图 1-1(b)容易看出,当等值

线平移到 C 点时，如果继续向上移，就离开了可行域，而且此时等值线的最佳位置与可行域边界 CB 重合。因此 C 点、B 点以及线段 CB 上所有的点，都是使目标函数值达到最大值的点，是最优解。

求得 C 点 $\boldsymbol{X}_C=(2,3)^{\mathrm{T}}$ 与 B 点 $\boldsymbol{X}_B=(4,2)^{\mathrm{T}}$，此时求得 $\max z=16$。目标函数 $z=2x_1+4x_2$ 的通解可表示为 $\boldsymbol{X}=a\boldsymbol{X}_C+(1-a)\boldsymbol{X}_B, 0\leqslant a\leqslant 1$。

历年考研真题评析

【题】 (2005 年华南理工大学)设某种动物每天至少需要 700 克蛋白质、30 克矿物质、100 毫克维生素。现有 5 种饲料可供选择，每种饲料每公斤营养成份的含量及单价如下表所示：

试建立既满足动物生长需要，又使费用最省的选用饲料方案的线性规划模型。

表 1-1

饲料	蛋白质(克)	矿物质(克)	维生素(毫克)	价格(元/公斤)
1	3	1	0.5	0.2
2	2	0.5	1	0.7
3	1	0.2	0.2	0.4
4	6	2	2	0.3
5	18	0.5	0.8	0.8

解题分析 这是一道较简单的数学规划模型问题，根据题意写出约束即可。

解题过程 $\min z=0.2x_1+0.7x_2+0.4x_3+0.3x_4+0.8x_5$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3+6x_4+18x_5\geqslant 700\\ x_1+0.5x_2+0.2x_3+2x_4+0.5x_5\geqslant 30\\ 0.5x_1+x_2+0.2x_3+2x_4+0.8x_5\geqslant 100\\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}$$

课后习题全解

○ 1.1 用图解法求解下列线性规划问题，并指出问题是具有惟一最优解、无穷多最优解、无界解还是无可行解？

(1) $\max z=x_1+3x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}5x_1+10x_2\leqslant 50\\ x_1+x_2\geqslant 1\\ x_2\leqslant 4\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $\min z=x_1+1.5x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+3x_2\geqslant 3\\ x_1+x_2\geqslant 2\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(3) $\max z=2x_1+2x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1-x_2\geqslant -1\\ -0.5x_1+x_2\leqslant 2\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(4) $\max z=x_1+x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1-x_2\geqslant 0\\ 3x_1-x_2\leqslant -3\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解 (1) 图 1－2 中的阴影部分为此线性规划问题的可行域，目标函数 $z=x_1+3x_2$，即 x_2

$=-\frac{1}{3}x_1+\frac{z}{3}$是斜率为$-\frac{1}{3}$的一族平行线，易知 $x_1=3,x_2=0$ 为可行解，由线性规划的性质知，其最值在可行域的顶点取得，将直线 $x_1+3x_2=3$ 沿其法线方向逐渐向上平移，直至 A 点，A 点坐标为(2,4)。

图 1—2

所以
$$\max z=2+3\times 4=14$$
此线性规划问题有惟一最优解。

(2) 图 1—3 中的阴影部分为此线性规划问题的可行域，目标函数 $z=x_1+1.5x_2$，即 $x_2=-\frac{2}{3}x_1+\frac{2}{3}z$ 是斜率为$-\frac{2}{3}$的一族平行线，易知 $x_1=3,x_2=0$ 为可行解，由线性规划的性质知，其最值在可行域的顶点取得。

将直线 $x_1+1.5x_2=3$ 沿其法线方向逐渐向下平移，直至 B 点，B 点坐标为$\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

所以
$$\min z=\frac{3}{2}+1.5\times\frac{1}{2}=\frac{9}{4}$$
此线性规划问题有惟一最优解。

图 1—3

(3) 图 1—4 中阴影部分为线性规划问题的可行域，目标函数 $z=2x_1+2x_2$，即

$x_2=-x_1+\frac{z}{2}$是斜率为-1 的一族平行线，易知 $x_1=0,x_2=0$ 为可行解。在将直线 $2x_1+2x_2=0$ 沿 A 其法线方向逐渐向上平移的过程中发现：目标函数的值可以增加到无穷大。故此线性规划问题为无界解。

图 1—4

图 1—5

(4) 如图 1—5 所示，此问题的可行域为空集，故此线性规划问题无可行解。

◎1.2 将下列线性规划问题变换成标准型，并列出初始单纯形表。

(1) $\min z=-3x_1+4x_2-2x_3+5x_4$

$$\text{s.t.}\begin{cases}4x_1-x_2+2x_3-x_4=-2\\ x_1+x_2+3x_3-x_4\leqslant 14\\ -2x_1+3x_2-x_3+2x_4\geqslant 2\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0,x_4\text{ 无约束}\end{cases}$$

(2) $\max s=z_k/p_k$

$$\begin{cases}z_k=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m}a_{ik}x_{ik}\\ \sum\limits_{k=1}^{m}-x_{ik}=-1 \qquad (i=1,\cdots,n)\\ x_{ik}\geqslant 0 \qquad (i=1,\cdots,n;k=1,\cdots,m)\end{cases}$$

分析 本题考查了线性规划问题的标准形式和初始单纯形表。

解 (1) 将此线性规划问题化为标准型。

令 $x_4=x_5-x_6,z'=-z$

其中 $x_5,x_6\geqslant 0$

所以 $\max z'=-\min(-z')=-\min z$

则得到标准型为

$\max z'=3x_1-4x_2+2x_3-5(x_5-x_6)+0\cdot x_7+0\cdot x_8-Mx_9-Mx_{10}$

$$
\text{s. t.}\begin{cases}-4x_1+x_2-2x_3+x_5-x_6+x_{10}=2\\ x_1+x_2+3x_3-x_5+x_6+x_7=14\\ -2x_1+3x_2-x_3+2x_5-2x_6-x_8+x_9=2\\ x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}\geqslant 0\end{cases}
$$

其中 M 是一个任意大的正数。

初始单纯形表见表 1—2。

表 1—2

$c_j\rightarrow$			3	-4	2	-5	5	0	0	$-M$	$-M$	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	
$-M$	x_{10}	2	-4	1	-2	1	-1	0	0	0	1	2
0	x_7	14	1	1	3	-1	1	1	0	0	0	14
$-M$	x_9	2	-2	[3]	-1	2	-2	0	-1	1	0	$\frac{2}{3}$
$-z'$		$4M$	$3-6M$	$4M-4$	$2-3M$	$3M-5$	$5-3M$	0	$-M$	0	0	

（2）在上述问题的约束条件中加入人工变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，得

$$
\max s=\frac{1}{p_k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}x_{ik}-Mx_1-Mx_2-\cdots-Mx_n
$$

$$
\text{s. t.}\begin{cases}x_i+\sum\limits_{k=1}^{m}x_{ik}=1\quad(i=1,2,\cdots,n)\\ x_{ik}\geqslant 0,x_i\geqslant 0\quad(i=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots,m)\end{cases}
$$

其中 M 是一个任意大的正数。

初始单纯形表见表 1—3。

表 1—3

c_j			$-M$	$-M$	…	$-M$	$\frac{a_{11}}{p_k}$	$\frac{a_{12}}{p_k}$	…	$\frac{a_{1m}}{p_k}$	…	$\frac{a_{n1}}{p_k}$	$\frac{a_{n2}}{p_k}$	…	$\frac{a_{nm}}{p_k}$	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	…	x_n	x_{11}	x_{12}	…	x_{1m}	…	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nm}	
$-M$	x_1	1	1	0	…	0	1	1	…	1	…	0	0	…	0	
$-M$	x_2	1	0	1	…	0	0	0	…	0	…	0	0	…	0	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮	
$-M$	x_n	1	0	0	…	1	0	0	…	0	…	1	1	…	1	
$-s$		nM	0	0	…	0	$\frac{a_{11}}{p_k}+M$	$\frac{a_{12}}{p_k}+M$	…	$\frac{a_{1m}}{p_k}+M$	…	$\frac{a_{n1}}{p_k}+M$	$\frac{a_{n2}}{p_k}+M$	…	$\frac{a_{nm}}{p_k}+M$	

◎1.3 在下面的线性规划问题中找出满足约束条件的所有基解，指出哪些是基可行解，并代入目标函数，确定哪一个是最优解。

(1) $\max z=2x_1+3x_2+4x_3+7x_4$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3-4x_4=8\\x_1-2x_2+6x_3-7x_4=-3\\x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $\max z=5x_1-2x_2+3x_3-6x_4$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=7\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=3\\x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

分析 本题考查了线性规划问题的基本解的计算。

解 (1)在第二个约束条件两边同时乘以-1，则第二个约束条件转化为

$$-x_1+2x_2-6x_3+7x_4=3$$

从而，x_1 的系数列向量 $P_1=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$，$x_2$ 的系数列向量 $P_2=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$，$x_3$ 的系数列向量 $P_3=\begin{bmatrix}-1\\-6\end{bmatrix}$，$x_4$ 的系数列向量 $P_4=\begin{bmatrix}-4\\7\end{bmatrix}$。

① 因为 P_1、P_2 线性独立，故有

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=8+x_3+4x_4\\-x_1+2x_2=3+6x_3-7x_4\end{cases}$$

令非基变量 $x_3=x_4=0$，得$\begin{cases}x_1=1\\x_2=2\end{cases}$

从而得到一个基本可行解

$$X^{(1)}=(1,2,0,0)^{\mathrm{T}},z_1=2\times1+3\times2=8$$

② 因为 P_1、P_3 线性独立，故有

$$\begin{cases}2x_1-x_3=8-3x_2+4x_4\\-x_1-6x_3=3-2x_2-7x_4\end{cases}$$

令非基变量 $x_2=x_4=0$，得$\begin{cases}x_1=\dfrac{45}{13}\\x_3=-\dfrac{14}{13}\end{cases}$

从而得到一个基本解

$$X^{(2)}=(\frac{45}{13},0,-\frac{14}{13},0)^{\mathrm{T}}$$

因为 $x_3=-\dfrac{14}{13}<0$，所以该解是非可行解。

③ 因为 P_1、P_4 线性独立，故有

$$\begin{cases}2x_1-4x_4=8-3x_2+x_3\\-x_1+7x_4=3-2x_2+6x_3\end{cases}$$

令非基变量 $x_2=x_3=0$，得$\begin{cases}x_1=\dfrac{34}{5}\\x_4=\dfrac{7}{5}\end{cases}$

从而得到一个基可行解

$$X^{(3)}=(\frac{34}{5},0,0,\frac{7}{5})^{\mathrm{T}},z_3=2\times\frac{34}{5}+7\times\frac{7}{5}=\frac{117}{5}$$

④ 因为 P_2、P_3 线性独立，故有

$$\begin{cases}3x_2-x_3=8-2x_1+4x_4\\2x_2-6x_3=3+x_1-7x_4\end{cases}$$

令非基变量 $x_1=x_4=0$，得$\begin{cases}x_2=\dfrac{45}{16}\\x_3=\dfrac{7}{16}\end{cases}$

从而得到一个基可行解

$$X^{(4)}=(0,\frac{45}{16},\frac{7}{16},0)^{\mathrm{T}},z_4=3\times\frac{45}{16}+4\times\frac{7}{16}=\frac{163}{16}$$

⑤ 因为 P_2、P_4 线性独立，故有

$$\begin{cases}3x_2-4x_4=8-2x_1+x_3\\2x_2+7x_4=3+x_1+6x_3\end{cases}$$

令非基变量 $x_1=x_3=0$，得$\begin{cases}x_2=\dfrac{68}{29}\\x_4=-\dfrac{7}{29}\end{cases}$

从而得到一个基本解

$$X^{(5)}=(0,\frac{68}{29},0,-\frac{7}{29})^{\mathrm{T}}$$

因为 $x_4=-\frac{7}{29}<0$，所以该解是非可行解。

⑥ 因为 P_3、P_4 线性独立，故有

$$\begin{cases}-x_3-4x_4=8-2x_1-3x_2\\-6x_3+7x_4=3+x_1-2x_2\end{cases}$$

令非基变量 $x_1=x_2=0$，得$\begin{cases}x_3=-\dfrac{68}{31}\\x_4=-\dfrac{45}{31}\end{cases}$

从而得到一个基本解

$$X^{(6)}=(0,0,-\frac{68}{31},-\frac{45}{31})^{\mathrm{T}}$$

因为 $x_3=-\frac{68}{31}<0,x_4=-\frac{45}{31}<0$，所以该解是非可行解。

比较 z_1,z_3,z_4，可知 $z_3=\frac{117}{5}$ 为最大值，故最优解为 $X^*=X^{(3)}=(\frac{34}{5},0,0,$

$\frac{7}{5})^{\mathrm{T}}$，目标函数最优值为 $z^*=\frac{117}{5}$。

(2)易知，x_1 的系数列向量 $P_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，$x_2$ 的系数列向量 $P_2=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，$x_3$ 的系数列向量 $P_3=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$，$x_4$ 的系数列向量 $P_4=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$

① 因为 P_1、P_2 线性独立，故有

$$\begin{cases}x_1+2x_2=7-3x_3-4x_4\\2x_1+x_2=3-x_3-2x_4\end{cases}$$

令非基变量 $x_3=x_4=0$，得 $\begin{cases}x_1=-\frac{1}{3}\\x_2=\frac{11}{3}\end{cases}$

从而得到一个基本解

$$X^{(1)}=(-\frac{1}{3},\frac{11}{3},0,0)^{\mathrm{T}}$$

因为 $x_1=-\frac{1}{3}<0$，所以该解是非可行解。

② 因为 P_1、P_3 线性独立，故有

$$\begin{cases}x_1+3x_3=7-2x_2-4x_4\\2x_1+x_3=3-x_2-2x_4\end{cases}$$

令非基变量 $x_2=x_4=0$，得 $\begin{cases}x_1=\frac{2}{5}\\x_3=\frac{11}{5}\end{cases}$

从而得到一个基可行解

$$X^{(2)}=(\frac{2}{5},0,\frac{11}{5},0)^{\mathrm{T}},z_2=5\times\frac{2}{5}+3\times\frac{11}{5}=\frac{43}{5}$$

③ 因为 P_1、P_4 线性独立，故有

$$\begin{cases}x_1+4x_4=7-2x_2-3x_3\\2x_1+2x_4=3-x_2-x_3\end{cases}$$

令非基变量 $x_2=x_3=0$，得 $\begin{cases}x_1=-\frac{1}{3}\\x_4=\frac{11}{6}\end{cases}$

从而得到一个基本解

$$X^{(3)}=(-\frac{1}{3},0,0,\frac{11}{6})^{\mathrm{T}}$$

因为 $x_1=-\frac{1}{3}<0$，所以该解是非可行解。

④ 因为 P_2、P_3 线性独立，故有

$$\begin{cases}2x_2+3x_3=7-x_1-4x_4\\x_2+x_3=3-2x_1-2x_4\end{cases}$$

令非基变量 $x_1=x_4=0$，得 $\begin{cases}x_2=2\\x_3=1\end{cases}$

从而得到一个基可行解

$$X^{(4)}=(0,2,1,0)^{\mathrm{T}},z_4=-2\times2+3\times1=-1$$

⑤ 因为 P_2、P_4 线性相关，故 x_2，x_4 不能构成基变量。

⑥ 因为 P_3、P_4 线性独立，故有

$$\begin{cases}3x_3+4x_4=7-x_1-2x_2\\x_3+2x_4=3-2x_1-x_2\end{cases}$$

令非基变量 $x_1=x_2=0$，得 $\begin{cases}x_3=1\\x_4=1\end{cases}$

从而得到一个基可行解

$$X^{(6)}=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}},z_6=3\times1+(-6)\times1=-3$$

比较 z_2，z_4，z_6，可知 $z_2=\dfrac{43}{5}$ 为最大值，故最优解为 $X^*=X^{(2)}=(\dfrac{2}{5},0,\dfrac{11}{5},0)^{\mathrm{T}}$，目标函数最优值为 $z^*=\dfrac{43}{5}$。

1.4 分别用图解法和单纯形法求解下列线性规划问题，并指出单纯形法迭代的每一步相当于图形上哪一个顶点。

(1) $\max z=2x_1+x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+5x_2\leqslant15\\6x_1+2x_2\leqslant24\\x_1,x_2\geqslant0\end{cases}$$

(2) $\max z=2x_1+5x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1\leqslant4\\2x_2\leqslant12\\3x_1+2x_2\leqslant18\\x_1,x_2\geqslant0\end{cases}$$

图 1—6

分析　对单纯形表的每次迭代要认真计算。

解 (1)解 1:图解法。

图 1—3 中的阴影区域为可行域,可见目标函数 $z=2x_1+x_2$ 在点 A_2 处达到最大,求解方程组 $\begin{cases}3x_1+5x_2=15\\6x_1+2x_2=24\end{cases}$ 可知 A_2 的坐标为$(\frac{15}{4},\frac{3}{4})$,所以 $X^*=(\frac{15}{4},\frac{3}{4})^T$,$z^*=2\times\frac{15}{4}+\frac{3}{4}=\frac{33}{4}$

解 2:单纯形法。

在上述问题的约束条件中分别加入松弛变量 x_3,x_4,得该线性规划问题的标准型

$$\max z=2x_1+x_2+0x_3+0x_4$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}3x_1+5x_2+x_3\qquad=15\\6x_1+2x_2\qquad+x_4=24\\x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

由线性规划问题的标准型可列出初始单纯形表逐步迭代,计算结果如下表所示。

表 1—4

c_j			2	1	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	15	3	5	1	0	5
0	x_4	24	[6]	2	0	1	4
c_j-z_j			2	1	0	0	
0	x_3	3	0	[4]	1	−1/2	3/4
2	x_1	4	1	1/3	0	1/6	12
c_j-z_j			0	1/3	0	−1/3	
1	x_2	3/4	0	1	1/4	−1/8	
2	x_1	15/4	1	0	−1/12	5/24	
c_j-z_j			0	0	−1/12	−7/24	

单纯形表的计算结果表明:$X^*=(\frac{15}{4},\frac{3}{4},0,0)^T$,$z^*=2\times\frac{15}{4}+\frac{3}{4}=\frac{33}{4}$

单纯形表迭代的第一步得 $X^{(0)}=(0,0,15,24)^T$,表示图中原点(0,0)。

单纯形表迭代的第二步得 $X^{(1)}=(4,0,3,0)^T$,表示图中 A_1 点。

单纯形表迭代的第三步得 $X^{(2)}=(\frac{15}{4},\frac{3}{4},0,0)^T$,表示图中 A_2 点。

(2)解 1:图解法。

图 1—7 中的阴影区域为可行域,可见目标函数 $z=2x_1+5x_2$ 在点 A_3 处达到最大,求解方程组 $\begin{cases}3x_1+2x_2=18\\2x_2=12\end{cases}$ 可知 A_3 的坐标为(2,6)

所以 $$X^*=(2,6)^T,z^*=2\times2+5\times6=34$$

解 2:单纯形法。

在上述问题的约束条件中加入松弛变量 x_3,x_4,x_5,得该线性规划问题的标准型

图 1—7

$$\max z=2x_1+5x_2+0x_3+0x_4+0x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_3=4\\2x_2+x_4=12\\3x_1+2x_2+x_5=18\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}$$

由线性规划问题的标准型可列出初始单纯形表逐步迭代，计算结果如表 1—5 所示。

表 1—5

c_j			2	5	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	4	1	0	1	0	0	—
0	x_4	12	0	[2]	0	1	0	6
0	x_5	18	3	2	0	0	1	9
c_j-z_j			2	5	0	0	0	
0	x_3	4	1	0	1	0	0	4
5	x_2	6	0	1	0	1/2	0	—
0	x_5	6	[3]	0	0	−1	1	2
c_j-z_j			2	0	0	−5/2	0	
0	x_3	2	0	0	1	1/3	−1/3	
5	x_2	6	0	1	0	1/2	0	
2	x_1	2	1	0	0	−1/3	1/3	
c_j-z_j			0	0	0	−11/6	−2/3	

单纯形表的计算结果表明：$X^*=(2,6,2,0,0)^{\mathrm{T}}$，$z^*=2\times2+5\times6=34$

单纯形表迭代的第一步得 $X^{(0)}=(0,0,4,12,18)^{\mathrm{T}}$，表示图中原点(0,0)。

单纯形表迭代的第二步得 $X^{(1)}=(0,6,4,0,6)^{\mathrm{T}}$，表示图中 A_4 点。

单纯形表迭代的第三步得 $X^{(2)}=(2,6,2,0,0)^{\mathrm{T}}$，表示图中 A_3 点。

小结　单纯形法是求解线性规划问题最有效的方法之一，要求熟练掌握。

○ **1.5**　以 1.4 题(1)为例，具体说明当目标函数中变量的系数怎样改变时，使满足约束条件的可行域的每一个顶点，都有可能使目标函数值达到最优。

解　由目标函数 $\max z=c_1x_1+c_2x_2$ 可得：$x_2=-\frac{c_1}{c_2}x_1+\frac{z}{c_2}=kx_1+\frac{z}{c_2}$，其中 $k=-\frac{c_1}{c_2}$

(1) 当 $k>0$ 时，若 $c_2>0$，则目标函数在 A_3 点(0,3)取得最大值；若 $c_2<0$，则目标函

数在 A_1 点(4,0)取得最大值。

(2) 当 $-\frac{3}{5}<k<0$ 时,若 $c_2>0$,则目标函数在 A_3 点(0,3)取得最大值;若 $c_2<0$,则目标函数在原点(0,0)取得最大值。

(3) 当 $-3<k<-\frac{3}{5}$ 时,若 $c_2>0$,则目标函数在 A_2 点(15/4,3/4)取得最大值;若 $c_2<0$,则目标函数在原点(0,0)取得最大值。

(4) 当 $k<-3$ 时,若 $c_2>0$,则目标函数在 A_1 点(4,0)取得最大值;若 $c_2<0$,则目标函数在原点(0,0)取得最大值。

1.6 分别用单纯形法中的大 M 法和两阶段法求解下述线性规划问题,并指出属哪一类解。

(1) $\max z=2x_1+3x_2-5x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2+x_3=7 \\ 2x_1-5x_2+x_3\geqslant 10 \\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

(2) $\min z=2x_1+3x_2+x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3\geqslant 8 \\ 3x_1+2x_2\geqslant 6 \\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

(3) $\max z=10x_1+15x_2+12x_3$

$$\begin{cases} 5x_1+3x_2+x_3\leqslant 9 \\ -5x_1+6x_2+15x_3\leqslant 15 \\ 2x_1+x_2+x_3\geqslant 5 \\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

(4) $\max z=2x_1-x_2+2x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2+x_3\geqslant 6 \\ -2x_1+x_3\geqslant 2 \\ 2x_2-x_3\geqslant 0 \\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

分析 本题考查了单纯形法中的大 M 法,两阶段法以及解的类型的概念。

解 (1)解 1:大 M 法。

在上述线性规划问题的约束条件中加上人工变量 x_4,x_6,减去剩余变量 x_5,得

$\max z=2x_1+3x_2-5x_3-Mx_4+0x_5-Mx_6$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=7 \\ 2x_1-5x_2+x_3-x_5+x_6=10 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geqslant 0 \end{cases}$$

其中 M 是一个任意大的正数。据此可列出单纯形表表 1—6:

表 1—6

c_j			2	3	-5	$-M$	0	$-M$	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-M$	x_4	7	1	1	1	1	0	0	7
$-M$	x_6	10	[2]	-5	1	0	-1	1	5
c_j-z_j			$3M+2$	$3-4M$	$2M-5$	0	$-M$	0	
$-M$	x_4	2	0	[7/2]	1/2	1	1/2	$-1/2$	4/7
2	x_1	5	1	$-5/2$	1/2	0	$-1/2$	1/2	—
c_j-z_j			0	$3M/2+8$	$M/2-6$	0	$M/2+1$	$-3M/2-1$	
3	x_2	4/7	0	1	1/7	2/7	1/7	$-1/7$	
2	x_1	45/7	1	0	6/7	5/7	$-1/7$	1/7	
c_j-z_j			0	0	$-50/7$	$-M-16/7$	$-1/7$	$-M+1/7$	

由单纯形表的计算结果得：

最优解 $X^*=(\frac{45}{7},\frac{4}{7},0,0,0,0)^T$，目标函数的最优值 $z^*=2\times\frac{45}{7}+3\times\frac{4}{7}=\frac{102}{7}$。

解 2：两阶段法。

先在上述线性规划问题的约束条件中加入人工变量 x_4，x_6，减去剩余变量 x_5，得第一阶段的数学模型

$$\min w=x_4+x_6$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=7 \\ 2x_1-5x_2+x_3-x_5+x_6=10 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geqslant 0 \end{cases}$$

据此可列出单纯形表表 1—7：

表 1—7

c_j			0	0	0	1	0	1	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_4	7	1	1	1	1	0	0	7
1	x_6	10	[2]	-5	1	0	-1	1	5
c_j-z_j			-3	4	-2	0	1	0	
1	x_4	2	0	[7/2]	1/2	1	1/2	$-1/2$	4/7
0	x_1	5	1	$-5/2$	1/2	0	$-1/2$	1/2	—
c_j-z_j			0	$-7/2$	$-1/2$	0	$-1/2$	3/2	
0	x_2	4/7	0	1	1/7	2/7	1/7	$-1/7$	
0	x_1	45/7	1	0	6/7	5/7	$-1/7$	1/7	
c_j-z_j			0	0	0	1	0	1	

第一阶段求得的最优解 $X^*=(\frac{45}{7},\frac{4}{7},0,0,0,0)^T$，目标函数的最优值 $w^*=0$。

因人工变量 $x_4=x_6=0$，所以 $(\frac{45}{7},\frac{4}{7},0,0,0,0)^T$ 是原线性规划问题的基可行解。

于是可以进行第二阶段运算，将第一阶段的最终表中的人工变量取消，并填入原问题的目标函数的系数，进行第二阶段的运算，见表 1－8。

表 1－8

c_j			2	3	-5	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_5	
3	x_2	4/7	0	1	1/7	1/7	
2	x_1	45/7	1	0	6/7	$-1/7$	
c_j-z_j			0	0	$-50/7$	$-1/7$	

由表中计算可知，原线性规划问题的最优解 $X^*=(\frac{45}{7},\frac{4}{7},0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，目标函数的最优值 $z^*=2\times\frac{45}{7}+3\times\frac{4}{7}=\frac{102}{7}$。

(2)解 1：大 M 法。

在上述线性规划问题的约束条件中减去剩余变量 x_4,x_5，再分别加上人工变量 x_6,x_7，得

$$\min z=2x_1+3x_2+x_3+0x_4+0x_5+Mx_6+Mx_7$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3-x_4+x_6=8 \\ 3x_1+2x_2-x_5+x_7=6 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\geqslant 0 \end{cases}$$

其中 M 是一个任意大的正数。据此可列出单纯形表表 1－9：

表 1－9

c_j			2	3	1	0	0	M	M	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
M	x_6	8	1	[4]	2	-1	0	1	0	2
M	x_7	6	3	2	0	0	-1	0	1	3
c_j-z_j			$2-4M$	$3-6M$	$1-2M$	M	M	0	0	
3	x_2	2	1/4	1	1/2	$-1/4$	0	1/4	0	8
M	x_7	2	[5/2]	0	-1	1/2	-1	$-1/2$	1	4/5
c_j-z_j			$\frac{5}{4}-\frac{5}{2}M$	0	$M-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}M$	M	$\frac{3}{2}M-\frac{3}{4}$	0	
3	x_2	9/5	0	1	3/5	$-3/10$	1/10	3/10	$-1/10$	
2	x_1	4/5	1	0	$-2/5$	1/5	$-2/5$	$-1/5$	2/5	
c_j-z_j			0	0	0	1/2	1/2	$M-1/2$	$M-1/2$	

由单纯形表的计算结果得：最优解 $X^*=(\frac{4}{5},\frac{9}{5},0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，目标函数的最优值 $z^*=2\times\frac{4}{5}+3\times\frac{9}{5}=7$。$X$ 存在非基变量检验数 $\sigma_3=0$，故该线性规划问题有无穷多最优解。

解 2：两阶段法。

先在上述线性规划问题的约束条件中减去剩余变量 x_4,x_5，再分别加上人工变量 x_6,x_7，得第一阶段的数学模型

$$\min w=x_6+x_7$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3-x_4 \qquad +x_6 \qquad =8 \\ 3x_1+2x_2 \qquad\qquad -x_5 \qquad +x_7=6 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\geqslant 0 \end{cases}$$

据此可列出单纯形表 1－10：

表 1－10

c_j			0	0	0	0	0	1	1	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	x_6	8	1	[4]	2	－1	0	1	0	2
1	x_7	6	3	2	0	0	－1	0	1	3
c_j-z_j			－4	－6	－2	1	1	0	0	
0	x_2	2	1/4	1	1/2	－1/4	0	1/4	0	8
1	x_7	2	[5/2]	0	－1	1/2	－1	－1/2	1	4/5
c_j-z_j			－5/2	0	1	－1/2	1	3/2	0	
0	x_2	9/5	0	1	3/5	－3/10	1/10	3/10	－1/10	
0	x_1	4/5	1	0	－2/5	1/5	－2/5	－1/5	2/5	
c_j-z_j			0	0	0	0	0	1	1	

第一阶段求得的最优解 $X^*=(\frac{4}{5},\frac{9}{5},0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，目标函数的最优值 $w^*=0$。

因人工变量 $x_6=x_7=0$，所以 $(\frac{4}{5},\frac{9}{5},0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 是原线性规划问题的基可行解。于是可以进行第二阶段运算。将第一阶段的最终表中的人工变量取消，并填入原问题的目标函数的系数，进行第二阶段的运算，见表 1－11。

表 1－11

c_j			2	3	1	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
3	x_2	9/5	0	1	3/5	－3/10	1/10	
2	x_1	4/5	1	0	－2/5	1/5	－2/5	
c_j-z_j			0	0	0	1/2	1/2	

由表中计算可知，原线性规划问题的最优解 $X^*=(\frac{4}{5},\frac{9}{5},0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，目标函数的最优值 $z^*=2\times\frac{4}{5}+3\times\frac{9}{5}=7$ 由于存在非基变量检验数 $\sigma_3=0$，故该线性规划问题有无穷多最优解。

(3)解 1：大 M 法。

在上述线性规划问题的第一、二个约束条件中分别加上松弛变量 x_4,x_5，在第三个约束条件中减去剩余变量 x_6，再加上人工变量 x_7，得

$$\max z=10x_1+15x_2+12x_3+0x_4+0x_5+0x_6-Mx_7$$

$$\begin{cases} 5x_1+3x_2+\ \ x_3+x_4 \qquad\qquad\qquad =9 \\ -5x_1+6x_2+15x_3 \qquad +x_5 \qquad\qquad =15 \\ 2x_1+\ x_2+\ \ x_3 \qquad\qquad -x_6+x_7=5 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\geqslant 0 \end{cases}$$

其中 M 是一个任意大的正数。据此可列出单纯形表表 1－12：

表 1－12

c_j			10	15	12	0	0	0	$-M$	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	9	[5]	3	1	1	0	0	0	9/5
0	x_5	15	−5	6	15	0	1	0	0	—
$-M$	x_7	5	2	1	1	0	0	−1	1	5/2
c_j-z_j			$10+2M$	$15+M$	$12+M$	0	0	$-M$	0	
10	x_1	9/5	1	3/5	1/5	1/5	0	0	0	9
0	x_5	24	0	9	[16]	1	1	0	0	3/2
$-M$	x_7	7/5	0	−1/5	3/5	−2/5	0	−1	1	7/3
c_j-z_j			0	$9-\frac{M}{5}$	$10+\frac{3M}{5}$	$-2-\frac{2M}{5}$	0	$-M$	0	
10	x_1	3/2	1	39/80	0	3/16	−1/80	0	0	
12	x_3	3/2	0	9/16	1	1/16	1/16	0	0	
$-M$	x_7	1/2	0	−43/80	0	−7/16	−3/80	−1	1	
c_j-z_j			0	$\frac{27}{8}-\frac{43M}{80}$	0	$-\frac{21}{8}-\frac{7M}{16}$	$-\frac{5}{8}-\frac{3M}{80}$	$-M$	0	

由单纯形表的最终表可以看出，所有非基变量检验数 $\sigma_j<0$，且存在人工变量 $x_7=\frac{1}{2}$，故原线性规划问题无可行解。

解 2：两阶段法。

在上述线性规划问题的第一、二个约束条件中分别加上松弛变量 x_4,x_5，在第三个约束条件中减去剩余变量 x_6，再加上人工变量 x_7，得第一阶段的数学模型：

$$\min w=x_7$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 5x_1+3x_2+\ \ x_3+x_4 \qquad\qquad\qquad =9 \\ -5x_1+6x_2+15x_3 \qquad +x_5 \qquad\qquad =15 \\ 2x_1+\ x_2+\ \ x_3- \qquad\qquad x_6+x_7=5 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\geqslant 0 \end{cases}$$

据此可列出单纯形表表 1－13：

表 1－13

c_j			0	0	0	0	0	0	1	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	9	[5]	3	1	1	0	0	0	9/5
0	x_5	15	−5	6	15	0	1	0	0	—

c_j			0	0	0	0	0	0	1	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	x_7	5	2	1	1	0	0	-1	1	5/2
c_j-z_j			-2	-1	-1	0	0	1	0	
0	x_1	9/5	1	3/5	1/5	1/5	0	0	0	9
0	x_5	24	0	9	[16]	1	1	0	0	3/2
1	x_7	7/5	0	$-1/5$	3/5	$-2/5$	0	-1	1	7/3
c_j-z_j			0	$-1/5$	3/5	$-2/5$	0	1	0	
0	x_1	3/2	1	39/80	0	3/16	$-1/80$	0	0	
0	x_3	3/2	0	9/16	1	1/16	1/16	0	0	
1	x_7	1/2	0	$-43/80$	0	$-7/16$	$-3/80$	1	0	
c_j-z_j			0	43/80	0	7/16	3/80	1	0	

第一阶段求得最优解 $X^*=(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2},0,0,0,\frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$。因人工变量 $x_7=\frac{1}{2}\neq 0$，且非基变量检验数 $\sigma_j>0$，所以原线性规划问题无可行解。

(4)解 1：大 M 法。

在上述线性规划问题的约束条件中分别减去剩余变量 x_4,x_6,x_8，再加上人工变量 x_5,x_7,x_9，得

$$\max z=2x_1-x_2+2x_3+0x_4-Mx_5+0x_6-Mx_7+0x_8-Mx_9$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=6 \\ -2x_1+x_3-x_6+x_7=2 \\ 2x_2-x_3-x_8+x_9=0 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\geqslant 0 \end{cases}$$

其中 M 是一个任意大的正数。据此可列出单纯形表表 1－14：

表 1－14

c_j			2	-1	2	0	$-M$	0	$-M$	0	$-M$	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
$-M$	x_5	6	1	1	1	-1	1	0	0	0	0	6
$-M$	x_7	2	-2	0	1	0	0	-1	1	0	0	—
$-M$	x_9	0	0	[2]	-1	0	0	0	0	-1	1	0
c_j-z_j			$2-M$	$3M-1$	$2+M$	$-M$	0	$-M$	0	$-M$	0	
$-M$	x_5	6	1	0	3/2	-1	1	0	0	1/2	$-1/2$	4
$-M$	x_7	2	-2	0	[1]	0	0	-1	1	0	0	2
-1	x_2	0	0	1	$-1/2$	0	0	0	0	$-1/2$	1/2	—
c_j-z_j			$2-M$	0	$\frac{5M}{2}+\frac{3}{2}$	$-M$	0	$-M$	0	$\frac{M}{2}-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}-\frac{3M}{2}$	
$-M$	x_5	3	[4]	0	0	-1	1	3/2	$-3/2$	1/2	$-1/2$	3/4

c_j			2	-1	2	0	$-M$	0	$-M$	0	$-M$	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
2	x_3	2	-2	0	1	0	0	-1	1	0	0	—
-1	x_2	1	-1	1	0	0	0	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	—
c_j-z_j			$4M+5$	0	0	$-M$	0	$\frac{3M}{2}+\frac{3}{2}$	$\frac{-5M}{2}-\frac{3}{2}$	$\frac{M}{2}-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}-\frac{3M}{2}$	
2	x_1	$3/4$	1	0	0	$-1/4$	$1/4$	$3/8$	$-3/8$	$1/8$	$-1/8$	
2	x_3	$7/2$	0	0	1	$-1/2$	$1/2$	$-1/4$	$1/4$	$1/4$	$-1/4$	
-1	x_2	$7/4$	0	1	0	$-1/4$	$1/4$	$-1/8$	$1/8$	$-3/8$	$3/8$	
c_j-z_j			0	0	0	$5/4$	$-M-\frac{5}{4}$	$-3/8$	$\frac{3}{8}-M$	$-9/8$	$\frac{9}{8}-M$	

由单纯形表的计算结果可以看出，$\sigma_4>0$ 且 $a_{i4}<0(i=1,2,3)$，所以该线性规划问题有无界解。

解 2：两阶段法。

先在上述线性规划问题的约束条件中分别减去剩余变量 x_4,x_6,x_8，再加上人工变量 x_5,x_7,x_9，得第一阶段的数学模型

$$\min w=x_5+x_7+x_9$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=6\\ -2x_1+x_3-x_6+x_7=2\\ 2x_2-x_3-x_8+x_9=0\\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\geqslant 0\end{cases}$$

据此可列出单纯形表表 1－15：

表 1－15

c_j			0	0	0	0	1	0	1	0	1	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
1	x_5	6	1	1	1	-1	1	0	0	0	0	6
1	x_7	2	-2	0	1	0	0	-1	1	0	0	—
1	x_9	0	0	[2]	-1	0	0	0	0	-1	1	0
c_j-z_j			1	-3	-1	1	0	1	0	1	0	
1	x_5	6	1	0	$3/2$	-1	1	0	0	$1/2$	$-1/2$	4
1	x_7	2	-2	0	[1]	0	0	-1	1	0	0	2
0	x_2	0	0	1	$-1/2$	0	0	0	0	$-1/2$	$1/2$	—
c_j-z_j			1	0	$-5/2$	1	0	-1	0	$-1/2$	$3/2$	
1	x_5	3	[4]	0	0	-1	1	$3/2$	$-3/2$	$1/2$	$-1/2$	$3/4$
0	x_3	2	-2	0	1	0	0	-1	1	0	0	—
0	x_2	1	-1	1	0	0	0	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	—

c_j			0	0	0	0	1	0	1	0	1	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
c_j-z_j			−4	0	0	1	0	−3/2	5/2	−1/2	3/2	
0	x_1	3/4	1	0	0	−1/4	1/4	3/8	−3/8	1/8	−1/8	
0	x_3	7/2	0	0	1	−1/2	1/2	−1/4	1/4	1/4	−1/4	
0	x_2	7/4	0	1	0	−1/4	1/4	−1/8	1/8	−3/8	3/8	
c_j-z_j			0	0	0	0	1	0	1	0	1	

第一阶段求得的最优解 $X^*=(\frac{3}{4},\frac{7}{4},\frac{7}{2},0,0,0,0,0,0)^T$，目标函数的最优值 $w^*=0$。

因人工变量 $x_5=x_7=x_9=0$，所以$(\frac{3}{4},\frac{7}{4},\frac{7}{2},0,0,0,0,0,0)^T$ 是原线性规划问题的基可行解。于是可以进行第二阶段运算。将第一阶段的最终表中的人工变量取消，并填入原问题的目标函数的系数，进行第二阶段的运算，见表 1−16。

表 1−16

c_j			2	−1	2	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_8	
2	x_1	3/4	1	0	0	−1/4	3/8	1/8	
2	x_3	7/2	0	0	1	−1/2	−1/4	1/4	
−1	x_2	7/4	0	1	0	−1/4	−1/8	−3/8	
c_j-z_j			0	0	0	5/4	−3/8	−9/8	

由表中计算可知，$\sigma_4>0$ 且 $a_{i4}<0(i=1,2,3)$，所以原线性规划问题有无界解。

小结　大 M 法和两阶段法都是人工变量法。

◎1.7　求下述线性规划问题目标函数 z 的上界 $\bar{z}^*$ 和下界 $\underline{z}^*$

$$\max z=c_1x_1+c_2x_2$$
$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2\leqslant b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\leqslant b_2\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

其中：$1\leqslant c_1\leqslant 3,4\leqslant c_2\leqslant 6,8\leqslant b_1\leqslant 12,10\leqslant b_2\leqslant 14,-1\leqslant a_{11}\leqslant 3,2\leqslant a_{12}\leqslant 5,2\leqslant a_{21}\leqslant 4,4\leqslant a_{22}\leqslant 6$

分析　先求出与 $\bar{z}^*$ 和 $\underline{z}^*$ 相对应的线性规划模型，再用单纯形法求解。

解　z 的上界 $\bar{z}^*$ 可由如下的线性规划模型求得

$$\max z=3x_1+6x_2$$
$$\begin{cases}-x_1+2x_2\leqslant 12\\ 2x_1+4x_2\leqslant 14\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

在上述问题的第一个约束条件中加入松弛变量 x_3，第二个约束条件左右两边同时除

以 2 再加入松弛变量 x_4，得该线性规划问题的标准型

$$\max z=3x_1+6x_2+0x_3+0x_4$$

$$\begin{cases}-x_1+2x_2+x_3=12\\ x_1+2x_2+x_4=7\\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

由线性规划问题的标准型可列出初始单纯形表逐步迭代，计算结果如表 1－17 所示。

表 1－17

c_j			3	6	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	12	−1	2	1	0	6
0	x_4	7	1	[2]	0	1	7/2
c_j-z_j			3	6	0	0	
0	x_3	5	−2	0	1	−1	
6	x_2	7/2	1/2	1	0	1/2	
c_j-z_j			0	0	0	−3	

由表中计算可知，该线性规划问题的最优解 $X^*=(0,\frac{7}{2},5,0)^T$，目标函数 z 的上界 $\overline{z}^*=z^*=6\times\frac{7}{2}=21$。由于存在非基变量检验数 $\sigma_1=0$，故该线性规划问题有无穷多最优解。

z 的下界 $\underline{z}^*$ 可由如下的线性规划模型求得

$$\max z=x_1+4x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}3x_1+5x_2\leqslant 8\\ 4x_1+6x_2\leqslant 10\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

在上述问题的第一个约束条件中加入松弛变量 x_3，第二个约束条件左右两边同时除以 2 再加入松弛变量 x_4，得该线性规划问题的标准型

$$\max z=x_1+4x_2+0x_3+0x_4$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}3x_1+5x_2+x_3\qquad=8\\ 2x_1+3x_2\qquad+x_4=5\\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

由线性规划问题的标准型可列出初始单纯形表逐步迭代，计算结果如表 1－18 所示。

表 1－18

c_j			1	4	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	8	3	[5]	1	0	8/5
0	x_4	5	2	3	0	1	5/3
c_j-z_j			1	4	0	0	

c_j			1	4	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
4	x_2	8/5	3/5	1	1/5	0	
0	x_4	1/5	1/5	0	−3/5	1	
c_j-z_j			−7/5	0	−4/5	0	

由表中计算可知，该线性规划问题的最优解 $X^*=(0,\frac{8}{5},0,\frac{1}{5})^T$，目标函数 z 的下界 $\underline{z}^*=z^*=4\times\frac{8}{5}=\frac{32}{5}$。

◎1.8　表 1－19 是某求极大化线性规划问题计算得到的单纯形表。表中无人工变量，a_1、a_2、a_3、d、c_1、c_2 为待定常数。试说明这些常数分别取何值时，以下结论成立。

(1)表中解为惟一最优解；

(2)表中解为最优解，但存在无穷多最优解；

(3)该线性规划问题具有无界解；

(4)表中解非最优，为对解改进，换入变量为 x_1，换出变量为 x_6。

表 1－19

基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	d	4	a_1	1	0	a_2	0
x_4	2	−1	−3	0	1	−1	0
x_6	3	a_3	−5	0	0	−4	1
c_j-z_j		c_1	c_2	0	0	−3	0

分析　分别根据各种类型的解的概念进行求解。

解　(1)当解为惟一最优解时，必有 $d\geqslant 0, c_1<0, c_2<0$。

(2)当解为最优解，但存在无穷多最优解时，必有 $d\geqslant 0, c_1\leqslant 0, c_2=0$ 或 $d\geqslant 0, c_1=0, c_2\leqslant 0$。

(3)当该问题为无界解时，必有 $d\geqslant 0, c_1\leqslant 0, c_2>0$ 且 $a_1\leqslant 0$。

(4)当解为非最优，为对解进行改进，当换入变量为 x_1，换出变量为 x_6，必有 $d\geqslant 0$，$c_1>0$，且 $c_1\geqslant c_2$，$a_3>0$，$\frac{3}{a_3}<\frac{d}{4}$。

◎1.9　某昼夜服务的公交线路每天各时间区段内所需司机和乘务人员数如下：

班次	时　间	所需人数
1	6:00～10:00	60
2	10:00～14:00	70
3	14:00～18:00	60
4	18:00～22:00	50

班次	时　间	所需人数
5	22:00～2:00	20
6	2:00～6:00	30

设司机和乘务人员分别在各时间区段一开始时上班，并连续工作八小时，问该公交线路至少配备多少名司机和乘务人员。列出这个问题的线性规划模型。

分析　本题考查了线性规划模型的建立。

解　设 $x_k(k=1,2,3,4,5,6)$ 表示 x_k 名司机和乘务人员第 k 班次开始上班。由题意，有

$$\min z=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_6+x_1\geqslant 60\\x_1+x_2\geqslant 70\\x_2+x_3\geqslant 60\\x_3+x_4\geqslant 50\\x_4+x_5\geqslant 20\\x_5+x_6\geqslant 30\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geqslant 0\end{cases}$$

○**1.10**　某糖果厂用原料 A、B、C 加工成三种不同牌号的糖果甲、乙、丙。已知各种牌号糖果中 A、B、C 含量，原料成本，各种原料的每月限制用量，三种牌号糖果的单位加工费及售价如表 1－20 所示。

表 1－20

原料	甲	乙	丙	原料成本（元/千克）	每月限制用量（千克）
A	$\geqslant 60\%$	$\geqslant 15\%$		2.00	2 000
B				1.50	2 500
C	$\leqslant 20\%$	$\leqslant 60\%$	$\leqslant 50\%$	1.00	1 200
加工费(元/千克)	0.50	0.40	0.30		
售　　价	3.40	2.85	2.25		

问该厂每月应生产这三种牌号糖果各多少千克，使该厂获利最大？试建立这个问题的线性规划的数学模型。

解　设 x_1,x_2,x_3 分别为甲糖果中 A,B,C 的成份；x_4,x_5,x_6 分别为乙糖果中 A,B,C 的成份；x_7,x_8,x_9 分别为丙糖果中 A,B,C 的成份。由题意，有

$$\begin{aligned}\max z=&(3.40-0.50)\times(x_1+x_2+x_3)+(2.85-0.40)\times(x_4+x_5+x_6)\\&+(2.25-0.30)\times(x_7+x_8+x_9)-2.00\times(x_1+x_4+x_7)\\&-1.50\times(x_2+x_5+x_8)-1.00\times(x_3+x_6+x_9)\end{aligned}$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
\dfrac{x_1}{x_1+x_2+x_3}\geqslant 0.6\\
\dfrac{x_3}{x_1+x_2+x_3}\leqslant 0.2\\
\dfrac{x_4}{x_4+x_5+x_6}\geqslant 0.15\\
\dfrac{x_6}{x_4+x_5+x_6}\leqslant 0.6\\
\dfrac{x_9}{x_7+x_8+x_9}\leqslant 0.5\\
x_1+x_4+x_7\leqslant 2\,000\\
x_2+x_5+x_8\leqslant 2\,500\\
x_3+x_6+x_9\leqslant 1\,200\\
x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\geqslant 0
\end{cases}
$$

对上式进行整理得到所求问题的线性规划模型

$$
\max z=0.9x_1+1.4x_2+1.9x_3+0.45x_4+0.95x_5+1.45x_6-0.05x_7+0.45x_8+0.95x_9
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
-0.4x_1+0.6x_2+0.6x_3\leqslant 0\\
-0.2x_1-0.2x_2+0.8x_3\leqslant 0\\
-0.85x_4+0.15x_5+0.15x_6\leqslant 0\\
-0.6x_4-0.6x_5+0.4x_6\leqslant 0\\
-0.5x_7-0.5x_8+0.5x_9\leqslant 0\\
x_1+x_4+x_7\leqslant 2\,000\\
x_2+x_5+x_8\leqslant 2\,500\\
x_3+x_6+x_9\leqslant 1\,200\\
x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\geqslant 0
\end{cases}
$$

○ **1.11**　某厂生产三种产品Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，每种产品要经过 A，B 两道工序加工。设该厂有两种规格的设备能完成 A 工序，它们以 A_1，A_2 表示；有三种规格的设备能完成 B 工序，它们以 B_1，B_2，B_3 表示。产品Ⅰ可在 A，B 任何一种规格设备上加工。产品Ⅱ可在任何规格的 A 设备上加工，但完成 B 工序时，只能在 B_1 设备上加工；产品Ⅲ只能在 A_2 与 B_2 设备上加工。已知在各种机床设备的单件工时，原材料费，产品销售价格，各种设备有效台时以及满负荷操作时机床设备的费用如下表（表 1－21），要求安排最优的生产计划，使该厂利润最大。

表　1－21

设　备	产　品			设备有效台时	满负荷时的设备费用(元)
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ		
A_1	5	10		6 000	300
A_2	7	9	12	10 000	321
B_1	6	8		4 000	250
B_2	4		11	7 000	783
B_3	7			4 000	200
原料费(元/件)	0.25	0.35	0.50		
单价(元/件)	1.25	2.00	2.80		

解　对产品Ⅰ来说，设以 A_1，A_2 完成 A 工序的产品分别为 x_1，x_2 件，转入 B 工序时，以 B_1，B_2，B_3 完成 B 工序的产品分别为 x_3，x_4，x_5 件；对产品Ⅱ来说，设以 A_1，A_2 完成 A 工序的产品分别为 x_6，x_7 件，转入 B 工序时，以 B_1 完成 B 工序的产品为 x_8 件；对产品Ⅲ来说，设以 A_2 完成 A 工序的产品为 x_9 件，则以 B_2 完成 B 工序的产品也为 x_9 件。由上述条件可得：

$$x_1+x_2=x_3+x_4+x_5$$
$$x_6+x_7=x_8$$

由题目所给的数据可得到解此问题的数学模型为：

$$\begin{aligned}\max z=&(1.25-0.25)\times(x_1+x_2)+(2.00-0.35)\times(x_6+x_7)\\&+(2.80-0.50)\times x_9-\frac{300}{6\ 000}\times(5x_1+10x_6)\\&-\frac{321}{10\ 000}\times(7x_2+9x_7+12x_9)-\frac{250}{4\ 000}\times(6x_3+8x_8)\\&-\frac{783}{7\ 000}\times(4x_4+11x_9)-\frac{200}{4\ 000}\times 7x_5\end{aligned}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}5x_1+10x_6\leqslant 6\ 000\\7x_2+9x_7+12x_9\leqslant 10\ 000\\6x_3+8x_8\leqslant 4\ 000\\4x_4+11x_9\leqslant 7\ 000\\7x_5\leqslant 4\ 000\\x_1+x_2=x_3+x_4+x_5\\x_6+x_7=x_8\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\geqslant 0\end{cases}$$

解之得最优解为：

$x_1^*=1\ 200$，　$x_2^*=230$，　$x_3^*=0$，

$x_4^*=859$，　$x_5^*=571$，　$x_6^*=0$，

$x_7^*=500$，　$x_8^*=500$，　$x_9^*=324$。

最优值为 1 147 元。

第二章

对偶理论和灵敏度分析

内容提要

一、原问题与对偶问题的关系

若某线性规划（原问题）约束系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，约束条件右端为向量 $\boldsymbol{b}$，目标函数中的价值系数向量为 $\boldsymbol{C}$，则其对偶问题形式如表 2-1 所示。

表 2-1

原问题（对偶问题）	对偶问题（原问题）
目标函数 $\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$	$\min w=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i$
变量 $x_j(j=1,\cdots,n)$	约束条件 有 n 个$(j=1,\cdots,n)$
变量 $x_j\geqslant 0$	约束条件 $\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\geqslant c_j$
变量 $x_j\leqslant 0$	约束条件 $\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\leqslant c_j$
变量 x_j 无约束	约束条件 $\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i=c_j$
约束条件 有 m 个$(i=1,\cdots,m)$	变量 $y_i(i=1,\cdots,m)$
约束条件 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i$	变量 $y_i\geqslant 0$
约束条件 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqslant b_i$	变量 $y_i\leqslant 0$
约束条件 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i$	变量 y_i 无约束

二、对偶理论及其性质

1. 对称性：对偶问题的对偶是原问题。
2. 弱对偶性：若 $\overline{X}$ 是原问题的可行解，$\overline{Y}$ 是对偶问题的可行解，
   则有
$$C\overline{X}\leqslant\overline{Y}b$$
3. 无界性：若原问题（对偶问题）为无界解，则其对偶问题（原问题）无可行解。
4. 可行解是最优解时的性质：
   设 $\hat{X}$ 是原问题的可行解，$\hat{Y}$ 是对偶问题的可行解，当 $C\hat{X}=\hat{Y}b$ 时，$\hat{X}$、$\hat{Y}$ 均为最优解。
5. 对偶定理：若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解，且目标函数值相等。
6. 互补松弛性：若 $\hat{X}$、$\hat{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，那么 $\hat{Y}X_S=0$ 和 $Y_S\hat{X}=0$ 当且仅当 $\hat{X}$、$\hat{Y}$ 为最优解。
7. 设原问题是
$$\max z=CX;AX+X_S=b;X,X_S\geqslant 0$$
   它的对偶问题是
$$\min w=Yb;YA-Y_S=C;Y,Y_S\geqslant 0$$
   则原问题单纯形表的检验数行对应其对偶问题的一个基解。

三、对偶单纯形法

1. 对偶单纯形法与单纯形法的区别

对偶单纯形法是运用对偶原理求解原问题的一种方法，而不是求解对偶问题的单纯形法。它和单纯形法的主要区别在于：单纯形法是从一个原始问题的基本可行解转到另一个基本可行解，即迭代中始终保持原问题的可行性，亦即常数列 $b\geqslant 0$，而检验数 $\sigma=C-C_BB^{-1}A=C-YA$ 由有正分量逐步变为全部$\leqslant 0$（即变为满足 $YA\geqslant C$，Y 是对偶问题的基本可行解）为止。对偶单纯形法则是保持对偶问题解是基本可行解（即全部检验数 $\sigma\geqslant 0$），而原问题在非可行解（即常数列 b 有负的分量）的基础上通过逐步迭代达到基本可行解（即常数列 b 全部$\geqslant 0$）。这样，同时得到原问题和对偶问题的最优解。

2. 对偶单纯形法的计算步骤

(1) 将问题化为标准型，列出初始单纯形表格。

(2) 若存在初始对偶可行的基本解，则进行迭代。

(3) 检验 $\boldsymbol{b}$ 列的数字，若检验数全部非正而 $\boldsymbol{b}$ 列都为非负，则问题已得到最优解，终止迭代；否则，若检验数全部非正而 $\boldsymbol{b}$ 列至少还有一个负分量，进行下一步。

(4) 确定换出变量，即按
$$\min_i\{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_i\mid(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_i<0\}=(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_l$$
对应的基变量 x_l 为换出变量。

(5)确定换入变量：检查 x_l 所所在行的各系数 $a_{lj}(j=1,2,\cdots,n)$。

若所有 $a_{lj}\geqslant 0$，则无可行解停止迭代，若存在 $a_{lj}<0$，按 θ 法则，即

$$\theta=\min_j\left\{\frac{\sigma_j}{a_{lj}}\middle| a_{lj}<0\right\}=\frac{\sigma_k}{a_{lk}}$$

所对应的列的非基变量 x_k 为换入变量。

(6) 实施枢轴运算，即以 a_{lk} 为主元素按原单纯形法在表中进行迭代运算，得新的单纯形表格，转步骤(3)继续迭代。

四、影子价格

影子价格：根据资源在生产中作出的贡献而作的估价。影子价格是一种边际价格，其值相当于在资源得到最优利用的生产条件下，资源每增加一个单位时目标函数增加量。

影子价格的大小反映了资源的稀缺和富有程度。在完全市场经济的条件下，当某种资源的市场价格低于影子价格时，企业应买进该资源以扩大再生产；反之，则应将已有资源卖掉。可见，影子价格对市场有调节作用。

五、灵敏度分析

由于可用资源的数量发生变化，右边限制系数 b_i 会发生变化，由于市场条件发生变化，价值系数 c_j 会发生变化；由于生产工艺的改进，约束条件系数 a_{ij} 会发生变化。

当线性规划问题中的一个或几个系数发生变化后，原来求得的结果一般会发生变化。

灵敏度分析的步骤可归纳如下：

1. 将参数的改变计算反映到最终单纯形表上来：

   具体计算方法是，按下列公式计算出由参数 a_{ij}、b_i、c_j 的变化而引起的最终单纯形表上有关数字的变化：

$$\Delta \boldsymbol{b}^*=\boldsymbol{B}^{-1}\Delta \boldsymbol{b}$$

$$\Delta \boldsymbol{P}_i{}^*=\boldsymbol{B}^{-1}\Delta \boldsymbol{P}_i$$

$$\Delta(c_j-z_j)^*=\Delta(c_j-z_j)-\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i{}^*$$

2. 检查原问题是否仍为可行解；
3. 检查对偶问题是否仍为可行解；
4. 按表 2-2 所列情况得出结论和决定继续计算的步骤。

表 2-2

原问题	对偶问题	结论或继续计算的步骤
可行解	可行解	仍为问题最优解
可行解	非可行解	用单纯形法继续迭代求最优解
非可行解	可行解	用对偶单纯形法继续迭代求最优解
非可行解	非可行解	引进人工变量，编制新的单纯形表重新计算

典型例题与解题技巧

【例 1】 写出线性规划问题的对偶问题

$$\max z=6x_1-2x_2+3x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3\leqslant 2\\ x_1+4x_3\leqslant 4\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

解题分析 要理清原问题的约束条件与对偶问题变量之间的对应关系，以及原问题的变量与对偶问题的约束条件之间的对应关系。

此题恰好是形如对称形式的原问题要求写其对偶问题，解题难度在于要能将原问题的变量和约束条件分别与对偶问题的约束条件和变量相对应，然后写出目标函数和约束条件。

解题过程 原问题中：$\boldsymbol{C}=(6,-2,3)$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}$，因为原问题的变量有三个且全"$\geqslant 0$"，所以对偶问题的约束条件应有三个且全是"$\geqslant$"约束；原问题的约束条件有两个且全是"$\leqslant$"约束，所以对偶问题的变量也应有两个且全应"$\geqslant 0$"；所以原问题的对偶问题为

$$\min w=\boldsymbol{Yb}=[y_1,y_2]\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}=2y_1+4y_2$$

$\boldsymbol{YA}=[y_1,y_2]\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}=[2y_1+y_2,-y_1,2y_1+4y_2]$，由 $\boldsymbol{C}=[6,-2,3]$

可知对偶问题为

$$\min w=2y_1+4y_2$$

$$s.t.\begin{cases}2y_1+y_2\geqslant 6\\ -y_1\geqslant -2\\ 2y_1+4y_2\geqslant 3\\ y_1,y_2\geqslant 0\end{cases}$$

【例 2】 写出以下线性规划的对偶问题：

(1) $\max z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}c_{ik}x_{ik}$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}a_{ik}x_{ik}=s_k & (k=1,\cdots,m)\\ \sum_{k=1}^{m}b_{ik}x_{ik}=p_i & (i=1,\cdots,n)\\ x_{ik}\geqslant 0 \quad (i=1,\cdots,n;k=1,\cdots,m)\end{cases}$$

(2) $\min z=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4-i+1}c_jx_{ij}$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k-i+1}^{4-i+1}x_{ij}\geqslant r_k & (k=1,2,3,4)\\ x_{ij}\geqslant 0 & (i=1,\cdots,4;j=1,\cdots,4-i+1)\end{cases}$$

解题分析　需将原问题展开，找出变量和约束条件，然后设出其对应的对偶变量，写出对偶规划。

解题过程　(1) $\min w=\sum_{k=1}^{m}s_ky_k+\sum_{i=1}^{n}p_iz_i$

$$\text{s. t.}\begin{cases}a_{ik}y_k+b_{ik}z_i\geqslant c_{ik} & (i=1,\cdots,n;k=1,\cdots,m)\\ y_k,z_i\ \text{无约束}\end{cases}$$

(2) $\max w=\sum_{t=1}^{4}r_ty_t$

$$\text{s. t.}\begin{cases}y_t\leqslant c_1 & (t=1,2,3,4)\\ y_t+y_{t+1}\leqslant c_2 & (t=1,2,3)\\ y_t+y_{t+1}+y_{t+2}\leqslant c_3 & (t=1,2)\\ y_1+y_2+y_3+y_4\leqslant c_4 & \\ y_t\geqslant 0 & (t=1,2,3,4)\end{cases}$$

历年考研真题评析

【题 1】　(2006 年西北工业大学)已知线性规划：

$$\max z=3x_1+2x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}-x_1+2x_2\leqslant 4\\ 3x_1+2x_2\leqslant 12\\ x_1-\ x_2\leqslant 3\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(1)用单纯形法求解该线性规划问题的最优解和最优值；

(2)写出线性规划的对偶问题。

(3)求解对偶问题的最优解和最优值。

解题分析　本题考察了线性规划与对偶的基础知识，要求读者熟知对偶理论。

解题过程

$$\boldsymbol{X}^*=\left[\frac{18}{5}\ \frac{3}{5}\ \frac{32}{5}\ 0\ 0\right]^{\mathrm{T}}$$

$\max z=12$，有无穷多解

对偶问题为

$$\min w=4y_1+12y_2+3y_3$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}-y_1+3y_2+y_3\geqslant 3\\ 2y_1+2y_2-y_3\geqslant 2 & i=1,2,3\\ y_i\geqslant 0\end{cases}$$

$$\boldsymbol{Y}^*=[0\ 1\ 0]\qquad w^*=z^*=12$$

【题 2】 (2005 年东南大学)写出如下线性规划问题的对偶问题：

$$\max z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \leqslant 0, x_3 \text{ 无限制} \end{cases}$$

并利用弱对偶性说明 z 的最大值不大于 1。

解题分析 同上一题一样，考察对偶理论基本知识。

解题过程 原问题的对偶问题为：

$$\min w = 2y_1 + y_2 + 2y_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \geqslant 1 \\ y_1 - y_2 + y_3 \leqslant 2 \\ -y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \geqslant 0, y_2 \text{ 无限制}, y_3 \leqslant 0 \end{cases}$$

由于(0,1,0)是上述对偶问题的可行解，由弱对偶性可知，对原问题的任一可行解 $\overline{\boldsymbol{X}}$ 都有

$$\boldsymbol{C}\overline{\boldsymbol{X}} \leqslant \boldsymbol{Yb}$$

而 $\boldsymbol{Yb} = [0\ 1\ 0]\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix} = 1$，所以 z 的最大值不大于 1。

课后习题全解

◎2.1 用改进单纯形法求解以下线性规划问题.

(1) $\max z = 6x_1 - 2x_2 + 3x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leqslant 2 \\ x_1 + 4x_3 \leqslant 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

(2) $\min z = 2x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geqslant 6 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 3 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

分析 先将线性规划问题转化为标准形式再用改进单纯形法求解。

解 (1) 将上述线性规划问题转化为标准形式

$$\max z = 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 4x_3 + x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

取

$B_0=(P_4,P_5)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，　$X_{B_0}=(x_4,x_5)^{\mathrm{T}}$，　$C_{B_0}=(0,0)$，

$N_0=(P_1,P_2,P_3)=\begin{pmatrix}2&-1&2\\1&0&4\end{pmatrix}$，　$X_{N_0}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，

$C_{N_0}=(6,-2,3)$，　$B_0^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，　$b_0=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

非基变量的检验数

$$\sigma_{N_0}=C_{N_0}-C_{B_0}B_0^{-1}N_0=C_{N_0}=(6,-2,3)$$

$\because x_1$ 的检验数 $\sigma_1=6$ 为正的最大，

$\therefore x_1$ 为换入变量。

$B_0^{-1}b_0=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$，　$B_0^{-1}P_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

由 θ 规则得

$$\theta=\min_i\left\{\frac{(B_0^{-1}b_0)_i}{(B_0^{-1}P_1)_i}\,\middle|\,(B_0^{-1}P_1)_i>0\right\}=\min\left\{\frac{2}{2},\frac{4}{1}\right\}=1$$

$\therefore x_4$ 为换出变量

$B_1=(P_1,P_5)=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$，　$X_{B_1}=(x_1,x_5)^{\mathrm{T}}$，　$C_{B_1}=(6,0)$，

$N_1=(P_4,P_2,P_3)=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$，　$X_{N_1}=(x_4,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，

$C_{N_1}=(0,-2,3)$，　$B_1^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}$，

$$b_1=B_1^{-1}b_0=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

非基变量的检验数

$$\begin{aligned}\sigma_{N_1}&=C_{N_1}-C_{B_1}B_1^{-1}N_1\\&=(0,-2,3)-(6,0)\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&0&4\end{pmatrix}\\&=(0,-2,3)-(3,0)\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&0&4\end{pmatrix}\\&=(0,-2,3)-(3,-3,6)=(-3,1,-3)\end{aligned}$$

$\because x_2$ 的检验数 $\sigma_2=1$ 为正的最大，

$\therefore x_2$ 为换入变量。

$$B_1^{-1}b_0=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\qquad B_1^{-1}P_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

由 θ 规则得

$$\theta=\min_i\left\{\frac{(B_1^{-1}b_0)_i}{(B_1^{-1}P_2)_i}\middle|(B_0^{-1}P_2)_i>0\right\}=\min\left\{\frac{3}{1/2}\right\}=6$$

$\therefore x_5$ 为换出变量。

$$B_2=(P_1,P_2)=\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 0\end{pmatrix},X_{B_2}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}},\qquad C_{B_2}=(6,-2),$$

$$N_2=(P_4,P_5,P_3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 4\end{pmatrix},X_{N_2}=(x_4,x_5,x_3)^{\mathrm{T}},C_{N_2}=(0,0,3),$$

$$B_2^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix},b_2=B_2^{-1}b_0=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$$

非基变量的检验数

$$\begin{aligned}\sigma_{N_2}&=C_{N_2}-C_{B_2}B_2^{-1}N_2\\&=(0,0,3)-(6,-2)\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 4\end{pmatrix}\\&=(0,0,3)-(2,2)\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 4\end{pmatrix}\\&=(0,0,3)-(2,2,12)=(-2,-2,-9)\end{aligned}$$

$\because$ 非基变量的检验数均为负，

$\therefore$ 原问题已达到最优解。

最优解

$$X^*=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=B_2^{-1}b_0=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$$

即

$$X^*=(4,6,0)^{\mathrm{T}}$$

目标函数最优值 $\max z=6\times4-2\times6+3\times0=12$。

(2) 将上述线性规划问题化为如下形式：

$$\min z=2x_1+x_2+0\cdot x_3+M\cdot x_4+M\cdot x_5+0\cdot x_6$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}3x_1+x_2+x_4=3\\4x_1+3x_2-x_3+x_5=6\\x_1+2x_2+x_6=3\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geqslant0\end{cases}$$

其中 M 是一个任意大的正数。

取

$$B_0=(P_4,P_5,P_6)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix},\qquad X_{B_0}=(x_4,x_5,x_6)^{\mathrm{T}},$$

$$C_{B_0}=(M,M,0),N_0=(P_1,P_2,P_3)=\begin{bmatrix}3&1&0\\4&3&-1\\1&2&0\end{bmatrix}$$

$$X_{N_0}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}},\qquad C_{N_0}=(2,1,0),$$

$$B_0^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad b_0=(3,6,3)^{\mathrm{T}}$$

非基变量的检验数

$$\begin{aligned}\sigma_{N_0}&=C_{N_0}-C_{B_0}B_0^{-1}N_0\\&=(2,1,0)-(M,M,0)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&0\\4&3&-1\\1&2&0\end{bmatrix}\\&=(2,1,0)-(7M,4M,-M)\\&=(2-7M,1-4M,M)\end{aligned}$$

$\because x_1$ 的检验数 $\sigma_1=2-7M$ 为负的最小，

$\therefore x_1$ 为换入变量。

$$B_0^{-1}b_0=\begin{bmatrix}3\\6\\3\end{bmatrix},\qquad B_0^{-1}P_1=\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}$$

由 θ 规则得

$$\theta=\min_i\left\{\frac{(B_0^{-1}b)_i}{(B_0^{-1}P_1)_i}\,\middle|\,(B_0^{-1}P_1)_i>0\right\}=\min\left\{\frac{3}{3},\frac{6}{4},\frac{3}{1}\right\}=1$$

$\therefore x_4$ 为换出变量。

$$B_1=(P_1,P_5,P_6)=\begin{bmatrix}3&0&0\\4&1&0\\1&0&1\end{bmatrix},X_{B_1}=(x_1,x_5,x_6)^{\mathrm{T}},C_{B_1}=(2,M,0),$$

$$N_1=(P_4,P_2,P_3)=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&3&-1\\0&2&0\end{bmatrix},X_{N_1}=(x_4,x_2,x_3)^{\mathrm{T}},C_{N_1}=(M,1,0),$$

$$B_1^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\-\frac{4}{3}&1&0\\-\frac{1}{3}&0&1\end{bmatrix},b_1=B_1^{-1}b_0=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\-\frac{4}{3}&1&0\\-\frac{1}{3}&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\6\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$$

非基变量的检验数

$$\sigma_{N_1}=C_{N_1}-C_{B_1}B_1^{-1}N_1$$

$$=(M,1,0)-(2,M,0)\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ -\frac{4}{3} & 1 & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$=(M,1,0)-\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{3}M,M,0\right)\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$=(M,1,0)-\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{3}M,\frac{2}{3}+\frac{5}{3}M,-M\right)$$

$$=\left(\frac{7}{3}M-\frac{2}{3},\frac{1}{3}-\frac{5}{3}M,M\right)$$

$\because x_2$ 的检验数 $\sigma_2=\frac{1}{3}-\frac{5}{3}M$ 为负的最小，

$\therefore x_2$ 为换入变量。

$$B_1^{-1}b_0=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix},\qquad B_1^{-1}P_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ -\frac{4}{3} & 1 & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{5}{3}\\ \frac{5}{3}\end{bmatrix}$$

由 θ 规则得

$$\theta=\min_i\left\{\frac{(B_1^{-1}b_0)_i}{(B_1^{-1}P_2)_i}\,\middle|\,(B_1^{-1}P_2)_i>0\right\}=\min\left\{\frac{1}{1/3},\frac{2}{5/3},\frac{2}{5/3}\right\}=\frac{6}{5}$$

$\therefore x_5$ 为换出变量。

$$B_2=(P_1,P_2,P_6)=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix},X_{B_2}=(x_1,x_2,x_6)^{\mathrm{T}},\qquad C_{B_2}=(2,1,0),$$

$$N_2=(P_4,P_5,P_3)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$X_{N_2}=(x_4,x_5,x_3)^{\mathrm{T}},\qquad C_{N_2}=(M,M,0),$

$$B_2^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix},$$

$$b_2=B_2^{-1}b_0=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ -\frac{4}{3} & \frac{3}{5} & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 6\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{6}{5}\\ 0\end{bmatrix}$$

非基变量的检验数

$$\sigma_{N_2}=C_{N_2}-C_{B_2}B_2^{-1}N_2$$

$$=(M,M,0)-(2,1,0)\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=(M,M,0)-\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5},0\right)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=(M,M,0)-\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5},-\frac{1}{5}\right)$$

$$=\left(M-\frac{2}{5},M-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$$

∵非基变量的检验数均为正，

∴原问题已达到最优解。

最优解

$$X^*=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=B_2^{-1}b_0=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{6}{5}\\ 0\end{bmatrix}$$

目标函数的最优值

$$\min z=2x_1+x_2=2\times\frac{3}{5}+\frac{6}{5}=\frac{12}{5}$$

○ **2.2**　已知某线性规划问题，用单纯形法计算时得到的中间某两步的计算表见表2－3，试将表中空白处数字填上。

表 2－3

c_j			3	5	4	0	0	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	x_2	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0
	x_5	$\frac{14}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	5	$-\frac{2}{3}$	1	0
	x_6	$\frac{20}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	4	$-\frac{2}{3}$	0	1
c_j-z_j			$-\frac{1}{3}$	0	4	$-\frac{5}{3}$	0	0
⋮								
	x_2					$-\frac{15}{41}$	$\frac{8}{41}$	$-\frac{10}{41}$
	x_3					$-\frac{6}{41}$	$\frac{5}{41}$	$\frac{4}{41}$
	x_1					$-\frac{2}{41}$	$-\frac{12}{41}$	$\frac{15}{41}$
c_j-z_j								

解 令

$$b_1=\left(\frac{8}{3},\frac{14}{3},\frac{20}{3}\right)^{\mathrm{T}},\qquad b_0=(b_{01},b_{02},b_{03})^{\mathrm{T}}$$

则

$$b_1=B_1^{-1}b_0=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\-\frac{2}{3}&1&0\\-\frac{2}{3}&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{01}\\b_{02}\\b_{03}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{8}{3}\\\frac{14}{3}\\\frac{20}{3}\end{bmatrix}$$

$$\therefore\begin{cases}\frac{1}{3}b_{01}=\frac{8}{3}\\-\frac{2}{3}b_{01}+b_{02}=\frac{14}{3}\\-\frac{2}{3}b_{01}+b_{03}=\frac{20}{3}\end{cases}$$

解得 $b_{01}=8,b_{02}=10,b_{03}=12$。

$$\therefore b_0=\begin{bmatrix}8\\10\\12\end{bmatrix}$$

$$\therefore b_2=B_2^{-1}b_0=\begin{bmatrix}\frac{15}{41}&\frac{8}{41}&-\frac{10}{41}\\-\frac{6}{41}&\frac{5}{41}&\frac{4}{41}\\\frac{-2}{41}&-\frac{12}{41}&\frac{15}{41}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\10\\12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{80}{41}\\\frac{50}{41}\\\frac{44}{41}\end{bmatrix}$$

∴表 2—4 中的数字填写如下：

表 2—4

c_j			3	5	4	0	0	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
5	x_2	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0
0	x_5	$\frac{14}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	5	$-\frac{2}{3}$	1	0
0	x_6	$\frac{20}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	4	$-\frac{2}{3}$	0	1
c_j-z_j			$-\frac{1}{3}$	0	4	$-\frac{5}{3}$	0	0
⋮								
5	x_2	$\frac{80}{41}$	0	1	0	$\frac{15}{41}$	$\frac{8}{41}$	$-\frac{10}{41}$
4	x_3	$\frac{50}{41}$	0	0	1	$-\frac{6}{41}$	$\frac{5}{41}$	$\frac{4}{41}$
3	x_1	$\frac{44}{41}$	1	0	0	$-\frac{2}{41}$	$-\frac{12}{41}$	$\frac{15}{41}$
c_j-z_j			0	0	0	$-\frac{45}{41}$	$-\frac{24}{41}$	$-\frac{11}{41}$

◎2.3 写出下列线性规划问题的对偶问题。

(1) $\min z=2x_1+2x_2+4x_3$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+5x_3\geqslant 2\\3x_1+x_2+7x_3\leqslant 3\\x_1+4x_2+6x_3\leqslant 5\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $\max z=x_1+2x_2+3x_3+4x_4$

$$\begin{cases}-x_1+x_2-x_3-3x_4=5\\6x_1+7x_2+3x_3-5x_4\geqslant 8\\12x_1-9x_2-9x_3+9x_4\leqslant 20\\x_1,x_2\geqslant 0,x_3\leqslant 0,x_4\text{ 无约束}\end{cases}$$

(3) $\min z=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i & (i=1,\cdots,m)\\\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j & (j=1,\cdots,n)\\x_{ij}\geqslant 0\end{cases}$$

(4) $\max z=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i,i=1,\cdots,m_1\leqslant m\\\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,i=m_1+1,m_1+2,\cdots,m\\x_j\geqslant 0,\text{当 }j=1,\cdots,n_1\leqslant n\\x_j\text{ 无约束,当 }j=n_1+1,\cdots,n\end{cases}$$

分析 本题考查了对偶问题的转化。

解 (1) 将原问题化为

$$\max(-z)=-2x_1-2x_2-4x_3$$

$$\begin{cases}-2x_1-3x_2-5x_3\leqslant -2 & ①\\3x_1+x_2+7x_3\leqslant 3 & ②\\x_1+4x_2+6x_3\leqslant 5 & ③\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0 & ④\end{cases}$$

设 y_1,y_2,y_3 分别为与约束条件①②③对应的对偶变量

此问题的对偶问题为

$$\min(-w)=-2y_1+3y_2+5y_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-2y_1+3y_2+y_3\geqslant -2\\ -3y_1+y_2+4y_3\geqslant -2\\ -5y_1+7y_2+6y_3\geqslant -4\\ y_1,y_2,y_3\geqslant 0\end{cases}$$

进行整理得到原问题的对偶问题为

$$\max w=2y_1-3y_2-5y_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2y_1-3y_2-y_3\leqslant 2\\ 3y_1-y_2-4y_3\leqslant 2\\ 5y_1-7y_2-6y_3\leqslant 4\\ y_1,y_2,y_3\geqslant 0\end{cases}$$

(2) 令 $x_5=-x_3$，$x_4=x_6-x_7$，其中 $x_6,x_7\geqslant 0$

将上述问题转化为如下形式

$$\max z=x_1+2x_2-3x_5+4x_6-4x_7$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-x_1+x_2+x_5-3x_6+3x_7\leqslant 5 & ①\\ x_1-x_2-x_5+3x_6-3x_7\leqslant -5 & ②\\ -6x_1-7x_2+3x_5+5x_6-5x_7\leqslant -8 & ③\\ 12x_1-9x_2+9x_5+9x_6-9x_7\leqslant 20 & ④\\ x_1,x_2,x_5,x_6,x_7\geqslant 0\end{cases}$$

设 y_1,y_2,y_3,y_4 分别为与约束条件①②③④相对应的对偶变量。

此问题的对偶问题为

$$\min w=5y_1-5y_2-8y_3+20y_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-y_1+y_2-6y_3+12y_4\geqslant 1\\ y_1-y_2-7y_3-9y_4\geqslant 2\\ y_1-y_2+3y_3+9y_4\geqslant -3\\ -3y_1+3y_2+5y_3+9y_4\geqslant 4\\ 3y_1-3y_2-5y_3-9y_4\geqslant -4\\ y_1,y_2,y_3,y_4\geqslant 0\end{cases}$$

令 $y'_1=y_1-y_2$，$y'_3=-y_3$，进行整理得到原问题的对偶问题为

$$\min w=5y'_1+8y'_3+20y_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-y'_1+6y'_3+12y_4\geqslant 1\\ y'_1+7y'_3-9y_4\geqslant 2\\ -y'_1+3y'_3-9y_4\leqslant 3\\ -3y'_1-5y'_3+9y_4=4\\ y'_1\text{ 无约束},y'_3\leqslant 0,y_4\geqslant 0\end{cases}$$

(3) 将上述问题化为如下形式

$$\max(-z)=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\leqslant a_i & (i=1,2,\cdots,m) & ①\\ -\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\leqslant -a_i & (i=1,2,\cdots,m) & ②\\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\leqslant b_j & (j=1,2,\cdots,n) & ③\\ -\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\leqslant -b_j & (j=1,2,\cdots,n) & ④\\ x_{ij}\geqslant 0 \end{cases}$$

设 $y_i, y'_i, y_{m+j}, y'_{m+j}$ 分别为与约束条件①②③④相对应的对偶变量，此问题的对偶问题为

$$\min\ (-w)=\sum_{i=1}^{m} a_i y_i-\sum_{i=1}^{m} a_i y'_i+\sum_{j=1}^{n} b_j y_{m+j}-\sum_{j=1}^{n} b_j y'_{m+j}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}y_i+y_{m+j}-y'_i-y'_{m+j}\geqslant -c_{ij}\\ y_i, y_{m+j}, y'_i, y'_{m+j}\geqslant 0\end{cases}\quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

令 $y''_i=y'_i-y_i, y''_{m+j}=y'_{m+j}-y_{m+j}$，进行整理，得到原问题的对偶问题为

$$\max\ w=\sum_{i=1}^{m} a_i y''_i+\sum_{j=1}^{n} b_j y''_{m+j}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}y''_i+y''_{m+j}\leqslant c_{ij}\\ y''_i, y''_{m+j}\text{无约束}\end{cases}\quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

将上述问题化为如下形式

$$\max\ z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leqslant b_i & (i=1,2,\cdots,m_1, m_1\leqslant m)\\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leqslant b_i & (i=m_1+1, m_1+2,\cdots,m)\\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leqslant -b_i & (i=m_1+1, m_1+2,\cdots,m)\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,\cdots,n_1, n_1\leqslant n)\\ x_j\ \text{无约束} & (j=n_1+1, n_1+2,\cdots,n)\end{cases}$$

令 $x_j=x'_j-x''_j$ 且 $x'_j, x''_j\geqslant 0 \qquad (j=n_1+1, n_1+2,\cdots,n)$

则得到

$$\max\ z=\sum_{j=1}^{n_1} c_j x_j+\sum_{j=n_1+1}^{n} c_j(x'_j-x''_j)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n_1} a_{ij}x_j+\sum_{j=n_1+1}^{n} a_{ij}(x'_j-x''_j)\leqslant b_i & (i=1,2,\cdots,m_1,m_1\leqslant m) \quad ① \\ \sum_{j=1}^{n_1} a_{ij}x_j+\sum_{j=n_1+1}^{n} a_{ij}(x'_j-x''_j)\leqslant b_i & (i=m_1+1,m_1+2,\cdots,m) \quad ② \\ -\sum_{j=1}^{n_1} a_{ij}x_j-\sum_{j=n_1+1}^{n} a_{ij}(x'_j-x''_j)\leqslant -b_i & (i=m_1+1,m_1+2,\cdots,m) \quad ③ \\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n_1,n_1\leqslant n) \\ x'_j,x''_j\geqslant 0 & (j=n_1+1,n_1+2,\cdots,n)\end{cases}$$

设 $y_i(i=1,2,\cdots m_1)$， $y_i(i=m_1+1,m_1+2,\cdots,m)$

$y'_i(i=m_1+1,m_1+2,\cdots,m)$

分别为与约束条件①②③相对应的对偶变量，

此问题的对偶问题为

$$\min w=\sum_{i=1}^{m} y_ib_i-\sum_{i=m_1+1}^{m} y'_ib_i$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} y_ia_{ij}-\sum_{i=m_1+1}^{m} y'_ia_{ij}\geqslant c_j & (j=1,2,\cdots,n) \\ -\sum_{i=m_1+1}^{m} y_ia_{ij}+\sum_{i=m_1+1}^{m} y'_ia_{ij}\geqslant -c_j & (j=n_1+1,n_2+2,\cdots,n) \\ y_i\geqslant 0 & (i=1,2,\cdots m) \\ y'_i\geqslant 0 & (i=m_1+1,m_1+2,\cdots n)\end{cases}$$

令

$$y''_i=\begin{cases}y_i & (i=1,2,\cdots,m_1) \\ y_i-y'_i & (i=m_1+1,m_1+2,\cdots m)\end{cases}$$

对上式进行整理得到问题的对偶问题为

$$\min w=\sum_{i=1}^{m} b_iy''_i$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y''_i\geqslant c_j & (i=1,2,\cdots n_1) \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y''_i=c_j & (j=n_1+1,n_1+2,\cdots n) \\ y''_i\geqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m_1) \\ y''_i\ \text{无约束} & (i=m_1+1,m_1+2,\cdots m)\end{cases}$$

○ **2.4** 判断下列说法是否正确，为什么？

(1) 如线性规划的原问题存在可行解，则其对偶问题也一定存在可行解；

(2) 如线性规划的对偶问题无可行解，则原问题也一定无可行解；

(3) 如果线性规划的原问题和对偶问题都具有可行解，则该线性规划问题一定具有有限最优解。

解 (1) 错误。原问题存在可行解，对偶问题可能存在可行解也可能无可行解。

(2) 错误。线性规划的对偶问题无可行解，则原问题可能无可行解也可能为无界解。

(3) 错误。线性规划问题的原问题和对偶问题都具有可行解，则该线性规划问题可能有有限最优解也可能为无界解。

◎**2.5** 设线性规划问题 1 是

$$\max z_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, & i=1,2,\cdots,m \\ x_j \geqslant 0, & j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

$(y_1^*, \cdots, y_m^*)$是其对偶问题的最优解。

又设线性规划问题 2 是

$$\max z_2 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i + k_i, & i=1,2,\cdots,m \\ x_j \geqslant 0, & j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

其中 k_i 是给定的常数，求证

$$\max z_2 \leqslant \max z_1 + \sum_{i=1}^{m} k_i y_i^*$$

分析　对偶定理：若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解；且目标函数值相等。

证明　将原问题用矩阵形式描述如下：

①
$$\max z_1 = CX$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} AX \leqslant b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

其中 $b=(b_1, b_2, \cdots b_m)^{\mathrm{T}}$

设其可行解为 X_1，其对偶问题的最优解为 $Y_1=(y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*)$为已知。

②
$$\max z_2 = CX$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} AX \leqslant b+k \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

其中 $k=(k_1, k_2, \cdots k_m)^{\mathrm{T}}$

设其可行解为 X_2，其对偶问题的最优解为 Y_2，②的对偶问题为

$$\min w = Y(b+k)$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} YA \geqslant C \\ Y \geqslant 0 \end{cases}$$

$\because Y_2$ 为最优解，$\therefore Y_2(b+k) \leqslant Y_1(b+k)$

$\because X_2$ 为②的可行解，$\therefore AX_2 \leqslant b+k$

$\therefore Y_2 A X_2 \leqslant Y_2(b+k) \leqslant (Y_1 b + k)$

∵原问题与对偶问题的最优函数值相等，∴$\max z_2 \leqslant \max z_1 + \sum_{i=1}^{m} k_i y_i^*$。

2.6 已知线性规划问题

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_5 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1,2,\cdots,5$$

用单纯形法求解，得到最终单纯形表如表 2—5 所示，要求：

(1)求 $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, b_1, b_2$ 的值；

(2)求 c_1, c_2, c_3 的值。

表 2—5

X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	3/2	1	0	1	1/2	−1/2
x_2	2	1/2	1	0	−1	2
$c_j - z_j$		−3	0	0	0	−4

解 (1) $B^{-1}\begin{bmatrix} b_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{即}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}a_{11} - \frac{1}{2}a_{21} = 1 \\ \frac{1}{2}a_{12} - \frac{1}{2}a_{22} = 0 \\ \frac{1}{2}a_{13} - \frac{1}{2}a_{23} = 1, \\ -b_1 + 2b_2 = 2 \\ -a_{11} + 2a_{21} = \frac{1}{2} \\ -a_{12} + 2a_{22} = 1 \\ -a_{13} + 2a_{23} = 0 \end{cases} \quad \text{解之得} \begin{cases} a_{11} = -\frac{1}{2} \\ a_{12} = 1 \\ a_{13} = 4 \\ a_{21} = -\frac{5}{2} \\ a_{22} = 1 \\ a_{23} = 2 \\ b_1 = 8 \\ b_2 = 5 \end{cases}$$

(2)由最终单纯形表 2—9，$\begin{cases} c_1 - c_3 - \frac{1}{2}c_2 = -3 \\ -\frac{1}{2}c_3 + c_2 = 0 \\ -\frac{1}{2}c_3 - 2c_2 = -4 \end{cases}$， 解之得$\begin{cases} c_1 = 7 \\ c_2 = 4 \\ c_3 = 8 \end{cases}$

◎2.7　已知线性规划问题

$$\max z=2x_1+x_2+5x_3+6x_4 \qquad \text{对偶变量}$$

$$\begin{cases}2x_1 \qquad +x_3+\ x_4\leqslant 8 & y_1\\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4\leqslant 12 & y_2\\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

其对偶问题的最优解为 $y_1^*=4,y_2^*=1$，试应用对偶问题的性质，求原问题的最优解。

分析　根据对偶定理和互补松弛性即可求解。

解　原问题的对偶问题为

$$\min w=8y_1+12y_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2y_1+2y_2\geqslant 2 & (1)\\ 2y_2\geqslant 1 & (2)\\ y_1+y_2\geqslant 5 & (3)\\ y_1+2y_2\geqslant 6 & (4)\\ y_1,y_2\geqslant 0\end{cases}$$

将 $y_1^*=4,y_2^*=1$ 代入约束条件，可知(1)、(2)式为严格不等式，由互补松弛性得 $x_1^*=x_2^*=0$，因 $y_1^*,y_2^*>0$，由互补松弛性知，原问题的两个约束条件应取等式，即

$$\begin{cases}x_3+x_4=8\\ x_3+2x_4=12\end{cases}$$

解之得 $x_3^*=x_4^*=4$，所以原问题最优解 $X^*=(0,0,4,4)^{\mathrm{T}}$，目标函数最优值 $z^*=5\times4+6\times4=44$。

○ 2.8　试用对偶单纯形法求解下列线性规划问题。

(1) $\min z=x_1+x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+x_2\geqslant 4\\ x_1+7x_2\geqslant 7\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $\min z=3x_1+2x_2+x_3+4x_4$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+4x_2+5x_3+x_4\geqslant 0\\ 3x_1-x_2+7x_3-2x_4\geqslant 2\\ 5x_1+2x_2+x_3+6x_4\geqslant 15\\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

解　(1)先将此问题化成如下形式，以便得到对偶问题的初始可行基。

$$\max w=-x_1-x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-2x_1-\ x_2+x_3 \qquad =-4\\ -x_1-7x_2 \qquad +x_4=-7\\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

建立此问题的初始单纯形表，并利用对偶单纯形法求解。

表 2—6

c_j			-1	-1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	-4	-2	-1	1	0
0	x_4	-7	-1	$[-7]$	0	1
c_j-z_j			-1	-1	0	0
0	x_3	-3	$[-13/7]$	0	1	$-1/7$
-1	x_2	1	$1/7$	1	0	$-1/7$
c_j-z_j			$-6/7$	0	0	$-1/7$
-1	x_1	$21/13$	1	0	$-7/13$	$1/13$
-1	x_2	$10/13$	0	1	$1/13$	$-2/13$
c_j-z_j			0	0	$-6/13$	$-1/13$

由表中计算结果可知，线性规划问题的最优解 $X^*=(\frac{21}{13},\frac{10}{13},0,0)^{\mathrm{T}}$，目标函数最优值 $z^*=\frac{21}{13}+\frac{10}{13}=\frac{31}{13}$。

(2)先将此问题化成如下形式，以便得到对偶问题的初始可行基

$$\max w=-3x_1-2x_2-x_3-4x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-2x_1-4x_2-5x_3-x_4+x_5=0\\-3x_1+x_2-7x_3+2x_4+x_6=-2\\-5x_1-2x_2-x_3-6x_4+x_7=-15\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\geqslant 0\end{cases}$$

建立此问题的初始单纯形表，并利用对偶单纯形法求解。

表 2—7

c_j			-3	-2	-1	-4	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_5	0	-2	-4	-5	-1	1	0	0
0	x_6	-2	-3	1	-7	2	0	1	0
0	x_7	-15	$[-5]$	-2	-1	-6	0	0	1
c_j-z_j			-3	-2	-1	-4	0	0	0
0	x_5	6	0	$-16/5$	$-23/5$	$7/5$	1	0	$-2/5$
0	x_6	7	0	$11/5$	$-32/5$	$28/5$	0	1	$-3/5$
-3	x_1	3	1	$2/5$	$1/5$	$6/5$	0	0	$-1/5$
c_j-z_j			0	$-4/5$	$-2/5$	$-2/5$	0	0	$-3/5$

由表 2—7 中计算结果可知，线性规划问题的最优解 $X^*=(3,0,0,0,6,7,0)^{\mathrm{T}}$，目标函数最优值 $z^*=3\times3=9$。

◎**2.9** 现有线性规划问题

$$\max z=-5x_1+5x_2+13x_3$$

$$\begin{cases}-x_1+\ x_2+\ 3x_3\leqslant 20 & ①\\ 12x_1+4x_2+10x_3\leqslant 90 & ②\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

先用单纯形法求出最优解，然后分析在下列各种条件下，最优解分别有什么变化？

(1)约束条件①的右端常数由 20 变为 30；

(2)约束条件②的右端常数由 90 变为 70；

(3)目标函数中 x_3 的系数由 13 变为 8；

(4)x_1 的系数列向量由 $\begin{pmatrix}-1\\12\end{pmatrix}$ 变为 $\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$；

(5)增加一个约束条件③$2x_1+3x_2+5x_3\leqslant 50$；

(6)将原约束条件②改变为 $10x_1+5x_2+10x_3\leqslant 100$。

分析　将原问题化为标准型并用单纯形法求解，再用对偶单纯形法对各个问题求解。

解　在上述线性规划问题的第①、②个约束条件中分别加入松弛变量 x_4,x_5，得

$$\max z=-5x_1+5x_2+13x_3+0x_4+0x_5$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}-x_1+\ x_2+\ 3x_3+x_4\qquad=20\\ 12x_1+4x_2+10x_3\qquad+x_5=90\\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}$$

列出此问题的初始单纯形表，并进行迭代计算。

表 2—8

c_j			−5	5	13	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	20	−1	1	[3]	1	0	20/3
0	x_5	90	12	4	10	0	1	9
c_j-z_j			−5	5	13	0	0	
13	x_3	20/3	−1/3	[1/3]	1	1/3	0	20
0	x_5	70/3	46/3	2/3	0	−10/3	1	35
c_j-z_j			−2/3	2/3	0	−13/3	0	
5	x_2	20	−1	1	3	1	0	
0	x_5	10	16	0	−2	−4	1	
c_j-z_j			0	0	−2	−5	0	

由表 2—8 中计算结果可知，线性规划问题的最优解 $X^*=(0,20,0,0,10)^{\mathrm{T}}$，目标函数最优值 $z^*=5\times 20=100$。

(1)约束条件①的右端常数由 20 变为 30；

$$B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30\\90\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30\\-30\end{bmatrix}$$

列出单纯形表，并利用对偶单纯形法求解。

表 2—9

c_j			−5	5	13	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	x_2	30	−1	1	3	1	0
0	x_5	−30	16	0	[−2]	−4	1
c_j-z_j			0	0	−2	−5	0
5	x_2	−15	23	1	0	[−5]	3/2
13	x_3	15	−8	0	1	2	−1/2
c_j-z_j			−16	0	0	−1	−1
0	x_4	3	−23/5	−1/5	0	1	−3/10
13	x_3	9	6/5	2/5	1	0	1/10
c_j-z_j			−103/5	−1/5	0	0	−13/10

由表 2—9 中计算结果可知，线性规划问题的最优解变为 $X^*=(0,0,9,3,0)^T$，目标函数最优值 $z^*=13\times 9=117$。

(2)约束条件②的右端常数由 90 变为 70；

$$B^{-1}b=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\ 70\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\ -10\end{bmatrix}$$

列出单纯形表，并利用对偶单纯形法求解。

表 2—10

c_j			−5	5	13	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	x_2	20	−1	1	3	1	0
0	x_5	−10	16	0	[−2]	−4	1
c_j-z_j			0	0	−2	−5	0
5	x_2	5	23	1	0	−5	3/2
13	x_3	5	−8	0	1	2	−1/2
c_j-z_j			−16	0	0	−1	−1

由表 2—10 中计算结果可知，线性规划问题的最优解变为 $X^*=(0,5,5,0,0)^T$，目标函数最优值 $z^*=5\times 5+13\times 5=90$。

(3)目标函数中 x_3 的系数由 13 变为 8；

x_3 为非基变量，其检验数变为 $\sigma_3=8-5\times 3-0\times(-2)=-7<0$，所以线性规划问题的最优解不变。

(4)x_1 的系数列向量由 $\begin{bmatrix}-1\\ 12\end{bmatrix}$ 变为 $\begin{bmatrix}0\\ 5\end{bmatrix}$；

x_1 在最终单纯形表中的系数列向量变为 $P'_1=B^{-1}P_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 5\end{bmatrix}$，从而 x_1 在最终单纯形表中的检验数变为 $\sigma'_1=c_1-C_BB^{-1}P_1=-5-(5,0)\begin{bmatrix}0\\ 5\end{bmatrix}=-5<0$，所以

线性规划问题的最优解不变 。

(5)增加一个约束条件:$2x_1+3x_2+5x_3\leqslant 50$;在约束条件③中加入松弛变量 x_6,得 $2x_1+3x_2+5x_3+x_6=50$,加入原单纯形表,并进行迭代计算。

表 2—11

c_j			−5	5	13	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
5	x_2	20	−1	1	3	1	0	0
0	x_5	10	16	0	−2	−4	1	0
0	x_6	50	2	3	5	0	0	1
5	x_2	20	−1	1	3	1	0	0
0	x_5	10	16	0	−2	−4	1	0
0	x_6	−10	5	0	[−4]	−3	0	1
c_j-z_j			0	0	−2	−5	0	0
5	x_2	25/2	11/4	1	0	−5/4	0	3/4
0	x_5	15	27/2	0	0	−5/2	1	−1/2
13	x_3	5/2	−5/4	0	1	3/4	0	−1/4
c_j-z_j			−5/2	0	0	−7/2	0	−1/2

由表 2—11 中计算结果可知,线性规划问题的最优解变为 $X^*=(0,\frac{25}{2},\frac{5}{2},0,15,0)^T$,目标函数最优值 $z^*=5\times\frac{25}{2}+13\times\frac{5}{2}=95$。

(6)将原约束条件②改变为:$10x_1+5x_2+10x_3\leqslant 100$

x_1 在最终单纯形表中的系数列向量变为 $P'_1=B^{-1}P_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\-4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\14\end{bmatrix}$,从而 x_1 在最终单纯形表中的检验数变为 $\sigma'_1=c_1-C_BB^{-1}P_1=-5-(5,0)\begin{bmatrix}-1\\14\end{bmatrix}=0$

x_2 在最终单纯形表中的系数列向量变为 $P'_2=B^{-1}P_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\-4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$,从而 x_2 在最终单纯形表中的检验数变为 $\sigma'_2=c_2-C_BB^{-1}P_2=5-(5,0)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=0$

又因为 $B^{-1}b=\begin{bmatrix}1 & 0\\-4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\100\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\20\end{bmatrix}$ 的各分量均大于 0,所以线性规划问题的最优解不变。

●2.10 已知某工厂计划生产Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ三种产品,各种产品都需要在A,B,C设备上加工,有关数据见表2—12,试回答。

表2—12

设备代号	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	设备有效台时/每月
A	8	2	10	300
B	10	5	8	400
C	2	13	10	420
单位产品利润/千元	3	2	2.9	

(1)如何充分发挥设备能力,使生产盈利最大?

(2)若为了增加产量,可借用其他工厂的设备B,每月可借用60台时,租金为1.8万元,问借用B设备是否合算?

(3)若另有两种新产品Ⅳ,Ⅴ,其中Ⅳ需用设备A—12台时,B—5台时,C—10台时,单位产品盈利2.1千元;新产品Ⅴ需用设备A—4台时,B—4台时,C—12台时,单位产品盈利1.87千元。如A,B,C设备台时不增加,分别回答这两种新产品投产在经济上是否合算?

(4)对产品工艺重新进行设计,改进结构,改进后生产每件产品Ⅰ,需用设备A—9台时,设备B—12台时,设备C—4台时,单位产品盈利4.5千元,问这对原计划有何影响?

分析 根据题意列出线性规划模型,再化为标准型并用单纯形法求解。

解 (1)设分别生产Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ三种产品x_1,x_2,x_3单位,由题意,可列出如下线性规划模型

$$\max z=3x_1+2x_2+2.9x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}8x_1+2x_2+10x_3\leqslant 300\\10x_1+5x_2+8x_3\leqslant 400\\2x_1+13x_2+10x_3\leqslant 420\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

在上述线性规划问题的约束条件中分别加入人工变量x_4,x_5,x_6,得

$$\max z=3x_1+2x_2+2.9x_3+0x_4+0x_5+0x_6$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}8x_1+2x_2+10x_3+x_4=300\\10x_1+5x_2+8x_3+x_5=400\\2x_1+13x_2+10x_3+x_6=420\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geqslant 0\end{cases}$$

列出此问题的初始单纯形表,并进行迭代计算。

表2—13

c_j			3	2	2.9	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	300	[8]	2	10	1	0	0	75/2
0	x_5	400	10	5	8	0	1	0	40

c_j			3	2	2.9	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_6	420	2	13	10	0	0	1	210
c_j-z_j			3	2	2.9	0	0	0	
3	x_1	75/2	1	1/4	5/4	1/8	0	0	150
0	x_5	25	0	[5/2]	−9/2	−5/4	1	0	10
0	x_6	345	0	25/2	15/2	−1/4	0	1	138/5
c_j-z_j			0	5/4	17/20	−3/8	0	0	
3	x_1	35	1	0	17/10	1/4	−1/10	0	350/17
2	x_2	10	0	1	−9/5	−1/2	2/5	0	—
0	x_6	220	0	0	[30]	6	−5	1	22/3
c_j-z_j			0	0	7/5	1/4	−1/2	0	
3	x_1	338/15	1	0	0	−9/100	11/60	−17/300	
2	x_2	116/5	0	1	0	−7/50	1/10	3/50	
2.9	x_3	22/3	0	0	1	1/5	−1/6	1/30	
c_j-z_j			0	0	0	−3/100	−4/15	−7/150	

由表 2—13 中计算结果可知，线性规划问题的最优解 $X^*=(\frac{338}{15},\frac{116}{5},\frac{22}{3},0,0,0)^{\mathrm{T}}$，目标函数最优值 $z^*=3\times\frac{338}{15}+2\times\frac{116}{5}+2.9\times\frac{22}{3}=\frac{2029}{15}$。

(2)由最终单纯形表知，设备 B 的影子价格为 4/15(千元/台时)，而借用 B 设备的租金为 $18/60=0.3>4/15$，故借用 B 设备不合算。

(3)设分别生产Ⅳ、Ⅴ产品 x_7，x_8 单位，则 x_7 在最终单纯形表中的系数列向量

$$P'_7=B^{-1}P_7=\begin{bmatrix}-\frac{9}{100} & \frac{11}{60} & -\frac{17}{300}\\ -\frac{7}{50} & \frac{1}{10} & \frac{3}{50}\\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{30}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\5\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{73}{100}\\ -\frac{29}{50}\\ \frac{19}{10}\end{bmatrix}$$

从而 x_7 在最终单纯形表中的检验数 $\sigma'_7=c_7-C_BB^{-1}P_7=2.1-(3,2,2.9)\begin{bmatrix}-\frac{73}{100}\\ -\frac{29}{50}\\ \frac{19}{10}\end{bmatrix}=-0.06<0$，故生产Ⅳ产品在经济上不合算。

x_8 在最终单纯形表中的系数列向量

$$P'_8=B^{-1}P_8=\begin{bmatrix}-\frac{9}{100} & \frac{11}{60} & -\frac{17}{300}\\ -\frac{7}{50} & \frac{1}{10} & \frac{3}{50}\\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{30}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\4\\12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{23}{75}\\ \frac{14}{25}\\ \frac{8}{15}\end{bmatrix}$$

从而 x_8 在最终单纯形表中的检验数 $\sigma'_8=c_8-C_BB^{-1}P_8=1.87-(3,2,2.9)$

$\begin{bmatrix}-\frac{23}{75}\\ \frac{14}{25}\\ \frac{8}{15}\end{bmatrix}=0.12>0$，故生产Ⅴ产品在经济上合算。

把 x_8 的系数列向量加入最终单纯形表，并进行迭代计算。

表 2—14

c_j			3	2	2.9	0	0	0	1.87	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_8	
3	x_1	338/15	1	0	0	−9/100	11/60	−17/300	−23/75	—
2	x_2	116/5	0	1	0	−7/50	1/10	3/50	14/25	290/7
2.9	x_3	22/3	0	0	1	1/5	−1/6	1/30	[8/15]	77/12
c_j-z_j			0	0	0	−3/100	−4/15	−7/150	3/25	
3	x_1	107/4	1	0	23/40	1/40	21/240	−3/80	0	
2	x_2	31/2	0	1	−21/20	−7/20	11/40	1/40	0	
1.87	x_8	55/4	0	0	15/8	3/8	−5/16	1/16	1	
c_j-z_j			0	0	−41/40	−3/40	−73/320	−827/1600	0	

由表 2—14 中计算结果可知，线性规划问题的最优解 $X^*=(\frac{107}{4},\frac{31}{2},0,0,0,0,0,0,\frac{55}{4})^{\mathrm{T}}$，目标函数最优值 $z^*=3\times\frac{107}{4}+2\times\frac{31}{2}+1.87\times\frac{55}{4}=\frac{10957}{80}$。

(4)改进后 $c_1=4.5$，$P_1=(9,12,4)^{\mathrm{T}}$，$x_1$ 在最终单纯形表中的系数列向量

$$P'_1=B^{-1}P_1=\begin{bmatrix}-\frac{9}{100} & \frac{11}{60} & -\frac{17}{300}\\ -\frac{7}{50} & \frac{1}{10} & \frac{3}{50}\\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{30}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\\12\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{349}{100}\\ \frac{9}{50}\\ -\frac{1}{15}\end{bmatrix}$$

从而 x_1 在最终单纯形表中的检验数 $\sigma'_1=c_1-C_BB^{-1}P_1=4.5-(3,2,2.9)$

$$\begin{bmatrix}\frac{349}{100}\\ \frac{9}{50}\\ -\frac{1}{15}\end{bmatrix}=0.843>0$$，故改进后能带来更多的经济效益。

小结　注意与实际问题的结合。

◎2.11　分析下列参数规划中当 t 变化时最优解的变化情况。

(1) $\max z(t)=(3-6t)x_1+(2-2t)x_2+(5-5t)x_3 \quad (t\geqslant 0)$

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3\leqslant 430\\ 3x_1+2x_3\leqslant 460\\ x_1+4x_2\leqslant 420\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $\max z(t)=(7+2t)x_1+(12+t)x_2+(10-t)x_3 \quad (t\geqslant 0)$

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3\leqslant 20\\ 2x_1+2x_2+x_3\leqslant 30\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

(3) $\max z(t)=2x_1+x_2 \quad (0\leqslant t\leqslant 25)$

$$\begin{cases}x_1\leqslant 10+2t\\ x_1+x_2\leqslant 25-t\\ x_2\leqslant 10+2t\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(4) $\max z(t)=21x_1+12x_2+18x_3+15x_4 \quad (0\leqslant t\leqslant 59)$

$$\begin{cases}6x_1+3x_2+6x_3+3x_4\leqslant 30+t\\ 6x_1-3x_2+12x_3+6x_4\leqslant 78-t\\ 9x_1+3x_2-6x_3+9x_4\leqslant 135-t\\ x_j\geqslant 0,j=1,2,3,4\end{cases}$$

分析　本题考查了参数线性规划。

解　(1)在约束条件中分别加入松弛变量 x_4,x_5,x_6，即可将此模型化为标准型

$$\max z=(3-6t)x_1+(2-2t)x_2+(5-5t)x_3+0x_4+0x_5+0x_6$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+x_4=430\\ 3x_1+2x_3+x_5=460\\ x_1+4x_2+x_6=420\\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geqslant 0\end{cases}$$

令 $t=0$，用单纯形法求解。

表 2—15

c_j			3	2	5	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	430	1	2	1	1	0	0	430
0	x_5	460	3	0	[2]	0	1	0	230
0	x_6	420	1	4	0	0	0	1	—
c_j-z_j			3	2	5	0	0	0	
0	x_4	200	−1/2	[2]	0	1	−1/2	0	100
5	x_3	230	3/2	0	1	0	1/2	0	—
0	x_6	420	1	4	0	0	0	1	105
c_j-z_j			−9/2	2	0	0	−5/2	0	
2	x_2	100	−1/4	1	0	1/2	−1/4	0	
5	x_3	230	3/2	0	1	0	1/2	0	
0	x_6	20	2	0	0	−2	1	1	
c_j-z_j			−4	0	0	−1	−2	0	

将目标函数的系数的变化直接反映到最终单纯形表中，见表 2—16。

表 2—16

c_j			$3-6t$	$2-2t$	$5-5t$	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$2-2t$	x_2	100	−1/4	1	0	1/2	−1/4	0	—
$5-5t$	x_3	230	3/2	0	1	0	1/2	0	460
0	x_6	20	2	0	0	−2	[1]	1	20
c_j-z_j			$t-4$	0	0	$t-1$	$2t-2$	0	

当 $t\leqslant 1$ 时，$\sigma_j\leqslant 0(j=1,2,3,4,5,6)$，所以最优解 $X^*=(1,100,230,0,0,20)^T$

当 $t>1$ 时，$\sigma_5>\sigma_4>0$，x_5 进基，x_6 出基，见表 2—17。

表 2—17

c_j			$3-6t$	$2-2t$	$5-5t$	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$2-2t$	x_2	105	1/4	1	0	0	0	1/4	—
$5-5t$	x_3	220	1/2	0	1	[1]	0	−1/2	220
0	x_5	20	2	0	0	−2	1	1	—
c_j-z_j			$-3t$	0	0	$5t-5$	0	$2-2t$	
$2-2t$	x_2	105	1/4	1	0	0	0	[1/4]	420
0	x_4	220	1/2	0	1	1	0	−1/2	—
0	x_5	460	3	0	2	0	1	0	—
c_j-z_j			$\frac{5}{2}-\frac{11}{2}t$	0	$5-5t$	0	0	$\frac{t}{2}-\frac{1}{2}$	
0	x_6	420	1	4	0	0	0	1	

c_j			$3-6t$	$2-2t$	$5-5t$	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	430	1	2	1	1	0	0	
0	x_5	460	3	0	2	0	1	0	
c_j-z_j			$3-6t$	$2-2t$	$5-5t$	0	0	0	

所以，当 $t\geqslant 1$ 时，最优解 $X^*=(0,0,0,430,460,420)^T$

(2)在约束条件中分别加入松弛变量 x_4,x_5，即可将此模型化为标准型

$$\max z=(7+2t)x_1+(12+t)x_2+(10-t)x_3+0x_4+0x_5$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=20 \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_5=30 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0 \end{cases}$$

令 $t=0$，用单纯形法求解。

表 2—18

c_j			7	12	10	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	20	1	1	1	1	0	20
0	x_5	30	2	[2]	1	0	1	15
c_j-z_j			7	12	10	0	0	
0	x_4	5	0	0	[1/2]	1	$-1/2$	10
12	x_2	15	1	1	1/2	0	1/2	30
c_j-z_j			-5	0	4	0	-6	
10	x_3	10	0	0	1	2	-1	
12	x_2	10	1	1	0	-1	1	
c_j-z_j			-5	0	0	-8	-2	

将目标函数的系数的变化直接反映到最终单纯形表中，见表 2—19。

表 2—19

c_j			$7+2t$	$12+t$	$10-t$	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$10-t$	x_3	10	0	0	1	[2]	-1
$12+t$	x_2	10	1	1	0	-1	1
c_j-z_j			$t-5$	0	0	$3t-8$	$-2-2t$

当 $t\leqslant\frac{8}{3}$时，$\sigma_j\leqslant 0(j=1,2,3,4,5)$，所以最优解 $X^*=(0,10,10,0,0)^T$

当$\frac{8}{3}<t\leqslant 5$ 时，$\sigma_4>0$，x_4 进基，x_3 出基，见表 2—20。

表 2—20

c_j			$7+2t$	$12+t$	$10-t$	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	5	0	0	1/2	1	$-1/2$
$12+t$	x_2	15	[1]	1	1/2	0	1/2
c_j-z_j			$t-5$	0	$4-\frac{3}{2}t$	0	$-6-\frac{1}{2}t$

所以，当$\frac{8}{3}\leqslant t\leqslant 5$时，最优解 $X^*=(0,15,0,5,0)^{\mathrm{T}}$

由表 2—20 可看出，当 $t>5$ 时，$\sigma_1>0$，x_1 进基，x_2 出基，见表 2—21。

表 2—21

c_j			$7+2t$	$12+t$	$10-t$	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	5	0	0	1/2	1	$-1/2$
$7+2t$	x_1	15	1	1	1/2	0	1/2
c_j-z_j			0	$5-t$	$\frac{13}{2}-2t$	0	$-\frac{7}{2}t$

所以，当 $t\geqslant 5$ 时，最优解 $X^*=(15,0,0,5,0)^{\mathrm{T}}$

(3)在约束条件中分别加入松弛变量 x_3,x_4,x_5，即可将此模型化为标准型。

$$\max z=2x_1+x_2+0x_3+0x_4+0x_5$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 \quad +x_3 \quad =10+2t \\ x_1+x_2 \quad +x_4=25-t \\ \quad x_2 \quad +x_5=10+2t \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0 \end{cases}$$

令 $t=0$，用单纯形法求解。

表 2—22

c_j			2	1	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	10	[1]	0	1	0	0	10
0	x_4	25	1	1	0	1	0	25
0	x_5	10	0	1	0	0	1	—
c_j-z_j			2	1	0	0	0	
2	x_1	10	1	0	1	0	0	—
0	x_4	15	0	1	-1	1	0	15
0	x_5	10	0	[1]	0	0	1	10
c_j-z_j			0	1	-2	0	0	
2	x_1	10	1	0	1	0	0	
0	x_4	5	0	0	-1	1	-1	
1	x_2	10	0	1	0	0	1	
c_j-z_j			0	0	-2	0	-1	

计算

$$B^{-1}\Delta b=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2t\\ -t\\ 2t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2t\\ -t\\ 2t\end{bmatrix}$$

将计算结果反映到最终表,得表 2—23。

表 2—23

c_j			2	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	$10+2t$	1	0	1	0	0
0	x_4	$5-t$	0	0	-1	1	-1
1	x_2	$10+2t$	0	1	0	0	1
c_j-z_j			0	0	-2	0	-1

当 $0\leqslant t\leqslant 5$ 时,上表中 $b_i\geqslant 0(i=1,2,3)$,所以最优解 $X^*=(10+2t,10+2t,0,5-t,0)^T$

当 $t>5$ 时,$b_2<0$,x_4 出基,x_5 进基,用对偶单纯形法迭代,见表 2—24。

表 2—24

c_j			2	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	$10+2t$	1	0	1	0	0
0	x_5	$t-5$	0	0	1	-1	1
1	x_2	$15+t$	0	1	-1	1	0
c_j-z_j			0	0	-1	-1	0

所以,当 $t\geqslant 5$ 时,最优解 $X^*=(10+2t,15+t,0,0,t-5)^T$

(4)在约束条件中分别加入松弛变量 x_5,x_6,x_7,即可将此模型化为标准型

$$\max z(t)=21x_1+12x_2+18x_3+15x_4+0x_5+0x_6+0x_7$$

$$\begin{cases}6x_1+3x_2+6x_3+3x_4+x_5=30+t\\ 6x_1-3x_2+12x_3+6x_4+x_6=78-t\\ 9x_1+3x_2-6x_3+9x_4+x_7=135-t\\ x_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,7\end{cases}$$

令 $t=0$,用单纯形法求解。

表 2—25

c_j			21	12	18	15	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	30	[6]	3	6	3	1	0	0	5
0	x_6	78	6	-3	12	6	0	1	0	13
0	x_7	135	9	3	-6	9	0	0	1	15
c_j-z_j			21	12	18	15	0	0	0	

c_j			21	12	18	15	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
21	x_1	5	1	1/2	1	[1/2]	1/6	0	0	10
0	x_6	48	0	−6	6	3	−1	1	0	16
0	x_7	90	0	−3/2	−15	9/2	−3/2	0	1	20
c_j-z_j			0	3/2	−3	9/2	−7/2	0	0	
15	x_4	10	2	1	2	1	1/3	0	0	
0	x_6	18	−6	−9	0	0	−2	1	0	
0	x_7	45	−9	−6	−24	0	−3	0	1	
c_j-z_j			−9	−3	−12	0	−5	0	0	

计算

$$B^{-1}\Delta b=\begin{bmatrix}1/3 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\ -t\\ -2t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t/3\\ -3t\\ -5t\end{bmatrix}$$

将计算结果反映到最终表,如表 2—26 所示。

表 2—26

c_j			21	12	18	15	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
15	x_4	$10+t/3$	2	1	2	1	1/3	0	0
0	x_6	$18-3t$	−6	[−9]	0	0	−2	1	0
0	x_7	$45-5t$	−9	−6	−24	0	−3	0	1
c_j-z_j			−9	−3	−12	0	−5	0	0

当 $0\leqslant t\leqslant 6$ 时,上表中 $b_i\geqslant 0(i=1,2,3)$,所以最优解 $X^*=(0,0,0,10+\frac{t}{3},0,18-3t,45-5t)^{\mathrm{T}}$

当 $t>6$ 时,$b_2<0$,x_6 出基,x_2 进基,用对偶单纯形法迭代,见表 2—27。

表 2—27

c_j			21	12	18	15	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
15	x_4	12	4/3	0	2	1	1/9	1/9	0
12	x_2	$\frac{t}{3}-2$	2/3	1	0	0	2/9	−1/9	0
0	x_7	$33-3t$	−5	0	[−24]	0	−5/3	−2/3	1
c_j-z_j			−7	0	−12	0	−13/3	−1/3	0

可见,当 $6<t\leqslant 11$ 时,表 2—31 中 $b_i\geqslant 0(i=1,2,3)$,所以最优解

$$X^*=(0,\frac{1}{3}t-2,0,12,0,0,33-3t)^{\mathrm{T}}$$

当 $t>11$ 时,$b_3<0$,x_7 出基,x_3 进基,用对偶单纯形法迭代,见表 2—28。

表 2—28

c_j			21	12	18	15	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
15	x_4	$\frac{59}{4}-\frac{t}{4}$	11/12	0	0	1	−1/36	1/18	1/12
12	x_2	$\frac{1}{3}t-2$	2/3	1	0	0	2/9	−1/9	0
18	x_3	$\frac{1}{8}(t-11)$	5/24	0	1	0	5/72	1/36	−1/24
c_j-z_j			−9/2	0	0	0	−7/2	0	−1/2

可见，当 $11<t\leqslant 59$ 时，上表中 $b_i\geqslant 0(i=1,2,3)$，所以最优解为

$$X^*=\left(0,\frac{1}{3}t-2,\frac{1}{8}(t-11),\frac{59}{4}-\frac{t}{4},0,0,0\right)^{\mathrm{T}}$$

第三章

运 输 问 题

内容提要

一、运输问题的特点

一般运输问题是要把某种产品(或物资)从若干个产地调运到若干个销地,每个产地的产量、每个销地的销量和产销各地之间的单位运价(或运距)已知,要求确定出使总运输费用最小的运输方案。这类问题可以用以下数学语言描述。

已知有 m 个产地 A_i,其产量分别为 a_i,$i=1,2,\cdots,m$;有 n 个销地 B_j,其销量分别为 b_j,$j=1,2,\cdots,n$;从 A_i 到 B_j 的运输单价为 C_{ij},这些已知数据可以归纳为表 3-1。设 x_{ij} 表示从 A_i 到 B_j 的运量,求解表 3-2 中的 x_{ij} 的值,使总运费最小。上述这种形式,可称为表格形式的运输问题模型。

表 3-1 运输问题数据表

运价 / 销地 / 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产 量
A_1	C_{11}	C_{12}	$\cdots$	C_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	$\cdots$	C_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	C_{m1}	C_{m2}	$\cdots$	C_{mn}	a_m
销 量	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	$\sum_{j=1}^{n} b_j$ / $\sum_{i=1}^{m} a_i$

表 3-2　运输方案表

运价　销地 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产　量
A_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}	a_1
A_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	x_{m1}	x_{m2}	$\cdots$	x_{mn}	a_m
销　量	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	$\sum_{j=1}^{n} b_j$ \ $\sum_{i=1}^{m} a_i$

表中 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 为各产地的产量之和，$\sum_{j=1}^{n} b_j$ 为各销地的销量之和

当 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$，即产量 = 销量时，称为产销平衡。

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } \sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\text{，即产量} > \text{销量时} \\ \text{当 } \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j\text{，即产量} < \text{销量时}\end{array}\right\}\text{统称为产销不平衡}$$

二、表上作业法及其在产销平衡问题中的应用

1. 产销平衡问题与表上作业法

（1）产销平衡问题的数学模型

具有 m 个产地 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 和 n 个销地 $B_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的运输问题的数学模型为：

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j = 1,2,\cdots,n) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & (i = 1,2,\cdots,m) \\ x_{ij} \geqslant 0 \end{cases}$$

它包含 $m \times n$ 个变量，$(m+n)$ 个约束方程，其系数矩阵的结构松散，且比较特殊。其系数矩阵为：

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccc}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn}
\end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
 & & & & 1 & & & & & 1 & & & \\
1 & & & & & 1 & & & & & 1 & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & & & \ddots & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l}
\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m\text{行} \\
\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n\text{行}
\end{array}
$$

该系数矩阵中对应于变量 x_{ij} 的系数列向量 P_{ij}，其分量中除第 i 个和第 $m+j$ 个为 1 以外，其余的都为零，即

$$P_{ij}=(0,\cdots,1,\cdots,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}=e_i+e_{m+j}$$

其中 e_i 为第 i 个分量为 1 的单位向量。

对于产销平衡问题有

$$\sum_{j=1}^{n}b_j=\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}x_{ij})=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}x_{ij})=\sum_{i=1}^{m}a_i$$

故最多只有 $m+n-1$ 个独立的约束方程，即系数矩阵的秩$\leqslant m+n-1$ 产销平衡问题的基可行解中只有 $m+n-1$ 个基变量，有$(m\times n)-(m+n-1)$个非基变量。

(2)表上作业法。

表上作业法是单纯形法在求解运输问题的一种简化方法。

其计算步骤如下：

① 列出产销平衡表。

② 确定初始基可行解，即在产销平衡表上给出 $m+n-1$ 个数字格，确定初始基可行解一般用最小元素法和伏格尔法。

③ 求各非基变量的检验数，即在表上计算空格的检验数，判别是否达到最优解。如已是最优解，则停止计算，否则转入下一步。

④ 确定换入变量的空格。

⑤ 确定换出变量的空格。

⑥ 沿闭回路调整运输数量 θ

⑦ 重复步骤③－⑥，直至所有空格的检验数 σ_{ij} 均为非负为止，此时便可得到最优方案。

三、产销不平衡运输问题的求解法

对于总产量不等于总需求量的运输问题，不能直接采用表上作业法求最优调运方案，而是将产销不平衡问题转化为产销平衡运输问题，然后再采用表上作业法进行求解。

(1) 产大于销问题

对于此类问题，设有一个假想销地 B_{n+1}，其销量

$$b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m}a_i-\sum_{j=1}^{n}b_j$$

但实际上没有运输，故其单位运价为 0，这样就转化产销平衡问题，但没有破坏原问

题的性质。

（2）销大于产问题

对于此类问题，设有一个假想产地 A_{m+1}，其产量

$$a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n}b_j-\sum_{i=1}^{m}a_i$$

但实际上没有运输，故其单位运价为 0，这样就转化为产销平衡问题，但没有破坏原问题的性质。

典型例题与解题技巧

【例 1】 两个水厂 A_1，A_2 将自来水供应三个小区 B_1，B_2，B_3，每天各水厂的供应量与各小区的需求量以及各水厂调到各小区的供水单价见表 3－3，应如何安排供水方案，使总水费最小？

解析分析 在本题中水厂就是“产地”，小区就是“销地”，而且供应量之和＝需求量之和，属产销平衡，其有关数据已用表格给出，可直接用表上作业法求解。

表 3-3

供水单价/元 小区 水厂	B_1	B_2	B_3	供应量/t
A_1	10	6	4	170
A_2	7	5	6	200
需求量/t	160	90	120	370 370

解题过程 n＝3，m＝2，n＋m－1＝4 有 4 个数字格。

用伏格法求出初始方案

表 3-4

运价 销地 产地	B_1 ①	B_2	B_3 ②	行差额
A_1	10	6	4	2
A_2 ③	7	5	6	1
列差额	3	1	2	

表 3-5

运量 销地 产地	B_1	B_2	B_3	产量
A_1		50	120	170
A_2	160	40		200
需求量	160	90	120	370

第一步　分别计算表 3-3 中运价部分的行差额和列差额，得表 3-4。

第二步　在所有差额中第 1 列的差额 3 是最大值，选第 1 列中最小运价 c_{21}，对应表 3-5 的 x_{21}，由 A_2 满足 B_1 的需求，在表 3-5 中(2,1)格中填写 160，A_2 还余 40。由于已满足 B_1 的需求，划去表 3-4 中的第 1 列。

对表 3-4 未划去部分重复第一、二步，直到求出初始方案(表 3-5)。

若存在 2 个(或 2 个以上)最大差额相等的情况，则根据差额所在行(或列)中的最小 c_{ij} 确定 x_{ij}。

【例 2】 判断表 3－6 到表 3－7 中给出的调运方案能否作为用表上作业法求解时的初始解？为什么？

表 3－6

产地 销地	1	2	3	4	产量
1	0	15			15
2	5		15	10	20
3	5	10			15
销量	5	15	15	10	

表 3－7

产地 销地	1	2	3	4	5	产量
1	150			250	50	450
2		200	300			500
3			250	30	50	330
4	90	210				300
5	10			80	20	110
销量	240	410	550	330	70	

解题分析　读者应该熟练掌握应用表上作业法求解产销问题时对变量的要求，以及表上数字格的含义。

解题过程　表 3－6 中，有 7 个数字格，而作为初始解，应有 $m+n-1=3+4-1=6$ 个，所以不能作为初始解。

表 3－7 中，有 13 个数字格，而作为初始解，应用 $m+n-1=5+5-1=9$ 个，所以不能作为初始解。

历年考研真题评析

【题 1】 (2005 年浙江大学)已知某运输问题的产销需求及单位运价如表 3－8 所示。

表 3－8

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	产量
A_1	5	9	3	15
A_2	1	3	4	18
A_3	8	2	6	17
销　量	18	12	16	

求解运费最少的运输方案和总运价。

解题分析　本题是一典型的且较简单的运输问题。

解题过程　$A_1 \to B_3(15)$；$A_2 \to B_1(18)$；$A_3 \to B_2(12)$，$B_3(1)$，$B_4(4)$

最优方案不惟一，因为有空格 $\sigma_{33}=0$。

总费用 93。

【题 2】 (2006 年北京大学)某房地产公司计划在一住宅小区建设 5 栋不同类型的楼房 B_1，B_2，B_3，B_4，B_5。由三家建筑公司 A_1，A_2，A_3 进行投标，允许每家建筑公司可承建 1～2 栋楼，经过投标得出建筑公司 A_i 对新楼 B_j 的预算费用 C_{ij} 见表 3－9，求使总费用最少的分派方案。

表 3－9

	B_1	B_3	B_3	B_4	B_5
A_1	3	8	7	15	11
A_2	7	9	10	14	12
A_3	6	9	13	12	7

解题分析　转化成运输问题再进行求解即可。

解题过程　A_1 承建 B_1 和 B_3 楼；

A_2 承建 B_2 楼；

A_3 承建 B_4 和 B_5 楼。

课后习题全解

○ **3.1** 判断表 3—10 和 3—11 中给出的调运方案能否作为用表上作业法求解时的初始解？为什么？

表 3—10

产地＼销地	1	2	3	4	产量
1	0	15			15
2			15	10	25
3	5				5
销量	5	15	15	10	

表 3—11

产地＼销地	1	2	3	4	5	产量
1	150			250		400
2		200	300			500
3			250		50	300
4	90	210				300
5				80	20	100
销量	240	410	550	330	70	

解 表 3—10 中有 5 个数字格，而作为初始解，应有 $m+n-1=3+4-1=6$ 个数字格，所以给出的调运方案不能作为用表上作业法求解时的初始解。

表 3—11 中有 10 个数字格，而作为初始解，应有 $m+n-1=5+5-1=9$ 个数字格，所以给出调运方案不能作为用表上作业法求解时的初始解。

◎**3.2** 表 3—12 和表 3—13 分别给出两个运输问题的产销平衡表和单位运价表，试用伏格尔(Vogel)法直接给出近似最优解。

表 3—12

产地＼销地	1	2	3	产量
1	5	1	8	12
2	2	4	1	14
3	3	6	7	4
销量	9	10	11	

表 3—13

产地＼销地	1	2	3	4	5	产量
1	10	2	3	15	9	25
2	5	10	15	2	4	30
3	15	5	14	7	15	20
4	20	15	13	M	8	30
销量	20	20	30	10	25	

分析　本题考查了伏格尔法。

解　解表 3—12：第一步：分别计算表 3—12 中各行、各列的最小运费和次最小运费的差额，并填入该表的最右列和最下行，见表 3—14。

表 3—14

产地＼销地	1	2	3	行差额
1	5	1	8	4
2	2	4	1	1
3	3	6	7	3
列差额	1	3	6	

第二步：从行或列差额中选出最大者，选择它所在行或列中的最小元素。在表 3 中，第 3 列是最大差额所在列，第 3 列中的最小元素为 1，可确定产地 2 的产品先供应给销地 3，得表 3—15 同时将运价表中第 3 列数字划去，如表 3—16 所示。

表 3—15

产地＼销地	1	2	3	产量
1				12
2			11	14
3				4
销量	9	10	11	

表 3—16

产地＼销地	1	2	3	产量
1	5	1	8	12
2	2	4	1	14
3	3	6	7	4
销量	9	10	11	

第三步:对表 3－16 中未划去的元素再分别计算出各行、各列的最小运费和次最小运费的差额,并填入该表的最右列和最下行,重复第一、二步,直到给出初始解为止。用此法给出表 1 的初始解如表 3－17 所示。

表 3－17

产地 \ 销地	1	2	3	产量
1	2	10		12
2	3		11	14
3	4			4
销量	9	10	11	

解 解表 3－13:第一步:分别计算表 3－13 中各行、各列的最小运费和次最小运费的差额,并填入该表的最右列和最下行,见表 3－18

表 3－18

产地 \ 销地	1	2	3	4	5	行差额
1	10	2	3	15	9	1
2	5	10	15	2	4	2
3	15	5	14	7	15	2
4	20	15	13	M	8	5
列差额	5	3	10	5	5	

第二步:从行或列差额中选出最大者,选择它所在行或列中的最小元素。在表 3－18 中,第 3 列是最大差额所在列,第 3 列中的最小元素为 3,可确定产地 1 的产品先供应给销地 3,得表 3－19,同时将运价表中第 1 行数字划去,如表 3－20 所示。

表 3－19

产地 \ 销地	1	2	3	4	5	产量
1			25			25
2						30
3						20
4						30
销量	20	20	30	10	25	

表 3－20

产地＼销地	1	2	3	4	5	产量
1	10	2	3	15	9	25
2	5	10	15	2	4	30
3	15	5	14	7	15	20
4	20	15	13	M	8	30
销量	20	20	30	10	25	

第三步：对表 3－20 中未划去的元素再分别计算出各行各列的最小运费和次最小运费的差额，并填入该表的最右列和最下行，重复第一、二步，直到给出初始解为止。用此法给出表 3－13 的初始解如表 3－21 所示。

表 3－21

产地＼销地	1	2	3	4	5	产量
1			25			25
2	20			10		30
3		20	0	0		20
4			5		25	30
销量	20	20	30	10	25	

◎3.3　用表上作业法求表 3－22 到表 3－25 中给出的运输问题的最优解（表中数字 M 为任意大正数）。

表 3－22

产地＼销地	甲	乙	丙	丁	产量
1	3	7	6	4	5
2	2	4	3	2	2
3	4	3	8	5	3
销量	3	3	2	2	

表 3－23

产地＼销地	甲	乙	丙	丁	产量
1	10	6	7	12	4
2	16	10	5	9	9
3	5	4	10	10	4
销量	5	2	4	6	

表 3－24

产地＼销地	甲	乙	丙	丁	戊	产量
1	10	20	5	9	10	5
2	2	10	8	30	6	6
3	1	20	7	10	4	2
4	8	6	3	7	5	9
销量	4	4	6	2	4	

表 3－25

产地＼销地	甲	乙	丙	丁	戊	产量
1	10	18	29	13	22	100
2	13	M	21	14	16	120
3	0	6	11	3	M	140
4	9	11	23	18	19	80
5	24	28	36	30	34	60
销量	100	120	100	60	80	

分析 本题考查了表上作业法，可先利用伏格尔法求出初始解，再利用位势法进行检验。

解 解表 3－22：利用伏格尔法求出初始解。

第一步：分别计算表 3－22 中各行、各列的最小运费和次最小运费的差额，并填入该表的最右列和最下行，见表 3－26。

表 3—26

销地 产地	甲	乙	丙	丁	列差额
1	3	7	6	4	1
2	2	4	3	2	0
3	4	3	8	5	1
列差额	1	1	3	2	

第二步：从行或列差额中选出最大者，选择它所在行或列中的最小元素。在表 3—26 中，丙列是最大差额所在列，丙列中的最小元素为 3，可确定产地 2 的产品先供应给销地丙，因为产地 2 的产量等于销地丙的销量，所以在(2，丁)处填入一个 0，得表 3—27并同时将运价表中丙列数字和第二行数字划去，如表 3—28 所示。

表 3—27

销地 产地	甲	乙	丙	丁	产量
1					5
2			2	0	2
3					3
销量	3	3	2	2	

表 3—28

销地 产地	甲	乙	丙	丁	产量
1	3	7	6	4	5
2	2	4	3	2	2
3	4	3	8	5	3
销量	3	3	2	2	

第三步：对表 3—28 中未划去的元素再分别计算出各行、各列的最小运费和次最小运费的差、额，并填入该表的最右列和最下行，重复第一、二步，直到给出初始解为止。用此法给出表 3—22 的初始解如表 3—29 所示。

表 3—29

销地 产地	甲	乙	丙	丁	产量
1	3	0		2	5
2			2	0	2
3		3			3
销量	3	3	2	2	

利用位势法进行检验。

第一步：在对应表 3－29 的数字格处填入单位运价，见表 3－30。

表 3－30

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁
1	3	7		4
2			3	2
3		3		

第二步：在表 3－30 上增加一行一列，在列中填入 u_i，在行中填入 v_i，得表 3－31。

表 3－31

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	u_i
1	3	7		4	0
2			3	2	－2
3		3			－4
v_j	3	7	5	4	

先令 $u_1=0$，然后按 $u_i+v_j=c_{ij}$，$i,j\in B$ 相继地确定 u_i，v_j 由表 3－31 可见，当 $u_1=0$ 时，由 $u_1+v_1=3$ 可得 $v_1=3$；由 $u_1+v_2=7$ 可得 $v_2=7$；由 $u_1+v_4=4$ 可得 $v_4=4$；由 $v_2=7$，$u_3+v_2=3$ 可得 $u_3=-4$；由 $v_4=4$，$u_2+v_4=2$ 可得 $u_2=-2$；由 $u_2=-2$，$u_2+v_3=3$ 可得 $v_3=5$

第三步：按 $\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$，$i,j\in N$ 计算所有空格的检验数，如表 3－32 所示。

表 3－32

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	u_i
1	3 0	7 0	6 1	4 0	0
2	2 1	4 －1	3 0	2 0	－2
3	4 5	3 0	8 7	5 5	－4
v_j	3	7	5	4	

$\sigma_{21}=c_{21}-(u_2+v_1)=2-(-2+3)=1$，$\sigma_{31}=c_{31}-(u_3+v_1)=4-(-4+3)=5$

$\sigma_{22}=c_{22}-(u_2+v_2)=4-(-2+7)=-1$，$\sigma_{13}=c_{13}-(u_1+v_3)=6-(0+5)=1$

$\sigma_{33}=c_{33}-(u_3+v_3)=8-(-4+5)=7$，$\sigma_{34}=c_{34}-(u_3+v_4)=5-(-4+4)=5$

在表 3－32 中还有负检验数，说明未得到最优解，可以利用闭回路调整法加以改进。

由表 3－32 得(2,乙)为调入格,以此格为出发点,作一闭回路,如表 3－33 所示。

表 3－33

销地 产地	甲	乙	丙	丁	产量
1	3	0(－1)		2(＋1)	5
2		0(＋1)	2	0(－1)	2
3		3			3
销量	3	3	2	2	

(2,乙)格的调入量 θ 是选择闭回路上具有(－1)的数字格中的最小者,即 $\theta=\min\{0,0\}$,然后按照闭回路上的正、负号,加上和减去此值,得到调整方案,如表 3－34 所示。

表 3－34

销地 产地	甲	乙	丙	丁	产量
1	3	0		2	5
2		0	2		2
3		3			3
销量	3	3	2	2	

对表 3－34 给出的解,再用位势法求各空格的检验数,如表 3－35 所示。所有检验数都非负,故表 3－34 中的解为最优解。这时得到的总运费最少,为 32 由于表 3－35 中(1,丙)格的检验数为 0,故该运输问题有无穷多最优解。

表 3－35

销地 产地	甲	乙	丙	丁	u_i
1			0		0
2	2			1	－3
3	5		6	5	－4
v_j	3	7	6	4	

解表 3－23:利用伏格尔法求出初始解。步骤和过程参考解表 3－22。

第一步:分别计算表 3－23 中各行、各列的最小运费和次最小运费的差额,并填入该表的最右列和最下行。

第二步:从行或列差额中选出最大者,选择它所在行或列中的最小元素。

第三步:对未划去的元素再分别计算出各行、各列的最小运费和次最小运费的差额,并填入该表的最右列和最下行,重复第一、二步,直到给出初始解为止。

最后再利用位势法检验。

解表 3－24:表 3－33 是产销不平衡的运输问题,所以增加一个假想销地巳,并令其运价为 0,其销量为 5＋6＋2＋9－(4＋4＋6＋2＋4)＝2,见表 3－36。

表 3－36

产地＼销地	甲	乙	丙	丁	戊	巳	产量
1	10	20	5	9	10	0	5
2	2	10	8	30	6	0	6
3	1	20	7	10	4	0	2
4	8	6	3	7	5	0	9
销量	4	4	6	2	4	2	

利用伏格尔法求出初始解。

第一步：分别计算表 3－36 中各行、各列的最小运费和次最小运费的差额，并填入该表的最右列和最下行。

第二步：从行或列差额中选出最大者，选择它所在行或列中的最小元素。

第三步：对未划去的元素再分别计算出各行、各列的最小运费和次最小运费的差额，并填入该表的最右列和最下行，重复第一、二步，直到给出初始解为止。

最后利用位势法进行检验。

所有检验数都非负，故解为最优解。这时得到的总运费最少，为 90。故该运输问题有无穷多最优解。

解表 3－25：表 3－25 是产销不平衡的运输问题，所以增加一个假想销地巳，并令其运价为 0，其销量为 100＋120＋140＋80＋60－(100＋120＋100＋60＋80)＝40，步骤和解题过程参考解表 3－24。

对给出的解，再用位势法求各空格的检验数。

所有检验数都非负，故解为最优解，这时得到的总运费最少，为 5520。由于检验数为 0，故该运输问题有无穷多最优解。

○ **3.4** 已知运输问题的产销平衡表、单位运价表及最优调运方案分别见表 3－37 和表 3－38，试回答下列问题。

表 3－37 产销平衡表及最优调运方案

产 地＼销 地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1		5		10	15
A_2	0	10	15		25
A_3	5				5
销量	5	15	15	10	

表 3－38　单位运价表

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	1	20	11
A_2	12	7	9	20
A_3	2	14	16	18

(1) 从 $A_2 \to B_2$ 的单位运价 c_{22} 在什么范围变化时，上述最优调运方案不变？

(2) $A_2 \to B_4$ 的单位运价 c_{24} 变为何值时，有无穷多最优调运方案。除表 3－37 中方案外，至少再写出其他两个。

解　(1) 以单位运价表计算的基变量检验数为 0 且非基变量检验数非负时，调运方案不变。假定 c_{22} 未知，对表 3－37 给出的最优调运方案，用位势法求各空格的检验数，如表 3－39 所示。

表 3－39

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	[10] $c_{22}-3$	[1] 0	[20] $10+c_{22}$	[11] 0	0
A_2	[12] 0	[c_{22}] 0	[9] 0	[20] $10-c_{22}$	$c_{22}-1$
A_3	[2] 0	[14] $24-c_{22}$	[16] 17	[18] $18-c_{22}$	$c_{22}-11$
v_j	$13-c_{22}$	1	$10-c_{22}$	11	

欲使所有非基变量的检验数非负，则有

$$\begin{cases} c_{22}-3 \geqslant 0 \\ 10+c_{22} \geqslant 0 \\ 10-c_{22} \geqslant 0 \\ 24-c_{22} \geqslant 0 \\ 18-c_{22} \geqslant 0 \end{cases}$$

解之得 $3 \leqslant c_{22} \leqslant 10$ 所以 $A_2 \to B_2$ 的单位运价 c_{22} 在 3 与 10 之间变化时，上述最优调运方案不变。

(2)当存在某非基变量的检验数为 0 时，有无穷多最优解．假定 c_{24} 未知，对表 3－37 给出的最优调运方案，用位势法求各空格的检验数，如表 3－40 所示。

表 3－40

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	10 4	1 0	20 17	11 0	0
A_2	12 0	c_{22} 0	9 0	c_{24} c_4-17	6
A_3	2 0	14 17	16 17	18 11	-4
v_j	6	1	3	11	

由 $c_{24}-17=0$ 可得 $c_{24}=17$ 所以当 $A_2 \to B_4$ 的单位运价 c_{24} 变为 17 时，有无穷多最优调运方案。把(A_2, B_4)作为调入格，以此格为出发点，作一闭回路。

调入量分别取 5，10，即可得两个最优调运方案。

◎**3.5** 某百货公司去外地采购 A、B、C、D 四种规格的服装，数量分别为：A—1500 套，B—2000 套，C—3000 套，D—3500 套。有三个城市可供应上述规格服装，各城市供应数量分别为：Ⅰ—2500 套，Ⅱ—2500 套，Ⅲ—5000 套。由于这些城市的服装质量、运价和销售情况不同，预计售出后的利润(元/套)也不同，详见表 3－41。请帮助该公司确定一个预期盈利最大的采购方案。

表 3－41

	A	B	C	D
Ⅰ	10	5	6	7
Ⅱ	8	2	7	6
Ⅲ	9	3	4	8

分析 将原问题转化为运输问题后，即可用表上作业法求解。

解 用 10 减去利润表上的数字，使之变成一个运输问题，如表 3－42 所示。

表 3－42

产　地＼销　地	A	B	C	D	产量
Ⅰ	0	5	4	3	2500
Ⅱ	2	8	3	4	2500
Ⅲ	1	7	6	2	5000
销量	1500	2000	3000	3500	

利用伏格尔法求出初始解，如表 3－43 所示。

表 3－43

销　地 / 产　地	A	B	C	D	产量
Ⅰ	1500	500	500		2500
Ⅱ			2500		2500
Ⅲ		1500		3500	5000
销量	1500	2000	3000	3500	

用位势法求各空格的检验数，如表 3－44 所示。

表 3－44

销　地 / 产　地	A	B	C	D	u_i
Ⅰ	$\boxed{0}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{3}$ 3	0
Ⅱ	$\boxed{2}$ 3	$\boxed{8}$ 4	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{4}$ 5	－1
Ⅲ	$\boxed{1}$ －1	$\boxed{7}$ 0	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{2}$ 0	2
v_j	0	5	4	0	

表 3－44 中还有非基变量的检验数小于 0，利用闭回路法进行调整。把(Ⅲ，A)格作为调入格，以此格为出发点，作一闭回路，如表 3－45 所示。

表 3－45

销地 / 产地	A	B	C	D	产量
Ⅰ	1500(－1)	500(＋1)	500		2500
Ⅱ			2500		2500
Ⅲ	(＋1)	1500(－1)		3500	5000
销量	1500	2000	3000	3500	

(Ⅲ，A)格的调入量 θ 是选择闭回路上具有(－1)的数字格中的最小者，即 $\theta=\min\{1500,1500\}=1500$，然后按照闭回路上的正、负号，加上和减去此值，得到调整方案，如表 3－46 所示。

表 3－46

销地 / 产地	A	B	C	D	产量
Ⅰ		2000	500		2500
Ⅱ			2500		2500
Ⅲ	1500	0		3500	5000
销量	1500	2000	3000	3500	

用位势法求各空格的检验数。

所有非基变量的检验数均为非负，故解为最优解。按照此种方案调运，可得最大盈利 72000 元。

○ **3.6** 甲、乙、丙三个城市每年需要煤炭分别为：320、250、350 万吨，由 A、B 两处煤矿负责供应。已知煤炭年供应量分别为：A—400 万吨，B—450 万吨。由煤矿至各城市的单位运价(万元/万吨)见表 3—47。由于需大于供，经研究平衡决定，甲城市供应量可减少 0～30 万吨，乙城市需要量应全部满足，丙城市供应量不少于 270 万吨。试求将供应量分配完又使总运费为最低的调运方案。

表 3—47

	甲	乙	丙
A	15	18	22
B	21	25	16

解 甲、乙、丙三个城市每年的煤炭总需求量为：320＋250＋350＝920 万吨，A、B 两处煤矿年煤炭总供应量为：400＋450＝850 万吨。虚拟一个 C 煤矿，其供应量为 70 万吨，其单位运价如表 3—48 所示。

表 3—48

	甲	甲	乙	丙	丙	供应
A	15	15	18	22	22	400
B	21	21	25	16	16	450
C	M	0	M	M	0	70
需求	290	30	250	270	80	

利用伏格尔法求出初始解，如表 3—49 所示。

表 3—49

	甲	甲	乙	丙	丙	供应
A	150		250			400
B	140			270	40	450
C		30			40	70
需求	290	30	250	270	80	

用位势法求各非基变量的检验数，如表 3—50 所示。

表 3—50

	甲	甲	乙	丙	丙	u_i
A	15 0	15 5	18 0	22 12	22 12	0
B	21 0	21 5	25 1	16 0	16 0	6
C	M $M-5$	0 0	M $M-8$	M M	0 0	-10
v_j	15	10	18	10	10	

表 3—50 中所有非基变量的检验数均为非负，故表 3—49 的解为最优解。按照此种方案调运运费最少，为 14650 万元。

◎3.7　某造船厂根据合同要从当年起连续三年末各提供三条规格型号相同的大型客货轮。已知该厂这三年内生产大型客货轮的能力及每艘客货轮成本如表 3—51 所示。

已知加班生产时，每艘客货轮成本比正常生产时高出 70 万元。又知造出来的客货轮如当年不交货，每艘每积压一年造成积压损失为 40 万元。在签订合同时，该厂已储存了两艘客货轮，而该厂希望在第三年末完成合同后还能储存一艘备用。问该厂应如何安排每年客货轮的生产量，使在满足上述各项要求的情况下，总的生产费用加积压损失为最少？

表 3—51

年度	正常生产时间内可完成的客货轮数	加班生产时间内可完成的客货轮数	正常生产时每艘成本（万元）
1	2	3	500
2	4	2	600
3	1	3	550

分析　先画出这问题的产销平衡表和单位造价表，利用伏格尔法求出初始解，用位势法进行检验，闭回路法作调整。

解　以 x_{ij} 表示第 i 年度生产用于第 j 年度交货的船数，I_i 表示第 i 年度可供货的船，列出产销平衡及单位造价表，如表 3—52 所示。

表 3—52

	1	2	3	4	产量
I_0	40	80	120	0	2
I_1	500	540	580	0	2
I_2	570	610	650	0	3
II_1	M	600	640	0	4

	1	2	3	4	产量
Ⅱ$_2$	M	670	710	0	2
Ⅲ$_1$	M	M	550	0	1
Ⅲ$_2$	M	M	620	0	3
需求	3	3	4	7	

利用伏格尔法求出初始解，如表 3—53 所示。

表 3—53

	1	2	3	4	产量
Ⅰ$_0$	2		0		2
Ⅰ$_1$		2			2
Ⅰ$_2$	1	1		1	3
Ⅱ$_1$				4	4
Ⅱ$_2$				2	2
Ⅲ$_1$			1		1
Ⅲ$_2$			3		3
需求	3	3	4	7	

用位势法求各非基变量的检验数，如表 3—54 所示。

表 3—54

	1	2	3	4	u_i
Ⅰ$_0$	40 0	540 0	120 0	0 530	0
Ⅰ$_1$	500 0	610 0	580 0	0 70	460
Ⅰ$_2$	570 0	600 0	650 0	0 0	530
Ⅱ$_1$	M $M-570$	610 -10	640 -10	0 0	530
Ⅱ$_2$	M $M-570$	670 60	710 60	0 0	530
Ⅲ$_1$	M $M-470$	M $M-510$	550 0	0 100	430
Ⅲ$_2$	M $M-540$	M $M-580$	620 0	0 30	500

	1	2	3	4	u_i
v_j	40	80	120	−530	

表 3—54 中还有非基变量的检验数小于 0，利用闭回路法进行调整，把（II_1，2）格作为调入格，以此格为出发点，作一闭回路，如表 3—55 所示。

表 3—55

	1	2	3	4	产量
I_0	2		0		2
I_1		2			2
I_2	1	1(−1)		1(+1)	3
II_1		(+1)		4(−1)	4
II_2				2	2
III_1			1		1
III_2			3		3
需求	3	3	4	7	

（II_1，2）格的调入量 θ 是选择闭回路上具有（−1）的数字格中的最小者，即 $\theta=\min\{1,4\}=1$，然后按照闭回路上的正、负号，加上和减去此值，得到调整方案，如表 3—56 所示。

表 3—56

	1	2	3	4	产量
I_0	2		0		2
I_1		2			2
I_2	1			2	3
II_1		1		3	4
II_2				2	2
III_1			1		1
III_2			3		3
需求	3	3	4	7	

用位势法求各空格的检验数，如表 3—57 所示。

表 3－57

	1		2		3		4		u_i
Ⅰ₀	0	40	10	80	0	120	530	0	0
Ⅰ₁	－10	500	0	540	－10	580	60	0	470
Ⅰ₂	0	570	10	610	0	650	0	0	530
Ⅱ₁	$M-570$	M	0	600	－10	640	0	0	530
Ⅱ₂	$M-570$	M	70	670	60	710	0	0	530
Ⅲ₁	$M-470$	M	$M-500$	M	0	550	100	0	430
Ⅲ₂	$M-540$	M	$M-570$	M	0	620	30	0	500
v_j	40		70		120		－530		

表 3－57 中还有非基变量的检验数小于 0，利用闭回路法进行调整，把（Ⅰ₁，1）格作为调入格，以此格为出发点，作一闭回路，如表 3－58 所示。

表 3－58

	1	2	3	4	产量
Ⅰ₀	2		0		2
Ⅰ₁	（＋1）	2（－1）			2
Ⅰ₂	1（－1）			2（＋1）	3
Ⅱ₁		1（＋1）		3（－1）	4
Ⅱ₂				2	2
Ⅲ₁			1		1
Ⅲ₂			3		3
需求	3	3	4	7	

（Ⅰ₁，1）格的调入量 θ 是选择闭回路上具有（－1）的数字格中的最小者，即 $\theta=\min\{1,2,3\}=1$，然后按照闭回路上的正、负号，加上和减去此值，得到调整方案，如表

3—59所示。

表 3—59

	1	2	3	4	产量
I_0	2		0		2
I_1	1	1			2
I_2				3	3
II_1		2		2	4
II_2				2	2
III_1			1		1
III_2			3		3
需求	3	3	4	7	

用位势法求各空格的检验数。

所有非基变量的检验数均为非负，故表 3—59 的解为最优解。按照此种方案调运，费用最小，为 4730 万元。

第四章

目 标 规 划

内容提要

一、目标规划的定义

针对线性规划目标单一的局限性，而提出了目标规划的方法。目标规划是线性规划的应用拓展，是解决实际问题的一种方法。与传统的方法不同，它强调了系统性，其方法在于寻找一个“尽可能”满足所有目标的解，而不是绝对满足这些目标的值。

解决目标规划问题首先要根据目标的重要性，分清主次先后、轻重缓急，引入偏差变量，将目标按等级转化为目标约束，最终形成可用线性规划方法解决的问题。

1. **目标规划的分类**

   目标规划包括线性目标规划、非线性目标规划、整数线性目标规划和整数非线性目标规划等，本书重点讨论线性目标规划。

2. **目标规划与线性规划相比的优点**

   (1) 线性规划只能处理一个目标，而且目标规划能统筹兼顾处理多种目标的关系，求得更切实际要求的解；

   (2) 线性规划立足于满足所有约束条件的可行解，而在实际问题中可能存在相互矛盾的约束条件；目标规划可以在相互矛盾的约束条件下找到满意解，即满意方案；

   (3) 目标规划找到的最优解是指尽可能地达到或接近一个或若干个已给定的指标值；

   (4) 线性规划的约束条件是不分主次地同等对待的，而目标规划可根据实际需要给予轻重缓急的考虑。

二、目标规划的转换建模技巧

建模步骤：

1. 列出全部的约束条件；
2. 把要达到指标的约束不等式加上正、负偏差变量后，化为目标约束等式；
3. 对目标赋予相应的优先因子；
4. 对同一级优先因子中的各偏差变量，若重要程度不同时，可(根据题意)赋予不同的加权系数；
5. 构造一个按优先因子及加权系数和对应的目标偏差量所要实现最小化的目标函数。

三、目标规划的解法

1. **图解法**

图解法简单直观，适于求解只有两个决策变量的问题，目标规划与线性规划不同，它一般是寻求一个区域，这个区间提供了相互矛盾的目标集的折衷方案。

图解法的基本步骤：

(1) 令各偏差变量为 0，作出所有的约束直线；

(2) 作图表示偏差变量增加对约束直线的影响；

(3) 确定满足第一优先级目标集的最优解空间(不考虑其它优先级)；

(4) 转到第 $k+1$ 优先级，求出其相应的最优解空间；

(5) 令 $k=k+1$，反复执行步骤(4)，直到所有优先级均求解完毕。

2. **单纯形法**

(1) 与线性规划相比，线性目标规划有自己的基本特点，但只要稍加处理，也可用单纯形法求解，目标规划的基本特点是：具有多个目标函数，且它们分属于不同的优先级。因此，其各级目标函数的系数中，各非基变量的检验数中都含有优先因子，即

$$c_j-g_j=\sum_{k=1}^{K}a_{kj}\cdot p_k,j=1,2,\cdots,n,$$

故各检验数的正、负首先取决于 p_1 的系数 a_{1j} 的正、负；若 $a_{1j}=0$，则检验数的正、负取决于 p_2 的系数 a_{2j} 的正、负，…，依此类推。若 $a_{1j}>0$，则因 $p_1\gg p_2\gg\cdots\gg p_k$ 则必有$(c_j-z_j)>0$。

基于上述基本特点，在求解线性目标规划的单纯形法中，把每个检验数按 K 级优先因子分解成 K 项，在单纯形表中依次成 K 行。进行最优性检验时，先根据各非基变量检验数中 p_1 项的系数判断 p_1 级目标函数是否已达到最优，若是，则再考虑 p_2 级目标函数的优化，且在 p_2 级目标函数优化的过程必须保证已求出的 p_1 级目标函数最优值不被劣化，…，依此类推。

(2) 求解步骤：

① 建立初始单纯形表，在表中将检验数行按优先因子个数分别排成 k 行，置 $k=1$；

② 检查该行中是否存在负数，且对应的前 $k-1$ 行的系数为 0；若有，取其中最小者对应的变量为换入变量，转步③；若无，则转步⑤。

③ 按最小比值法则确定换出变量，当存在两个和两个以上相同的最小比值时，选取具有较高优先级别的变量为换出变量。

④ 按单纯形法进行基变换运算，建立新的计算表，返回步②。

⑤ 当 $k=K$ 时，计算停止，表中的解即为满意解；否则，置 $K=k+1$，返回步②。

典型例题与解题技巧

【例 1】 已知某实际问题的线性规划模型为：

$$\max z=100x_1+50x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}10x_1+16x_2\leqslant 200 & (\text{资源 }1)\\ 11x_1+3x_2\geqslant 25 & (\text{资源 }2)\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

假定重新确定这个问题的目标为：

P_1：Z 的值应不低于 1 900；

P_2：资源 1 必须全部利用。

将此问题转换为目标规划问题，列出数学模型。

解题分析 这是将线性规划模型转化为目标规划模型的典型例子。首先以优先因子开始，将约束进行标准化(用偏差变量)，注意，此时要加上 $d_1^- - d_1^+$ 以保证方程组的完整性(多一个变量对单纯形并没有太多的障碍)。注意在确定 $P_1d_1^-$ 时，因为 z 的值$\geqslant$1 900，即偏差变量 d_1^- 应尽可能的小。

解题过程 根据题意，以优先因子为序，列对应关系：

优先因子	约束转换	min f=目标值偏差
P_1：	$100x_1+50x_2\geqslant 1\,900\rightarrow 100x_1+50x_2+d_1^- - d_1^+=1\,900$	$P_1d_1^-$
P_2：	$10x_1+16x_2\leqslant 200\rightarrow 10x_1+16x_2+d_2^- - d_2^+=200$	$P_2d_2^-$
无级别：	$11x_1+3x_2\geqslant 25\rightarrow 11x_1+3x_2-x_3=25$	

转化后的模型为：

$$\min f=P_1d_1^- + P_2d_2^-$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}100x_1+50x_2+d_1^- - d_1^+ =1\,900\\ 10x_1+16x_2+d_1^- - d_2^+ =200\\ 11x_1+3x_2-x_3 =25\\ x_i\geqslant 0,d_i^{\pm}\geqslant 0(i=1,2),x_3\geqslant 0\end{cases}$$

【例 2】 友谊农场有 3 万亩(每亩等于 666.66 平方米)农田，欲种植玉米、大豆和小麦三种农作物。各种作物每亩需施化肥分别为 0.12、0.20、0.15 t。预计秋后玉米每亩可收获 500kg，售价为 0.24 元/kg，大豆每亩可收获 200kg，售价为 1.20 元/kg，小麦每亩可收获 300kg，售价为 0.70 元/kg。农场年初规划时考虑如下几个方面：

p_1：年终收益不低于 350 万元；

p_2：总产量不低于 1.25 万 t；

p_3：小麦产量以 0.5 万 t 为宜；

p_4：大豆产量不少于 0.2 万 t；

p_5:玉米产量不超过 0.6 万 t;

p_6:农场现能提供 5 000t 化肥;若不够,可在市场高价购买,但希望高价采购量愈少愈好。

试就该农场生产计划建立数学模型。

解题分析　此题是多目标规划在实际中的很好的实例。

解题过程　设种植玉米 x_1 亩,大豆 x_2 亩,小麦 x_3 亩,则该问题的数学模型为:

$$\min z=p_1d_1^-+p_2d_2^-+p_3(d_3^-+d_3^+)+p_4d_4^++p_5d_5^++p_6d_6^+$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3\leqslant 3\times 10^4\\120x_1+240x_2+245x_3+d_1^--d_1^+=350\times 10^4\\1\ 000x_1+400x_2+700x_3+d_2^--d_2^+=2\ 500\times 10^4\\700x_3+d_3^--d_3^+=1\ 000\times 10^4\\400x_2+d_4^--d_4^+=400\times 10^4\\1\ 000x_1+d_5^--d_5^+=1\ 200\times 10^4\\0.12x_1+0.20x_2+0.15x_3+d_6^--d_6^+=5\ 000\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0,d_i^-,d_i^+\geqslant 0(i=1,\cdots,6)\end{cases}$$

课后习题全解

○ **4.1**　若用以下表达式作为目标规划的目标函数,试述其逻辑是否正确?

(1)$\max z=d^-+d^+$　　(2)$\max z=d^--d^+$

(3)$\min z=d^-+d^+$　　(4)$\min z=d^--d^+$

解　(1) 不正确。

要求 $\max z=d^-+d^+$,而 $d^-\times d^+=0$,即求 d^- 或 d^+ 最大,而 d^- 表示决策值未达到目标值的部分,d^+ 表示决策值超过目标值的部分。

故求 $\max z=d^-+d^+$ 无实际意义。

(2)正确。

要求 $\max z=d^--d^+$,而 $d^-\times d^+=0$,则 $d^+=0,d^->0$,即表示未达到目标值越大越好。

(3) 正确。

要求 $\min z=d^-+d^+$,即正、负偏差变量都要尽可能地小。而 $d^-\times d^+=0$,则 $d^+=d^-=0$,即恰好达到目标值。

(4) 正确。

要求 $\min z=d^--d^+$,而 $d^-\times d^+=0$,则 $d^-=0,d^+>0$,即表示超过目标值越大越好。

○ 4.2 用图解法找出以下目标规划问题的满意解。

(1)
$$\min z=P_1(d_1^-+d_1^+)+P_2(2d_2^++d_3^+)$$
$$\begin{cases}x_1-10x_2+d_1^--d_1^+=50\\3x_1+5x_2+d_2^--d_2^+=20\\8x_1+6x_2+d_3^--d_3^+=100\\x_1,x_2,d_i^-,d_i^+\geqslant0,i=1,2,3\end{cases}$$

(2)
$$\min z=P_1(d_3^++d_4^+)+P_2d_1^++P_3d_2^-+P_4(d_3^-+1.5d_4^-)$$
$$\begin{cases}x_1+x_2+d_1^--d_1^+=40\\x_1+x_2+d_2^--d_2^+=100\\x_1+d_3^--d_3^+=30\\x_2+d_4^--d_4^+=15\\x_1,x_2,d_i^-,d_i^+\geqslant0,i=1,2,3,4\end{cases}$$

(3)
$$\min z=P_1(d_1^-+d_1^+)+P_2d_2^-+P_3d_3^+$$
$$\begin{cases}x_1+x_2+d_1^--d_1^+=10\\3x_1+4x_2+d_2^--d_2^+=50\\8x_1+10x_2+d_3^--d_3^+=300\\x_1,x_2,d_i^-,d_i^+\geqslant0,i=1,2,3\end{cases}$$

解 (1) 由约束条件作图 4—1。

首先考虑 P_1 优先因子的目标的实现，在目标函数中要求实现

$$\min (d_1^-+d_1^+)$$

从图中可以看出：

当 x_1,x_2 在射线 $x_1-10x_2=50$ 且 $x_2\geqslant0$ 上取值，可以满足 $d_1^-=0$ 和 $d_1^+=0$。

再考虑 P_2 优先因子的目标的实现，在目标函数中要求实现

$$\min (2d_2^++d_3^+)$$

因 d_2^+ 的权系数大于 d_3^+ 的权系数，由图可知，D 点为满意解，D 点坐标为(50,0)

图 4—1　　　　图 4—2

(2) 由约束条件作图 4—2。

首先考虑 P_1 优先因子的目标的实现，在目标函数中要求实现

$$\min\ (d_3^+ + d_4^+)$$

从图中可以看出：可以满足 $d_3^+=0$ 和 $d_4^+=0$。

此时 x_1, x_2 在区域 $OAGFO$ 内取值。

再考虑 P_2 优先因子的目标的实现，在目标函数中要求实现

$$\min\ d_1^+$$

从图中可以看出：可以满足 $d_1^+=0$。

此时 x_1, x_2 在区域 $OAHIFO$ 内取值。

再考虑 P_3 优先因子的目标的实现，在目标函数中要求实现

$$\min\ d_2^-$$

从图中可以看出：当 x_1, x_2 在线段 HI 上取值时，可以使 d_2^- 取最小。

最后考虑 P_4 优先因子的目标的实现。因 d_4^- 的权系数大于 d_3^- 的权系数，故先考虑 d_4^- 取最小。

从图中可以看出：可以满足 $d_4^-=0$。

此时得到 H 为满意解，H 点坐标为(25,15)。

(3) 由约束条件作图 4—3。

图 4—3

首先考虑 P_1 优先因子的目标的实现，在目标函数中要求实现

$$\min\ (d_1^- + d_1^+)$$

从图中可以看出：可以满足 $d_1^-=0$ 和 $d_1^+=0$。

此时 x_1, x_2 在线段 AF 上取值。

再考虑 P_2 优先因子的目标的实现。在目标函数中要求实现

$$\min\ d_2^-$$

从图中可以看出：F 点满足 d_2^- 最小。

故 F 为满意解，F 点坐标为(10,0)。

◎4.3 用单纯形法求解以下目标规划问题的满意解。

(1)
$$\min z=P_1d_2^+ +P_1d_2^- +P_2d_1^-$$
$$\begin{cases} x_1 \quad +2x_2 +d_1^- -d_1^+ =10 \\ 10x_1+12x_2+d_2^- -d_2^+ =62.4 \\ 2x_1+x_2\leqslant 8 \\ x_1,x_2,d_i^-,d_i^+\geqslant 0,i=1,2 \end{cases}$$

(2)
$$\min z=P_1d_1^- +P_2d_2^+ +P_3(5d_3^- +3d_4^-)+P_4d_1^+$$
$$\begin{cases} x_1+x_2+d_1^- -d_1^+ =80 \\ x_1+x_2+d_2^- -d_2^+ =90 \\ x_1+d_3^- -d_3^+ =70 \\ x_2+d_4^- -d_4^+ =45 \\ x_1,x_2,d_i^-,d_i^+\geqslant 0,i=1,2,3,4 \end{cases}$$

(3)
$$\min z=P_1(d_1^+ +d_2^+)+P_2d_3^-$$
$$\begin{cases} x_1 +x_2 +d_1^- -d_1^+ =1 \\ 2x_1+2x_2+d_2^- -d_2^+ =4 \\ 6x_1-4x_2+d_3^- -d_3^+ =50 \\ x_1,x_2,d_i^-,d_i^+\geqslant 0,i=1,2,3 \end{cases}$$

分析 本题考查解目标规划的单纯形法。

解 (1) 将上述目标规划问题化为如下形式:
$$\min z=P_1d_2^+ +P_1d_2^- +P_2d_1^-$$
$$\begin{cases} x_1 \quad +2x_2 +d_1^- -d_1^+ =0 \\ 10x_1+12x_2+d_2^- -d_2^+ =62.4 \\ 2x_1 +x_2 +x_3 =8 \\ x_1,x_2,x_3,d_i^-,d_i^+\geqslant 0,i=1,2,3 \end{cases}$$

其中 x_3 为松弛变量。

对于此问题用单纯形法进行计算,见表 4—1。

表 4—1

c_j			0	0	0	P_2	0	P_1	P_1	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	
P_2	d_1^-	10	1	[2]	0	1	−1	0	0	5
P_1	d_2^-	62.4	10	12	0	0	0	1	−1	5.2
0	x_3	8	2	1	1	0	0	0	0	8
	P_1		−10	−12	0	0	0	0	2	
	P_2		−1	−2	0	0	1	0	0	
0	x_2	5	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	—
P_1	d_2^-	2.4	4	0	0	−6	[6]	1	−1	0.4

c_j			0	0	0	P_2	0	P_1	P_1	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	
0	x_3	3	$\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	6
	P_1		-4	0	0	6	-6	0	2	
	P_2		0	0	0	1	0	0	0	
0	x_2	5.2	$\frac{5}{6}$	1	0	0	0	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	6.24
0	d_1^+	0.4	$\left[\frac{2}{3}\right]$	0	0	-1	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0.6
0	x_3	2.8	$\frac{7}{6}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	2.4
	P_1		0	0	0	0	0	1	1	
	P_2		0	0	0	1	0	0	0	

由表 4—1 可得 $x_1=0, x_2=5.2$ 为原问题的满意解。

而非基变量 x_1 的检验数为 0，故原问题存在多重解。

在表 4—1 的基础上以 x_1 为换入变量，d_1^+ 为换出变量再迭代一步，得表 4—2。

表 4—2

c_j			0	0	0	P_2	0	P_1	P_1	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	
0	x_2	4.7	0	1	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
0	x_1	0.6	1	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	
0	x_3	2.1	0	0	1	$\frac{7}{4}$	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	
	P_1		0	0	0	0	0	1	1	
	P_2		0	0	0	1	0	0	0	

由表 4—2 可得 $x_1=0.6, x_2=4.7$ 也为满意解。

由线性规划的性质可得：(0.6，4.7)和(0，5.2)这两点之间的线段上的所有点均为原问题的满意解。

(2) 对于此目标规划问题用单纯形法进行计算，步骤和过程参考(1)。

可得

$x_1=70, x_2=20$ 为原问题的满意解。

(3) 对于此目标规划问题用单纯形法进行计算，见表 4—3。

表 4—3

c_j			0	0	0	P_1	0	P_1	P_2	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
0	d_1^-	1	[1]	1	1	-1	0	0	0	0	1
0	d_2^-	4	2	2	0	0	1	-1	0	0	2
P_2	d_3^-	50	6	-4	0	0	0	0	1	-1	$\frac{25}{3}$

c_j			0	0	0	P_1	0	P_1	P_2	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
	P_1		0	0	0	1	0	1	0	0	
	P_2		-6	4	0	0	0	0	0	1	
0	x_1	1	1	1	1	-1	0	0	0	0	
0	d_2^-	2	0	0	-2	2	1	-1	0	0	
P_2	d_3^-	44	0	-10	-6	6	0	0	1	-1	
	P_1		0	0	0	1	0	1	0	0	
	P_2		0	10	6	-6	0	0	0	1	

由表 4—3 可得 $x_1=1,x_2=0$ 为原问题的满意解。

◎4.4 以下目标规划问题

$$\min z=P_1d_1^-+P_2d_4^++P_3(5d_2^-+3d_3^-)+P_3(3d_2^++5d_3^+)$$
$$x_1+x_2+d_1^--d_1^+=80$$
$$x_1+d_2^--d_2^+=70$$
$$x_2+d_3^--d_3^+=45$$
$$d_1^++d_4^--d_4^+=10$$
$$x_1,x_2,d_i^-,d_i^+\geqslant 0,i=1,2,3,4$$

(1) 用单纯形法求这问题的满意解。

(2) 若目标函数变为

$$\min z=P_1d_1^-+P_2(5d_2^-+3d_3^-)+P_2(3d_2^++5d_3^+)+P_3d_4^+$$

问原满意解有什么变化?

(3) 若第一个目标约束的右端项改为 120,这时原满意解又有什么变化?

分析 本题考查了解目标规划的单纯形法。

解 (1)对于此目标规划问题,用单纯形法进行计算,见表 4—4。

表 4—4

c_j			0	0	P_1	0	$5P_3$	$3P_3$	$3P_3$	$5P_3$	0	P_2	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	
P_1	d_1^-	80	1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	80
$5P_3$	d_2^-	70	[1]	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	70
$3P_3$	d_3^-	45	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	—
0	d_4^-	10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	—
	P_1		-1	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	
	P_2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
	P_3		-5	-3	0	0	0	8	0	8	0	0	
P_1	d_1^-	10	0	[1]	1	-1	-1	1	0	0	0	0	10
0	x_1	70	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	—
$3P_3$	d_3^-	45	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	45

c_j			0	0	P_1	0	$5P_3$	$3P_3$	$3P_3$	$5P_3$	0	P_2	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	
0	d_4^-	10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	—
	P_1		0	-1	0	1	1	-1	0	0	0	0	
	P_2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
	P_3		0	-3	0	0	5	3	0	8	0	0	
0	x_2	10	0	1	1	-1	-1	1	0	0	0	0	—
0	x_1	70	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	—
$3P_3$	d_3^-	35	0	0	-1	[1]	1	-1	1	-1	0	0	35
0	d_4^-	10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	—
	P_1		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
	P_2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
	P_3		0	0	3	-3	2	6	0	8	0	0	
0	x_2	45	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	
0	x_1	70	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	
0	d_1^+	35	0	0	-1	1	1	-1	1	-1	0	0	
0	d_4^-	10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	
	P_1		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
	P_2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
	P_3		0	0	0	0	5	3	3	5	0	0	

由表 4－4 可得 $x_1=70, x_2=45$ 为原问题的满意解。

(2)实际上是将原目标函数中的优先因子 P_2, P_3 调换了一下，这时只需将表 4－4 中的检验数 P_2 行和 P_3 行和 c_j 行的 P_2 和 P_3 对换即可。可见此时的解仍满足最优性条件故原满意解不发生变化。

(3)
$$\Delta b' = B^{-1}\Delta b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \end{bmatrix}$$

将此变化反映到最终表中，因 b 列出现负数。用(-1)乘以 d_1^+ 行的各系数后，重新用单纯形法进行迭代。

可得 $x_1=75, x_2=45$ 为此目标规划问题的满意解。

○4.5 某工厂生产两种产品，每件产品Ⅰ可获利 10 元，每件产品Ⅱ可获利 8 元。每生产一件产品Ⅰ，需要 3 小时；每生产一件产品Ⅱ，需要 2.5 小时，每周总的有效时间为 120 小时。若加班生产，则每件产品Ⅰ的利润降低 1.5 元；每件产品Ⅱ的利润降低 1 元。决策者希望在允许的工作及加班时间内取得最大利润，试建立该问题的目标规划模型，并求解。

解 要建立目标规划模型，题设的条件不够。

◎4.6 某商标的酒是三种等级的酒兑制而成。若这三种等级的酒每天供应量和单位成本为：

表 4－5

等级	日供应量(kg)	成本(元/kg)
Ⅰ	1 500	6
Ⅱ	2000	4.5
Ⅲ	1000	3

设该种牌号酒有三种商标(红、黄、蓝)，各种商标的酒对原料酒的混合比及售价见表4－6。决策者规定：首先必须严格按规定比例兑制各商标的酒；其次是获利最大；再次是红商标的酒每天至少生产 2000kg，试列出数学模型。

表 4－6

商标	兑制要求	售价(元/kg)
红	Ⅲ少于 10%　Ⅰ多于 50%	5.5
黄	Ⅲ少于 70%　Ⅰ多于 20%	5.0
蓝	Ⅲ少于 50%　Ⅰ多于 10%	4.8

分析 建立目标规划的数学模型，考虑正负偏差变量。

解 用 $x_{iA},x_{iB},x_{iC}(i=1,2,3)$ 分别表示兑制第 i 种等级的红、黄、蓝三种商标的酒的数量。根据题意，可建立如下的数学模型：

$$\max z=P_1(d_1^-+d_2^++d_3^-+d_4^++d_5^-+d_6^+)+P_2d_8^++P_3d_7^+$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_{3A}-0.1(x_{1A}+x_{2A}+x_{3A})+d_1^--d_1^+=0\\x_{1A}-0.5(x_{1A}+x_{2A}+x_{3A})+d_2^--d_2^+=0\\x_{3B}-0.7(x_{1B}+x_{2B}+x_{3B})+d_3^--d_3^+=0\\x_{1B}-0.2(x_{1B}+x_{2B}+x_{3B})+d_4^--d_4^+=0\\x_{3C}-0.5(x_{1C}+x_{2C}+x_{3C})+d_5^--d_5^+=0\\x_{1C}-0.1(x_{1C}+x_{2C}+x_{3C})+d_6^--d_6^+=0\\x_{1A}+x_{2A}+x_{3A}+d_7^--d_7^+=2000\\x_{ij},d_k^-,d_k^+\geqslant 0,i=1,2,3;j=A,B,C;k=1,2,\cdots,6\end{cases}$$

其中，$z=5.5(x_{1A}+x_{2A}+x_{3A})+5(x_{1B}+x_{2B}+x_{3B})+4.8(x_{1C}+x_{2C}+x_{3C})-6(x_{1A}+x_{1B}+x_{1C})-4.5(x_{2A}+x_{2B}+x_{2C})-3(x_{3A}+x_{3B}+x_{3C})+d_8^--d_8^+$

根据下列模型求出：

$$\max z=5.5(x_{1A}+x_{2A}+x_{3A})+5(x_{1B}+x_{2B}+x_{3B})+4.8(x_{1C}+x_{2C}+x_{3C})$$
$$-6(x_{1A}+x_{1B}+x_{1C})-4.5(x_{2A}+x_{2B}+x_{2C})-3(x_{3A}+x_{3B}+x_{3C})$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_{3A}-0.1(x_{1A}+x_{2A}+x_{3A})<0 \\ x_{1A}-0.5(x_{1A}+x_{2A}+x_{3A})>0 \\ x_{3B}-0.7(x_{1B}+x_{2B}+x_{3B})<0 \\ x_{1B}-0.2(x_{1B}+x_{2B}+x_{3B})>0 \\ x_{3C}-0.5(x_{1C}+x_{2C}+x_{3C})<0 \\ x_{1C}-0.1(x_{1C}+x_{2C}+x_{3C})>0 \\ x_{1A}+x_{2A}+x_{3A}\geqslant 2000 \\ x_{ij}\geqslant 0, i=1,2,3; j=\mathrm{A,B,C} \end{cases}$$

第五章

整 数 规 划

内容提要

一、整数规划问题的特点

1. 整数规划

(1) 整数规划:决策变量要求取整数的线性规划。

(2) 整数规划可分为纯整数规划和混合整数规划。

(3) 整数规划的可行域为离散点集。

2. 建模步骤

整数规划模型的建立几乎与线性规划模型的建立完全一致,只是变量的部分或全体必须限制为整数。

二、求解整数规划的常用方法

1. 分支定界法

没有最大化的整数规划问题 A,与它相应的线性规划问题为问题 B,从解问题 B 开始,若其最优解不符合 A 的整数条件,那么 B 的最优目标函数必是 A 的最优目标函数 z^* 的上界,记作 $\bar{z}$,而 A 的任意可行解的目标函数值将是 z^* 的一个下界$\underline{z}$ 分支定界法就是将 B 的可行域分成子区域的方法,逐步减小 $\bar{z}$ 和增大$\underline{z}$,最终求得 z^*。

用分支定界法求解最大化整数规划问题的步骤为:

(1) 解与整数规划问题 A 相应的线性规划问题 B,可能得到以下几种情况之一:

① B 没有可行解,A 也没有可行解,停止计算。

②B 有最优解,并符合问题 A 的整数条件,则此最优解即为 A 的最优解,停止计算。

③ B 有最优解,但不符合 A 的整数条件,记它的目标函数值为 $\bar{z}$。

(2) 用观察法找问题 A 的一个整数可行解,求得其目标函数值,并记作$\underline{z}$,以 z^* 表示

问题 A 的最优目标数值，则$\underline{z}\leqslant z^*\leqslant\bar{z}$。

下面进行迭代。

分支，在 B 的最优解中任选一个不符合整数条件的变量 x_j，其值为 b_j。

构造两个约束条件

$$x_j\leqslant[b_j] \quad ①$$

和

$$x_j\geqslant[b_j]+1 \quad ②$$

其中$[b_j]$为不超过 b_j 的最大整数。

将这两个约束条件分别加入问题 B，求两个后继规划问题 B_1 和 B_2。不考虑整数约束条件求解这两个后继问题。

定界，以每个后继问题为一分支标明求解的结果。

第一步：先不考虑整数约束，变成一般的线性规划问题，用图解法或单纯形法求其最优解，记为 $X^*_{(0)}$；

第二步：若求得的最优解 $X^*_{(0)}$，刚好就是整数解，则该整数就是原整数规划的最优解，否则转下步；

第三步：对原问题进行分支寻求整数最优解。

选取非整数解 $X^*_{(0)}$ 的一个非整数分量 $x_i^*=\bar{b}_i$，其小数部分为 d_i，以该非整数部分量的相邻整数$\bar{b}_i-d_i$ 和$\bar{b}_i-d_i+1$ 为边界将原问题分支为两个子问题，并抛弃这两个整数之间的非整数区域：

①在原线性规划模型中添加分支约束 $x_i\leqslant\bar{b}_i-d_i$，构成第一个子问题。

②在原线性规划模型中添加分支约束 $x_i\geqslant\bar{b}_i-d_i+1$，构成第二个子问题。

第四步：对上面两个子问题按照线性规划方法求最优解。若某个子问题的解是整数解，则停止该子问题的分支，并且把它的目标值与上一步求出的最优整数解相比较以决定取舍；否则，对该子问题继续进行分支。

第五步：重复第三、四步直至获得原问题最优整数解为止。

2. 割平面法

割平面法既可以求解纯整数规划，也可以用于求解混合整数规划。其基本思路与分支定界法类似，它也是在求解整数规划(Ⅰ)的相应的线性规划(L)的基础上，不断新的约束，通过求解一系列线性规划问题，最终得到原问题(Ⅰ)的整数最优解。但在此方法中，新约束的求法与分支定界法中不同，此外新增加的约束叫做割平面或切割方程，它使得由原可行域中切割掉一部分，此部分只包含非整数解，但不切割掉任何整数可行解。

割平面法求解整数规划的求解步骤：

(1) 先不考虑整数条件，求解(Ⅰ)相对应的线性规划问题(L)，与分支定界法步骤(1)一样，同样可得到三种结果之一。

(2) 求一个切割方程：切割方程可由单纯形表的最终表中的任一个含有非整数基变量的等式约束演变而来，因此，切割方程不惟一。

1° 令 x_i 为相应的线性规划(L)的最优解中为分数值的一个基变量，由单纯形的

最终表得到：

$$x_i+\sum_k a_{ik}x_k=b_i \qquad ①$$

其中 $i\in Q$（Q 表示构成基变量号码的集合），$k\in K$（K 表示构成非基变量号码的集合）。

2° 将 b_i 和 a_{ik} 都分解成整数部分 N 和非负真分数 f 之和，即

$$\begin{cases} b_i=N_i+f_i, & \text{其中 } 0<f_i<1 \\ a_{ik}=N_{ik}+f_{ik}, & \text{其中 } 0<f_{ik}<1 \end{cases} \qquad ②$$

而 N 为不超过 b 的最大整数，即 $N=[b]$。并将①代入②，得

$$x_i+\sum_k N_{ik}x_k-N_i=f_i-\sum_k f_{ik}x_k \qquad ③$$

3° 提出变量为整数的条件（当然还有非负条件），由③式左边看必须是整数，但右边因为 $0<f_i<1$，所以不能为正，故得切割方程

$$f_i-\sum_k f_{ik}x_k\leqslant 0, i\in Q \qquad ④$$

（3）在（L）的基础上，增加第一个切割方程，即构成线性规划问题（L_1），用单纯形法或对偶单纯形法求最优解，若（L_1）得到的仍为非整数解，则返回步（2），继续求第二个切割方程。

三、两类特殊的整数规划

1. 0-1 规划问题

（1）一般形式

0-1 型整数规划是整数规划中的特殊情形，它的变量 x_i 仅取 0 或 1，它和一般整数规划的约束条件形式是一致的。

（2）求解方法——隐枚举法

0-1 规划常用隐枚举法和过滤法，都是利用变量只能取 0 或 1 两个值的特性。隐枚举法是一种特殊的分支定界法，它适用任何 0-1 规划问题的求解。但用隐枚举法要经过一些模型的变换。过滤法实际上就是隐枚举法的一个特殊情况，在计算的过程中确定一个过滤条件，不断地检验，由于 0-1 的特性，其工作量在维数不大的情况下也是可以很快完成的，但当维数很大时不可取。

要用隐枚举法，首先应将 0-1 规划化成以下规范形式：

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\text{（其中所有的 } c_j\leqslant 0\text{）}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i(i=1,2,\cdots,m) \\ x_j=0 \text{ 或 } 1\end{cases}$$

① 如果目标函数是求最小值，则对目标函数两边乘以 -1，改求最大值。

② 如果目标函数中某变量 x_j 的系数 $c_j>0$，则令 $x_j=1-y_j$ 替换 x_j，其中 y_j 为 0-1 变量，于是变量 y_j 在目标函数中的系数变成小于 0。

③ 如果约束条件是“$\geqslant$”形式，则可两边乘以 -1，改为“$\leqslant$”的形式。

④ 如果约束条件中含有等式，则可将每个等式化成两个"≤"形式的不等式，例如

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad 可化成 \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant -b_i \end{cases}$$

0－1 规划的隐枚举法的基本思想是：首先令全部变量取 0（因为目标函数的系数全非正，此时，相应的目标函数值 $s=0$ 就是上界）。如果此解可行，则为最优解，计算终止；否则，选择某个变量为 0 或 1，将问题分析成两个子问题，继续分别对它们进行检验，即令没有被选择的变量全部为 0，检查是否可行。如此下去，或者再分支，或者使所有的子问题停止分支，并以最大下界值对应的可行解为最优解。

2. **分派问题**

(1) 分派问题的特点

把 m 项工作分派给 n 个人去做，既发挥各人特长又使效率最高。这是一类特殊 0－1 规划问题。

(2) 求解方法——匈牙利法

该方法由匈牙利数学家科宁发明，也叫画圈法。

① 分派问题的标准型

目标为 min；系数矩阵为方阵（即人数与工作数相等，或者说每项工作只能由一人来做，每个人只能做一项工作）且其所有元素均为非负。满足这两个条件的分派问题叫做标准型的分派问题。

② 标准型分派问题的求解

典型例题与解题技巧

【例 1】 运筹学中著名的旅行商贩（货郎担）问题可以叙述如下：某旅行商贩从某一城市出发，到其他 n 个城市去推销商品，规定每个城市均须到达而且只到达一次，然后回到原出发城市。已知城市 i 和城市 j 之间的距离为 d_{ij}，问该商贩应选择一条什么样的路线顺序旅行，使总的旅程为最短。试对此问题建立整数规划模型。

解题分析 此题是整数规划问题中的典型问题，它与一般的线性规划建模步骤一样，只是要注意其变量的选择与约束。

解题过程 设 $x_{ij}=\begin{cases} 1, 旅行商贩从\ i\ 直接去\ j \\ 0, 否则 \end{cases}$

由此可写出其整数规划模型为

$$\min z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij}$$

$$\text{st.}\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1(j = 1,\cdots,n) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1(i = 1,\cdots,n) \\ u_i - u_j + n x_{ij} \leqslant n-1 \\ u_i \text{ 为连续变量}(i=1,\cdots,n)\text{，也可取整数值} \\ i,j=1,\cdots,n,i\neq j\end{cases}$$

【例 2】 用分支定界法解：

$$\min z=-x_1-x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+9/14x_2\leqslant 51/14 \\ -2x_1+x_2\leqslant 1/3 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \quad x_1,x_2 \text{ 是整数}\end{cases}$$

解题分析 用分支定界法解题的关键在于两点：第一，正确地分支，并加上适当的约束条件；第二，正确地确定整数规划目标函数的上界与下界，以进行比较、简化计算。

解题过程 此问题不是标准形式，先将其化为标准形式，再求解。

$$\max z=x_1+x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+\dfrac{9}{14}x_2\leqslant \dfrac{51}{14} \\ -2x_1+x_2\leqslant \dfrac{1}{3} \\ x_1,x_2\geqslant 0,x_1,x_2 \text{ 是整数}\end{cases}$$

第一步，选不考虑 x_1、x_2 是整数，用图解法(图 5－1)可求得最优解为：

$$x_1=3/2,x_2=10/3,\max z=29/6$$

图 5－1

第二步，考虑 x_1、x_2 是整数，显然，x_1、x_2 都等于零是可行解，则可将目标函数值的范围界定为：$\underline{z}=0$，$\bar{z}=29/6$

第三步，对 $x_1=3/2$，则可将之分为两个支(本题分支过程如图 5－2 所示)，即 $x_1\leqslant 1$ 和 $x_1\geqslant 2$，将它们作为约束条件分别代入原问题得到两个线性规划问题，分别求解。此时得到的 x_1 是整数，而 x_2 仍不是整数，对 x_2 再进行分支。

此时，目标函数值的范围为：$\underline{z}=0$，$\bar{z}=41/9$

图 5-2

第四步，继续求解和分支，直到求得的解是整数解为止。得到最优解为

$$x_1=2, x_2=2, \max z=4 \text{ 和 } x_1=3, x_2=1, \max z=4$$

【例 3】 用隐枚举法求下述 0-1 规划模型的解。

$$\max z=3x_1+2x_2-5x_3-2x_4+3x_5$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5\leqslant 4 \\ 7x_1+3x_3-4x_4+3x_5\leqslant 8 \\ 11x_1-6x_2+3x_4-3x_5\geqslant 3 \\ x_j=0 \text{ 或 } 1 \quad (j=1,\cdots,5) \end{cases}$$

解题分析 隐枚举法实际上就是特殊的分支定界法，其主要工作在于每次分支时所确定的 0 或 1 的解以及判断是否是可行解，是否与 $\underline{z}$ 相比能够满足模型要求。

解题过程 令 $x_1=1-x'_1$，$x_2=1-x'_2$，$x_5=1-x'_5$，将模型化成标准形式如下：

$$\max z'=8-3x'_1-2x'_2-5x_3-2x_4-3x'_5$$

$$\begin{cases} -x'_1-x'_2+3x+2x_4-x'_5\leqslant -1 \\ -7x'_1+3x_3-4x_4-3x'_5\leqslant -2 \\ 11x'_1-6x'_2-3x_4-3x'_5\leqslant -1 \\ x'_1, x'_2, x_3, x_4, x'_5=0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

由 $x'_2=x_4=x'_1=x_3=0$，$x'_5=1$，$z_{\max}=5$ 可知最优解为

$$x_1=x_2=1, x_3=x_4=x_5=0, z_{\max}=5$$

历年考研真题评析

【题 1】 (2006 年复旦大学)采用变量代换，试把非线性 0-1 整数规划

$$\max z=x_1{}^2+x_2x_3-x_1x_2x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-3x_1+4x_2+x_3\leqslant 3\\ x_1,x_2,x_3 \text{ 为 } 0 \text{ 或 } 1\end{cases}$$

转换成一个 0－1 整数规划。

解题分析 0－1 规划即约束中自变量只能取值 0 或 1。

解题过程 令 $y_1=\begin{cases}0,\text{当 } x_2=x_3=1\\ 1,\text{否则}\end{cases}$，故有 $x_2x_3=y_1$

再令 $y_2=\begin{cases}1,\text{当 } x_1=x_2=x_3=1\\ 0,\text{否则}\end{cases}$，故有 $x_1x_2x_3=y_2$

而 $x_1{}^2$ 与 x_1 等价，故原问题可等价地写为

$$\max z=x_1+y_1-y_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-3x_1+4x_2+x_3\leqslant 3\\ y_1\leqslant x_2\\ y_1\leqslant x_3\\ y_2\leqslant x_1\\ y_2\leqslant x_2\\ y_2\leqslant x_3\\ x_2+x_3\leqslant y_1+1\\ x_1+x_2+x_3\leqslant y_2+2\\ x_1,x_2,x_3,y_1,y_2 \text{ 为 } 0 \text{ 或 } 1\end{cases}$$

【题 2】 (2005 年南京大学)现要在五个工人中确定四个人来分别完成四项工作中的一项工作。由于每个工人的技术特长不同，他们完成各项工作所需的工时也不同。每个工人完成每项工作所需工时如表 5－1 所示：

表 5－1

所需工时 工作 / 工人	A	B	C	D
Ⅰ	9	4	3	7
Ⅱ	4	6	5	6
Ⅲ	5	4	7	5
Ⅳ	7	5	2	3
Ⅴ	10	6	7	4

试找出一个工作分配方案，使总工时最小。

解题分析 本题属“不平衡”指派问题，故应先虚拟一项工作，使其平衡，再按常规求解即可。

解题过程 虚拟一项工作 E，设每人完成 E 所用时间都是“0”，从而转化为五个人完成五项工作的分配问题，再用匈牙利法求解：

最优解为：Ⅰ—C，Ⅱ—A，Ⅲ—B，Ⅳ—D，Ⅴ—E，即应安排工人Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ分别完成工作 C、A、B、D，此时用时间最少，为 3＋4＋4＋3＝14。

课后习题全解

◎5.1 对下列整数规划问题，问用先解相应的线性规划然后凑整的办法能否求到最优整数解？

(1) $\max z=3x_1+2x_2$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14.5\\4x_1+x_2\leqslant 16.5\\x_1,x_2\geqslant 0\\x,x_2\ \text{整数}\end{cases}$$

(2) $\max z=3x_1+2x_2$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14\\2x_1+x_2\leqslant 9\\x_1,x_2\geqslant 0\\x_1,x_2\ \text{整数}\end{cases}$$

分析 先用单纯形法求解，然后凑整。用分支定界法求解，最后比较两次求解的结果。

解 (1)在原线性规划问题约束条件中添加松弛变量 x_3,x_4，化为标准型，可得

$$\max z=3x_1+2x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3\qquad=14.5\\4x_1+x_2\qquad+x_4=16.5\\x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\\x,x_2\ \text{为整数}\end{cases}$$

不考虑整数条件，用单纯形法求解，计算结果如表 5－2 所示。

表 5－2

c_j			3	2	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	29/2	2	3	1	0	29/4
0	x_4	33/2	[4]	1	0	1	33/8
c_j-z_j			3	2	0	0	
0	x_3	25/4	0	[5/2]	1	−1/2	5/2
3	x_1	33/8	1	1/4	0	1/4	33/2
c_j-z_j			0	5/4	0	−3/4	
2	x_2	5/2	0	1	2/5	−1/5	
3	x_1	7/2	1	0	−1/10	3/10	
c_j-z_j			0	0	−1/2	−1/2	

因而最优解为$\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2},0,0\right)^{\mathrm{T}}$，$z^*=3\times\frac{7}{2}+2\times\frac{5}{2}=\frac{31}{2}$

当凑整为 $X'=(4,3,0,0)^{\mathrm{T}}$ 时显然为非可行解；同样，当凑整为 $X''=(4,2,0,0)^{\mathrm{T}}$ 或 $X''=(3,3,0,0)^{\mathrm{T}}$ 也不是可行解. 当凑整为 $X'''=(3,2,0,0)^{\mathrm{T}}$ 为可行解，相应的

$z=13$。

用分支定界法求解该整数规划问题。

记 $\bar{z}=\dfrac{31}{2}$，因为 $x_1=0,x_2=0$ 为可行解，故有 $0\leqslant z^*\leqslant\dfrac{31}{5}$ 分解为两个子问题：

$$(B_1)\qquad \max z=3x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14.5\\4x_1+x_2\leqslant 16.5\\0\leqslant x_1\leqslant 3\\x_2\geqslant 0\end{cases}$$

得最优解 $(3,\dfrac{17}{6},0,\dfrac{5}{3},0)^{\mathrm{T}}$，$z_1=\dfrac{44}{3}$

$$(B_2)\qquad \max z=3x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14.5\\4x_1+x_2\leqslant 16.5\\x_1\geqslant 4\\x_2\geqslant 0\end{cases}$$

得最优解 $(4,\dfrac{1}{2},5,0,0)^{\mathrm{T}}$，$z_2=13$

综合知 $0\leqslant z^*\leqslant\dfrac{44}{3}$ 并再分解 B_1 为两支 B_3 和 B_4：

$$(B_3)\qquad \max z=3x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14.5\\4x_1+x_2\leqslant 16.5\\0\leqslant x_1\leqslant 3\\0\leqslant x_2\leqslant 2\end{cases}$$

得最优解 $(3,2,\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{4},0,0)^{\mathrm{T}}$，$z_1=13$

$$(B_4)\qquad \max z=3x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14.5\\4x_1+x_2\leqslant 16.5\\0\leqslant x_1\leqslant 3\\x_2\geqslant 3\end{cases}$$

得最优解 $(\dfrac{11}{4},3,0\ \dfrac{5}{2},\dfrac{1}{4},0,0)^{\mathrm{T}}$，$z_4=\dfrac{57}{4}$

B_3 已是整数解，可取 $\underline{z}=z_3=13$. 对 B_2 一支而言，继续分解已无意义，可舍去。

所以，$13\leqslant z^*\leqslant\dfrac{57}{4}$，分解 B_4 为 B_5 和 B_6：

$$(B_5)\qquad \max z=3x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14.5\\4x_1+x_2\leqslant 16.5\\0\leqslant x_1\leqslant 2\\x_2\geqslant 3\end{cases}$$

得最优解$(2,\frac{7}{2},0,5,0,\frac{1}{2},0)^{T}$，$z_5=13=\underline{z}$故舍去。

$$(B_6)\qquad \max z=3x_1+2x_2$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14.5\\4x_1+x_2\leqslant 16.5\\0\leqslant x_1\leqslant 3\\x_2\geqslant 3\\x_1\geqslant 3\end{cases}$$

无可行解，故舍去。

可知$x_1^*=3$，$x_2^*=2$为最优整数解，$z^*=\underline{z}=13$，与舍去法得到的最优解一致。

(2)在原线性规划问题约束条件中添加松弛变量x_3，x_4，化为标准型，可得

$$\max z=3x_1+2x_2$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=14\\2x_1+\ \ x_2+x_4=9\\x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\\x_1,x_2\text{ 整数}\end{cases}$$

不考虑整数条件，用单纯形法求解，计算结果如表5—3所示。

表5—3

c_j			3	2	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	14	2	3	1	0	7
0	x_4	9	[2]	1	0	1	9/2
c_j-z_j			3	2	0	0	
0	x_3	5	0	[2]	1	−1	5/2
3	x_1	9/2	1	1/2	0	1/2	9
c_j-z_j			0	1/2	0	−3/2	
2	x_2	5/2	0	1	1/2	−1/2	
3	x_1	13/4	1	0	−1/4	3/4	
c_j-z_j			0	0	−1/4	−5/4	

因而最优解为$(\frac{13}{4},\frac{5}{2},0,0)^{T}$，$z^*=\frac{59}{4}$

当凑整为$x_1=4$，$x_2=3$时，显然为非可行解。

用分支定界法。

已知$\underline{z}=0\leqslant z^*\leqslant\frac{59}{4}=\bar{z}$，将原问题分解为两个子问题：

$$\max z=3x_1+2x_2$$

$$(B_1)\qquad \text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14\\ 2x_1+\ x_2\leqslant 9\\ \qquad\quad x_1\leqslant 3\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

得最优解 $x_1=3, x_2=\frac{8}{3}, z_1=\frac{43}{3}$

$$\max z=3x_1+2x_2$$

$$(B_2)\qquad \text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14\\ 2x_1+\ x_2\leqslant 9\\ \qquad\quad x_2\geqslant 4\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

得最优解 $x_1=4, x_2=1, z_2=14$. 已为整数解，由此判定可取 $\underline{z}=14, \bar{z}=\frac{43}{3}$，故

$14\leqslant z^*\leqslant\frac{43}{3}$

再分解 B_1 为两支 B_3 和 B_4：

$$\max z=3x_1+2x_2$$

$$(B_3)\qquad \text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14\\ 2x_1+\ x_2\leqslant 9\\ 0\leqslant x_1\leqslant 3\\ 0\leqslant x_2\leqslant 2\end{cases}$$

得最优解 $x_1=3, x_2=2, z_3=13<\underline{z}$

$$\max z=3x_1+2x_2$$

$$(B_4)\qquad \text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14\\ 2x_1+\ x_2\leqslant 9\\ 0\leqslant x_1\leqslant 3\\ x_2\geqslant 3\end{cases}$$

得最优解 $x_1=\frac{5}{2}, x_2=3, z_4=\frac{27}{2}<\underline{z}$

故剪去 B_1 分支。从而可以断定 $x_1^*=4, x_2^*=1$ 为最优整数解，$z^*=14$。

◎5.2 用分支定界法解：

$$\max z=x_1+x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+\frac{9}{14}x_2\leqslant\frac{51}{14}\\ -2x_1+\quad x_2\leqslant\frac{1}{3}\\ x_1,x_2\geqslant 0\\ x_1,x_2\ \text{整数}\end{cases}$$

分析 本题考查了分支定界法。

解　在原线性规划问题约束条件中分别添加松弛变量 x_3, x_4，化为标准型，可得

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 + x_3 = \frac{51}{14} \\ -2x_1 + \quad x_2 + x_4 = \frac{1}{3} \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \text{ 整数} \end{cases}$$

不考虑整数条件，用单纯形求解，计算结果如表 5－4 所示。

表 5－4

c_j			1	1	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	51/14	[1]	9/14	1	0	51/14
0	x_4	1/3	－2	1	0	1	—
c_j-z_j			3	2	0	0	
1	x_1	51/14	1	9/14	1	0	51/9
0	x_4	160/21	0	[161]	2	1	160/3381
c_j-z_j			0	5/14	－1	0	
1	x_1	3/2	1	0	7/16	－9/32	
1	x_2	10/3	0	1	7/8	7/16	
c_j-z_j			0	0	－21/16	－5/32	

因而最优解为$(\frac{3}{2}, \frac{10}{3}, 0, 0)^{\mathrm{T}}, z^* = \frac{29}{6}$

因为 $\underline{z} = 0 \leqslant z^* \leqslant \frac{29}{6} = \bar{z}$，将原问题分解为两个子问题：

$$\max z = x_1 + x_2$$

(B_1)

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leqslant \frac{51}{14} \\ -2x_1 + \quad x_2 \leqslant \frac{1}{3} \\ \qquad\quad x_1 \leqslant 1 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

得最优解 $x_1 = 1, x_2 = \frac{7}{3}, z_1 = \frac{10}{3}$

$$\max z = x_1 + x_2$$

(B_2)

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leqslant \frac{51}{14} \\ -2x_1 + \quad x_2 \leqslant \frac{1}{3} \\ x_1 \geqslant 2 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

得最优解 $x_1=2, x_2=\frac{23}{9}, z_2=\frac{41}{9}$

由此判定可取 $\underline{z}=0\leqslant z^*\leqslant\frac{41}{9}=\bar{z}$

再分解 B_1 为两支 B_3 和 B_4：

$$(B_3)\quad \max z=3x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+\frac{9}{14}x_2\leqslant\frac{51}{14} \\ -2x_1+\quad x_2\leqslant\frac{1}{3} \\ 0\leqslant x_1\leqslant 1 \\ 0\leqslant x_2\leqslant 1 \end{cases}$$

得最优解 $x_1=\frac{5}{6}, x_2=2, z_3=\frac{17}{6}$

$$(B_4)\quad \max z=3x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+\frac{9}{14}x_2\leqslant\frac{51}{14} \\ -2x_1+\quad x_2\leqslant\frac{1}{3} \\ x_1\leqslant 1 \\ x_2\geqslant 3 \end{cases}$$

无可行解，故剪去 B_4 分支。

再分解 B_2 为两支 B_5 和 B_6：

$$(B_5)\quad \max z=3x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+\frac{9}{14}x_2\leqslant\frac{51}{14} \\ -2x_1+\quad x_2\leqslant\frac{1}{3} \\ x_1\leqslant 2 \\ 0\leqslant x_2\leqslant 2 \end{cases}$$

得最优解 $x_1=2, x_2=2, z_5=4$ 为整数解，由此判定可取 $\underline{z}=4\leqslant z^*\leqslant\frac{41}{9}=\bar{z}$

$$(B_6)\quad \max z=3x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+\frac{9}{14}x_2\leqslant\frac{51}{14} \\ -2x_1+\quad x_2\leqslant\frac{1}{3} \\ x_1\geqslant 2 \\ x_2\geqslant 3 \end{cases}$$

无可行解，故剪去 B_6 分支。

因为 $z_3<\underline{z}=4$，故剪去 B_3 分支。从而可以断定 $x_1^*=2, x_2^*=2$ 为最优整数解，$z^*=4$。

5.3 用 Gomory 切割法解：

(1) $\max z = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 4x_1 + 5x_2 \leqslant 20 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \text{整数} \end{cases}$$

(2) $\max z = 3x_1 - x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leqslant 3 \\ -5x_1 - 4x_2 \leqslant -10 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \text{ 整数} \end{cases}$$

分析　将问题化为标准型并用单纯形法求解，得到变量间的关系式。得到切割方程，引入松弛变量求解。

解　(1)在原线性规划问题约束条件中添加松弛变量 x_3, x_4，化为标准型，可得

$$\max z = x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 & ① \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 20 & ② \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 & ③ \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ 整数} & ④ \end{cases}$$

不考虑整数条件，用单纯形法求解，计算结果如表 5—5 所示。

表 5—5

c_j			1	1	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	6	2	1	1	0	6
0	x_4	20	4	[5]	0	1	4
$c_j - z_j$			1	1	0	0	
1	x_3	2	[6/5]	0	1	−1/5	5/3
1	x_2	4	4/5	1	0	1/5	5
$c_j - z_j$			1/5	0	0	−1/5	
1	x_1	5/3	1	0	5/6	−1/6	
1	x_2	8/3	0	1	−2/3	1/3	
$c_j - z_j$			0	0	−1/6	−1/30	

因而最优解为 $x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = \frac{8}{3}, x_3 = 0, x_4 = 0; z = \frac{13}{3}$

由最终单纯形得到变量间的关系式：

$$x_1 + \frac{5}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 = \frac{5}{3}$$

$$x_2-\frac{2}{3}x_3+\frac{1}{3}x_4=\frac{8}{3}$$

将系数和常数项都分解成整数和非负真分数之和，移项，以上两式变为

$$x_1-x_4-1=\frac{2}{3}-\frac{5}{6}(x_3+x_4)$$

$$x_2-2-x_3=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(x_3+x_4)$$

现考虑整数条件，要求 x_1,x_2 都为非负整数，于是由条件①、②可知 x_3,x_4 也都为非负数。整数条件④可由下式代替

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(x_3+x_4)\leqslant 0$$

即

$$-x_3-x_4\leqslant -2 \qquad ⑤$$

这就得到一个切割方程，将它作为约束条件。引入松弛变量，得到等式

$$-x_3-x_4+x_5=-2$$

将这个新的约束方程加到单纯形表中，得表 5－6。从下表的 b 列可以看出，这时得到的是非可行解，于是需要用对偶单纯形法继续进行计算。

表 5－6

c_j			1	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	5/3	1	0	5/6	－1/6	0
1	x_2	8/3	0	1	－2/3	－1/3	0
0	x_5	－2	0	0	－1	[－1]	1
c_j-z_j			0	0	－1/6	－1/30	0
1	x_1	2	1	0	1	0	－1/6
1	x_2	2	0	1	－1	0	1/3
0	x_4	2	0	0	1	1	－1
c_j-z_j			0	0	0	0	－1/6

由于 x_1,x_2 的值为整数，所以最优解为 $x_1^*=2,x_2^*=2,x_3^*=0,x_4^*=2,x_5^*=0$，目标函数的最优值为 $z^*=4$。

(2)第一个约束条件左边添加松弛变量 x_3；第二个约束条件左右两边同时乘以－1，然后左边再减去剩余变量 x_4，加上人工变量 x_5；第三个约束条件左边添加松弛变量 x_6，即可化为标准型，可得

$$\max z=3x_1-x_2+0x_4-Mx_5+0x_6$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3=3 & ①\\ 5x_1+4x_2-x_4+x_5=10 & ②\\ 2x_1+x_2+x_6=5 & ③\\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geqslant 0 & ④\\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\ \text{为整数} & ⑤\end{cases}$$

不考虑整数条件，用单纯形法求解，计算结果如表 5－7 所示。

表 5－7

c_j			3	-1	0	0	$-M$	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	3	[3]	-2	1	0	0	0	1
$-M$	x_5	10	5	4	0	-1	1	0	2
0	x_6	5	2	1	0	0	0	1	5/2
c_j-z_j			$3+5M$	$-1+4M$	0	M	0	0	
3	x_1	1	1	$-2/3$	1/3	0	0	0	—
$-M$	x_5	5	0	[22/3]	$-5/3$	-1	1	0	15/22
0	x_6	3	0	7/3	$-2/3$	0	0	1	9/7
c_j-z_j			0	$1+\frac{22}{3}M$	$-1-\frac{5}{3}M$	M	0	0	
3	x_1	16/11	1	0	2/11	$-1/11$	1/11	0	
-1	x_2	15/22	0	1	$-5/22$	$-3/22$	3/22	0	
0	x_6	31/22	0	0	$-3/22$	[7/22]	7/22	1	
c_j-z_j			0	0	$-7/22$	3/22	$-M-\frac{3}{22}$	0	
3	x_1	13/7	1	0	1/7	0	0	2/7	
-1	x_2	9/7	0	1	$-2/7$	0	0	3/7	
0	x_4	31/7	0	0	$-3/7$	1	-1	22/7	
c_j-z_j			0	0	$-5/7$	0	$-M$	$-3/7$	

因而最优解为 $x_1=\frac{13}{7},x_2=\frac{9}{7},x_3=0,x_4=\frac{31}{7},x_5=0,x_6=\frac{30}{7}$

由最终单纯形表得到变量间的关系式：

$$x_1+\frac{1}{7}x_3+\frac{2}{7}x_6=\frac{13}{7}$$

$$x_2-\frac{2}{7}x_3+\frac{3}{7}x_6=\frac{9}{7}$$

$$-\frac{3}{7}x_3+x_4-x_5+\frac{22}{7}x_6=\frac{31}{7}$$

将系数和常数项都分解成整数和非负真分数之和，移项，以上三式变为

$$x_1-1=\frac{6}{7}-(\frac{1}{7}x_3+\frac{2}{7}x_6)$$

$$x_2-x_3-1=\frac{2}{7}-(\frac{5}{7}x_3+\frac{7}{3}x_6)$$

$$-x_3+x_4-x_5+3x_6-4=\frac{3}{7}-(\frac{4}{7}x_3+\frac{1}{7}x_6)$$

现考虑整数条件，整数条件⑤可由下式代替：

$$\frac{6}{7}-(\frac{1}{7}x_3+\frac{2}{7}x_6)\leqslant 0$$

即

$$-x_3-2x_6\leqslant -6$$

这就得到一个切割方程，将它作为约束条件，引入松弛变量 x_7，得到等式

$$-x_3-2x_6+x_7=-6$$

将这个新的约束方程加到单纯形表中，得表 5—8。从表 5—8 的 b 列可以看出，这时得到的是非可行解，于是需要用对偶单纯形法继续进行计算。

表 5—8

c_j			3	−1	0	0	$-M$	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
3	x_1	13/7	1	0	1/7	0	0	2/7	0
−1	x_2	9/7	0	1	−2/7	0	0	3/7	0
0	x_4	31/7	0	0	−3/7	1	−1	22/7	0
0	x_7	−6	0	0	−1	0	0	[−2]	1
c_j-z_j			0	0	−5/7	0	$-M$	−3/7	0
3	x_1	1	1	0	0	0	0	0	1/7
−1	x_2	0	0	1	−1/2	0	0	0	3/14
0	x_4	−5	0	0	[−2]	1	−1	0	11/7
0	x_6	3	0	0	1/2	0	0	1	−1/2
c_j-z_j			0	0	−1/2	0	$-M$	0	−3/14
3	x_1	1	1	0	0	0	0	0	1/7
−1	x_2	5/4	0	1	0	−1/4	1/4	0	−5/28
0	x_3	5/3	0	0	1	−1/2	1/2	0	−11/14
0	x_6	7/4	0	0	0	1/4	−1/4	1	−3/28
c_j-z_j			0	0	0	−1/4	$\frac{1}{4}-M$	0	−17/28

因而最优解为 $x_1=1,x_2=\frac{5}{4},x_3=\frac{5}{2},x_4=0,x_5=0,x_6=\frac{7}{4},x_7=0;z=\frac{7}{4}$

由最终单纯形表得变量间的关系式：

$$x_2-\frac{1}{4}x_4+\frac{1}{4}x_5-\frac{5}{28}x_7=\frac{5}{4}$$

$$x_3-\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5-\frac{11}{14}x_7=\frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{4}x_4-\frac{1}{4}x_5+x_6-\frac{3}{28}x_7=\frac{7}{4}$$

将系数和常数项都分解成整数和非负真分数之和，并移项，则以上三式变为

$$x_2-x_4-x_7-1=\frac{1}{4}-\left(\frac{3}{4}x_4+\frac{1}{4}x_5+\frac{23}{28}x_7\right)$$

$$x_3-x_4-x_7-2=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5+\frac{3}{14}x_7\right)$$

$$-x_5+x_6-x_7-1=\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{4}x_4+\frac{3}{4}x_5+\frac{25}{28}x_7\right)$$

现考虑整数条件，整数条件⑤可由下式代替：

$$\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5+\frac{3}{14}x_7\right)\leqslant 0$$

即

$$-7x_4-7x_5-3x_7\leqslant -7$$

这就得到一个切割方程，将它作为约束条件。引入松弛变量 x_8，得到等式

$$-7x_4-7x_5-3x_7+x_8=-7$$

将这个新的约束方程加到单纯形表中，得表 5－9，从表 5－9 的 b 列可以看出，这时得到的是非可行解，于是需要用对偶单纯形法继续进行计算。

表 5－9

c_j			3	−1	0	0	$-M$	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
3	x_1	1	1	0	0	0	0	0	1/7	0
−1	x_2	5/4	0	1	0	−1/4	1/4	0	−5/28	0
0	x_3	5/2	0	0	1	−1/2	1/2	0	−11/14	0
0	x_6	7/4	0	0	0	1/4	−1/4	1	−3/28	0
0	x_8	−7	0	0	0	[−7]	−7	0	−3	1
c_j-z_j			0	0	0	−1/4	$\frac{1}{4}-M$	0	−17/28	0
3	x_1	1	1	0	0	0	0	0	1/7	0
−1	x_2	3/2	0	1	0	0	1/2	0	−1/14	−1/28
0	x_3	3	0	0	1	0	1	0	−4/7	−1/14
0	x_6	3/2	0	0	0	0	−1/2	1	−3/14	1/28
0	x_4	1	0	0	0	1	1	0	3/7	−1/7
c_j-z_j			0	0	0	0	$\frac{1}{2}-M$	0	−1/2	−1/28

因而最优解为 $x_1=1,x_2=\frac{3}{2},x_3=3,x_4=1,x_5=0,x_6=\frac{3}{2},x_7=0,x_8=0;z=\frac{3}{2}$

由最终单纯形表得到变量间的关系式：

$$x_2+\frac{1}{2}x_5-\frac{1}{14}x_7-\frac{1}{28}x_8=\frac{3}{2}$$

$$-\frac{1}{2}x_5+x_6-\frac{9}{28}x_7+\frac{1}{28}x_8=\frac{3}{2}$$

将系数和常数项都分解成整数和非负真分数之和，并移项，则以上二式变为

$$x_2-x_7-x_8-1=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}x_5+\frac{13}{14}x_7+\frac{27}{28}x_8\right)$$

$$-x_5+x_6-x_7-1=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}x_5+\frac{19}{28}x_7+\frac{1}{28}x_8\right)$$

现考虑整数条件，整数条件⑤可由下式代替。

$$\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}x_5+\frac{13}{14}x_7+\frac{27}{28}x_8\right)\leqslant 0$$

即

$$-14x_5-26x_7-27x_8\leqslant -14$$

这就得到一个切割方程，将它作为约束条件。引入松弛变量 x_9，得到等式

$$-14x_5-26x_7-27x_8+x_9=-14$$

将这个新的约束方程加到单纯形表中进行计算。

按照上述步骤，继续迭代计算，最终可得到最优整数解：$x_1^*=1, x_2^*=2$；目标函数量优值 $z^*=1$。

小结 Gomory 切割法经常遇到收敛很慢的情形，若和其他方法配合使用也是有效的。

○ **5.4** 某城市的消防总部将全市划分为 11 个防火区，设有 4 个消防(救火)站。图 5—2 表示各防火区域与消防站的位置，其中①②③④表示消防站，1、2、…、11 表示防火区域。根据历史的资料证实，各消防站可在事先规定的允许时间内对所负责的地区的火灾予以消灭。图中虚线即表示各地区由哪个消防站负责(没有虚线连系，就表示不负责)。现在总部提出：可否减少消防站的数目，仍能同样负责各地区的防火任务？如果可以，应当关闭哪个？

图 5—2

提示：对每个消防站定义一个 0—1 变量 x_j，令

$$x_j=\begin{cases}1, & \text{当某防火区域可由第 } j \text{ 消防站负责时}\\ 0, & \text{当某防火区域不由第 } j \text{ 消防站负责时}\end{cases}$$

$$j=1,2,3,4$$

然后对每个防火区域列一个约束条件。

解 定义 $x_j=\begin{cases}1, & \text{当某防火区域可由第 } j \text{ 消防站负责时}\\ 0, & \text{当某防火区域不由第 } j \text{ 消防站负责时}\end{cases}$

$$j=1,2,3,4$$

则可建立如下的数学模型：

$$\min z=\sum_{j=1}^{4} x_j$$

$$\begin{cases} x_1+x_2\geqslant 1 & (1)\\ x_1\geqslant 1 & (2)\\ x_1+x_3\geqslant 1 & (3)\\ x_3\geqslant 1 & (4)\\ x_1+x_3+x_4\geqslant 1 & (5)\\ x_1+x_4\geqslant 1 & (6)\\ x_1+x_2+x_4\geqslant 1 & (7)\\ x_2+x_4\geqslant 1 & (8)\\ x_4\geqslant 1 & (9)\\ x_3+x_4\geqslant 1 & (10)\end{cases}$$

由(2)(4)(9)判定 $x_1,x_3,x_4=1$，试出 $(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 为可行解，此时 $z=3$。

增加约束条件 $x_1+x_2+x_3+x_4\leqslant 3$，列表计算知，只有 $(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 为可行解，所以可关闭消防站 2。

○ **5.5** 在有互相排斥的约束条件问题中，如果约束条件是(≤)型的，我们用加以 y_iM 项(y_i 是 0—1 变量，M 是很大的常数)的方法统一在一个问题中，如果约束条件是(≥)型的，我们将怎样利用 y_i 和 M 呢？

解 在有互相排斥的约束条件的问题中，如果约束条件是(≥)型的，在 m 个约束条件右端分别减去 y_iM，$i=1,2,\cdots,m$(y_i 是 0—1 变量，M 是很大的常数)，且 $\sum\limits_{i=1}^{m}y_i=m-1$。

◎**5.6** 解 0—1 规划：

(1) $\min z=4x_1+3x_2+2x_3$

$$\begin{cases} 2x_1-5x_2+3x_3\leqslant 4\\ 4x_1+x_2+3x_3\geqslant 3\\ x_2+x_3\geqslant 1\\ x_1,x_1,x_2,x_3=0\text{ 或 }1\end{cases}$$

(2) $\min z=2x_1+5x_2+3x_3+4x_4$

$$\begin{cases} -4x_1+x_2+x_3+x_4\geqslant 0\\ -2x_1+4x_2+2x_3+4x_4\geqslant 4\\ x_1+x_2-x_3+x_4\geqslant 1\\ x_1,x_2,x_3,x_4=0\text{ 或 }1\end{cases}$$

分析 本题考查了 0－1 型整数规划。

解 (1)给各约束条件编号如下：

$$\text{s. t.}\begin{cases} 2x_1-5x_2+3x_3\leqslant 4 & (1)\\ 4x_1+x_2+3x_3\geqslant 3 & (2)\\ x_2+x_3\geqslant 1 & (3)\\ x_1,x_2,x_3=0\text{ 或 }1\end{cases}$$

先找到 $(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 为可行解，相应的 $z=2$，故增加约束条件

$$4x_1+3x_2+2x_3\leqslant 2 \qquad (0)$$

表 5－10

(x_1,x_2x_3)	条件				是否满足条件	z
	(0)	(1)	(2)	(3)		
(0,0,0)	0	0	0		×	
(0,0,1)	2	3	3	3	√	2
(0,1,0)	3				×	
(0,1,1)	5				×	
(1,0,0)	4				×	
(1,0,1)	6				×	
(1,1,1)	7				×	
(1,1,1)	9				×	

所以，可判定最优解 $X^*=(0,0,1)^T$，目标函数最优值 $z^*=2$。

(2)给各约束条件编号如下：

$$\begin{cases}-4x_1+x_2+x_3+x_4\geqslant 0 & (1)\\ -2x_1+4x_2+2x_3+4x_4\geqslant 4 & (2)\\ x_1+x_2-x_3+x_4\geqslant 1 & (3)\\ x_1,x_2,x_3,x_4=0\text{ 或 }1\end{cases}$$

先找到$(0,0,0,1)^T$ 为可行解，相应的 $z=4$，故增加约束条件

$$2x_1+5x_2+3x_3+4x_4\leqslant 4 \quad (0)$$

表 5－11

(x_1,x_2,x_3,x_4)	条件				是否满足条件	z
	(0)	(1)	(2)	(3)		
(0,0,0,0)	0	0	0		×	
(0,0,0,1)	4	1	4	1	√	4
(0,0,1,0)	3	1	2		×	
(0,0,1,1)	7				×	
(0,1,0,0)	5				×	
(0,1,0,1)	9				×	
(0,1,1,0)	8				×	
(0,1,1,1)	12				×	
(1,0,0,0)	2	－4			×	
(1,0,0,1)	6				×	
(1,0,1,0)	5				×	
(1,0,1,1)	9				×	
(1,1,0,0)	7				×	
(1,1,0,1)	11				×	
(1,1,1,0)	10				×	
(1,1,1,1)	14				×	

所以，可判定最优解 $X^*=(0,0,0,1)^T$，目标函数最优值 $z^*=4$。

◎5.7 有 4 个工人，要指派他们分别完成 4 种工作，每人做各种工作做消耗的时间如下表所示，问指派哪个人去完成那种工作，可使总的消耗时间为最小？

表 5－12

工种 / 工人	A	B	C	D
甲	15	18	21	24
乙	19	23	22	18
丙	26	17	16	19
丁	19	21	23	17

分析 本题考查的是指派问题，用匈牙利法求解。

解 变换系数矩阵为

$$\min(c_{ij})=\begin{bmatrix}15 & 18 & 21 & 24\\29 & 23 & 22 & 18\\26 & 17 & 16 & 19\\19 & 21 & 23 & 17\end{bmatrix}\begin{matrix}15\\18\\16\\17\end{matrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0 & 3 & 6 & 9\\1 & 5 & 4 & 0\\10 & 1 & 0 & 3\\2 & 4 & 6 & 0\end{bmatrix}=(b_{ij})$$

再进行试分配，得

$$\begin{bmatrix}◎ & 2 & 6 & 9\\1 & 4 & 4 & ◎\\10 & ◎ & \Phi & 3\\2 & 3 & 6 & \Phi\end{bmatrix}$$

因为 $m=3<n=4$，试指派不成功转下步，所以

指派成功，故此项工作有多种指派方案，$Z=70$，指派矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

即最优指派方案为：

(1) 甲→A,乙→D,丙→C,丁→B;

(2) 甲→B,乙→A,丙→C,丁→D。

第六章

无约束问题

内容提要

一、非线性规划的数学模型

$$\min f(x)$$
$$\begin{cases} h_i(x)=0, i=1,2,\cdots,m \\ g_j(x)\geqslant 0, j=1,2,\cdots,l \end{cases}$$

其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是 n 维欧式空间 E^n 的向量(点);$f(x)$为目标函数,$h_i(x)=0$ 和 $g_j(x)\geqslant 0$ 为约束条件。

二、求解方法

(1)一维搜索$\begin{cases}\text{斐波那契法}\\ 0.618\text{ 法}\end{cases}$,主要思想、主要步骤及适用范围。

(2)下降算法$\begin{cases}\text{最速下降法}\\ \text{共轭梯度}\\ \text{变尺度法}\end{cases}$,基本原理,各自的优缺点。

下降迭代算法的步骤可总结如下:

① 选定某一初始点 $X^{(0)}$,并令 $k:=0$;

② 确定搜索方向 $P^{(k)}$;

③ 从 $X^{(k)}$ 出发,沿方向 $P^{(k)}$ 求步长 λ_k,以产生下一个迭代点 $X^{(k+1)}$;

④ 检查得到的新点 $X^{(k+1)}$ 是否为极小点或近似极小点,若是,则停止迭代。否则,令 $k:=k+1$,转回②继续进行迭代。

常用的终止计算准则:

根据相邻两次迭代的绝对误差

$$\| X^{(k+1)}-X^{(k)} \|<\varepsilon_1$$

$$|f(X^{(k+1)})-f(X^{(k)})|<\varepsilon_2$$

典型例题与解题技巧

【例】 用斐波那契法求函数：

$$f(x)=-3x^2+21.6x+1$$

在区间[0,25]上的极大值点，要求缩短后的区间长度不小于原区间长度的8%。

解题分析 这是一道用一维搜索求解的方程，要求读者熟练掌握一维搜索的计算方法，计算认真细心，否则得不到最后结果。

解题过程 $f(x)$为严格凹函数，因$\delta=0.08$，$F_n=\frac{1}{\delta}=12.5$，由书中查得$n=6$，再由计算得

$$t_1=b_0+\frac{F_5}{F_6}(a_0-b_0)=25+\frac{8}{13}(0-25)=9.615\ 4$$

$$t_1'=a_0+\frac{F_5}{F_6}(b_0-a_0)=0+\frac{8}{13}(15-0)=15.384\ 6$$

$$f(t_1)=-68.6715>f(t_1')=-376.750\ 4$$

故取

$$a_1=0,\quad b_1=15.384\ 6,\quad t_2'=9.615\ 4$$

$$t_2=b_1+\frac{F_4}{F_5}(a_1-b_1)=5.769\ 2$$

因

$$f(t_2)=25.762\ 4>f(t_2')$$

故取

$$a_2=0,\quad b_2=9.615\ 4,\quad t_3'=5.769\ 2$$

$$t_3=b_2+\frac{F_3}{F_4}(a_2-b_2)=3.846\ 2$$

因

$$f(t_3)=39.698>f(t_3')$$

故取

$$a_3=0,\quad b_3=5.769\ 2,\quad t_4'=3.846\ 2$$

$$t_4=b_3+\frac{F_2}{F_3}(a_3-b_3)=1.923\ 1$$

因

$$f(t_4)=31.444<f(t_4')$$

故取

$$a_4=1.923\ 1,\quad b_4=5.769\ 2,\quad t_5=1.923\ 1$$

并令

$$\varepsilon=0.01$$

$$t'_5=a_4+\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)(b_4-a_4)=3.850$$

因

$$f(t'_5)=39.6924>f(t_5)$$

故取

$$a_5=3.85,\quad b_5=5.7692$$

因

$$f(t'_5)<f(t_3)$$

故 $t_3=3.8642$ 为近似最优点。

第七章

约束极值问题

内容提要

一、二次规划

1. 定义

若非线性规划的目标函数为自变量 x 的二次函数，约束条件又全是线性的，就称这种规划为二次规划。

二次规划的数学模型可表示如下：

$$\min f(X)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_jkx_jx_k$$

$$\begin{cases} c_{jk}=c_{kj} & (k=1,2,\cdots,n) \\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+b_i\geqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m) \\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

2. 求解方法——可行方向法

可行方向法的迭代步骤如下：

(1)确定允许误差 $\varepsilon_1>0$ 和 $\varepsilon_2>0$，选初始近似点 $X^{(0)}\in \mathbf{R}$，并令 $k:=0$

(2)确定起作用约束指标集

$$J(X^{(k)})=\{j\,|\,g_j(X^{(k)})=0,1\leqslant j\leqslant l\}$$

① 若 $J(X^{(k)})=\varnothing$($\varnothing$为空集)，而且 $\|\nabla f(x^{(k)})\|^2>\varepsilon_1$，停止迭代，得点 $X^{(k)}$；

② 若 $J(X^{(k)})=\varnothing$，但

$$\|\nabla f(x^{(k)})\|^2>\varepsilon_1$$

则取搜索方向 $D^{(k)}=-\nabla f(X^{(k)})$，然后转向第(5)步；

③ 若 $J(X^{(k)})\neq\varnothing$，转下一步。

(3)求解线性规划

$$\min \eta$$
$$\begin{cases} \nabla f(X^{(k)})^{\mathrm{T}} D \leqslant \eta & \\ -\nabla g_i(X^{(k)})^{\mathrm{T}} D \leqslant \eta & (j \in J(X^{(k)}) \\ -1 \leqslant d_i \leqslant 1 & (i=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

设它的最优解是$(D^{(k)}, \eta_k)$

(4)检验是否满足$|\eta_k| \leqslant \varepsilon_2$

(5)解下述一维极值问题

$$\lambda_k: \min_{0 \leqslant \lambda \leqslant \bar{\lambda}} f(X^{(k)} + \lambda D^{(k)})$$

此处

$$\bar{\lambda} = \max\{\lambda \mid g_j(X^{(k)} + \lambda D^{(k)}) \geqslant 0, j=1,2,\cdots,l\}$$

(6)令

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda_k D^{(k)}, k := k+1$$

转回第(2)步。

二、库恩—塔克条件

1. 定义

设x^*是非线性规划的极小点，而且与X^*点的各起约束作用的梯度线性无关，则存在向量$\Gamma^* = (r_1^*, r_2^*, \cdots, r_l^*)^{\mathrm{T}}$，使下述条件成立

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) = \sum_{j=1}^{l} r_j^* \nabla g_j(X^*) = 0 & \\ r_j^* g_j(x^*) = 0 & (j=1,2,\cdots,l) \\ r_j^* \geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,l) \end{cases}$$

上述条件常称为K－T条件，满足这个条件的点(它当然也满足非线性规划的所有约束条件)称为库恩—塔克点(K－T点)。

三、制约函数

1. 常用的制约函数基本上有两类：一为惩罚函数(或称罚函数)，一为障碍函数，对于这两种函数，SUMT有外点法和内点法。

2. 外点法的迭代步骤如下：

(1)取$M_1>0$(例如说取$M_1=1$)，允许误差$\varepsilon>0$，并令$k:=1$

(2)求无约束问题的最优解：

$$\min_{x \in E^n} P(X, M_k) = P(X^{(k)}, M_k)$$

其中

$$P(X, M_k) = f(X) + M_k \sum_{j=1}^{l} [\min(0, g_j(X))]^2$$

(3)若对某一个$j(1 \leqslant j \leqslant l)$有

$$-g_j(X^{(k)}) \geqslant \varepsilon$$

则取 $M_{k+1} > M_k$（例如，$M_{k+1} = CM_k$，$C=5$ 或 10）

令

$$k := k+1$$

并转向第二步；

否则，停止迭代，得

$$X_{\min} \approx X^{(k)}$$

典型例题与解题技巧

【例 1】 有一线性方程组如下

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

现欲用无约束极小化方法求解，试建立数学模型并说明计算原理。

解题分析 首先要求读者熟练掌握数学建模的步骤，建立出正确的数学模型，这是下一步求解的基础。建出模型后，要求读者熟练掌握无约束极小化的求解方法。

解题过程 (1)建立数学模型

$$\min f(X) = (x_1 - x_2 + 3x_3 - 4)^2 + (x_1 - 2x_2 + x_3 - 2)^2 + (x_1 + x_2 - x_3 - 7)^2$$

(2)计算原理

梯度法（最速下降法）

① 给定初始近似点 $X^{(0)}$ 不妨为 $(0,0,0)$，精度 $\varepsilon > 0$，不妨令 $\varepsilon = 0.01$，若

$$\| \nabla f(X^{(0)}) \|^2 \leqslant \varepsilon$$

则 $X^{(0)}$ 即为近似极小点。

② 若 $\| \nabla f(X^{(0)}) \|^2 > \varepsilon$，求进步 λ_0 并计算

$$X^{(1)} = X^{(0)} - \lambda \nabla f(X^{(0)})$$

步长求法用近似最佳步长。

③ 一般地，若 $\| \nabla f(x^{(k)}) \|^2 \leqslant \varepsilon$，则 $X^{(k)}$ 即为所求的近似解；若 $\| \nabla X^{(k)} \|^2 > \varepsilon$ 则求步长 λ_k 并确定下一个近似点

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \lambda_k \nabla f(X^{(k)})$$

如此继续，直至达到要求的精度为止。

近似最佳步长求法

$$f(\lambda) = f(X^{(k)} - \lambda \nabla f(X^{(k)}))$$

$$= f(X^{(k)}) - \nabla f(X^{(k)})^{\mathrm{T}} \lambda \nabla f(X^{(k)}) + \frac{1}{2} \lambda \nabla f(X^{(k)})^{\mathrm{T}} H(X^{(k)}) \lambda \nabla f(X^{(k)})$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} = 0$，求出步长 λ。

【例 2】 给出二次规划：

$$\begin{cases} \max\ f(X) = 10x_1 + 4x_2 - x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2 \\ \quad x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ \quad 4x_1 + x_2 \leqslant 18 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(a)写出 K-T 条件并求最优解；

(b)写出等价的线性规划问题并求解。

解析分析　这又是一道综合性的题目，要求读者对前后所学知识融汇贯通，尤其对线性规划一部分内容要掌握好，这是以后所有内容的基础。题目中所要用的 $K-T$ 条件，也是本章的重点内容，读者应该熟练掌握。

解题过程　(a)K－T 条件可写为

$$\begin{cases}2x_1-4x_2-10+\gamma_1+4\gamma_2-\gamma_3=0\\-4x_1+8x_2-4+\gamma_1+\gamma_2-\gamma_4=0\\\gamma_1(6-x_1-x_2)=0\\\gamma_2(18-4x_1-x_2)=0\\\gamma_3x_1=0\\\gamma_4x_2=0\\\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4\geqslant 0\end{cases}$$

解得 $x_1=4,x_2=2,\gamma_1=2,\gamma_2=2,\gamma_3=0,\gamma_4=0$

(b)其等价的线性规划问题为

$$\begin{cases}\min\ \varphi(z)=z_1+z_2\\2x_1-4x_2-y_1+y_3+4y_4+z_1=10\\4x_1-8x_2-y_2+y_3+y_4+z_2=4\\x_1+x_2+x_3=6\\4x_1+x_2+x_4=18\\x_{1-4}\geqslant 0,y_{1-4}\geqslant 0,z_{1-2}\geqslant 0\end{cases}$$

解得$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(4,2,0,0)$；$(y_1,y_2,y_3,y_4)=(0,0,2,2)$；$(z_1,z_2)=(0,0)$

课后习题全解

○7.1　在某一试验中变更条件 x_i 四次，测得相应的结果 y_i 示于下表，试为这一试验拟合一条直线，使其在最小二乘意义上最好地反映这项试验的结果(仅要求写出数学模型)。

表 7－1

x_i	2	4	6	8
y_i	1	3	5	6

解　设直线为 $y=ax+b$，则有

$$\begin{cases}\min\ z=(2a+b-1)^2+(4a+b-3)^2+(6a+b-5)^2+(8a+b-6)^2\\\dfrac{\partial z}{\partial a}=0\\\dfrac{\partial z}{\partial b}=0\end{cases}$$

◎7.2 有一线性方程组如下

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x^3=2\\3x_1-2x_2+x_3=7\\x_1+x_2-x_3=1\end{cases}$$

现欲用无约束极小化方法求解，试建立数学模型并说明计算原理。

分析 本题考查了无约束极值问题的解法—梯变法。

解 (1)建立数学模型

$$\min f(X)=(x_1-2x_2+3x_3-2)^2+(3x_1-2x_2+x_3-7)^2+(x_1+x_2-x_3-1)^2$$

(2)计算原理

梯度法(最速下降法)：

①不妨以 $X^{(0)}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 为初始近似点，取精度 $\varepsilon=0.01$，若 $\|\nabla f(X^{(0)})\|^2\leqslant\varepsilon$，则 $X^{(0)}$ 即为近似极小点。

②若 $\|\nabla f(X^{(0)})\|^2>\varepsilon$，求步长 λ_0 并计算 $X^{(1)}=X^{(0)}-\lambda_0\nabla f(X^{(0)})$，步长求法用近似最佳步长。

③如果 $\|\nabla f(X^{(k)})\|^2\leqslant\varepsilon$，则 $X^{(k)}$ 即为近似极小点；如果 $\|\nabla f(X^{(k)})\|^2>\varepsilon$，则求步长 λ_k 并计算下一个近似点：$X^{(k+1)}=X^{(k)}-\lambda_k\nabla f(X^{(k)})$. 如此反复进行，直到达到要求的精度为止。

近似最佳步长求法：

$$f(\lambda)=f(X^{(k)}-\lambda\nabla f(X^{(k)}))=f(X^{(k)})-\nabla f(X^{(k)})^{\mathrm{T}}\lambda\nabla f(X^{(k)})+$$
$$\frac{1}{2}\lambda\nabla f(X^{(k)})^{\mathrm{T}}H(X^{(k)})\lambda\nabla f(X^{(k)})$$

令 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}=0$，求出步长 λ。

◎7.3 试判定下述非线性规划是否为凸规划：

(1) $\begin{cases}\min f(X)=x_1^2+x_2^2+8\\x_1-x_2\geqslant 0\\-x_1-x_2^2+2=0\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\min f(X)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2\\x_1^2+x_2^2\leqslant 4\\5x_1^2+x_3=10\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$

分析 本题考查了凸规划的定义。

解 (1) $\begin{cases}\min f(X)=x_1^2+x_2^2+8\\g_1(X)=x_1^2-x_2\geqslant 0\\g_2(X)=-x_1-x_2^2+2=0\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$

$f(X),g_1(X),g_2(X)$ 的海赛(Hesse)矩阵的行列式分别为

$$|H|=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1\partial x_2}\\\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_2^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}=4>0,$$

$$|g_1|=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 g_1(X)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 g_1(X)}{\partial x_1\partial x_2}\\ \dfrac{\partial^2 g_1(X)}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 g_1(X)}{\partial x_2^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$|g_2|=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 g_2(X)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 g_2(X)}{\partial x_1\partial x_2}\\ \dfrac{\partial^2 g_2(X)}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 g_2(X)}{\partial x_2^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=0$$

从而可知 $f(X)$为严格凸函数，$g_1(X)$为凸函数，所以这不是一个凸规划问题。

$$(2)\begin{cases}\min\ f(X)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2\\ g_1(X)=-x_1^2-x_2^2\qquad +4\ \geqslant 0\\ g_2(X)=\ 5x_1^2\qquad +x_3-10=0\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

$f(X)$，$g_1(X)$，$g_2(X)$的海赛矩阵的行列式分别为

$$|H|=\begin{vmatrix}4 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=14>0,$$

$$|g_1|=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0,\ |g_2|=\begin{vmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=14>0$$

从而可知 $f(X)$为严格凸函数，$g_1(X)$为凹函数，$g_2(X)$为凸函数，所以这不是一个凸规划问题。

○7.4 试用斐波那契法求函数

$$f(x)=x^2-6x+2$$

在区间[0,10]上的极小点，要求缩短后的区间长度不大于原区间长度的 8%。

解 由$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=2x-6=0$ 可得 $x=3$，故精确解为 $t^*=3$，$f(t^*)=3^2-6\times3+2=-7$

函数求值次数 $n=8$，最终区间为$[a_7,b_7]=[2.942,3.236]$，近似极小点为 $t=2.947$，近似极小值为 $f(2.947)=2.947^2-6\times2.947+2=-6.997$。

○7.5 试用 0.618 法重做习题 7.4，并将计算结果与用斐波那契法所得计算结果进行比较。

解 函数求值次数 $n=9$，最终区间为$[a_8,b_8]=[2.918,3.131]$，近似极小点为 $t=3.05$，近似极小值为 $f(3.05)=3.05^2-6\times3.05+2=-6.998$。

○7.6 试用最速下降法求解

$$\min\ f(X)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$$

选初始点 $X^{(0)}=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$，要求做三次迭代，并验证相邻两步的搜索方向正交。

解 $\nabla f(X)=(2x_1,2x_2,2x_3)^{\mathrm{T}}$，计算结果见表 7－2。

表 7—2

迭代次数 k	λ_k	$X^{(k)}$	$\nabla f(X^{(k)})$
0	$\frac{3}{8}$	$(2,-2,1)$	$(4,-4,4)$
1	$\frac{3}{10}$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$(1,-1,-2)$
2	$\frac{3}{8}$	$(\frac{1}{5},-\frac{1}{5},\frac{1}{10})$	$(\frac{2}{5},-\frac{2}{5},\frac{2}{5})$
3		$(\frac{1}{20},-\frac{1}{20},-\frac{1}{20})$	$(\frac{1}{10},-\frac{1}{10},-\frac{1}{5})$

由$(4,-4,4)$,$(1,-1,-2)$,$(\frac{2}{5},-\frac{2}{5},\frac{2}{5})$,$(\frac{1}{10},-\frac{1}{10},-\frac{1}{5})$可知相邻两步的搜索方向正交。

◎**7.7** 试用最速下降法求函数

$$f(X)=-(x_1-2)^2-2x_2^2$$

的极大点.先以 $X^{(0)}=(0,0)^T$ 为初始点进行计算,求出极大点;再以 $X^{(0)}=(0,1)^T$ 为初始点进行两次迭代.最后比较从上述两个不同初始点出发的寻优过程。

分析 本题考查了最速下降法。

解 求 $f(X)=-(x_1-2)^2-2x_2^2$ 的极大点,即求 $g(X)=(x_1-2)^2+2x_2^2$ 的极小点。

(1)以 $X^{(0)}=(0,0)^T$ 为初始点,取精度 $\varepsilon=0.1$,

因为$\nabla g(X)=[2(x_1-2),4x_2]^T$,所以$\nabla g(X^{(0)})=(-4,0)^T$,$\|\nabla g(X^{(0)})\|^2=(\sqrt{(-4)^2+0^2})^2=16>\varepsilon$

$$H(X)=\begin{bmatrix}2&0\\0&4\end{bmatrix},$$

$$\lambda_0=\frac{\nabla g(X^{(0)})^T\nabla g(X^{(0)})}{\nabla g(X^{(0)})^TH(X^{(0)})\nabla g(X^{(0)})}=\frac{(-4,0)\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}}{(-4,0)\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}}=\frac{1}{2},$$

$X^{(1)}=X^{(0)}-\lambda\nabla g(X^{(0)})=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$,于是

$\nabla g(X^{(1)})=[2(2-2),4\times0]^T=(0,0)^T$,即 $X^{(1)}$ 为极小点,从而$(2,0)^T$ 为 $f(X)$ 的极大点.

(2)以 $X^{(0)}=(0,1)^T$ 为初始点,取精度 $\varepsilon=0.1$,方法同上进行两次迭代,有:

两次步长:$\lambda_0=\frac{1}{3},\lambda_1=\frac{1}{3}$

两次迭代结果:$X^{(1)}=(\frac{4}{3},-\frac{1}{3})^T,X^{(2)}=(\frac{16}{9},-\frac{1}{9})^T$

比较:对于目标函数的等值线为椭圆的问题来说,椭圆的圆心即为最小值,负梯度方向指向圆心,但初值点与圆心在同一水平直线上时,收敛很快,即尽量使搜索路径呈现较少的直角锯齿状。

○**7.8**　试用牛顿法重解习题 7.6。

解　$\min f(X)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$，$\nabla f(X)=(2x_1,2x_2,2x_3)^{\mathrm{T}}$

因为 $X^{(0)}=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$，所以 $\nabla f(X^{(0)})=(4,-4,2)^{\mathrm{T}}$

因为 $H(X^{(0)})=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，所以 $H(X^{(0)})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，从而

$$X=X^{(0)}-H(X^{(0)})^{-1}\nabla f(X^{(0)})=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\-4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$\boxed{○\mathbf{7.9}}$　试用牛顿法求解

$$\max f(X)=\frac{1}{x_1^2+x_2^2+2}$$

取初始点 $X^{(0)}=(4,0)^{\mathrm{T}}$，用最佳步长进行。然后采用固定步长 $\lambda=1$，观察迭代情况，并加以分析说明。

解　取固定步长 $\lambda=1$ 时不收敛，取最佳步长时收敛，极大点为 $X^*=(0,0)^{\mathrm{T}}$，$f(X^*)=\frac{1}{2}$。

◎**7.10**　试用共轭梯度法求二次函数

$$f(X)=\frac{1}{2}X^{\mathrm{T}}AX$$

的极小点，此处

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$$

分析　A 为对称正定阵，运用正定二次函数的共轭梯度法求解。

解　$f(X)=\frac{1}{2}X^{\mathrm{T}}AX=\frac{1}{2}(x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2)$，

$\nabla f(X)=\left[\frac{\partial f(X)}{\partial x_1},\frac{\partial f(X)}{\partial x_2}\right]^{\mathrm{T}}=(x_1+x_2,x_1+2x_2)^{\mathrm{T}}$

从 $X^{(0)}=(1,1)^{\mathrm{T}}$ 开始，

$\nabla F(X^{(0)})=(2,3)^{\mathrm{T}}$，$P^{(0)}=-\nabla f(X^{(0)})=(-2,-3)^{\mathrm{T}}$，

$$\lambda_0=-\frac{\nabla f(X^{(0)})^{\mathrm{T}}P^{(0)}}{(P^{(0)})^{\mathrm{T}}AP^{(0)}}=\frac{(2,3)\begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix}}{(-2,-3)\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix}}=\frac{13}{34}$$

于是

$$X^{(1)}=X^{(0)}+\lambda_0P^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\frac{13}{34}\times\begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix}=\left[\frac{8}{34},-\frac{15}{34}\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\nabla f(X^{(1)})=(\frac{3}{34},-\frac{2}{34})^{\mathrm{T}},$$

$$\beta_0=\frac{\nabla f(X^{(1)})^{\mathrm{T}}\nabla f(X^{(1)})}{\nabla f(X^{(0)})^{\mathrm{T}}\nabla f(X^{(0)})}=\frac{1}{1156},$$

$$P^{(1)}=-\nabla f(X^{(1)})+\beta_0P^{(0)}=\left[\frac{-104}{1156},\frac{65}{1156}\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\lambda_1=-\frac{\nabla f(X^{(1)})^{\mathrm{T}}P^{(1)}}{(P^{(1)})^{\mathrm{T}}AP^{(1)}}=\frac{34}{13}$$

故 $X^{(2)}=X^{(1)}+\lambda_1P^{(1)}=(0,0)^{\mathrm{T}}$

$X^{(2)}=(0,0)^{\mathrm{T}}$ 即极小值点。

◎**7.11** 令 $X^{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$为一组 A 共轭向量(假定为列向量),A 为 $n\times n$ 对称正定阵,试证

$$A^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{X^{(i)}(X^{(i)})^{\mathrm{T}}}{(X^{(i)})^{\mathrm{T}}AX^{(i)}}$$

分析 共轭即正交,$X^{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$为 E^n 中的一组基。

证明 由于 $X^{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$为 A 共轭,故它们线性独立。设 Y 为 E^n 中的任一向量,则存在 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$,使

$$Y=\sum_{i=1}^{n}a_iX^{(i)}$$

用 A 左乘上式,得

$$AY=\sum_{i=1}^{n}a_iAX^{(i)}=a_1AX^{(1)}+a_2AX^{(2)}+\cdots+a_nAX^{(n)}$$

分别用 $X^{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$乘上式左端,并考虑到共轭关系,则有

$$(X^{(i)})^{\mathrm{T}}AY=a_i(X^{(i)})^{\mathrm{T}}AX^{(i)}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

从而

$$a_i=\frac{(X^{(i)})^{\mathrm{T}}AY}{(X^{(i)})^{\mathrm{T}}AX^{(i)}}\quad(i=1,2,\cdots,n)\cdots\cdots$$

令

$$B=\sum_{i=1}^{n}\frac{X^{(i)}(X^{(i)})^{\mathrm{T}}}{(X^{(i)})^{\mathrm{T}}AX^{(i)}}$$

用 AY 右乘上式,得

$$\begin{aligned}BAY&=\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{X^{(i)}(X^{(i)})^{\mathrm{T}}}{(X^{(i)})^{\mathrm{T}}AX^{(i)}}\right]AY\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X^{(i)})^{\mathrm{T}}AY}{(X^{(i)})^{\mathrm{T}}AX^{(i)}}X^{(i)}\\&=\sum_{i=1}^{n}a_iX^{(i)}=Y\end{aligned}$$

故

$$BA=E \quad (\text{单位矩阵})$$

即

$$A^{-1}=B=\sum_{i=1}^{n}\frac{X^{(i)}(X^{(i)})^{\mathrm{T}}}{(X^{(i)})^{\mathrm{T}}AX^{(i)}}$$

●7.12 试用变尺度法求解

$$\min f(X)=(x_1-2)^3+(x_1-2x_2)^2$$

取初始点 $X^{(0)}=(0.00,3.00)^{\mathrm{T}}$,要求近似极小点处梯度的模不大于 0.5。

分析 本题考查了变尺度法。

解
$$\min f(X)=(x_1-2)^3+(x_1-2x_2)^2$$

取 $\overline{H}^{(0)}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, X^{(0)}=\begin{bmatrix}0.00\\ 3.00\end{bmatrix}$

$$\nabla f(X)=[3(x_1-2),-4(x_1-2x_2)]^{\mathrm{T}}$$

$$\nabla f(X^{(0)})=(-6,24)^{\mathrm{T}}$$

显然

$$\|\nabla f(Z^{(0)})\|^2>\varepsilon$$

$$X^{(1)}=X^{(0)}+\lambda_0P^{(0)}=X^{(0)}+\lambda_0[-\overline{H}^{(0)}\nabla f(X^{(0)})]=\begin{bmatrix}0.00+6\lambda_0\\ 3.00-24\lambda_0\end{bmatrix}$$

$$f(X^{(1)})=(6\lambda_0-2)^3+[6\lambda_0-2(3.00-24\lambda_0)]^2$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}f(X^{(1)})}{\mathrm{d}\lambda_0}=0$

得
$$\lambda_0=\frac{19}{165}$$

故

$$X^{(1)}=[0.00+6\lambda_0,3.00-24\lambda_0]^{\mathrm{T}}=(0.69,0.24)^{\mathrm{T}}$$

$$\|\nabla f(X)^{(1)}\|^2=16.150\,5>0.5$$

继续迭代

$\triangle X^{(0)}=X^{(1)}-X^{(0)}=(0.69,0.24)^{\mathrm{T}}-(0.00,3.00)^{\mathrm{T}}=(0.69,-2.76)^{\mathrm{T}}$

$f(X^{(1)})=-2.20,\quad \nabla f(X^{(1)})=(-3.93,-0.84)^{\mathrm{T}}$

$\triangle G^{(0)}=\nabla f(X^{(1)})-\nabla f(X^{(0)})=(2.07,-24.84)^{\mathrm{T}}$

可得

$$\overline{H}^{(1)}=\overline{H}^{(0)}+\frac{\triangle X^{(0)}(\triangle X^{(0)})^{\mathrm{T}}}{(\triangle G^{(0)})^{\mathrm{T}}\triangle X^{(0)}}-\frac{\overline{H}^{(0)}\triangle G^{(0)\mathrm{T}}\overline{H}^{(0)}}{(\triangle G^{(0)})^{\mathrm{T}}\overline{H}^{(0)}\triangle G^{(0)}}=\begin{bmatrix}1.00 & -0.06\\ -0.06 & 0.12\end{bmatrix}$$

故

$$X^{(2)}=X^{(1)}-\lambda_1\overline{H}^{(1)}\nabla f(X^{(1)})$$

$$=\begin{bmatrix}0.69\\ 0.24\end{bmatrix}-\lambda_1\begin{pmatrix}1.00 & -0.06\\ -0.06 & 0.12\end{pmatrix}\begin{bmatrix}-3.93\\ -0.84\end{bmatrix}$$

如上求最优步长,可得

$$X^{(2)}=\begin{bmatrix}0.69\\0.24\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3.879\,6\\0.135\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.69+3.879\,6\lambda\\0.24-0.135\lambda\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\min f(X^{(2)})&=(0.69+3.879\,6\lambda-2)^3+(0.69+3.879\,6\lambda-2\times0.24+0.27\lambda)^2\\&=(3.879\,6\lambda-1.31)^3+(4.149\,6\lambda+0.21)^2\end{aligned}$$

得 $\lambda_1=-\dfrac{5}{96}$,循环以上步骤。

小结 变尺度法避免了计算二阶系数矩阵及其求逆过程,比梯度法的收敛速度快。

○7.13 试以 $X^{(0)}=(0,0)^{\mathrm{T}}$ 为初始点,使用

(1)最速下降法(迭代 4 次);

(2)牛顿法;

(3)变尺度法。

求解无约束极植问题

$$\min f(X)=2x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+x_1-x_2$$

并绘图表示使用上述各方法的寻优过程。

解 (1)用最速下降法:

$X^{(0)}=(0,0)^{\mathrm{T}},\quad \lambda_0=1$

$X^{(1)}=(-1,1)^{\mathrm{T}},\quad \lambda_1=\dfrac{1}{5}$

$X^{(2)}=(-0.8,1.2)^{\mathrm{T}},\quad \lambda_2=1$

$X^{(3)}=(-1,1.4)^{\mathrm{T}},\quad \lambda_3=\dfrac{1}{5}$

$X^{(4)}=(-0.96,1.44)^{\mathrm{T}}$

(2)牛顿法:

$$X^{(0)}=(0,0)^{\mathrm{T}},H^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}&-\dfrac{1}{2}\\-\dfrac{1}{2}&1\end{bmatrix}$$

得极小点 $X^{(1)}=\left[-1,\dfrac{3}{2}\right]^{\mathrm{T}}$

(3)变尺度法:

$X^{(0)}=(0,0)^{\mathrm{T}},\quad P^{(0)}=(-1,1)^{\mathrm{T}},\quad \lambda_0=1$

$X^{(1)}=(-1,1)^{\mathrm{T}},\beta_0=1,P^{(1)}=(0,2)^{\mathrm{T}},\lambda_1=\dfrac{1}{4}$

得极小点 $X^{(2)}=\left[-1,\dfrac{3}{2}\right]^{\mathrm{T}}$

作图过程省略。

◎7.14 试用步长加速法(模矢法)求下述函数

$$f(X)=x_1^2+2x_2^2-4x_1-2x_1x_2$$

的极小点,初始点 $X^{(0)}=(3,1)^{\mathrm{T}}$,步长

$$\triangle_1=\begin{pmatrix}0.5\\0\end{pmatrix},\triangle_2=\begin{pmatrix}0\\0.5\end{pmatrix}$$

并绘图表示整个迭代过程。

分析 本题考查了步长加速法,它是一种直接法。

解 第一步:

$f(X^{(0)})=-7, f(X^{(0)}+\triangle_1)=f[(3.5,1)^{\mathrm{T}}]=-6.75>f(X^{(0)})$,

$f(X^{(0)}-\triangle_1)=f[(2.5,1)^{\mathrm{T}}]=-6.75>f(X^{(0)})$

$\therefore T_{11}=X^{(0)}=(3,1)^{\mathrm{T}}$

$f(T_{11}+\triangle_2)=f[(3,1.5)^{\mathrm{T}}]=-7.5<f(X^{(0)})$

$\therefore T_{12}=(3,1.5)^{\mathrm{T}}=X^{(1)}$ 且 $f(X^{(1)})=-7.5$

第二步:

$T_{20}=X^{(0)}+2(X^{(1)}-X^{(0)})=(3,2)^{\mathrm{T}}$

且 $f(T_{20})=-7$, $f(T_{20}+\triangle_1)=f[(3.5,2)^{\mathrm{T}}]=-7.75<f(T_{20})$

$\therefore T_{21}=(3.5,2)^{\mathrm{T}}$

$f(T_{21}+\triangle_2)=f[(3.5,2.5)^{\mathrm{T}}]=-6.75>f(T_{20})$,

$f(T_{21}-\triangle_2)=f[(3.5,1.5)^{\mathrm{T}}]=-7.75<f(T_{20})$

$\therefore T_{22}=(3.5,1.5)^{\mathrm{T}}=X^{(2)}$ 且 $f(X^{(2)})=-7.75$

第三步:

$T_{30}=X^{(1)}+2(X^{(2)}-X^{(1)})=(4,1.5)^{\mathrm{T}}$

且 $f(T_{30})=-7.5, f(T_{30}+\triangle_1)=f[(4.5,1.5)^{\mathrm{T}}]=-6.75>f(T_{30})$,

$f(T_{30}-\triangle_1)=f[(3.5,1.5)^{\mathrm{T}}]=-7.75<f(T_{30})$

$\therefore T_{31}=(3.5,1.5)^{\mathrm{T}}$

$f(T_{31}+\triangle_2)=f[(3.5,2)^{\mathrm{T}}]=-7.75<f(T_{30})$

$\therefore T_{32}=(3.5,2)^{\mathrm{T}}=X^{(3)}$ 且 $f(X^{(3)})=-7.75$

第四步:

$T_{40}=X^{(2)}+2(X^{(3)}-X^{(2)})=(3.5,2.5)^{\mathrm{T}}$

且 $f(T_{40})=-7$, $f(T_{40}+\triangle_1)=f[(4,2.5)^{\mathrm{T}}]=-7.5<f(T_{40})$

$\therefore T_{41}=(4,2.5)^{\mathrm{T}}$

$f(T_{41}+\triangle_2)=f[(4,3)^{\mathrm{T}}]=-6>f(T_{40})$,

$f(T_{41}-\triangle_2)=f[(4,2)^{\mathrm{T}}]=-8<f(T_{40})$

$\therefore T_{42}=(4,2)^{\mathrm{T}}=X^{(4)}$ 且 $f(X^{(4)})=-8$

第五步:

$T_{50}=(4.5,2)^{\mathrm{T}}$

且 $f(T_{50})=-7.75, f(T_{50}+\triangle_1)=f[(5,2)^{\mathrm{T}}]=-7>f(T_{50})$,

$f(T_{50}-\triangle_1)=f[(4,2)^{\mathrm{T}}]=-8<f(T_{50})$

$\therefore T_{51}=(4,2)^{\mathrm{T}}$

$f(T_{51}+\triangle_2)=f[(4,2.5)^{\mathrm{T}}]=-7.75=f(T_{50})$,

$f(T_{51}-\triangle_2)=f[(4,1.5)^{\mathrm{T}}]=-7.5>f(T_{50})$

$\therefore T_{52}=(4,2)^{\mathrm{T}}=X^{(5)}$

此时应在(4,2)附近探索，缩小步长以求得符合精度要求的结果。

但由题意知，此时最优解为 $X^{*}=(4,2)^{\mathrm{T}}$，如图 7—1 所示。

图 7—1

◎7.15 分析非线性规划

$$\begin{cases}\min f(X)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2\\ x_1^2+(x_2-2)^2\geqslant 4\\ x_2\leqslant 2\end{cases}$$

在以下各点的可行下降方向(使用式(7.6)和式(7.7))：

(1)$X^{(1)}=(0,0)^{\mathrm{T}}$；　(2)$X^{(2)}=(2,2)^{\mathrm{T}}$；　(3)$X^{(3)}=(3,2)^{\mathrm{T}}$。

并绘图表示各点可行下降方向的范围

分析 使用课本中的式(7.6)判断方向 D 是否是 $X^{(1)}$ 的可行方向，使用式(7.7)判断方向 D 是否是 $X^{(1)}$ 的下降方向($i=1,2,3$)。

解 原非线性规划等同于

$$\begin{cases}\min f(X)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2\\ g_1(X)=x_1^2+(x_2-2)^2-4\geqslant 0\\ g_2(X)=-x_2+2\geqslant 0\end{cases}$$

$\nabla g_1(X)^{\mathrm{T}}=(2x_1,2(x_2-2))^{\mathrm{T}}$

$\nabla g_2(X)^{\mathrm{T}}=(0,-1)^{\mathrm{T}}$

$\nabla f(X)^{\mathrm{T}}=(2(x_1-2),2(x_2-3))^{\mathrm{T}}$

(1)$X^{(1)}=(0,0)^{\mathrm{T}}$

起作用约束的是 $g_1(X)$

$\therefore \nabla g_1(X^{(1)})^{\mathrm{T}}D=(0,-4)D>0$

$\nabla f(X^{(1)})^{\mathrm{T}}D=(-4,-6)D<0$

得 $D=(a,b)^{\mathrm{T}}$，则有

$$\begin{cases}-4b>0\\ -4a-6b<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b<0\\ a>-\dfrac{3}{2}b\end{cases}$$

存在可行下降方向。

(2)$X^{(2)}=(2,2)^{\mathrm{T}}$

起作用约束的是 $g_1(X)$，$g_2(X)$

$\therefore \nabla g_1(X^{(2)})^{\mathrm{T}}D=(4,0)D>0$

$\nabla g_2(X^{(2)})^T D=(0,-1)D>0$

$\nabla f(X^{(2)})^T D=(0,-2)D<0$

即

$$\begin{cases}4a>0\\-b>0\\-2b<0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}a>0\\b<0\\b>0\end{cases}\qquad(\text{无可行解})$$

不存在可行下降方向。

(3) $X^{(3)}=(3,2)^T$

起作用约束的为 $g_2(X)$

$\therefore \nabla g_2(X^{(3)})^T D=(0,-1)D>0$

$\nabla f(X^{(3)})^T D=(2,-2)D<0$

$\therefore \begin{cases}-b>0\\2a-2b<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b<0\\a<b\end{cases}$

存在可行下降方向。

○7.16　试写出下述二次规划的 Kuhn—Tucker 条件：

$$\begin{cases}\text{Max } f(X)=C^T X+X^T HX\\AX\leqslant b\\X\geqslant 0\end{cases}$$

其中：A 为 $m\times n$ 矩阵，H 为 $n\times n$ 矩阵，C 为 n 维列向量，b 为 m 维列向量，变量 X 为 n 维列向量。

解　二次规划等同于

$$\begin{cases}\min\ f(X)=-C^T X-X^T HX\\g_1(X)=-AX+b\geqslant 0\\g_2(X)=X\geqslant 0\end{cases}$$

设 X^* 为极小点，且与 X^* 点起作用约束的各梯度线性无关，这里假设 $g_1(X)$、$g_2(X)$ 都为起作用约束，则存在向量 $\Gamma^*=(\gamma_1^*,\cdots,\gamma_c^*)^T$，有

$$\begin{cases}\nabla f(X^*)-\sum\limits_{j=1}^{l}\gamma_j^*\nabla g_j(X^*)=0\\\gamma_j^* g_j(X^*)=0\qquad(j=1,2,\cdots,l)\\\gamma_j^*\geqslant 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-C^T\nabla X|_{X=X^*}-\nabla(X^T HX)|_{X=X^*}-\sum\limits_{j=1}^{l}\gamma_j^*\nabla g_j(X^*)=0\\\gamma_j^* g_j(X^*)=0\qquad(j=1,2,\cdots,l)\\\gamma_j^*\geqslant 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-C^{\mathrm{T}}\nabla X|_{x=x^*}-\nabla(X^{\mathrm{T}}HX)|_{x=x^*}+\gamma_j^* A\nabla X|_{x=x^*}-\gamma_2^*\nabla X|_{x=x^*}=0\\ \gamma_1^*(-AX^*+b)=0\\ \gamma_2^* X^*=0\\ \gamma_1^*,\gamma_2^*,\cdots,\gamma_l^*\geqslant 0\end{cases}$$

◎**7.17** 试写出下述非线性规划的 Kuhn－Tucker 条件并进行求解：

(1) $\begin{cases}\max f(x)=(x-3)^2\\ 1\leqslant x\leqslant 5\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\min f(x)=(x-3)^2\\ 1\leqslant x\leqslant 5\end{cases}$

分析 本题考查了 $K-T$ 条件及其解法。

解 (1)等同于

$$\begin{cases}\min f(x)=-(x-3)^2\\ g_1(X)=\quad X-1\geqslant 0\\ g_2(X)=-X+5\geqslant 0\end{cases}$$

写出目标函数和约束函数的梯度

$\nabla f(X)=-2(x-3)$，　$\nabla g_1(X)=1$，　$\nabla g_2(X)=-1$

对第一个和第二个约束条件分别引入广义拉格朗日乘子 γ_1^*,γ_2^*，得 $K-T$ 点为 X^*，则有：

$$\begin{cases}-2(X^*-3)-\gamma_1^*+\gamma_2^*=0\\ \gamma_1^*(X^*-1)=0\\ \gamma_2^*(5-X^*)=0\\ \gamma_1^*,\gamma_2^*\geqslant 0\end{cases}$$

① 令 $\gamma_1^*\neq 0,\gamma_2^*\neq 0$，无解；

② 令 $\gamma_1^*\neq 0,\gamma_2^*=0$，解之得 $X^*=1,\gamma_1^*=4$ 是 $K-T$ 点，目标函数值 $f(X^*)=-4$；

③ 令 $\gamma_1^*=0,\gamma_2^*\neq 0$，解之得 $X^*=5,\gamma_2^*=4$ 是 $K-T$ 点，$f(X^*)=-4$；

④ 令 $\gamma_1^*=\gamma_2^*=0$，则 $X^*=3$，是 $K-T$ 点，$f(X^*)=0$，但不是最优。

此问题不为凸规划，故极小点 1 和 5 是最优点。

(2)等同于 $\begin{cases}\min f(X)=(x-3)^2\\ g_1(X)=x-1\geqslant 0\\ g_2(X)=5-x\geqslant 0\end{cases}$

$\nabla f(X)=2(x-3)$，　$\nabla g_1(X)=1$，　$\nabla g_2(X)=-1$

引入广义拉格朗日乘子 γ_1^*,γ_2^*，设 $K-T$ 点为 X^*，则有：

$$\begin{cases}2(X^*-3)-\gamma_1^*+\gamma_2^*=0\\ \gamma_1^*(X^*-1)=0\\ \gamma_2^*(5-X^*)=0\end{cases}$$

① 令 $\gamma_1^*\neq 0,\gamma_2^*\neq 0$，无解；

② 令 $\gamma_1^*\neq 0,\gamma_2^*=0$，则 $X^*=1,\gamma_1^*=-4$，不是 $K-T$ 点；

③ 令 $\gamma_1^*=0,\gamma_2^*\neq 0$，则 $X^*=5,\gamma_2^*=-4$，不是 $K-T$ 点；

④ 令 $\gamma_1^*=\gamma_2^*=0$，则 $X^*=3$，为 $K-T$ 点，目标函数值 $f(X^*)=(3-3)^2=0$；

由于该非线性规划问题为凸规划，故 $X^*=3$ 是全局极小点。

○**7.18**　试找出非线性规划问题

$$\begin{cases}\max f(X)=x_1\\(x_1-1)^3+x_2-2\leqslant 0\\(x_1-1)^3-x_2+2\leqslant 0\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

的极大点，然后写出其 Kuhn－Tucker 条件，这个极大点满足 Kuhn－Tucker 条件吗？试加以说明。

解　这个非线性规划的 K－T 条件为：

$$\begin{cases}-1+3\gamma_1^*(x_1^*-1)^2+3\gamma_2^*(x_1^*-1)^2-\gamma_3^*=0\\\gamma_1^*-\gamma_2^*-\gamma_4^*=0\\\gamma_1^*[(x_2^*-2)+(x_1^*-1)^3]=0\\\gamma_2^*[(x_2^*-2)-(x_1^*-3)^3]=0\\\gamma_3^*x_1^*=0\\\gamma_4^*x_2^*=0\\\gamma_1^*,\gamma_2^*,\gamma_3^*,\gamma_4^*\geqslant 0\end{cases}$$

极大点是 $X=(1,2)^{\mathrm{T}}$，但它不是约束条件的正则点。

$\boxed{◎\mathbf{7.19}}$　试解二次规划

$$\begin{cases}\min f(X)=2x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2-6x_1-3x_2\\x_1+x_2\leqslant 3\\4x_1+x_2\leqslant 9\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

分析　二次规划和线性规划有着直接联系，解题时将二次规划转化为线性规划求解。

解　将上述二次规划改写为

$$\begin{cases}\min f(X)=\dfrac{1}{2}(4x_1^2-8x_1x_2+8x_2^2)-6x_1-3x_2\\-x_1-x_2+3\geqslant 0\\-4x_1-x_2+9\geqslant 0\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

可知目标函数为严格凸函数，此外

$c_1=-6$，　$c_2=-3$，　$c_{11}=4$，　$c_{22}=2$

$c_{12}=c_{21}=-4$，　$b_1=3$，　$a_{11}=-1$，　$a_{12}=-1$

$b_2=9$，　$a_{21}=-4$，　$a_{22}=-1$

由于 c_1 和 c_2 小于零，故引入的人工变量 z_1 和 z_2 前面取负号，这样得到线性规划问题如下

$$\begin{cases}\min g(z)=z_1+z_2 \\ -y_3-4y_4+y_1-4x_1+4x_2-z_1=-6 \\ -y_3-y_4+y_2+4x_1-4x_2-z_2=-3 \\ -x_1-x_2-x_3+3=0 \\ -4x_1-x_2-x_4+9=0 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,y_1,y_2,y_3,y_4,z_1,z_2\geqslant 0\end{cases}$$

解此线性规划问题得

$$x_1^*=\frac{39}{20},\quad x_2^*=\frac{21}{20},\quad x_3^*=0,\quad x_4^*=\frac{3}{20},$$

$$z_1^*=0,\quad z_2^*=0,\quad y_3^*=\frac{21}{5},\quad y_4^*=0$$

$$f(X^*)=2\times\left(\frac{39}{20}\right)^2-4\times\frac{39}{20}\times\frac{21}{20}+4\times\left(\frac{21}{20}\right)^2-6\times\frac{39}{20}-3\times\frac{21}{20}=-\frac{441}{40}$$

●7.20 试用可行方向法求解

$$\begin{cases}\min f(X)=2x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-4x_1-6x_2 \\ x_1+\ x_2\leqslant 2 \\ x_1+5x_2\leqslant 5 \\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

分析 本题考查的是的可行方向法。

解 等同于
$$\begin{cases}\min f(X)=2x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-4x_1-6x_2 \\ g_1(X)=\ -(x_1+x_2)+2\geqslant 0 \\ g_2(X)=-(x_1+5x_2)+5\geqslant 0 \\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

取初始可行点

$X^{(0)}=(0,0)^T$, $\quad f(X^{(0)})=0$, $\quad \varepsilon=0.1$

$$\nabla f(X)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x_1-2x_2-4\\ 4x_2-2x_1-6\end{bmatrix}$$

$$\nabla f(X^{(0)})=\begin{bmatrix}4\times 0-2\times 0-4\\ 4\times 0-2\times 0-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\ -6\end{bmatrix}$$

$\nabla g_1(X)=(-1,-1)^T$, $\quad \nabla g_2(X)=(-1,-5)^T$

$g_1(X^{(0)})=2>0$, $\quad g_2(X^{(0)})=5>0$

从而

$$J(X^{(0)})=\varnothing$$

因

$$\|\nabla f(X^{(0)})\|^2=16+36=52>\varepsilon$$

故 $X^{(0)}$ 不是极小点，现取搜索方向

$$D^{(0)}=-\nabla f(X^{(0)})=(4,6)^T$$

则

$$X^{(1)}=X^{(0)}+\lambda D^{(0)}=(4\lambda,6\lambda)^{\mathrm{T}}$$

将其代入约束条件，令

$$g_1(X^{(1)})=0$$

得

$$\lambda=0.2$$

令

$$g(X^{(2)})=0$$

得

$$\lambda=\frac{5}{34}<0.2$$

$$f(X^{(1)})=32\lambda^2+72\lambda^2-48\lambda^2-16\lambda-36\lambda=56\lambda^2-52\lambda$$

由$\dfrac{\mathrm{d}f(X^{(1)})}{\mathrm{d}\lambda}=0$，即

$$56\times 2\lambda-52=0$$

得

$$\lambda=\frac{13}{28}$$

因

$$\lambda<\frac{13}{28}$$

故取

$\lambda_0=\lambda=\dfrac{5}{34}$，　　$X^{(1)}=\left(\dfrac{10}{17},\dfrac{15}{17}\right)^{\mathrm{T}}$

$f(X^{(1)})=-\dfrac{-1\ 860}{289}$，　　$\nabla f(X^{(1)})=\left(-\dfrac{58}{17},-\dfrac{62}{17}\right)^{\mathrm{T}}$

$g_1(X^{(1)})=\dfrac{9}{17}>0$，　　$g_2(X^{(1)})=0$

现构成下述线性规划问题

$$\begin{cases}\min\ \eta\\ -\dfrac{58}{17}d_1-\dfrac{62}{17}d_2\leqslant\eta\\ \quad d_1+5d_2\quad\leqslant\eta\\ -1\leqslant d_1\leqslant 1,-1\leqslant d_2\leqslant 1\end{cases}$$

为便于用单纯形法求解，令

$y_1=d_1+1$，　　$y_2=d_2+1$，　　$y_3=-\eta$

从而有

$$\begin{cases}\min\ (-y_3)\\ \dfrac{58}{17}y_1+\dfrac{62}{17}y_2-y_3\geqslant\dfrac{120}{7}\\ y_1+\ 5y_2+y_3\leqslant 6\\ y_1\qquad\qquad\leqslant 2\\ \qquad y_2\qquad\leqslant 2\\ y_1,y_2,y_3\geqslant 0\end{cases}$$

引入剩余变量 y_4，松弛变量 y_5,y_6 和 y_7 及人工变量 y_8，得线性规划问题

$$\begin{cases}\min\ (-y_3+y_8)\\ \dfrac{58}{17}y_1+\dfrac{62}{17}y_2-y_3-y_4+y_8=\dfrac{120}{7}\\ y_1+\ 2y_2+y_3+y_5=6\\ y_1+y_6=2\\ y_2+y_7=2\\ y_j\geqslant 0\quad(j=1,2,\cdots 8)\end{cases}$$

得最优解

$$D^{(1)}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1-1\\y_2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{11}{14}\\[2mm]\dfrac{30}{7}\end{pmatrix}$$

由此

$$X^{(2)}=X^{(1)}+\lambda D^{(1)}=\left(\frac{10}{17},\frac{15}{17}\right)^{\mathrm T}+\lambda\left(\frac{11}{14},\frac{30}{7}\right)^{\mathrm T}$$

令

$$\frac{\mathrm{d}f(X^{(2)})}{\mathrm{d}\lambda}=0$$

得

$$\lambda=\frac{3}{71}$$

继续循环以上步骤可得。

小结 可行方向法的定义可见课本式(7-21)。

◎7.21 试用 SUMT 外点法求解

$$\begin{cases}\min\ f(X)=x_1^2+x_2^2\\ x_2=1\end{cases}$$

并求出当罚因子等于 1 和 10 时的近似解。

分析 使用课本中式(7—30)构造惩罚函数。

解 构造惩罚函数

$$P(x,M)=x_1^2+x_2^2+M\{\min\ (0,x_2-1)\}^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}=2x_1\ \frac{\partial P}{\partial x_2}=2x_2+2M\{\min\ (0,x_2-1)\}$$

由

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}=\frac{\partial P}{\partial x_2}=0$$

得最优解为

$$X^*=(0,1)^{\mathrm{T}}$$

当 $M=1$ 时，$X=\left(0,\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$

当 $M=10$ 时，$X=\left(0,\frac{10}{11}\right)^{\mathrm{T}}$

○**7.22**　试用 SUMT 外点法求解

$$\begin{cases}\max f(X)=x_1\\(x_2-2)+(x_1-1)^3\leqslant 0\\(x_1-1)^3-(x_2-2)\leqslant 0\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解　构造惩罚函数

$P(x,M)=x_1+M\{[\min(0,(x_2-2)+(x_1-1)^3)]^2+\min(0,(x_1-1)^3-(x_2-2))]^2\}$

$\frac{\partial P}{\partial x_1}=1+2M[\min(0,((x_2-2)+(x_1-1)^3)\cdot(3(x_1-1)^2))]+2M[\min(0,((x_1-1)^3-(x_2-2))\cdot(3(x_1-1)^2)]=0$

$\frac{\partial P}{\partial x_2}=2M[\min(0,(x_2-2)+(x_1-1)^3)+2M(\min(0,-(x_1-1)^3-(x_2-2)))]$

解得最优解为

$$X^*=(1,2)^{\mathrm{T}}$$

◎**7.23**　试用 SUMT 内点法求解 $\begin{cases}\min f(x)=(x+1)^2\\x\geqslant 0\end{cases}$

分析　使用课本中式(7-32)构造障碍函数。

解　构造障碍函数

$$\overline{P}(x,\gamma)=(x+1)^2+\frac{\gamma}{x}$$

由

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial x}=2(x+1)-\frac{\gamma}{x^2}=0$$

即

$$2x^2(x+1)=\gamma$$

当 $\gamma\to 0$ 时，则 $x\to 0$ 或 $x\to -1$（舍去）

故最优解为 $X^*=0, f(x^*)=(0+1)^2=1$。

○**7.24**　试用 SUMT 内点法求解

$$\begin{cases}\min f(x)=x\\0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

解　构造障碍函数

$$\overline{P}(X,\gamma)=x+\frac{\gamma}{x}+\frac{\gamma}{1-x}$$

$$\frac{\partial \overline{P}(X,\gamma)}{\partial X}=1-\frac{\gamma}{x^2}+\frac{\gamma}{(1-x)^2}=0$$

得最优解 $X^*=0, f(x^*)=0$。

第八章

动态规划的基本方法

内容提要

一、动态规划基本概念

1.动态规划问题

动态规划是求多阶段决策问题最优解的一种数学方法，是一种解决问题的思路，而不是一种算法。这一点与线性规划不同。因此，在应用动态规划方法求解多阶段决策问题时，要对具体问题进行具体分析。

2.分类

根据多阶段决策过程的时间参数是离散的还是连续的，动态规划模型可以分为离散型动态规划模型和连续型动态规划模型；根据决策过程是确定性的还是随机性的，动态规划模型又可以分为确定性动态规划模型和随机性动态规划模型。

3.相关的概念

(1)阶段

把所给问题的过程，恰当地分为若干个相互联系的阶段，以便能按一定的次序去求解。描述阶段的变量称为阶段变量，常用 k 表示。阶段的划分，一般是根据时间和空间的自然特征来划分，但要便于把问题的过程转化为多阶段决策的过程。

(2)状态

状态表示每个阶段开始所处的自然状况或客观条件。它描述了研究问题过程的状况，又称不可控因素。通常一个阶段有若干个状态，第一个阶段有一个状态就是点 A。第二阶段有两个状态，即点集合$\{B_1,B_2\}$。一般第 k 阶段的状态是第 k 阶段所有始点的集合。

描述过程的状态的变量称为状态变量。它可用一个数、一组数或一向量(多维情形)来描述。常用 S_k 表示第 k 阶段的状态变量。

(3)决策

决策表示当过程处于某一阶段的某个状态时，可以作出不同的决定(或选择)，从而确定下一阶段的状态。这种决定称为决策，在最优控制中也称为控制。描述决策的变量，称为决策变量，它可用一个数，一组数或一向量来描述。常用 $u_k(s_k)$ 表示第 k 阶段当状态处于 s_k 时的决策变量。常用 $D_k(s_k)$ 表示第 k 阶段从状态 s_k 出发的允许决策集合。

(4)策略

策略是一个按顺序排列的决策组成的集合。由过程的第 k 阶段开始到终止状态为止的过程，称为问题的后部子过程(或称为 k 子过程)。由每段的决策按顺序排列组成的决策函数序列 $\{u_k(s_k),\cdots,u_n(s_n)\}$，称为 k 子过程策略，简称子策略，记为 $P_{k,n}(s_k)$，即

$$P_{k,n}(s_k)=\{u_k(s_k),u_{k+1}(s_{k+1}),\cdots,u_n(s_n)\}$$

当 $k=1$ 时，此决策函数序列称为全过程的一个策略，简称为策略记为 $P_{1,n}(s_1)$，即

$$P_{1,n}(s_1)=\{u_1(s_1),u_2(s_2),\cdots,u_n(s_n)\}$$

在实际问题中，可供选择的策略有一定的范围，此范围称为允许策略集合，用 P 表示。

(5)状态转移方程

① 逆序递推的基本方程

$$f_k(s_k)=\underset{u_k\in D_k(s_k)}{\text{opt}}\{v_k(s_k,u_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\}$$
$$(k=n,n-1,\cdots,2,1),$$

边界条件为 $f_{n+1}(s_{n+1})=0$，式中，$s_{k+1}=T_k(s_k,u_k)$。

其求解过程，根据边界条件从 $k=n$ 开始，由后向前逆推，可逐步求得各段的最优决策和相应的最优值，当最后求出 $f_1(s_1)$ 时，便得到整个问题的最优解，其各阶段和各变量之间的关系如图 8－1 所示。

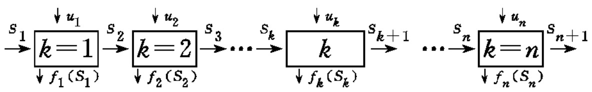

图 8－1

② 顺序递推的基本方程

$$f_k(s_{k+1})=\underset{u_k\in D_k^r(S_{k+1})}{\text{opt}}\{u_k(s_{k+1},u_k)+f_{k-1}(s_k)\}$$
$$(k=1,2,\cdots,n),$$

边界条件为 $f_0(s_1)=0$；式中 $s_k=T_k^r(s_{k+1},u_k)$，即状态转移是由 s_{k+1},u_k 去确定 s_k。

其求解过程，根据边界条件从 $k=1$ 开始，由前向后顺推，可逐步求得各段的最优决策和相应的最优值，当最后求得 $f_n(s_{n+1})$ 时，便得到整个问题的最优解。其各阶段和各变量之间的关系如图 8－2 所示。

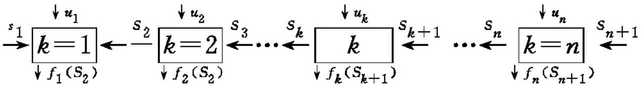

图 8－2

一般地说，当过程的始点给定时，用逆序递推比较方便；而当过程的终点给定时，用顺序递推比较方便。

(6)指标函数

指标函数是用来衡量所实现过程优劣的一种数量指标，它是定义在全过程和所有后部子过程上的确定的数量函数。作为动态规划模型的指标函数，应具有可分离性。

(7)最优值函数

指标函数的最优值称为最优值函数，记为 $f_k(s_k)$，它表示从第 k 阶段的状态 s_k 开始一直到过程的终止状态为止的过程，采取最优策略所得到的指标函数值。即

$$f_k(s_k)=\underset{(v_k,\cdots,u_n)}{\text{opt}} V_{k,n}(s_k,u_k,\cdots,s_{n+1})$$

其中“opt”是最优化的意思，根据题意可取 min 或 max。

(8)动态规划的最优性原理

作为整个过程的最优策略具有这样的性质：无论过去的状态和决策如何，对前面的决策所形的状态而言，后面的决策必须构成最优策略。也就是说，一个最优策略的子策略总是最优的。

二、动态规划的求解方法

1. 基本方程

动态规划的基本方程：k 阶段与 $k+1$ 阶段之间的递推关系

$$\begin{cases} f_k(s_k)=\min\limits_{u_k\in D_k(s_k)}\{d_k(s_k,u_k(s_k))+f_{k+1}(u_k(s_k))\}(k=6,5,4,3,2,1) \\ f_7(s_7)=0(\text{或写成 } f_6(s_6)=d_6(s_6,G)) \end{cases}$$

2. 基本思想

① 动态规划方法的关键在于正确写出基本的递推关系式和恰当的边界条件(简言之为基本方程)，要做到这一点，必须先将问题的过程分成几个相互联系的阶段，恰当地选取状态变量和决策变量及定义最优值函数，从而把一个大问题化成一组同类型的子问题，然后逐个求解，最后一个子问题所得的最优解，就是整个问题的最优解。

② 在多阶段决策过程中，动态规划方法是既把当前一段和未来各段分开，又把当前效益和未来效益结合起来考虑的一种最优化方法。因此，每段决策的选取是从全局来考虑的，与该段的最优选择答案一般是不同的。

③ 在求整个问题的最优策略时，由于初始状态是已知的，而每段的决策都是该段状态的函数，故最优策略所经过的各段状态便可逐次变换得到，从而确定了最优路线。

如初始状态 A 已知，则按下面箭头所指的方向逐次变换有

(已知)

从而可得最优策略为 $\{u_1(A),u_2(B_1),\cdots,u_6(F_2)\}$，相应的最短路线为 $A\to B_1\to C_2\to D_1\to E_2\to F_2\to G$。

典型例题与解题技巧

【例 1】 写出下面问题的动态规划的基本方程：

$$\max z=\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b\\ 0\leqslant x_i\leqslant c_i, i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

解题分析 熟练掌握动态规划的相关概念，会写动态规划的状态转移方程。

解题过程 基本方程

$$\begin{cases}f_{n+1}(S_{n+1})=0\\ f_k(S_k)=\max\limits_{x_k\in D_k(S_k)}\{g_k(x_k)+f_{k+1}(S_{k+1})\}\end{cases}$$

$$k=n,n-1,\cdots,1$$

允许决策集合

$$D_k(S_k)=\left\{x_k\,|\,0\leqslant x_k\leqslant \min\left(c_k,\frac{S_k}{a_k}\right)\right\}$$

可得状态集合

$$S_k=\{S_k\,|\,0\leqslant S_k\leqslant b\}\qquad 1<k\leqslant n$$

$$S_1=b$$

状态转移函数

$$S_{k+1}=S_k-a_k x_k$$

【例 2】 某商店自生产厂家买进一批货物，由厂家至商店的可供选择的路线与运输成本如图 8－3 中所示，试求运费最低的路线。

图 8－3

解题分析 这是一道与实际相结合的题目，对综合能力要求较高。

解题过程 用 $f_k(s_k)$ 表示第 k 阶段点 S_k 到终点 E 的运输成本。

$$d_k(s_k,u_k)=V_k(s_k,u_k)$$

表示在第 k 阶段由点 s_k 到点 $s_{k+1}=u_k(s_k)$ 的运输成本。

(1)当 $k=4$ 时，$f_4(D_1)=20$，$f_4(D_2)=40$

(2)当 $k=3$ 时，

$$f_3(C_1)=\min\begin{Bmatrix}d_3(C_1,D_1)+f_4(D_1)\\ d_3(C_1,D_2)+f_4(D_2)\end{Bmatrix}=30$$

相应的决策为 $u_3(C_1)=D_1$；

$$f_3(C_2)=\min\begin{Bmatrix}d_3(C_2,D_1)+f_4(D_1)\\d_3(C_2,D_2)+f_4(D_2)\end{Bmatrix}=60$$

相应的决策为 $u_3(C_2)=D_2$；

$$f_3(C_3)=\min\begin{Bmatrix}d_3(C_3,D_1)+f_4(D_1)\\d_3(C_3,D_2)+f_4(D_2)\end{Bmatrix}=60$$

相应的决策为 $u_3(C_3)=D_1$。

当 $k=2$ 时

$$f_2(B_1)=\min\begin{Bmatrix}d_2(B_1,C_1)+f_3(C_1)\\d_2(B_1,C_2)+f_3(C_2)\\d_2(B_1,C_3)+f_3(C_3)\end{Bmatrix}=110$$

相应的决策为 $u_2(B_1)=C_1,u_2(B_1)=C_2$；

$$f_2(B_2)=\min\begin{Bmatrix}d_2(B_2,C_1)+f_3(C_1)\\d_2(B_2,C_2)+f_3(C_2)\\d_2(B_2,C_3)+f_3(C_3)\end{Bmatrix}=70$$

相应的决策为 $u_2(B_2)=C_1$；

$$f_2(B_3)=\min\begin{Bmatrix}d_2(B_3,C_1)+f_3(C_1)\\d_2(B_3,C_2)+f_3(C_2)\\d_3(B_3,C_3)+f_3(C_3)\end{Bmatrix}=80$$

相应的决策为 $u_2(B_3)=C_1,u_2(B_3)=C_2$。

当 $k=1$ 时

$$f_1(A)=\min\begin{Bmatrix}d_1(A,B_1)+f_2(B_1)\\d_1(A,B_2)+f_2(B_2)\\d_1(A,B_3)+f_2(B_3)\end{Bmatrix}=110$$

相应的决策为 $u_1(A)=B_2,u_1(A)=B_3$。

采用顺递的方法可以得到最优的决策序列，有三种

(1)由 $u_1(A)=B_2,u_2(B_2)=C_1,u_3(C_1)=D_1,u_4(D_1)=E$ 得到最优决策序列为 $A\to B_2\to C_1\to D_1\to E$。

(2)由 $u_1(A)=B_3,u_2(B_3)=C_1,u_3(C_1)=D_1,u_4(D_1)=E$ 可得最优决策序列为 $A\to B_3\to C_1\to D_1\to E$。

(3)由 $u_1(A)=B_3,u_2(B_3)=C_2,u_3(C_2)=D_2,u_4(D_2)=E$ 可得最优决策序列为 $A\to B_3\to C_2\to D_2\to E$

采用标号法的逆序解法如图 8－4 所示，其中每节点处上方的数表示该点到终点 E 的最低运费。用直线连接的点表示该点到终点的最短路线。未用直线连接的点说明它不是该点到终点的最短路线，故这些支路均被舍去了。

图 8－4

由上图直接可以看出从 A 到 E 有三条，即三个最优决策序列：

$A \to B_2 \to C_1 \to D_1 \to E$， $A \to B_3 \to C_1 \to D_1 \to E$， $A \to B_3 \to C_2 \to D_2 \to E$

历年考研真题评析

【题 1】 (2006 年清华大学)某奶牛站希望通过投资来扩大牛群数，开始只有 5000 元资金。现已知可购入 A 或 B 两个品种的奶牛，对 A 种牛每投入 1000 元，当年及以后每年可获得 500 元和 2 头小牛；对 B 种牛每投入 1000 元，当年及以后每年可获得 200 元和 3 头小牛。

问(1)在今后四年内应如何分配投资使奶牛群最大；

(2)到第四年奶牛站将有多少头奶牛？

解题分析 建立动态规划模型，进行求解。

解题过程 状态 s_n 为阶段 n 可利用资金；

决策 d_n 为向 A 种牛投入资金数，$s_n - d_n$ 为 B 种牛的资金；

转移函数 $s_{n-1} = 0.2s_n + 0.3dn$；

递推函数 $f_n(s_n) = r_n(d_n) + f_{n-1}^*(s_{n-1})$；

在阶段 n 出生的小牛数 $r_n = \frac{n}{1000}(3s_n - d_n)$。

由 $s_4 = 5000$ 可得第 4 年末牧场主拥有牛的头数为 70 头。

【题 2】 (2005 年上海交通大学)有 800 万元，分别用于 3 个项目的投资，按规定每个项目最少投资 200 万，最多投资 400 万，各项目得到不同投资时的预期效益如表 8－1 所示，要求确定使投资效益最大的各项目投资数。

表 8－1

项目 / 预期效益 / 投资额	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
200 万元	C_{21}	C_{22}	C_{23}
300 万元	C_{31}	C_{32}	C_{33}
400 万元	C_{41}	C_{42}	C_{43}

要求：建立动态规划模型，列出递推关系式(基本方程)，并说明方程中各符号的意义。

解题分析 熟悉动态规划建模步骤，会列递推方程。

解题过程 动态规划递推关系式为

$$f_k(x_k) = \max_{200 \leqslant u_k \leqslant 400} \{C_{ik}(u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\}$$

其中　$x_{k+1}=x_k-u_k$

x_k——状态变量，为每阶段初剩余投资额；

u_k——k 阶段实际投资额；

$C_{ik}(u_k)$——k 阶段投资为 u_k 时的预期效益。

课后习题全解

○8.1　机器负荷分配问题。某种机器可以在高低两种不同的负荷下进行生产。在高负荷下进行生产时，产品的年产量 g 和投入生产的机器数量 u_1 的关系为：$g=g(u_1)$，这时，机器的年完好率为 a，即如果年初完好机器的数量为 u，到年终时完好的机器就为 au，$0<a<1$。在低负荷下进行生产时，产品的年产量 h 和投入生产的机器数量 u_2 的关系为：$h=h(u_2)$，相应的机器年完好率为 b，$0<b<1$。假定开始生产时完好的机器数量为 s_1，要求制定一个五年计划，在每年开始时，决定如何重新分配完好的机器在两种不同的负荷下生产的数量，使在五年内产品的总产量达到最高。

试分析本问题中：(1)阶段的划分；(2)状态变量和它的取值范围；(3)决策变量和它的允许决策集合；(4)状态转移方程；(5)指标函数和量优值函数。

解　(1)划分为五个阶段，阶段变量 $k=1,2,3,4,5$；

(2)状态变量 s_k 表示第 k 年初完好的机器数量取值范围 $a^{k-1}s_1\leqslant s_k\leqslant b^{k-1}s_1$；

(3)决策变量 $u_k(s_k)$ 表示第 k 年度中分配高负荷下生产的机器数量，它的允许决策集合 $D_k(s_k)=\{u_k\,|\,0\leqslant u_k\leqslant s_k\}$；

(4)状态转移方程：$s_{k+1}=au_k+b(s_k-u_k)$；

(5)指标函数 $V_{1,5}=\sum\limits_{k=1}^{5}(g(u_k)+h(s_k-u_k))$；最优值函数 $f_k(s_k)$ 表示 s_k 从第 k 年开始到第 5 年结束的总产量最大值，$f_k(s_k)=\max\limits_{0\leqslant u_k\leqslant s_k}\{g(u_k)+h(s_k-u_k)+f_{k+1}[au_k+b(s_k-u_k)]\}$，$k=5,4,3,2,1$；$f_6(s_6)=0$。

○8.2　设某工厂自国外进口一部精密机器，由机器制造厂至出口港有三个港口可供选择，而进口港又有三个可供选择，进口后可经由两个城市到达目的地，其间的运输成本如下图中所标的数字，试求运费最低的路线。

机器制造厂→出口港→进口港→城市→某工厂

图 8－5

解 设阶段变量 $k=1,2,3,4$ 依次表示 4 个阶段选路的过程，第 1 阶段从 A 出发到 B_1、B_2 或 B_3，第 2 阶段从 B_1、B_2 或 B_3 出发到 C_1、C_2 或 C_3，第 3 阶段从 C_1、C_2 或 C_3 出发到 D_1 或 D_2，第 4 阶段从 D_1 或 D_2 出发到 E；

状态变量 s_k 表示 k 阶段初可能的位置；

决策 x_k 表示 k 阶段初可能选择的路线；

阶段指标 v_k 表示 k 阶段与所选择的路段相应的路长；

指标函数 $v_{k4}=\sum\limits_{i=k}^{4} v_i$ 表示 k 至 4 阶段的总路长；

递推公式：$f_k=\min\{v_k+f_{k+1}\}, k=4,3,2,1; f_5=0$。

表 8－2

k	s_k	x_k	v_k	$v_{kn}=v_k+f_{k+1}$	f_k	$x_k{}^*$
4	D_1	E	30	30＋0	30	E
	D_2	E	40	40＋0	40	E
3	C_1	D_1	10	10＋30	40	D_1
		D_2	40	40＋40		
	C_2	D_1	60	60＋30	70	D_2
		D_2	30	30＋40		
	C_3	D_1	30	30＋30	0	D_1
		D_2	30	30＋40		
2	B_1	C_1	70	70＋40	110	C_1、C_2
		C_2	40	40＋70		
		C_3	60	60＋60		
	B_2	C_1	30	30＋40	70	C_1
		C_2	20	20＋70		
		C_3	40	40＋60		
	B_3	C_1	40	40＋40	80	C_1、C_2
		C_2	10	10＋70		
		C_3	50	50＋60		
1	A	B_1	20	20＋110	110	B_2、B_3
		B_2	40	40＋70		
		B_3	30	30＋80		

由表中计算结果可以看出，运费最低的路线为：$AB_2C_1D_1E$ 或 $AB_3C_1D_1E$ 或 $AB_3C_2D_2E$。最低运费为 110。

◎8.3 计算从 A 到 B、C 和 D 的最短路线. 已知各段路线的长度如图 8—6 所示。

图 8—6

分析 本题是最短路线问题,使用动态规划逆序解法求解。

解 求从 A 到 B、C 和 D 的最短路线等价于求从 B、C 和 D 到 A 的最短路线。

设阶段变量 $k=1,2,3,4$,依次表示 4 个阶段选路的过程,第 1 阶段从 B、C 或 D 出发到 B_3、C_3 或 D_3,第 2 阶段从 B_3、C_3 或 D_3 出发到 B_2、C_2 或 D_2,第 3 阶段从 B_2、C_2 或 D_2 出发到 B_1、C_1 或 D_1,第 4 阶段从 B_1、C_1 或 D_1 出发到 A;

状态变量 s_k 表示 k 阶段初可能处的位置;

决策 x_k 表示 k 阶段初可能选择的路线;

阶段指标 v_k 表示 k 阶段与所选择的路段相应的路长;

指标函数 $v_{k4}=\sum\limits_{i=k}^{4} v_i$ 表示 k 至 4 阶段的总路长;

递推公式:$f_k=\min\{v_k+f_{k+1}\}$,$k=4,3,2,1$;$f_5=0$。

表 8—3

k	s_k	x_k	v_k	$v_{kn}=v_k+f_{k+1}$	f_k	x_k^*
4	B_1	A	3	3+0	3	A
	C_1	A	8	8+0	8	A
	D_1	A	7	7+0	7	A
3	B_2	B_1	4	4+3	7	B_1
		C_1	2	2+8		
	C_2	B_1	3	3+3	6	B_1
		C_1	8	8+8		
		D_1	7	7+7		
	D_2	C_1	4	4+8	12	C_1
		D_1	6	6+7		

k	s_k	x_k	v_k	$v_{kn}=v_k+f_{k+1}$	f_k	$x_k{}^*$
2	B_3	B_2	10	10+7	17	B_2
		C_2	13	13+6		
	C_3	B_2	12	12+7	11	C_2
		C_2	5	5+6		
		D_2	6	6+12		
	D_3	C_2	7	7+6	13	C_2
		D_2	8	8+12		
1	B	B_3	9	9+17	16	C_3
		C_3	5	5+11		
	C	B_3	10	10+17	21	C_3、D_3
		C_3	10	10+11		
		D_3	8	8+13		
	D	C_3	15	15+11	20	D_3
		D_3	7	7+13		

由表中计算结果可以看出：从 B 到 A 的最短路线为 $BC_3C_2B_1A$，最短距离为 16；从 C 到 A 的最短路线为 $CC_3C_2B_1A$ 或 $CD_3C_2B_1A$，最短距离为 21；从 D 到 A 的最短路线为 $DD_3C_2B_1A$，最短距离为 20。

从而，从 A 到 B 的最短路线为 $AB_1C_2C_3B$，最短距离为 16；从 A 到 C 的最短路线为 $AB_1C_2C_3C$ 或 $AB_1C_2D_3C$，最短距离为 21；从 A 到 D 的最短路线为 $AB_1C_2D_3D$，最短距离为 20。

◎8.4 写出下列问题的动态规划的基本方程。

(1) $\max z=\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x_i)$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_i=b,(b>0)\\ x_i\geqslant 0,(i=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

(2) $\min z=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i^2$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\geqslant b,(a_i>0)\\ x_i\geqslant 0,(i=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

分析 题(1)使用逆推解法求解，题(2)使用顺推解法求解。

解 (1)以 $f_k(s_k)$ 表示第 k 阶段到第 n 阶段状态 $s_k=\sum_{i=1}^{n}x_k$ 时，使 $z=\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(x_i)$ 最优的值，则动态规划的基本方程为：

$$f_k(s_k)=\max_{0\leqslant x_i\leqslant s_k}\{\Phi_k(s_k)+f_{k+1}(s_k-x_k)\}\qquad(k=n,n-1\cdots,1)$$

$$f_n(s_n)=\max_{x_n=s_n}\Phi_n(x_n)\text{或 }f_{n+1}(s_{n+1})=0$$

状态转移方程为

$$s_{k+1}=s_k-x_k,\qquad s_1=b$$

(2)设状态变量为 $s_k(k=1,\cdots,n)$,并记

$$s_k=\sum_{i=k}^{n}a_ix_i,\qquad s_1\geqslant b$$

状态转移方程为 $S_{k+1}=S_k-a_kx_k$

决策变量为 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$

最优值函数 $f_k(s_k)$表示在 s_k 状态下从第 k 至第 n 阶段的指标函数的最小值,有

$$f_k(s_k)=\min_{0\leqslant x_k\leqslant s_ka_k}\{C_kx_k^2+f_{k+1}(s_k-a_kx_k)\}$$

$$f_{n+1}(s_n-a_nx_n)=0$$

◎8.5 用递推方法求解下列问题

(1) $\max\ z=4x_1+9x_2+2x_3^2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3=10\\ x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3\end{cases}$$

(2) $\max\ z=4x_1+9x_2+2x_3^2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+4x_2+3x_3\leqslant 10\\ x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3\end{cases}$$

(3) $\max\ z=x_1\cdots x_n$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_i=c\qquad (c>0)\\ x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

(4) $\min\ z=3x_1^2-5x_1+3x_2^2-3x_2+2x_3^2-7x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2+2x_3\geqslant 16\\ x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3\end{cases}$$

(5) $\max\ z=3x_1^3-4x_1+2x_2^2-5x_2+2x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases}4x_1+2x_2+3x_3\leqslant 18\\ x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3\end{cases}$$

(6) $\min\ z=\sum_{i=1}^{n}x_i^p\qquad (p>1)$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_i=c\qquad (c>0)\\ x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

分析　当初始状态给定时,使用逆推解法;当终止状态给定时,使用顺推解法。

解　(1)由题意,将问题划分为三个阶段,设状态变量为 s_0,s_1,s_2,s_3,并记 $s_3=10$,x_1,x_2,x_3 为各阶段的决策变量,各阶段指标函数按加法方式结合。

$f_k(s_k)$表示第 k 阶段结束状态为 s_k,第 1 至第 k 阶段的最大值则由约束条件可知

$$x_1=s_1,\qquad s_1+x_2=s_2,\qquad s_2+x_3s_3=10$$

即

$$s_1=x_1,\qquad 0\leqslant x_2\leqslant s_2,\qquad 0\leqslant x_3\leqslant s_3$$

由顺推法

$$f_1(s_1)=\max_{x_1=s_1}(4x_1)=4s_1$$

最优解：$x_1^*=s_1$

$$f_2(s_2)=\max_{0\leqslant x_2\leqslant s_2}[9x_2+f_1(s_1)]=9s_2$$

最优解：$x_2^*=s_2$

$$f_3(s_3)=\max_{0\leqslant x_3\leqslant 10}[2x_3^2+f_2(s_2)]=200$$

最优解：$x_3{}^*=10$

$$x_2^*=s_2=10-x_3^*=0$$

$$x_1{}^*=s_1=s_2-x_2^*=0-0=0$$

从而得到最优解

$$x_1^*=0,\qquad x_2^*=0,\qquad x_3^*=10$$

最优值为：200

(2)将该问题分为三个阶段，状态变量为 s_0,s_1,s_2,s_3，且 $s_3\leqslant 10$

令 x_1,x_2,x_3 为各阶段的决策变量，各阶段指标函数按加法方式结合。最优值函数 $f_k(s_k)$ 表示第 k 阶段结束状态为 s_k，从第 1 至第 k 阶段的最大值，则

$$2x_1=s_1,\qquad s_1+4x_2=s_2,\qquad s_2+3x_3=s_3\leqslant 10$$

解得

$$x_1=\frac{s_1}{2},\quad 0\leqslant x_2\leqslant\frac{s_2}{4},\quad 0\leqslant x_3\leqslant\frac{s_3}{3}\quad (\text{即}\quad 0\leqslant x_3\leqslant\frac{10}{3})$$

用递推法得

$$f_1(s_1)=\max_{x_1=\frac{s_1}{2}}(4x_1)=2s_1$$

最优解为 $x_1^*=\dfrac{s_1}{2}$

$$f_2(s_2)=\max_{0\leqslant x_2\leqslant\frac{s_2}{4}}(f_1(s_1)+4x_2)=\frac{9}{4}s_2$$

最优解为 $x_2^*=\dfrac{s_2}{4}$

$$f_3(s_3)=\max_{0\leqslant x_3\leqslant\frac{s_3}{3}}[2x_3^2+f_2(s_2)]=\max_{0\leqslant x_3\leqslant\frac{s_3}{3}}\left[2x_3^2-\frac{27}{4}x_3+\frac{9}{4}s_3\right]$$

由 $0\leqslant s_3\leqslant 10$ 以及二次函数的性质，在 $x_3^*=0,s_3=10$ 处

$$f_3(s_3)=\frac{90}{4}$$

$$x_2^*=\frac{s_2}{4}=\frac{1}{4}(s_3-3x_2^*)=\frac{1}{4}(10-0)=\frac{10}{4}$$

$$x_1^*=\frac{s_1}{2}=\frac{1}{2}(s_2-4x_2^*)=0$$

故最优解为

$$x_1^*=0,\qquad x_2^*=\frac{10}{4},\qquad x_3^*=0$$

$$\max z=4x_1^*+9x_2^*+2(x_3^*)^2=9\times\frac{10}{4}=\frac{90}{4}$$

(3)将该问题分为 n 个阶段,设置状态变量为 $s_0,s_1,\cdots,s_n,s_n=c$

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为各阶段的决策变量.指标函数按乘法方式结合。最优值函数 $f_k(s_k)$表示第 k 阶段结束状态 s_k 从第 1 至第 k 阶段的最大值。

$$x_1=s_1,\qquad s_1+x_2=s_2,\qquad s_2+x_3=s_3,\qquad \cdots,s_{n-1}+x_n=s_n=c$$

则

$$x_1=s_1,0\leqslant x_2\leqslant s_2,0\leqslant x_3\leqslant s_3,\cdots,0\leqslant x_n\leqslant s_n$$

用递推法可得

$$f_1(s_1)=\max_{x_1=s_1}(x_1)=s_1$$

最优解为 $x_1^*=s_1$

$$f_2(s_2)=\max_{0\leqslant x_2\leqslant s_2}[x_2f_1(s_1)]=\frac{s_2^2}{4}\qquad(\text{由二次函数的性质})$$

最优解为 $x_2^*=\frac{s_2}{2}$

$$f_3(s_3)=\max_{0\leqslant x_3\leqslant s_3}[x_3f_2(s_2)]=\max_{0\leqslant x_2\leqslant s_2}\left[x_3\times\frac{s_2^2}{4}\right]$$

$$=\max_{0\leqslant x_3\leqslant s_3}\left[x_3\times\frac{(s_3-x_3)^2}{4}\right]$$

设对 x_3 的导数为 0,即

$$\frac{1}{4}[(s_3-x_3)^2-2x_3(s_3-x_3)]=0$$

在 $x_3^*=\frac{s_3}{27}$处 $f_3(s_3)=\frac{s_3^3}{27}=\left(\frac{s_3}{3}\right)^3$

由以上可类推得 $f_k(s_k)=\left(\frac{s_k}{k}\right)^k$

则

$$f_{k+1}(s_{k+1})=\max_{0\leqslant x_{k+1}\leqslant s_{k+1}}[x_{k+1}f_k(s_k)]=\max_{0\leqslant x_{k+1}\leqslant s_{k+1}}\left[x_{k+1}\times\left(\frac{s_k}{k}\right)^k\right]$$

$$=\max_{0\leqslant x_{k+1}\leqslant s_{k+1}}\left[x_{k+1}\left(\frac{s_{k+1}-x_{k+1}}{k}\right)^k\right]$$

在 $x_{k+1}^*=\frac{s_{k+1}}{k+1}$处 $f_{k+1}(s_{k+1})=\left(\frac{s_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}$

由数学归纳可得 $f_n(s_n)=\left(\frac{s_n}{n}\right)^n=\left(\frac{c}{n}\right)^n$

最优解为 $x_n^*=\frac{c}{n}$,则

$$s_{n-1}=s_n-x_n^*=c-\frac{c}{n}=\frac{n-1}{n}C$$

$$x_{n-1}^*=\frac{s_{n-1}}{n-1}=\frac{n-1}{n-1}\times\frac{c}{n}=\frac{c}{n}$$

依此推得

$$x_{n-2}^{*}=\frac{c}{n},\cdots,x_{n}^{*}=\frac{c}{n}$$

(4)原问题变形为

$$\min z=(3x_1^2-5x_1)+(3x_2^2-3x_2)+(2x_3^2-7x_3)$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+3x_2+2x_3\geqslant 16\\ x_i\geqslant 0, i=1,2,3\end{cases}$$

$$\min z=3\left(x_1-\frac{5}{6}\right)^2+3\left(x_2-\frac{1}{2}\right)^1+2\left(x_3-\frac{7}{4}\right)^2-\frac{215}{24}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2\left(x_1-\frac{5}{6}\right)+3\left(x_2-\frac{1}{2}\right)+2\left(x_3-\frac{7}{4}\right)\geqslant\frac{28}{3}\\ x_i\geqslant 0, i=1,2,3\end{cases}$$

设

$$y_1=x_1-\frac{5}{6},\qquad y_2=x_2-\frac{1}{2},\qquad y_3=x_3-\frac{7}{4}$$

则原问题等价为

$$\min z=3y_1^2+3y_2^2+2y_3^2-\frac{215}{24}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2\,y_1+3\,y_2+2\,y_3\geqslant\frac{28}{3}\\ y_1+\frac{5}{6}\geqslant 0\\ y_2+\frac{1}{2}\geqslant 0\\ y_3+\frac{7}{4}\geqslant 0\end{cases}$$

即

$$\min z=3y_1^2+3y_2^2+2y_3^2-\frac{215}{24}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2\,y_1+3\,y_2+2\,y_3\geqslant\frac{28}{3}\\ y_1\geqslant-\frac{5}{6}\\ y_2\geqslant-\frac{1}{2}\\ y_3\geqslant-\frac{7}{4}\end{cases}$$

对上述问题分为三个阶段，状态变量设为 s_0, s_1, s_2, s_3 且 $s_3\geqslant\frac{28}{3}$

y_1, y_2, y_3 为各阶段的决策变量。各阶段指标函数按加法方式结合。

最优值函数 $f_k(s_k)$ 表示第 k 阶段结束状态为 s_k，从第 1 至第 k 阶段的最小值

$$2y_1=s_1,\qquad s_1+3y_2=s_2,\qquad s_2+2y_3\leqslant s_3,\qquad s_3\geqslant\frac{28}{3}$$

结合题干中的约束条件,即

$$y_1=\frac{s_1}{2},\qquad -\frac{1}{2}\leqslant y_2\leqslant\frac{s_2}{3},\qquad -\frac{7}{4}\leqslant y_3=\frac{s_3}{2}$$

$$f_1(s_1)=\min_{y_1=\frac{s_1}{2}}(3y_1^2)=\frac{3s_1^2}{4}$$

最优解为 $$y_1^*=\frac{s_1}{2}$$

$$f_2(s_2)=\min_{-\frac{1}{2}\leqslant y_2\leqslant\frac{s_2}{3}}[3y_2^2+f_1(s_1)]=\min_{-\frac{1}{2}\leqslant y_2\leqslant\frac{s_2}{3}}\left[\frac{39}{4}y_2^2+\frac{3s_2^2}{4}-\frac{18s_2}{4}y_2\right]$$

令$\frac{39}{4}y_2^2+\frac{3}{4}s_2^2-\frac{18}{4}s_2y_2$ 对 y_2 求导为 0,即$\frac{39}{2}y_2-\frac{18}{4}s_2=0$

$$\therefore\qquad y_2=\frac{3}{13}s_2$$

故 $f_2(s_2)=\frac{3}{13}s_2^2$,最优解为 $y_2^*=\frac{3}{13}s_2$

$$f_3(s_3)=\min_{-\frac{1}{2}\leqslant y_2\leqslant\frac{s_3}{3}}\left[2y_3^2+\frac{3(s_3-2y_3)^2}{13}\right]$$

由求驻点法可得

$$f_3(s_3)=\frac{3}{19}s_3^2$$

最优解为 $$y_3^*=\frac{3}{19}s_3$$

又

$$\because s_3\geqslant\frac{28}{3}$$

$$\therefore f_3(s_3)\geqslant\frac{3}{19}\times\left(\frac{28}{3}\right)^2$$

而

$$\min z\quad=\min\left\{f_3(s_3)-\frac{215}{24}\right\}=\frac{729}{152}$$

反推得到最优解为

$$x_1^*=\frac{69}{38},\qquad x_2^*=\frac{5}{38},\qquad x_3^*=\frac{245}{76}$$

(5)将问题分为 3 个阶段,状态变量为 $s_0,s_1,s_2,s_3,s_3\leqslant18$。$x_1,x_2,x_3$ 为各阶段的决策变量,各阶段指标函数按加法方式结合。最优值函数 $f_k(s_k)$表示第 k 阶段结束状态为 s_k,第 1 至第 k 阶段的最大值。

$$4x_1=s_1,\qquad s_1+2x_2=s_2,\qquad s_2+3x_3=s_3\leqslant18$$

则

$$x_1=\frac{s_1}{4},\qquad 0\leqslant x_2\leqslant\frac{s_2}{2},\qquad 0\leqslant x_3\leqslant\frac{s_3}{3}$$

$$f_1(s_1)=\max_{x_1=\frac{s_1}{4}}[3x_1^3-4x_1]=\frac{3}{64}s_1^3-s_1$$

最优解 $x_1^* = \frac{s_1}{4}$

$$f_2(s_2) = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant \frac{s_2}{2}} [2x_2^2 - 5x_2 + f_1(s_1)] = \frac{3s_2^3}{64} - s_2$$

最优解为 $x_2^* = 0$

$$f_3(s_3) = \max_{0 \leqslant x_3 \leqslant \frac{s_3}{3}} [2x_3 + f_2(s_2)] = \max_{0 \leqslant x_3 \leqslant \frac{s_3}{3}} \left[2x_3 + \frac{3s_2^3}{64} - s_2\right] = \frac{3}{64}s_3^2 - s_3$$

最优解为 $x_3^* = 0$

$\max z = \max\{f_3(s_3)\}$

$s_2 = s_3 - 3x_3^* = 18 - 0 = 18, s_1 = s_2 - 2x_2^* = 18 - 2 \times 0 = 18,$

$x_1^* = \frac{s_1}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$

最优解为 $x_1^* = \frac{9}{2}, x_2^* = 0, x_3^* = 0$

(6)划分 n 个阶段，状态变量为 $s_0, s_1, \cdots, s_n, s_n = c$。$x_1, \cdots, x_n$ 为各阶段决策变量。其指标函数按加法方式结合。最优值函数 $f_k(s_k)$ 为第 k 阶段结束状态为 s_k，第 1 至第 k 阶段的最小值。

$s_1 = x_1, \quad s_1 + x_2 = s_2, \quad \cdots, \quad s_{n-1} + x_n = s_n = c$

则

$x_1 = s_1, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant s_2, \quad \cdots, \quad 0 \leqslant x_n \leqslant s_n,$

$f_1(s_1) = \min_{x_1 = s_1}(x_1^p) = s_1^p$

最优解为 $x_1^* = s_1$

$$f_2(s_2) = \min_{0 \leqslant x_2 \leqslant s_2} [x_2^p + f_1(s_1)] = 2 \cdot \left(\frac{s_2}{2}\right)^p$$

最优解为 $x_2^* = \frac{s^2}{2}$

依此类推

$$f_n(s_n) = n \cdot \left(\frac{s_n}{n}\right)^p$$

最优解为 $x_n^* = \frac{s_n}{n}$

$$s_{n-1} = s_n - x_n^* = s_n - \frac{s_n}{n} = \frac{n-1}{n}s_n$$

$$x_n^* - 1 = \frac{1}{n-1}s_{n-1} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n}s_n = \frac{1}{n}s_n$$

依此类推

$$x_1^* = \frac{1}{n}s_n$$

而 $x_1^* + \cdots + x_n^* = C$

$\therefore s_n = C$

最优解为 $x_1^* = x_2^* = \cdots = x_n^* = \dfrac{c}{n}$

$$\min z = n \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot c\right)^p = \frac{c^p}{n^{p-1}}$$

8.6 设某人有 400 万元金额，计划在四年内全部用于投资中去。已知在一年内若投资用去 x 万元就能获得 $\sqrt{x}$ 万元的效用。每年没有用掉的金额，连同利息(年利息 10%)可再用于下一年的投资，而每年已打算用于投资的金额不计利息。试制定金额的使用计划，而使四年内获得的总效用最大?

(1)用动态规划方法求解;(2)用拉格朗日乘数法求解;(3)比较两种解法，并说明动态规划方法有哪些优点。

分析　按要求求解后根据两者的过程比较。

解　(1)用动态规划方法解。

设置阶段:按年份分为 4 阶段，则 $k=1,2,3,4$;

状态变量 s_k:第 k 年年初的可供投资的金额;

决策变量 x_k:第 k 年实际用于投资的金额;

状态转移方程:$s_{k+1} = 1.1(s_k - x_k)$;

允许决策集合:$p_k(s_k) = \left\{\dfrac{x_k}{0} \leqslant x_k \leqslant s_k\right\}$;

最优值函数 $f_k(s_k)$:以数量 s_k 可供投资的金额投资于第 k 年至第 4 年末所得到的最大效用。

该问题的逆序关系式为

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \leqslant x_k \leqslant s_k} \{\sqrt{x_k} + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_5(s_5) = 0 \qquad k = 4,3,2,1 \end{cases}$$

当 $k=4$ 时

$$f_4(s_4) = \max_{0 \leqslant x_4 \leqslant s_4} \{\sqrt{x_4}\} = \sqrt{s_4}$$

最优解为 $x_4^* = s_4$

当 $k=3$ 时

$$f_3(s_3) = \max_{0 \leqslant x_3 \leqslant s_3} \{\sqrt{x_3} + f_4(s_4)\}$$

$$= \sqrt{2.1 s_3} \qquad \text{(令关于 } x_3 \text{ 的一阶导数为 0)}$$

相应的最优解为 $x_3^* = \dfrac{1}{2.1} s_3$

当 $k=2$ 时

$$f_2(s_2) = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant s_2} \{\sqrt{x_2} + f_3(s_3)\}$$

$$= \sqrt{3.31 s_2} \qquad \text{(由关于 } x_2 \text{ 的一阶导数为 0 可求得)}$$

相应的最优解为 $x_2^* = \dfrac{1}{3.31} s_2$

当 $k=2$ 时

$$f_1(s_1)=\max_{0\leqslant x_1\leqslant s_1}\{\sqrt{x_1}+f_2(s_2)\}$$
$$=\sqrt{4.461s_1}\quad \text{(由关于 } x_1 \text{ 的一阶导数为 0 可求得)}$$

相应的最优解为 $x_1^*=\dfrac{s_1}{4.461}$

而 $$s_1=400$$

故 4 年内的最大效用为

$$f_1(400)=\sqrt{4.461\times400}=43(\text{万元})$$

返推可得最优解为

$$x_1^*=\frac{s_1}{4.461}=\frac{400}{4.461}=86(\text{万元}),$$
$$x_2^*=\frac{1}{3.31}s_2=104(\text{万元}),$$
$$x_3^*=\frac{1}{2.1}s_3=\frac{1}{2.1}\times1.1\times(s_2-x_2^*)=126(\text{万元}),$$
$$x_4^*=s_4=1.1(s_3-x_3^*)=153(\text{万元})。$$

(2)用拉格朗日乘数法解。

第 i 年($i=1,2,3,4$)用于投资的金额为 x_i 万元，获得效用为 $\sqrt{x_i}$ 万元，没有用掉的金额为 y_i 万元，其中 $y_4=0$，则

$$\max z=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}+\sqrt{x_4}$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+y_1=400\\x_2+y_2=1.1y_1\\x_3+y_3=1.1y_2\\x_4=1.1y_3\\x_i\geqslant0,i=1,2,3,4\\y_j\geqslant0,j=1,2,3\end{cases}$$

拉格朗日函数为

$$\begin{aligned}L(x_i,y_j,\lambda_i)=&(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}+\sqrt{x_4})\\&+\lambda_1(x_1+y_1-400)+\lambda_2(x_2+y_2-1.1y_1)\\&+\lambda_3(x_3+y_3-1.1y_2)+\lambda_4(x_4-1.1y_3)\end{aligned}$$

其中 $\lambda_i\geqslant0\quad(i=1,2,3,4)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_i}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x_i}}+\lambda_i=0\\[2mm]\dfrac{\partial L}{\partial y_1}=\lambda_1-1.1\lambda_2=0\\[2mm]\dfrac{\partial L}{\partial y_2}=\lambda_2-1.1\lambda_3=0\\[2mm]\dfrac{\partial L}{\partial y_3}=\lambda_3-1.1\lambda_4=0\end{cases}$$

则

$$\begin{cases} x_i = \dfrac{1}{4x_i^2} \\ \lambda_1 = 1.1\lambda_2 \\ \lambda_2 = 1.1\lambda_3 \\ \lambda_3 = 1.1\lambda_4 \end{cases}$$

则

$$x_i = \frac{1}{4\lambda_i^2}, \qquad \lambda_3 = 1.1\lambda_4, \lambda_2 = 1.21\lambda_4, \qquad \lambda_1 = (1.1)^3\lambda,$$

$$x_4 = \frac{1}{4x_4^2}, \quad x_3 = \frac{1}{4\lambda_3^2} = \frac{1}{4\times1.1^2\lambda_4^2}, \quad x_2 = \frac{1}{4\lambda_2^2} = \frac{1}{4\times1.21^2\lambda_4^2},$$

$$x_1 = \frac{1}{4x_1^2} = \frac{1}{4\times1.331^2\lambda_4^2},$$

$$y_3 = \frac{1}{1.1}x_4 = \frac{1}{4\times1.1}\frac{1}{\lambda_4^2}, \quad y_2 = \frac{1}{1.1}\left[\frac{1}{4\times1.21} + \frac{1}{4\times1.1}\right]\frac{1}{\lambda_4^2},$$

$$y_1 = \frac{1}{1.1}[x_2 + y_2] = \frac{1}{1.1}\left[\frac{1}{4\times1.21^2} + \frac{1}{1.1}\left(\frac{1}{4\times1.21} + \frac{1}{4\times1.1}\right)\right]\frac{1}{\lambda_4^2}$$

由 $x_1 + y_1 = 400$ 得

$x_1 = 86$(万元)，$x_2 = 104$(万元)，$x_3 = 126$(万元)，$x_4 = 153$(万元)。

即为所求最优解。

(3)两种方法所得结果相吻合，用动态规划方法求解有以下的优点：

① 易于确定全局最优解；

② 能得到一族解，便于分析结果，这里得到的不仅是全过程的解，而且包含所有子过程的一族解。

小结　动态规划还有一条优点：能利用经验，提高求解的效率。虽然它也存在不足之处，但其应用是广泛的。

第九章

动态规划应用举例

内容提要

本章主要介绍动态规划在实际中的几个常见的应用实例。

一、资源分配问题

1. 一维资源的平行分配问题

一维资源的平行分配问题是将数量一定的某一种资源，恰当地分配给若干个使用者后而不再考虑回收，使总的目标函数值为最优。

(1)静态规划模型

$$\max z=g_1(x_1)+g_2(x_2)+\cdots+g_n(x_n)$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=a,\\x_i\geqslant 0,\text{且为整数},i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

当 $g_i(x_i)$ 为非线性函数时，上述模型为整数非线性规划模型，求解很困难，甚至不可能。若采用动态规划方法，则能有效解决此问题。

(2)动态规划模型

① 阶段变量 k：将资源分配给一个或几个使用者的过程作为一个阶段。

② 状态变量 s_k：将累计的量或随递推过程变化的量选为状态变量。s_k 表示分配给第 k 个使用者至第 n 个使用者的资源数量。

③ 决策变量 u_k：将问题中的变量 x_k 作为决策变量 u_k。u_k 表示分配给第 k 个使用者的资源数量。

允许决策集合为 $D_k(s_k)=\{u_k|0\leqslant u_k=x_k\leqslant s_k\}$。

④ 状态转移方程 $s_{k+1}=s_k-u_k$。

⑤ 阶段指标和最优指标函数：第 k 阶段的阶段指标 $v_k(s_k,u_k)$

表示分配给第 k 个使用者的资源量为 u_k 所得的收益，即 $u_k(s_k,u_k)=g_k(u_k)$。

最优指标函数 $f_k(s_k)$ 表示资源量 s_k 分配给第 k 个使用者至第 n 个使用者所产生的最大收益。

⑥ 逆序递推关系：

$$\begin{cases} f_k(s_k)=\max\limits_{0\leqslant u_k\leqslant s_k}\{v_k(s_k,u_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\} \quad (k=n-1,\cdots,2,1) \\ f_n(s_n)=\max u_n=s_n v_n(s_n,u_n) \end{cases}$$

2. **一维资源连续分配问题**

所谓一维资源的连续分配是指资源分配后还要考虑有一部分可回收的问题，这里决策变量为连续值。

设有数量为 s_1 的某种资源分配给两个使用者，若第 i 年初分配给第一个使用者的资源 u_i，剩下的 s_i-u_i 就分配给第二个使用者，则年末可得收入为 $g(u_i)+h(s_i-u_i)$。资源的年回收率分别为 $0<a<1,0<b<1$。

(1)静态规划模型

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}[g(u_j)+h(s_i-u_j)]$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} s_{i+1}=au_i+b(s_i-u_i), & i=1,2,\cdots,n \\ 0\leqslant u_j\leqslant s_j, & j=1,2\cdots,n \end{cases}$$

(2)动态规划模型

① 阶段变量 k：表示第 k 年，$k=1,2,\cdots,n$；

② 状态变量 s_k：表示第 k 年分给第一和第二两个使用者的总资源量；

③ 决策变量 u_k：表示第 k 年分给第一个使用者的资源数量，则 s_k-u_k 表示分给第二个使用者的资源数量；

④ 状态转移方程：$s_{k+1}=au_k+b(s_k-u_k)$；

⑤ 最优指标函数 $f_k(s_k)$：表示拥有资源量 s_k，从第 k 年至第 n 年时，对于 $f_1(\cdot)$ 来说，允许的 t 值只能是 T. 因为当时进入计划过程，设备必然已使用了 T 年。

二、生产存储问题

1. 问题：设某公司对某种产品要制订一项 n 个阶段的生产(或购买)计划，已知它的初始库存量为零，每阶段生产(或购买)该产品的数量有上限；每阶段社会对该产品的需求量是已知的，公司保证供应；在 n 阶段末的终结库存量为零。问该公司如何制订每个阶段的生产(或采购)计划，从而使总成本最小。

2. 模型及其解法

设 d_k 为第 k 阶段对产品的需求量，x_k 为第 k 阶段产品的生产量(或采购量)，v_k 为第 k 阶段结束时的产品库存量，则有 $v_k=v_{k-1}+x_k-d_k$。$c_k(x_k)$ 表示第 k 阶段生产产品 x_k 时的成本费用，它包括生产准备成本 K 和产品成本 ax_k(其中 a 是单位产品成本)两项费用，即

$$c_k(x_k)=\begin{cases} 0, & \text{当 } x_k=0 \\ K+ax_k, & \text{当 } x_k=1,2,\cdots m \\ \infty, & \text{当 } x_k>m \end{cases}$$

$h_k(v_k)$表示在第 k 阶段结束时有库存量 v_k 所需的存储费用，故第 k 阶段的成本费用为 $c_k(x_k)+h_k(x_k)$，m 表示每阶段最多能生产该产品的上限数。

因而，上述问题的数学模型为

$$\min g=\sum_{k=1}^{n}[c_k(x_k)+h_k(v_k)]$$

$$\begin{cases} v_0=0, v_n=0 \\ v_k=\sum_{j=1}^{k}(x_j-d_j)\geqslant 0, k=2,\cdots,n-1 \\ 0\leqslant x_k\leqslant m, k=1,2,\cdots,n \\ x_k \text{ 为整数}, k=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

用动态规划方法来求解，把它看作一个 n 阶段决策问题。令 v_{k-1} 为状态变量，它表示第 k 阶段开始时的库存量。x_k 为决策变量，它表示第 k 阶段的生产量。

状态转移方程为

$$v_k=v_{k-1}+x_k-d_k, k=1,2,\cdots,n$$

最优值函数 $f_k(v_k)$表示从第 1 阶段初始库存量为 0 到第 k 阶段末库存量为 v_k 时的最小总费用。

因此可写出顺序递推关系式为：

$$f_k(v_k)=\min_{0\leqslant x_k\leqslant \sigma_k}[c_k(x_k)+h_k(v_k)+f_{k-1}(v_k-1)], k=1,\cdots,n$$

其中 $\sigma_k=\min(v_k+d_k,m)$。这是因为一方面每阶段生产的上限为 m；另一方面由于保证供应，故第 $k-1$ 阶段末的库存量 v_{k-1} 必须非负，即

$$v_k+d_k-x_k\geqslant 0$$

所以

$$x_k\leqslant v_k+d_k$$

从边界条件出发，利用上面的递推关系式，对每个 k，计算出 $f_k(v_k)$中的 v_k 在 0 至 $\min[\sum_{j=k+1}^{n}d_j, m-d_k]$ 之间的值，最后求得的 $f_n(0)$ 即为所求的最小总费用。

三、排序问题

1. 问题：设有 n 个工件需要在机床 A、B 上加工，每个工件都必须经过先 A 而后 B 的两道加工工序。以 a_i、b_i 分别表示工件 $i(1\leqslant i\leqslant n)$在 A、B 上的加工时间。问应如何在两机床上安排各工件加工的顺序，使在机床 A 上加工第一个工件开始到在机床 B 上将最后一个工件加工完为止，所用的加工总时间最少？
2. 模型及其解法

   $\min(a_i,b_j)\leqslant\min(a_j,b_i)$

   这个条件就是工件 i 应该排在工件 j 之前的条件。根据这个条件，得到最优排序的规则如下：

   (1)先作工件的加工时间的工时矩阵；

$$M=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

(2)在工时矩阵 M 中找出最小元素(若最小的不止一个,可任选其一);若它在上行,则将相应的工件排在最前位置;若它在下行,则相应的工作排在最后位置;

(3)将排定位置的工作所对应的列从 M 中划掉,然后对余下的工件重复按(2)进行如此继续下去,直至把所有工件都排完为止。

四、设备更新问题

1.问题的提法

一台新购置的设备,若使用年限越长,则设备使用效率降低,收入减少,而维修费用却增加;反之,若使用年限较短而频繁地更新,显然更新费用增多。因此确定使用多少年限后再更新,使得在某一时间内的总收入最大(或总费用最少)。

2.动态规划模型

设计划年限为 n 年,T 表示第 1 年开始时正在使用的设备的役龄,α 为折扣因子 $(0\leqslant\alpha\leqslant1)$。

(1)阶段变量 k:k 表示计划年限数,一年作为一个阶段,$k=1,2,\cdots,n$。

(2)状态变量 t:表示在第 k 年开始使用了一个役龄为 t 年的设备。

(3)决策变量 $x_k(t)$:$x_k(t)$表示在第 k 年时已经使用了 t 年的设备。这一年开始时所作出的决策(保留或更新)。

(4)阶段指标与最优指标函数:

$I_k(t)$、$O_k(t)$分别表示在第 k 年的一台役龄为 t 年的设备运行所得的收入和运行时所需的费用,$C_k(t)$表示在第 k 年一台役龄为 t 年的设备更新时所需的更新净费用;$f_k(t)$表示在第 k 年开始,使用一台役龄为 t 的设备时,从第 k 年至第 n 年内的最佳收入。

(5)动态规划的逆序关系

$$f_k(t)=\max\begin{cases}R:I_k(0)-O_k(0)-C_k(t)+\alpha\cdot f_{k+1}(1),\\K:I_k(t)-O_k(t)+\alpha\cdot f_{k+1}(t+1),\end{cases}$$
$$k=n,n-1,\cdots,2,1$$

其中边界条件为 $f_{n+1}(t)=0,t=1,2,\cdots,T+k-1$;$R$ 表示更新,K 表示保留。

典型例题与解题技巧

【例 1】 某肉类加工厂有六项加工任务,其中清洗车间和消毒车间所需时间(单位:天)如表 9－1 所示,试求最优的加工顺序和总加工天数。

表 9－1

车间＼任务	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
清洗车间	3	10	5	2	9	11
消毒车间	8	12	9	6	5	2

解题分析 此题属加工排序问题。

解题过程 第一步，先作任务的加工时间矩阵：

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}3 & 10 & 5 & 2 & 9 & 11\\ 8 & 12 & 9 & 6 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

第二步，在加工时间矩阵中，找出最小元素，若最小元素不止一个，可任选其一；若它在上行，则相应的任务排在最前位置；若它在下行，则相应的任务排在最后位置；最后将排定位置的任务对应的列从加工时间矩阵中划掉，再重复找最小元素和排序。得到

$$\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5 & 10 & 9 & 11\\ 6 & 8 & 9 & 12 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

因此最优加工顺序为 $J_4\to J_1\to J_3\to J_2\to J_5\to J_6$

总加工时间为 44 天。

【例 2】 考虑一个总期限为 $N+1$ 年的设备更新问题。已知一台新设备的价值为 C 元，其 T 年末的残值为

$$S(T)=\begin{cases}N-T, & N\geqslant T\\ 0\quad, & N<T\end{cases}$$

又对有 T 年役龄的该设备，其年创收益为

$$P(T)=\begin{cases}N^2-T^2\ , & N\geqslant T\\ 0\quad\quad\ , & N<T\end{cases}$$

要求：

(a)对此问题建立动态规划模型；

(b)当 $N=3,C=10$ 时求数字解。

解题分析 本题为设备更新问题。

解题过程 (a)设状态变量 T_i 为第 i 年末时该设备的役龄，则用逆推解法时，动态规划的基本方程可写为

$$f_N(T_N)=\max_{T_n\leqslant N}\begin{cases}N^2-T_N^2+N-(T_N+1), & \text{不更新设备}\\ (N^2-0)+(N-1)-C+(N-T_N), & \text{更新设备}\end{cases}$$

$$f_i(T_i)=\max_{T_n\leqslant N}\begin{cases}N^2-T_i^2+f_{i+1}(T_i+1), & \text{不更新设备}\\ (N^2-0)+(N-T_i)-C+f_{i+1}(1), & \text{更新设备}\end{cases}$$

$i=1,2,\cdots,N-1$

(b)当 $N=3,C=10$ 时有

$$f_3(T_3)=\max_{T_3\leqslant 3}\begin{cases}11-T_3-T_3^2, & \text{不更新设备}\\ 4-T_3, & \text{更新设备}\end{cases}$$

$$f_i(T_i)=\max_{T_i\leqslant 3}\begin{cases}9-T_i^2+f_{i+1}(T_{i+1}), & \text{不更新设备}\\ 2-T_i+f_{i+1}(1), & \text{更新设备}\quad i=1,2\end{cases}$$

求解得最优策略为：第一年末不更新，第二年末不更新，第三年末更新；或第一年末不更新，第二年末更新，第三年末不更新。总收益均为 13。

课后习题全解

◎9.1 有一部货车每天沿着公路给四个零售店卸下 6 箱货物，如果各零售店出售该货物所得利润如表 9－2 所示，试求在各零售店卸下几箱货物，能使获得的总利润最大？其值是多少？

表 9－2

利润 零售店 / 箱数	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	4	2	3	4
2	6	4	5	5
3	7	6	7	6
4	7	8	8	6
5	7	9	8	6
6	7	10	8	6

分析 本题是一维资源的分配问题，利用动态规划的逆推关系式进行逐段计算。

解 将问题按零售店数分为 4 个阶段，阶段变量 $k=1,2,3,4$，第 k 阶段为第 k 个零售店分配货物；

状态变量 s_k 表示分配给第 k 至第 4 个零售店的货物箱数；

决策变量 x_k 表示分配给第 k 个零售店的货物箱数；

状态转移方程：$s_{k+1}=s_k-x_k$；

阶段指标 $p_k(x_k)$表示将 x_k 箱货物分配给第 k 个零售店的盈利；

最优值函数 $f_k(s_k)$表示将 s_k 箱货物分配给第 k 至第 4 个零售店的最大盈利；

递推公式：$\begin{cases} f_k(s_k)=\max\limits_{0\leqslant x_k\leqslant s_k}[p_k(x_k)+f_{k+1}(s_{k+1})],k=4,3,2,1 \\ f_5(s_5)=0 \end{cases}$

计算过程如表 9－3 所示。

表 9—3

k	s_k	x_k	$p_k(x_k)$	$f_{k+1}(s_{k+1})$	$p_k(x_k)+f_{k+1}(s_{k+1})$	$f_k(s_k)$	x_k^*
4	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	4	0	4	4	1
	2	2	5	0	5	5	2
	3	3	6	0	6	6	3
	4	4	6	0	6	6	4
	5	5	6	0	6	6	5
	6	6	6	0	6	6	6
3	0	0	0	0	0	4	0
	1	0	0	4	4		
		1	3	0	3		
	2	0	0	5	5	7	1
		1	3	4	7		
		2	5	0	5		
	3	0	0	6	6	9	2
		1	3	5	8		
		2	5	4	9		
		3	7	0	7		
	4	0	0	6	6	11	3
		1	3	6	9		
		2	5	5	10		
		3	7	4	11		
		4	8	0	8		
	5	0	0	6	6	12	3,4
		1	3	6	9		
		2	5	6	11		
		3	7	5	12		
		4	8	4	12		
		5	8	0	8		
	6	0	0	6	6	13	3,4
		1	3	6	9		
		2	5	6	11		
		3	7	6	13		
		4	8	5	13		
		5	8	4	12		
		6	8	0	8		
2	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	4	4	4	0
		1	2	0	2		
	2	0	0	7	7	7	0
		1	2	4	6		
		2	4	0	4		
	3	0	0	9	9	9	0,1
		1	2	7	9		
		2	4	4	8		
		3	6	0	6		
	4	0	0	11	11	11	0,1,2
		1	2	9	11		
		2	4	7	11		
		3	6	4	10		
		4	8	0	8		
	5	0	0	12	12	13	1,2,3
		1	2	11	13		
		2	4	9	13		
		3	6	7	13		
		4	8	4	12		
		5	9	0	9		
	6	0	0	13	13	15	2,3,4
		1	2	12	14		
		2	4	11	15		
		3	6	9	15		
		4	8	7	15		
		5	9	4	13		
		6	10	0	10		
1	6	0	0	15	15	17	1,2
		1	4	13	17		
		2	6	11	17		
		3	7	9	16		
		4	7	7	14		
		5	7	4	11		
		6	7	0	7		

由计算表格的结果可以看出，最大总利润为 17。

按计算表格的顺序反推算,可知最优分配方案有六个:

(1)$x_1^*=1, x_2^*=1, x_3^*=3, x_4^*=1$;

(2)$x_1^*=1, x_2^*=2, x_3^*=2, x_4^*=1$;

(3)$x_1^*=1, x_2^*=3, x_3^*=1, x_4^*=1$;

(4)$x_1^*=2, x_2^*=0, x_3^*=3, x_4^*=1$;

(5)$x_1^*=2, x_2^*=1, x_3^*=2, x_4^*=1$;

(6)$x_1^*=2, x_2^*=2, x_3^*=1, x_4^*=1$。

○9.2　设有某种肥料共 6 个单位重量,准备供给四块粮田用。其每块田施肥数量与增产粮食数字关系如表 9－4 所示。试求对每块田施多少单位重量的肥料,才使总的增产粮食最多。

表 9－4

施　肥	粮　田			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	20	25	18	28
2	42	45	39	47
3	60	57	61	65
4	75	65	78	74
5	85	70	90	80
6	90	73	95	85

解　将问题按粮田数分为 4 个阶段,阶段变量 $k=1,2,3,4$,第 k 阶段为第 k 块粮田分配肥料;

状态变量 s_k 表示分配给第 k 至第 4 块粮田的肥料重量;

决策变量 x_k 表示分配给第 k 块粮田的肥料重量;

状态转移方程:$s_{k+1}=s_k-x_k$;

阶段指标 $p_k(x_k)$表示将 x_k 单位肥料分配给第 k 块粮田增产粮食的数量;

最优值函数 $f_k(s_k)$表示将 s_k 单位肥料分配给第 k 至第 4 块粮田增产粮食的最大数量;

递推公式:$\begin{cases} f_k(s_k)=\max\limits_{0\leqslant x_k\leqslant s_k}[p_k(x_k)+f_{k+1}(s_{k+1})], k=4,3,2,1 \\ f_5(s_5)=0 \end{cases}$

计算过程如表 9－5 所示。

表 9－5

k	s_k	x_k	$p_k(x_k)$	$f_{k+1}(s_{k+1})$	$p_k(x_k)+f_{k+1}(s_{k+1})$	$f_k(s_k)$	x_k^*
	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	28	0	28	28	1
	2	2	47	0	47	47	2
4	3	3	65	0	65	65	3
	4	4	74	0	74	74	4
	5	5	80	0	80	85	5
	6	6	85	0	85	85	6

k	s_k	x_k	$p_k(x_k)$	$f_{k+1}(s_{k+1})$	$p_k(x_k)+f_{k+1}(s_{k+1})$	$f_k(s_k)$	x_k^*
3	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	28	28	28	0
		1	18	0	18		
	2	0	0	47	47	47	0
		1	18	28	46		
		2	39	0	39		
	3	0	0	65	65	67	2
		1	18	47	65		
		2	39	28	67		
		3	61	0	61		
	4	0	0	74	74	89	3
		1	18	65	83		
		2	39	47	86		
		3	61	28	89		
		4	78	0	78		
	5	0	0	80	80	108	3
		1	18	74	92		
		2	39	65	104		
		3	61	47	108		
		4	78	28	106		
		5	90	0	90		
	6	0	0	85	85	126	3
		1	18	80	98		
		2	39	74	113		
		3	61	65	126		
		4	78	47	125		
		5	90	28	118		
		6	95	0	95		
2	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	28	28	28	0
		1	25	0	25		
	2	0	0	47	47	53	1
		1	25	28	53		
		2	45	0	45		
	3	0	0	67	67	73	2
		1	25	47	72		
		2	45	28	73		
		3	57	0	57		
	4	0	0	89	89	92	1,2
		1	25	67	92		
		2	45	47	92		
		3	57	28	85		
		4	65	0	65		
	5	0	0	108	108	114	1
		1	25	89	114		
		2	45	67	112		
		3	57	47	104		
		4	65	28	93		
		5	70	0	70		
	6	0	0	126	126	134	2
		1	25	108	133		
		2	45	89	134		
		3	57	67	124		
		4	65	47	112		
		5	70	28	98		
		6	73	0	73		
1	6	0	0	134	134	134	0,1,2
		1	20	114	134		
		2	42	92	134		
		3	60	73	133		
		4	75	53	128		
		5	85	28	113		
		6	90	0	90		

由计算表格的结果可以看出，增产粮食的最大数量为 134。

按计算表格的顺序反推算，可知最优分配方案有四个：

(1)$x_1^*=0, x_2^*=2, x_3^*=3, x_4^*=1$；

(2)$x_1^*=1, x_2^*=1, x_3^*=3, x_4^*=1$；

(3)$x_1^*=2, x_2^*=1, x_3^*=2, x_4^*=1$；

(4)$x_1^*=2, x_2^*=2, x_3^*=0, x_4^*=2$。

○9.3　某公司打算向它的三个营业区增设六个销售店，每个营业区至少增设一个。从各区赚取的利润(单位:万元)与增设的销售店个数有关，其数据如下。

表 9—6

销售店增加数	A 区利润	B 区利润	C 区利润
0	100	200	150
1	200	210	160
2	280	220	170
3	330	225	180
4	340	230	200

试求各区应分配几个增设的销售店，才能使总利润最大，其值是多少?

解　将问题按营业区数分为 3 个阶段，阶段变量 $k=1,2,3$，第 1、2、3 个阶段分别为 A、B、C 营业区分配增设的销售店。

状态变量 s_k 表示给第 k 至第 3 个营业区增设销售店的数量;

决策变量 x_k 表示给第 k 个营业区增设销售店的数量;

状态转移方程:$s_{k+1}=s_k-x_k$;

阶段指标 $p_k(x_k)$表示给第 k 个营业区增设 x_k 个销售店赚取的利润;

最优值函数 $f_k(s_k)$表示给第 k 至第 3 个营业区增设 s_k 个销售店赚取的最大利润;

递推公式:$\begin{cases} f_k(s_k)=\max\limits_{0\leqslant x_k\leqslant s_k}\left[p_k(x_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\right], k=3,2,1 \\ f_4(s_4)=0 \end{cases}$

计算过程如表 9—7 所示。

表 9—7

k	s_k	x_k	$p_k(x_k)$	$f_{k+1}(s_{k+1})$	$p_k(x_k)+f_{k+1}(s_{k+1})$	$f_k(s_k)$	x_k^*
3	1	1	160	0	160	160	1
	2	2	170	0	170	170	2
	3	3	180	0	180	180	3
	4	4	200	0	200	200	4
2	2	1	210	160	370	370	1
	3	1	210	170	380	380	1,2
		2	220	160	380		
	4	1	210	180	390	390	1,2
		2	220	170	390		
		3	225	160	385		
	5	1	210	200	410	410	1
		2	220	180	400		
		3	225	170	395		
		4	230	160	390		
1	6	1	200	410	610	710	3,4
		2	280	390	670		
		3	330	380	710		
		4	340	370	710		

由计算表格的结果可以看出，赚取的最大利润为 710 万元。

按计算表格的顺序反推算，可知最优增设方案有三个:

(1)$x_1^*=3, x_2^*=1, x_3^*=2$;

(2)$x_1^*=3, x_2^*=2, x_3^*=1$;

(3)$x_1^*=4, x_2^*=1, x_3^*=1$。

○9.4　某工厂有 100 台机器，拟分四个周期使用，在每一周期有两种生产任务。据经验，把

机器 x_1 台投入第一种生产任务，则在一个生产周期中将有 $x_1/3$ 台机器作废；余下的机器全部投入第二种生产任务，则有 1/10 台机器作废。如果干第一种生产任务每台机器可收益 10，干第二种生产任务每台机器可收益 7。问怎样分配机器，使总收益最大？

解 将问题按周期分为 4 个阶段，阶段变量 $k=1,2,3,4$，第 k 阶段为第 k 周期分配机器；
状态变量 s_k 表示第 k 周期初完好的机器台数；
决策变量 x_k 表示第 k 周期用于第一种任务的机器台数，相应的，s_k-x_k 表示第 k 周期用于第二种任务的机器台数；
状态转移方程：$s_{k+1}=\frac{2}{3}x_k+\frac{9}{10}(s_k-x_k)$；
阶段指标 $v_k(s_k,x_k)$ 表示第 k 周期用 x_k 台机器于第一种任务，用 s_k-x_k 台机器于第二种任务的总收益，$v_k(s_k,x_k)=10x_k+7(s_k-x_k)$；
最优值函数 $f_k(s_k)$ 表示第 k 周期初完好的机器台数为 s_k 时，从第 k 至第 4 周期的最大总收益；

递推关系式：$\begin{cases} f_k(s_k)=\max\limits_{0\leqslant x_k\leqslant s_k}[v_k(s_k,x_k)+f_{k+1}(s_{k+1})], k=4,3,2,1 \\ f_5(s_5)=0 \end{cases}$

当 $k=4$ 时，$f_4(s_4)=\max\limits_{0\leqslant x_4\leqslant s_4}(3x_4+7s_4)=10s_4, x_4^*=s_4$；

当 $k=3$ 时，$f_3(s_3)=\max\limits_{0\leqslant x_3\leqslant s_3}(16s_3+\frac{2}{3}x_3)=\frac{50}{3}s_3, x_3^*=s_3$；

当 $k=2$ 时，$f_2(s_2)=\max\limits_{0\leqslant x_2\leqslant s_2}(22s_2-\frac{8}{9}x_2)=22s_2, x_2^*=0$；

当 $k=1$ 时，$f_1(s_1)=\max\limits_{0\leqslant x_1\leqslant s_1}(\frac{134}{5}s_1-\frac{32}{15}x_1)=\frac{134}{5}s_1, s_1^*=0$。

因为 $s_1=100$，故最大总收益 $f_1(s_1)=\frac{134}{5}\times 100=2680$。

反推得出最优策略如下：
第一周期 100 台机器全部用于第二种任务的生产；
第二周期 90 台机器全部用于第二种任务的生产；
第三周期 81 台机器全部用于第一种任务的生产；
第四周期 54 台机器全部用于第一种任务的生产。

9.5 用逐次逼近法求解下述问题

$$\max z=x_1^2y_1+3x_2y_2^2+4x_3^2y_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3\leqslant 24 \\ 3y_1+2y_2+5y_3\leqslant 30 \\ x_i\geqslant 0, y_j\geqslant 0 \text{ 且为整数。}(i=1,2,3 \quad j=1,2,3) \end{cases}$$

分析 状态变量和决策变量是二维的，用逐次逼近法降维处理。

解 先保持一个变量不变，对另一个变量实现最优化，然后交替固定，以迭代的形式反复进行，直到获得某种要求的程度为止。

先设 $X^{(0)}=(4,2,2)^{\mathrm{T}}$，固定 $X=X^{(0)}$，先对 y 求解，问题转化为

$$\max z=16y_1+6y_2^2+16y_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3y_1+2y_2+5y_3\leqslant 30\\ y_i\geqslant 0\text{ 且为整数},i=1,2,3\end{cases}$$

利用动态规划法求解：

$f_3(30)=\max\{0+f_2(30),16+f_2(25),32+f_2(20),48+f_2(15),64+f_2(10),80+f_2(5),96+f_2(0)\}$

要求出 $f_3(30)$，必须计算 $f_2(30),f_2(25),f_2(20),f_2(15),f_2(10),f_2(5),f_2(0)$，

$f_2(20)=\max\{0+f_1(20),16+f_1(17),32+f_1(14),48+f_1(11),64+f_1(8),80+f_1(5),96+f_1(2)\}$

同理可得出

$f_2(30)=\max\{0+f_1(30),16+f_1(27),32+f_1(24),48+f_1(21),64+f_1(18),80+f_1(15),96+f_1(12),112+f_1(9),128+f_1(6),144+f_1(3),160+f_1(0)\}$

$f_2(25)=\max\{0+f_1(25),16+f_1(22),32+f_1(19),48+f_1(16),64+f_1(13),80+f_1(10),96+f_1(7),112+f_1(4),128+f_1(1)\}$

$f_2(15)=\max\{0+f_1(15),16+f_1(12),32+f_1(9),48+f_1(6),64+f_1(3),80+f_1(0)\}$

$f_2(10)=\max\{0+f_1(10),16+f_1(7),32+f_1(4),48+f_1(1)\}$

$f_2(5)=\max\{0+f_1(5),16+f_1(2)\}$

$f_2(0)=0$

要求出 $f_2(30),f_2(25),f_2(20),f_2(15),f_2(10),f_2(5),f_2(0)$，必须先计算出 $f_1(30),f_1(27),f_1(25),f_1(24),f_1(22),f_1(21),f_1(20),f_1(19),f_1(18),f_1(17),f_1(16),f_1(15),f_1(14),f_1(13),f_1(12),f_1(11),f_1(10),f_1(9),f_1(8),f_1(7),f_1(6),f_1(5),f_1(4),f_1(3),f_1(2),f_1(1),f_1(0)$。

[]表示取整。

$f_1(30)=6\times 15^2=1350$，所以，$y_2=15$；

$f_1(27)=6\times\left[\frac{27}{2}\right]^2=6\times 13^2=1014$，所以 $y_2=13$；

$f_1(25)=6\times\left[\frac{25}{2}\right]^2=6\times 12^2=864$，所以 $y_2=12$；

$f_1(24)=6\times\left[\frac{24}{2}\right]^2=6\times 12^2=864$，所以 $y_2=12$；

$f_1(22)=6\times\left[\frac{22}{2}\right]^2=6\times 11^2=726$，所以 $y_2=11$；

$f_1(21)=6\times\left[\frac{21}{2}\right]^2=6\times 10^2=600$，所以 $y_2=10$；

$f_1(20)=6\times\left[\frac{20}{2}\right]^2=6\times 10^2=600$，所以 $y_2=10$；

$f_1(19)=6\times\left[\frac{19}{2}\right]^2=6\times 9^2=486$，所以 $y_2=9$；

$$f_1(18)=6\times\left[\frac{18}{2}\right]^2=6\times 9^2=486\text{，所以 } y_2=9;$$

$$f_1(17)=6\times\left[\frac{17}{2}\right]^2=6\times 8^2=384\text{，所以 } y_2=8;$$

$$f_1(16)=6\times\left[\frac{16}{2}\right]^2=6\times 8^2=384\text{，所以 } y_2=8;$$

$$f_1(15)=6\times\left[\frac{15}{2}\right]^2=6\times 7^2=294\text{，所以 } y_2=7;$$

$$f_1(14)=6\times\left[\frac{14}{2}\right]^2=6\times 7^2=294\text{，所以 } y_2=7;$$

$$f_1(13)=6\times\left[\frac{13}{2}\right]^2=6\times 6^2=216\text{，所以 } y_2=6;$$

$$f_1(12)=6\times\left[\frac{12}{2}\right]^2=6\times 6^2=216\text{，所以 } y_2=6;$$

$$f_1(11)=6\times\left[\frac{11}{2}\right]^2=6\times 5^2=150\text{，所以 } y_2=5;$$

$$f_1(10)=6\times\left[\frac{10}{2}\right]^2=6\times 5^2=150\text{，所以 } y_2=5;$$

$$f_1(9)=6\times\left[\frac{9}{2}\right]^2=6\times 4^2=96\text{，所以 } y_2=4;$$

$$f_1(8)=6\times\left[\frac{8}{2}\right]^2=6\times 4^2=96\text{，所以 } y_2=4;$$

$$f_1(7)=6\times\left[\frac{7}{2}\right]^2=6\times 3^2=54\text{，所以 } y_2=3;$$

$$f_1(6)=6\times\left[\frac{6}{2}\right]^2=6\times 3^2=54\text{，所以 } y_2=3;$$

$$f_1(5)=6\times\left[\frac{5}{2}\right]^2=6\times 2^2=24\text{，所以 } y_2=2;$$

$$f_1(4)=6\times\left[\frac{4}{2}\right]^2=6\times 2^2=24\text{，所以 } y_2=2;$$

$$f_1(3)=6\times\left[\frac{3}{2}\right]^2=6\times 1^2=6\text{，所以 } y_2=1;$$

$$f_1(2)=6\times\left[\frac{2}{2}\right]^2=6\times 1^2=6\text{，所以 } y_2=1;$$

$$f_1(1)=6\times\left[\frac{1}{2}\right]^2=6\times 0^2=0\text{，所以 } y_2=0;$$

$$f_1(0)=6\times\left[\frac{0}{2}\right]^2=6\times 0^2=0\text{，所以 } y_2=0;$$

从而

$$
\begin{aligned}
f_2(30)&=\max\{0+f_1(30),16+f_1(27),32+f_1(24),48+f_1(21),64+f_1(18),80+\\
&\quad f_1(15),96+f_1(12),112+f_1(9),128+f_1(6),144+f_1(3),160+f_1(0)\}\\
&=\{1350,16+1014,32+864,48+600,64+486,80+294,96+216,112+96,\\
&\quad 128+54,144+6,160+0\}\\
&=1350
\end{aligned}
$$

所以 $y_1=0$

$$
\begin{aligned}
f_2(25)&=\max\{0+f_1(25),16+f_1(22),32+f_1(19),48+f_1(16),64+f_1(13),80+\\
&\quad f_1(10),96+f_1(7),112+f_1(4),128+f_1(1)\}\\
&=\max\{864,16+726,32+486,48+384,64+216,80+150,96+54,112+24,\\
&\quad 128+0\}\\
&=864
\end{aligned}
$$

所以 $y_1=0$

同理可得 $f_2(20)=f_1(20)=600\qquad f_2(15)=f_1(15)=294$

$$
\begin{aligned}
f_2(10)&=\max\{0+f_1(10),16+f_1(7),32+f_1(4),48+f_1(1)\}\\
&=\max\{0+250,16+144,32+64,48+0\}=250
\end{aligned}
$$

所以 $y_1=0$。

$f_2(5)=f_1(5)=24$，所以 $f_3(30)=f_2(30)=1350$，于是 $y_3=0$。

因此最优方案：$y_1=0,y_2=15,y_3=0$；$\max z_1=1350$。

然后固定 $Y^{(1)}=(0,15,0)^{\mathrm{T}}$，求出

$$
\max z_2=3x_2\times 15^2=675x_2
$$

$$
\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3\leqslant 24\\ y_i\geqslant 0\ \text{且为整数},i=1,2,3\end{cases}
$$

解之得，$x_1=0,x_2=8,x_3=0$；$\max z_2=675\times 8=5400$。

固定 $X^{(1)}=(0,8,0)^{\mathrm{T}}$，再求解，可求得 $Y^{(2)}=(0,15,0)^{\mathrm{T}}$。

归纳起来，此问题的最优解为 $X^*=(0,8,0)^{\mathrm{T}},Y^*=(0,15,0)^{\mathrm{T}}$。最优目标函数值 $z^*=5400$。

小结　逐次逼近法是一种降维方法，将二维分配问题变为一维问题来求解。

○**9.6**　设有三种资源，每单位的成本分别为 a、b、c，给定的利润函数为

$$
r_i(x_i,y_i,z_i),\quad (i=1,2,\cdots,n)
$$

现有资金为 W，应购买各种资源多少单位分配给 n 个行业，才能使总利润最大。试给出动态规划的公式，并写出它的一维递推关系式。

解　依题意，可列如下的数学模型

$$
\max z=\sum_{i=1}^{n} r_i(x_i,y_i,z_i)
$$

$$
\text{s. t.}\begin{cases}a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+b\sum\limits_{i=1}^{n}y_i+c\sum\limits_{i=1}^{n}z_i\leqslant W\\ x_i,y_i,z_i\geqslant 0\ \text{且为整数},i=1,2,\cdots,n\end{cases}
$$

按行业将问题分为 n 个阶段。

阶段变量 $k=1,2,\cdots,n$，第 k 阶段为第 k 个行业分配资源；

状态变量 s_k 表示第 k 至第 n 个行业的总资金额，$s_1=W$；

决策变量 (x_k,y_k,x_k) 表示第 k 个行业所用三种资源数量；

状态转移方程：$s_{k+1}=s_k-(ax_k+by_k+cz_k)$；

最优值函数 $f_k(s_k)$ 表示第 k 至第 n 个行业的总资金额为 s_k 时，从第 k 至第 n 个行业的最大利润；

一维递推关系式：

$$\begin{cases} f_k(s_k)=\max\limits_{0\leqslant ax_k+by_k+cz_k\leqslant s_k}\{r_k(x_k,y_k,z_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\}, \quad k=n,n-1,\cdots,1 \\ f_{n+1}(s_{n+1})=0 \end{cases}$$

◎9.7 某工厂要对一种产品制订今后四个时期的生产计划，据估计在今后四个时期内，市场对该产品的需求量如下表所示。假定该厂生产每批产品的固定成本为 3 千元，若不生产就为 0；每单位产品成本为 1 千元；每个时期末末售出的产品，每单位需付存储费 0.5 千元。还假定在第一个时期的初始库存量为 0，第四个时期之末的库存量也为 0。试问该厂应如何安排各个时期的生产与库存，才能在满足市场需求的条件下，使总成本最小。

表 9－8

时期(k)	1	2	3	4
需求量(d_k)	2	3	2	4

分析 本题是生产计划问题，利用动态规划的逆推关系式求解。

解 阶段变量 $k=1,2,3,4$，第 k 阶段为第 k 个时期制订生产计划。

状态变量 s_k 表示第 k 个时期的初始库存量，s_5 表示第四个时期之末的库存量；由题设，$s_1=s_5=0$；根据各时期的需求量 d_k 的分布可知，

$0\leqslant s_2\leqslant d_2+d_3+d_4=9$，

$0\leqslant s_3\leqslant d_3+d_4=6$，$0\leqslant s_4\leqslant d_4=4$

决策变量 x_k 表示第 k 个时期的生产量。

状态转移方程：$s_{k+1}=s_k+x_k-d_k$

由 $s_{k+1}=s_k+x_k-d_k\geqslant 0$，得 $x_k\geqslant d_k-s_k$；由 $s_{k+1}=s_k+x_k-d_k$，得 $x_k=s_{k+1}+d_k-s_k$，从而 $x_1=s_2+d_1-s_1\leqslant 9+2-0=11$，$x_2=s_3+d_2-s_2\leqslant 6+3-s_2=9-s_2$，$x_3=s_4+d_3-s_3\leqslant 4+2-s_3=6-s_3$，$x_4=s_5+d_4-s_4=0+4-s_4=4-s_4$，所以

允许决策集合 $D_k(s_k)$：$D_1(s_1)=\{x_1\,|\,\max(0,d_1-s_1)\leqslant x_1\leqslant 11\}$，$D_2(s_2)=\{x_2\,|\,\max(0,d_2-s_2)\leqslant x_2\leqslant 9-s_2\}$，$D_3(s_3)=\{x_3\,|\,\max(0,d_3-s_3)\leqslant x_3\leqslant 6-s_3\}$，$D_4(s_4)=\{x_4\,|\,x_4=4-s_4\}$。

阶段指标 $v_k(s_k,x_k)$ 表示第 k 个时期的初始库存量为 s_k，生产量为 x_k 时，第 k 个时期的费用，则

$$v_k(s_k,x_k)=\begin{cases} 3+x_k+0.5(s_k+x_k-d_k), & x_k>0 \\ 0.5(s_k-d_k), & x_k=0 \end{cases}$$

最优值函数 $f_k(s_k)$ 表示第 k 个时期的初始库存量为 s_k 时，从第 k 至第 n 个时期的最小费用。

一维递推关系式：

$$\begin{cases} f_k(s_k)=\min\limits_{x_k\in D_k(s_k)}\{v_k(s_k,x_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\},k=4,3,2,1 \\ f_{n+1}(s_{n+1})=0 \end{cases}$$

最小总成本为 20.5 千克。

最优生产计划有两个：

(1)$x_1^*=5,x_2^*=0,x_3^*=6,x_4^*=0$；(2)$x_1^*=7,x_2^*=0,x_3^*=0,x_4^*=4$。

◎9.8　利用再生产点性质解 9.7 题。

分析　如果对于每个 i，都有 $V_{i-1}x_i=0$，则称该点的生产决策(或称一个策略 $x=x_1,\cdots x_n$)具有再生产点性质。如果 V_i，则称阶段 i 为再生产点。

解　第 k 时期生产成本为 $c_i(x_i)=\begin{cases}0, & x_i=0\\ 3+x_i, & x_i=1,2,\cdots,n\end{cases}$，第 k 时期末库存量为 v_k 时的存储费用为 $h_i(v_i)=0.5v_i$。

(1)先计算 $c(j,i),1\leqslant j\leqslant i,i=1,2,3,4$

$c(1,1)=c(2)+h(0)=5,c(1,2)=c(5)+h(3)=9.5$，

$c(1,3)=c(7)+h(5)+h(2)=13.5$，

$c(1,4)=c(11)+h(9)+h(6)+h(4)=23.5$，

$c(2,2)=c(3)+h(0)=6,c(2,3)=c(5)+h(2)=9$，

$c(2,4)=c(9)+h(6)+h(4)=17,c(3,3)=c(2)+h(0)=5$，

$c(3,4)=c(6)+h(4)=11,c(4,4)=c(4)+h(0)=7$。

(2)再计算 f_i

$f_0=0;f_1=f_0+c(1,1)=5$，所以 $j(1)=1$；

$f_2=\min[f_0+c(1,2),f_1+c(2,2)]=\min[9.5,11]=9.5$，所以 $j(2)=1$；

$$\begin{aligned}f_3&=\min[f_0+c(1,3),f_1+c(2,3),f_2+c(3,3)]\\&=\min[13.5,14,14.5]=13.5,\end{aligned}$$

所以 $j(3)=1$；

$$\begin{aligned}f_4&=\min[f_0+c(1,4),f_1+c(2,4),f_2+c(3,4),f_3+c(4,4)]\\&=\min[23.5,22,20.5,20.5]=20.5,\end{aligned}$$

所以 $j(4)=3$ 或 4。

(3)最优生产决策

当 $j(4)=3$ 时，有 $x_3=d_3+d_4=6,x_4=0$。

因为 $m=j(4)-1=2,j(m)=j(2)=1$，所以 $x_1=d_1+d_2=5,x_2=0$，于是方案(1)为 $x_1^*=5,x_2^*=0,x_3^*=6,x_4^*=0$。

当 $j(4)=4$ 时，有 $x_4=d_4=4$。

因为 $m=j(4)-1=3,j(m)=j(3)=1$，所以 $x_1=d_1+d_2+d_3=7,x_2=x_3=0$，于是方案(2)为 $x_1^*=7,x_2^*=0,x_3^*=0,x_4^*=4$。

◎9.9　某工厂生产一种产品，估计该产品在未来 4 个月的销售量分别为 400、500、300、200 件。该项产品的生产准备费用每批为 500 元，每件的生产费用为 1 元，存储费用每件每月为 1 元。假定 1 月初的存货为 100 件，4 月底的存货为零。试求该厂在这 4

个月内的最优生产计划。

分析 此题用再生产点性质求解。

解 (1)生产成本函数为 $c_i(x_i)=\begin{cases}0, & x_i=0\\ 5+x_i, & x_i=1,2,\cdots,n\end{cases}$ (单位:百件),库存费用函数 $h_i(v_i)=v_i$,可视为凹函数,用再生产点性质解此题。

$c(1,1)=c(3)+h(0)=8$, $c(1,2)=c(8)+h(5)=18$,

$c(1,3)=c(11)+h(8)+h(3)=27$,

$c(1,4)=c(13)+h(10)+h(5)+h(2)=35$,

$c(2,2)=c(5)+h(0)=10$, $c(2,3)=c(8)+h(3)=16$,

$c(2,4)=c(10)+h(5)+h(2)=22$,

$c(3,3)=c(3)+h(10)=8$, $c(3,4)=c(5)+h(2)=12$,

$c(4,4)=c(2)+h(0)=7$。

(2)$f_0=0$;$f_1=f_0+c(1,1)=8$,所以 $j(1)=1$;

$f_2=\min[f_0+c(1,2),f_1+c(2,2)]=\min[18,18]=18$,

所以 $j(2)=1$ 或 2;

$f_3=\min[f_0+c(1,3),f_1+c(2,3),f_2+c(3,3)]=\min[27,24,26]=24$,

所以$j(3)=2$;

$f_4=\min[f_0+c(1,4),f_1+c(2,4),f_2+c(3,4),f_3+c(4,4)]$

$=\min[35,30,30,31]=30$,

所以 $j(4)=2$ 或 3。

(3)除 1 月初原有库存货 100 件外,总成本最低为 3000 元,最优生产计划有以下三种:

① $j(4)=2$ 时,$x_2=d_2+d_3+d_4=10, x_3=x_4=0$

$m=j(4)-1=1, j(m)=j(1)=1$ 时,$x_1=4-1=3$,即 $x_1^*=3, x_2^*=10, x_3^*=0, x_4^*=0$。

② $j(4)=3$ 时,$x_3=d_3+d_4=5, x_4=0$

$m=j(4)-1=2, j(m)=j(2)=1$ 时,$x_1=8, x_2=0$,即 $x_1^*=8, x_2^*=0, x_3^*=5, x_4^*=0$。

③ $j(4)=3$ 时,$x_3=5, x_4=0$

$j(m)=2$ 时,$x_2=5, x_1=3$,即 $x_1^*=3, x_2^*=5, x_3^*=5, x_4^*=0$。

◎**9.10** 某电视机厂为生产电视机而需生产喇叭,生产以万只为单位。根据以往记录,一年的四个季度需要喇叭分别是 3 万、2 万、3 万、2 万只。设每万只存放在仓库内一个季度的存储费为 0.2 万元,每生产一批的装配费为 2 万元,每万只的生产成本费为 1 万元。问应该怎样安排四个季度的生产,才能使总的费用最小。

分析 本题考查了用再生产点性质求库存问题的凹函数的解。

解 生产成本函数为 $c_i(x_i)=\begin{cases}0, & x_1=0\\ 2+x_i, & x_i=1,2\cdots,n\end{cases}$,库存费用函数 $h_i(v_i)=0.2v_i$。

用再生产点性质解此题步骤和解题过程参考 9.9。

(1)$c(1,1)=c(3)+h(0)=5$, $c(1,2)=c(5)+h(2)=7.4$,

$c(1,3)=c(8)+h(5)+h(3)=11.6$，

$c(1,4)=c(10)+h(7)+h(5)+h(2)=14.8$，

$c(2,2)=c(2)+h(0)=4$，　$c(2,3)=c(5)+h(3)=7.6$，

$c(2,4)=c(7)+h(5)+h(2)=10.4$，

$c(3,3)=c(3)+h(0)=5$，　$c(3,4)=c(5)+h(2)=7.4$，

$c(4,4)=c(2)+h(0)=4$。

(2)$f_0=0$；$f_1=1$；$f_2=1$；$f_3=1$；$f_4=14.8$。所以 $j(4)=1$ 或 3。

最小总费用为 14.8 万元。

(3)最优生产决策为：

①$j(4)=1$ 时，$x_1^*=d_1+d_2+d_3+d_4=10$，$x_2^*=x_3^*=x_4^*=0$。

②$j(4)=3$ 时，$x_3^*=d_3+d_4=5$，$x_4^*=0$。

由 $m=j(4)-1=2$，有 $j(m)=j(2)$，所以 $x_1^*=d_1+d_2=5$，于是 $x_2^*=0$。

◎**9.11**　某公司需要对某产品决定未来半年内每个月的最佳存储量，以使总费用极小化。已知半年里对该产品的需求量和单位订货费用、单位存储费用的数据如表 9－9 所示。

表 9－9

月份 k	1	2	3	4	5	6
需求量 d_k	50	55	50	45	40	30
单位订货费用 c_k	825	775	850	850	775	825
单位存储费用 p_k	40	30	35	20	40	

分析　此题属生产存储问题。

按月份将问题划分为 6 阶段，$k=1,2,3,\cdots\cdots 6$。状态变量 s_k 为第 k 阶段开始时产品存储量；决策变量 u_k 阶段订货量；d_k 为 k 阶段需求量。

状态转移方程：$s_{k+1}=s_k+u_k-d_k$；

允许决策集合 $D_k(s_k)=\left\{u_k:u_k\geqslant 0,d_k\leqslant u_k+s_k\leqslant \sum_{i=k}^{6}d_i\text{。}\right\}$

最优值函数 $f_k(s_k)$表示在第 k 阶段开始时存储为 s_k 时，从第一至第 k 阶段($k=1,2,3,4,5,6$)的最小存储费用。

解　(1)按照 $c(j,i)=c_j(\sum_{s=j}^{i})d_s)+\sum_{s-j}^{i-1}p_s(\sum_{i=k}^{6}d_t)$式计算

$c(j,i)$，$1\leqslant j\leqslant i$，$i=1,2,3,4,5,6$

$c(1,1)=50\times 825=41250$，

$c(1,2)=(50+55)\times 825+40\times 55=88825$，

$c(1,3)=825\times(50+55+50)+40\times(55+50)+30\times 50=133575$

$c(1,4)=825\times(50+55+50+45)+40\times(55+50+45)+30\times(50+45)+35\times 45$
$=175425$；

$c(1,5)=825\times(50+55+50+45+40)+40\times(55+50+45+40)+30\times(50+45+40)+35\times(45+40)+20\times 40=213425$；

$c(2,2)=775\times 55=42625$，

$c(2,3)=775\times(55+50)+30\times 50=82875$，

$c(2,4)=775\times(55+50+45)+30\times(50+45)+30\times45=120450$,

$c(2,5)=775\times(55+50+45+40)+30\times(50+45+40)+30\times(45+50)+20\times40$
$=154650$,

$c(2,6)=775\times(55+50+45+40+30)+30\times(50+45+40+30)+35\times(45+40$
$+30)+20\times(40+30)+40\times30=182075$;

$c(3,3)=850\times50=42500$,

$c(3,4)=850\times(50+45)+35\times45=82325$,

$c(3,5)=850\times(50+45+40)+35\times(45+40)+20\times40=117320$,

$c(3,6)=850\times(50+45+40+30)+30\times(45+40+30)+20\times(40+30)+40\times30$
$=146300$;

$c(4,4)=850\times45=38250$,

$c(4,5)=850\times(45+40)+20\times40=73050$,

$c(4,6)=850\times(45+40+30)+20\times(40+30)+40\times50=101150$;

$c(5,5)=775\times40=31000$,

$c(5,6)=775\times(40+30)+40\times30=55450$;

$c(6,6)=850\times30=24750$。

(2)按照递推关系式,有

$$\begin{cases} f_i=\min\limits_{1\leq j\leq i}[f_{j-1}+c(j,i)],i=1,2,3,\cdots6 \\ f_0=0 \end{cases}$$

$f_0=0$,

$f_1=f_0+c(1,1)=41250$,

$f_2=\min\{f_0+c(1,2),f_1+c(2,2)\}$
$=\min\{0+88825,41250+42625\}=83875$,

$f_3=\min\{f_0+c(1,3),f_1+c(2,3)+f_2+c(3,3)\}$
$=\min\{133575,41250+82875,83875+42500\}$
$=124125$,

$f_4=\min\{f_0+c(1,4),f_1+c(2,4),f_2+c(3,4),f_3+c(4,4)\}$
$=\min\{175425,41250+120675,83875+82835,124125+38250\}$
$=\min\{175425,161925,166200,162375\}$
$=161925$,

$f_5=\min\{f_0+c(1,5),f_1+c(2,5),f_2+c(3,5),f_3+c(4,5),f_4+c(5,5)\}$
$=\min\{213425,41250+155075,83875+117320,124125+73050,161925+31000\}$
$=\min\{213425,196325,201195,197175,192925\}=192925$,

$f_6=\min\{f_0+c(1,6),f_1+c(2,6),f_2+c(3,6),f_3+c(4,6),f_4+(5,6),f_5+c$
$(6,6)\}$
$=\min\{243125,41250+182075,83875+146300,124125+101150,161925+$
$55450,192925+24750\}$
$=\min\{243125,223325,230175,225275,217375,217675\}$
$=217375$。

于是，最优决策方案为：第 1 月初订货量为 50，第 2 月初订货量为 150，第 5 月初订货量为 70。

◎9.12 某罐头制造公司需要在近五周内采购一批原料，估计在未来五周内价格有波动，其浮动价格和概率如表 9—10 所示。试求各周以什么价格购入，使采购价格的数学期望值最小。

表 9—10

单　价	概　率
9	0.4
8	0.3
7	0.3

分析　本题是不确定性的采购问题，用动态规划方法处理，得出逆推关系式后即可求解。

解　这里价格是一个随机变量，是按某种已知的概率分布取值的。用动态规划方法处理，按采购期限将问题分为 5 个阶段，阶段变量 $k=1,2,\cdots,5$；

状态变量 y_k 表示第 k 周的实际价格；

决策变量 x_k，当 $x_k=1$ 时，表示第 k 周决定采购；当 $x_k=0$ 时，表示第 k 周决定等待；

y_{kE} 表示第 k 周决定等待，而在以后采取最优决策时采购价格的期望值。

最优值函数 $f_k(y_k)$ 表示第 k 周的实际价格为 y_k 时，从第 k 至第 5 周采取最优决策所得的最小期望值。因而可写出逆序递推关系式：

$$\begin{cases} f_k(y_k)=\min\{y_k,y_{kE}\}, & y_k\in S_k \\ f_5(y_k)=y_5, & y_5\in S_5 \end{cases}$$

其中，$S_k=\{9,8,7\}$，$k=1,2,3,4,5$。

由 y_{kE} 和 $f_k(y_k)$ 的定义可知

$$y_{kE}=Ef_{k+1}(y_{k+1})=0.4f_{k+1}(9)+0.3f_{k+1}(8)+0.3f_{k+1}(7)$$

并且得出最优决策为

$$x_k=\begin{cases} 1, 当\ f_k(y_k)=y_k \\ 0, 当\ f_k(y_k)=y_{kE} \end{cases}$$

从最后一周开始，逐步向前递推计算，具体计算过程如下：

$k=5$ 时，因 $f_5(y_5)=y_5$，$y_5\in S_5$，故有 $f_5(9)=9$，$f_5(8)=8$，$f_5(7)=7$，即在第五周时，若所需的原料尚未买入，则无论市场价格如何，都必须采购，不能再等。

$k=4$ 时，由 $y_{kE}=Ef_{k+1}(y_{k+1})=0.4f_{k+1}(9)+0.3f_{k+1}(8)+0.3f_{k+1}(7)$ 可知

$$y_{4E}=0.4\times9+0.3\times8+0.3\times7=8.1$$

于是

$$f_4(y_4)=\min_{y_4\in S_4}\{y_4,y_{4E}\}=\min_{y_4\in S_4}\{y_4,8.1\}=\begin{cases} 8.1, 若\ y_4=9 \\ 8, 若\ y_4=8 \\ 7, 若\ y_4=7 \end{cases}$$

故第四周的最优决策为

$$x_4=\begin{cases} 1(采购), 若\ y_4=8\ 或\ 7 \\ 0(等待), 若\ y_4=9 \end{cases}$$

同理可得

$$y_{3E}=0.4\times8.1+0.3\times8+0.3\times7=7.74$$

$$f_3(y_3)=\min_{y_3\in S_3}\{y_3,y_{3E}\}=\min_{y_3\in S_3}\{y_3,7.74\}=\begin{cases}7.74, & 若\ y_3=9\ 或\ 8\\ 7, & 若\ y_3=7\end{cases}$$

故第三周的最优决策为

$$x_3=\begin{cases}1(采购), 若\ y_3=7\\ 0(等待), 若\ y_3=9\ 或\ 8\end{cases}$$

$$y_{2E}=(0.4+0.3)\times7.74+0.3\times7=7.518$$

$$f_2(y_2)=\min_{y_2\in S_2}\{y_2,y_{2E}\}=\min_{y_2\in S_2}\{y_2,7.518\}=\begin{cases}7, & 若\ y_2=7\\ 7.518, & 若\ y_2=9\ 或\ 8\end{cases}$$

故第二周的最优决策为

$$x_2=\begin{cases}1(采购), 若\ y_2=7\\ 0(等待), 若\ y_2=9\ 或\ 8\end{cases}$$

$$y_{1E}=(0.4+0.3)\times7.518+0.3\times7=7.3626$$

故第一周的最优决策为

$$x_1=\begin{cases}1(采购), 若\ y_1=7\\ 0(等待), 若\ y_1=9\ 或\ 8\end{cases}$$

由上可知，最优策略为：在第 1、2、3 周时，若价格为 7 就采购，否则就等待；在第 4 周时，价格为 8 或 7 就采购，否则就等待；在第 5 周时，无论什么价格都要采购。

依照上述最优策略进行采购时，价格的数学期望为：

$$0.7\times7.3626+0.3\times7=7.25382$$

●9.13 求下列问题的最优解

(1) $\max z=10x_1+22x_2+17x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+4x_2+3x_3\leqslant20\\ x_i\geqslant0\ 且为整数(i=1,2,3)\end{cases}$$

(2) $\max z=x_1x_2x_3x_4$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3+2x_4=11\\ x_i\geqslant0\ 且为整数(i=1,2,3,4)\end{cases}$$

(3) $\max z=4x_1+5x_2+8x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3\leqslant10\\ x_1+3x_2+6x_3\leqslant13\\ x_i\geqslant0\ 且为整数(i=1,2,3)\end{cases}$$

(4) $\max z=g_1(x_1)+g_2(x_2)+g_3(x_3)$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant20\\ x_i\geqslant0\ 且为整数(i=1,2,3)\end{cases}$$

其中 x_i 与 $g_i(x_i)$ 的关系如下表所示。

表 9－11

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g_1(x_1)$	2	4	7	11	13	15	18	22	18	15	11
$g_2(x_2)$	5	10	15	20	24	18	12	9	5	3	1
$g_3(x_3)$	8	12	17	22	19	16	14	11	9	7	4

分析 本题为背包问题，是一个整数规划问题，用动态规划的方法求解。

解 (1)解动态规划方法来解，此问题变为求 $f_3(20)$。

$$f_3(20)=\max\{0+f_2(20),17+f_2(17),34+f_2(14),51+f_2(11),68+f_2(8),85+f_2(5),102+f_2(2)\};$$

$$f_2(20)=\max\{f_1(20),22+f_1(16),44+f_1(12),66+f_1(8),88+f_1(4),110+f_1(0)\};$$

$$f_2(17)=\max\{f_1(17),22+f_1(13),44+f_1(9),66+f_1(5),88+f_1(1)\};$$

$$f_2(14)=\max\{f_1(14),22+f_1(10),44+f_1(6),66+f_1(2)\};$$

$$f_2(11)=\max\{f_1(11),22+f_1(7),44+f_1(3)\};$$

$$f_2(8)=\max\{f_1(8),22+f_1(4),44+f_1(0)\};$$

$$f_2(5)=\max\{f_1(5),22+f_1(1)\};$$

$$f_2(2)=f_1(2)。$$

$f_1(w)=10\times[w/2]$，[]表示取整。

$f_1(20)=10\times10=100(x_1=10)$；　$f_1(17)=10\times8=80(x_1=8)$；

$f_1(16)=10\times8=80(x_1=8)$；　$f_1(13)=10\times6=60(x_1=6)$；

$f_1(12)=10\times6=60(x_1=6)$；　$f_1(14)=10\times7=70(x_1=7)$；

$f_1(11)=10\times5=50(x_1=5)$；　$f_1(9)=40(x_1=4)$；

$f_1(7)=30(x_1=3)$；　$f_1(5)=20(x_1=2)$；

$f_1(3)=10(x_1=1)$；　$f_1(1)=0(x_1=0)$；

$f_1(10)=50(x_1=5)$；　$f_1(8)=40(x_1=4)$；

$f_1(6)=30(x_1=3)$；　$f_1(4)=20(x_1=2)$；

$f_1(2)=10(x_1=1)$；　$f_1(0)=0(x_1=0)$。

所以有

$f_2(20)=\max\{100,102,104,106,108,110\}=110(x_1=0,x_2=5)$；

$f_2(17)=\max\{80,82,84,86,88\}=88(x_1=0,x_2=4)$；

$f_2(14)=\max\{70,72,74,76\}=76(x_1=1,x_2=3)$；

$f_2(11)=\max\{50,52,54\}=54(x_1=1,x_2=2)$；

$f_2(8)=\max\{40,42,44\}=44(x_0=0,x_2=2)$；

$f_2(5)=\max\{20,22\}=22(x_0=0,x_2=1)$；

$f_2(2)=10(x_0=1,x_2=0)$。

所以，$f_3(20)=\max\{110,105,110,105,112,107,112\}$，

故最优方案有两个：

①$x_1^*=0,x_2^*=2,x_3^*=4$；　②$x_1^*=1,x_2^*=0,x_3^*=6$。

(2)利用动态规划方法求解,此问题变为求 $f_4(11)$。而

$f_4(11)=\max\{0\cdot f_3(11),f_3(9),2f_3(7),3f_3(5),4f_3(3),5f_3(1)\}$

由此可见,要求出 $f_4(11)$,必须先计算 $f_3(9),f_3(7),f_3(5),f_3(3),f_3(1)$。

$f_3(9)=\max\{0\cdot f_2(9),f_2(6),2f_2(3),3f_2(0)\}$

$\quad=\max\{0,f_2(6),2f_2(3),3f_2(0)\}$;

$f_3(7)=\max\{0\cdot f_2(7),1f_2(4),2f_2(1)\}=\max\{0,f_2(4),2f_2(1)\}$;

$f_3(5)=\max\{0\cdot f_2(5),1\cdot f_2(2)\}=\max\{0,f_2(2)\}$;

$f_3(3)=\max\{0\cdot f_2(3),1\cdot f_2(0)\}=\max\{0,f_2(0)\}$;

$f_3(1)=\max\{0\cdot f_2(1)\}=0$

为求出 $f_3(9),f_3(7),f_3(5),f_3(3),f_3(1)$,必须先计算出 $f_2(6),f_2(4),f_2(3)$,$f_2(1),f_2(0)$。

$f_2(6)=\max\{0f_1(6),1f_1(4),2f_1(2),3f_1(0)\}$

$\quad=\max\{0,f_1(4),2f_1(2),3f_1(0)\}$;

$f_2(4)=\max\{0f_1(4),1f_1(2),2f_1(0)\}=\max\{0,f_1(2),2f_1(0)\}$;

$f_2(3)=\max\{0f_1(3),1f_1(1)\}=\max\{0,f_1(1)\}$;

$f_2(2)=\max\{0f_1(2),1f_1(0)\}=\max\{0,f_1(0)\}$;

$f_2(1)=0$。

同理可得 $f_2(0)=0$。

为了求出 $f_2(6),f_2(4),f_2(3),f_2(1),f_2(0)$,必须先计算出 $f_1(6),f_1(4),f_1(2)$,$f_1(1),f_1(0)$。

$f_1(6)=6,x_3=6;f_1(4)=4,x_3=4;f_1(2)=2,x_3=2;f_1(1)=1,x_3=1;f_1(0)=0$,$x_3=0$。

从而

$f_2(6)=\max\{0,f_1(4),2f_1(2),3f_1(0)\}=\max\{0,4,4,0\}=4,\quad x_1=1$ 或 $x_1=2$,

$f_2(4)=\max\{0,f_1(2),2f_1(0)\}=\max\{0,2,0\}=2,\quad x_1=1$,

$f_2(3)=\max\{0,f_1(1)\}=\max\{0,1\}=1,\quad x_1=1$,

$f_2(2)=0,f_2(1)=0,\quad x_1=0$,

$f_3(9)=\max\{0,f_2(6),2f_2(3),3f_2(0)\}=\max\{0,4,2,0\}=4,\quad x_2=1$,

$f_3(7)=\max\{0,f_2(4),2f_2(1)\}=\max\{0,2,0\}=2,\quad x_2=1$,

$f_3(5)=\max\{0,f_2(2)\}=0,\quad x_2=1$,

$f_3(3)=\max\{0,f_2(0)\}=0,\quad x_2=1,f_3(1)=0$,

$f_4(11)=\max\{0,f_3(9),2f_3(7),3f_3(5),4f_3(3),5f_3(1)\}=\max\{0,4,4,0,0,0\}$
$=4,x_4=1$ 或 $x_4=2$。

当 $x_3=4,x_1=1,x_2=1,x_4=1$ 时,$f_4(11)=4$;

当 $x_3=2,x_1=2,x_2=1,x_4=1$ 时,$f_4(11)=4$;

当 $x_3=2,x_1=1,x_2=1,x_4=2$ 时,$f_4(11)=4$。

故最优解有三个:

$\boldsymbol{X}^*=(1,1,4,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}^*=(2,1,2,1)^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{X}^*=(1,1,2,2)^{\mathrm{T}};z^*=4$

(3)利用动态规划方法求解,状态变量为两个而决策变量为一个,此问题变为求

$f_3(10,13)$。而

$$f_3(10,13)=\max\{8\times 0+f_2(10,13),8\times 1+f_2(9,7),8\times 2+f_2(8,1)\}$$
$$=\max\{f_2(10,13),8+f_2(9,7),16+f_2(8,1)\}$$

由此可见,要求出 $f_3(10,13)$,必须先计算 $f_2(10,13)$,$f_2(9,7)$,$f_2(8,1)$。

$$f_2(10,13)=\max\{0+f_1(10,13),5+f_1(9,10),10+f_1(8,7),15+f_1(7,4),20+f_1(6,1)\}$$
$$=\max\{f_1(10,13),5+f_1(9,10),10+f_1(8,7),15+f_1(7,4),20+f_1(6,1)\};$$

$$f_2(9,7)=\max\{5\times 0+f_1(9,7),5\times 1+f_1(8,4),5\times 2+f_1(7,1)\}=\max\{f_1(9,7),5+f_1(8,4),10+f_1(7,1)\};$$

$$f_2(8,1)=\max\{0+f_1(8,1)\}=\max\{f_1(8,1)\}。$$

由此可见,要求出 $f_2(10,13)$,$f_2(9,7)$,$f_2(8,1)$,必须先计算 $f_1(10,13)$,$f_1(9,10)$,$f_1(8,7)$,$f_1(7,4)$,$f_1(6,1)$,$f_1(9,7)$,$f_1(8,4)$,$f_1(7,1)$,$f_1(8,1)$。

$f_1(10,13)=40$,所以 $x_1=10$。

同理可求得

$f_1(9,10)=4\times 9=36$,所以 $x_1=9$;　$f_1(8,7)=4\times 7=28$,所以 $x_1=7$;

$f_1(7,4)=4\times 4=16$,所以 $x_1=4$;　$f_1(6,1)=4\times 1=4$,所以 $x_1=1$;

$f_1(9,7)=4\times 7=28$,所以 $x_1=7$;　$f_1(8,4)=4\times 4=16$,所以 $x_1=4$;

$f_1(7,1)=4\times 1=4$,所以 $x_1=1$;　$f_1(8,1)=4\times 1=4$,所以 $x_1=1$。

从而

$$f_2(10,13)=\max\{f_1(10,13),5+f_1(9,10),10+f_1(8,7),15+f_1(7,4),20+f_1(6,1)\}$$
$$=\max\{40,5+36,10+28,15+16,20+4\}=41,$$

所以 $x_2=1$;

$$f_2(9,7)=\max\{f_1(9,7),5+f_1(8,4),10+f_1(7,1)\}$$
$$=\max\{28,5+16,10+4\}=28,$$

所以 $x_2=0$;

$$f_2(8,1)=\max\{0+f_1(8,1)\}=4,$$

所以 $x_2=0$;

$$f_2(10,13)=\max\{0+f_2(10,13),8+f_2(9,7),16+f_2(8,1)\}$$
$$=\max\{41,8+28,16+4\}=41,所以\ x_3=0。$$

从而最优方案为:$x_3^*=0$,$x_2^*=1$,$x_1^*=9$;$z^*=41$。

(4)利用动态规划方法求解,此问题变为求 $f_3(20)$。而

$$f_3(20)=\max\{8+f_2(20),12+f_2(19),17+f_2(16),22+f_2(11),19+f_2(4)\}$$

由此可见,要求出 $f_3(20)$,必须先计算 $f_2(20)$,$f_2(19)$,$f_2(16)$,$f_2(11)$,$f_2(4)$。

$$f_2(20)=\max\{5+f_1(20),10+f_1(19),15+f_1(16),20+f_1(11),24+f_1(4)\};$$

$$f_2(19)=\max\{g_2(0)+f_1(19),g_2(1)+f_1(18),g_2(2)+f_1(15),g_2(3)+f_1(10),g_2(4)+f_1(3)\}$$
$$=\max\{5+f_1(19),10+f_1(18),15+f_1(15),20+f_1(10),24+f_1(3)\};$$

$f_2(16)=\max\{g_2(0)+f_1(16),g_2(1)+f_1(15),g_2(2)+f_1(12),g_2(3)+f_1(7),g_2(4)+f_1(0)\}$

$=\max\{5+f_1(16),10+f_1(15),15+f_1(12),20+f_1(7),24+f_1(0)\}$；

$f_2(11)=\max\{g_2(0)+f_1(11),g_2(1)+f_1(10),g_2(2)+f_1(7),g_2(3)+f_1(2)\}$；

$=\max\{5+f_1(11),10+f_1(10),15+f_1(7),20+f_1(2)\}$

$f_2(4)=\max\{g_2(0)+f_1(4),g_2(1)+f_1(3),g_2(2)+f_1(0)\}$

$=\max\{5+f_1(4),10+f_1(3),15+f_1(0)\}$

由此可见，要求出 $f_2(20),f_2(19),f_2(16),f_2(11),f_2(4)$，必须先计算 $f_1(20),f_1(19),f_1(18),f_1(16),f_1(15),f_1(11),f_1(10),f_1(7),f_1(4),f_1(3),f_1(0)$。

$f_1(20)=g_1(4)=13$，所以 $x_1=4$。

同理可求得

$f_1(19)=g_1(4)=13$，所以 $x_1=4$； $f_1(18)=g_1(4)=13$，所以 $x_1=4$；

$f_1(16)=g_1(4)=13$，所以 $x_1=4$； $f_1(15)=g_1(3)=11$，所以 $x_1=3$；

$f_1(12)=g_1(3)=11$，所以 $x_1=3$； $f_1(11)=g_1(3)=11$，所以 $x_1=3$；

$f_1(10)=g_1(3)=11$，所以 $x_1=3$； $f_1(7)=g_1(2)=7$，所以 $x_1=2$；

$f_1(4)=g_1(2)=7$，所以 $x_1=2$； $f_1(3)=g_1(1)=4$，所以 $x_1=1$；

$f_1(0)=g_1(0)=2$，所以 $x_1=0$； $f_1(2)=g_1(1)=4$，所以 $x_1=1$。

从而

$f_2(20)=\max\{5+f_1(20),10+f_1(19),15+f_1(16),20+f_1(11),24+f_1(4)\}$

$=\max\{5+13,10+13,15+13,20+11,24+7\}=31$，

所以 $x_2=3$ 或 $x_2=4$；

$f_2(19)=\max\{5+f_1(19),10+f_1(18),15+f_1(15),20+f_1(10),24+f_1(3)\}$

$=\max\{5+13,10+13,15+11,20+11,24+4\}=31$，

所以 $x_2=3$；

$f_2(16)=\max\{5+f_1(16),10+f_1(15),15+f_1(12),20+f_1(7),24+f_1(0)\}$

$=\max\{5+13,10+11,15+11,20+7,24+2\}=27$，

所以 $x_2=3$；

$f_2(11)=\max\{5+f_1(11),10+f_1(10),15+f_1(7),20+f_1(2)\}$

$=\max\{5+11,10+11,15+7,20+4\}=24$，

所以 $x_2=3$；

$f_2(4)=\max\{5+f_1(4),10+f_1(3),15+f_1(0)\}$

$=\max\{5+7,10+4,15+2\}=17$，

所以 $x_2=2$。

因为 $f_3(20)=\max\{8+f_2(20),12+f_2(19),17+f_2(16),22+f_2(11),19+f_2(4)\}$

$=\max\{8+31,12+31,17+27,22+24,19+17\}=46$，

所以 $x_3=3$。

故最优方案为：$x_1^*=1,x_2^*=3,x_3^*=3;z^*=46$。

小结 本题既有一维背包问题也有二维背包问题，用动态规划方法来解时，思想方法完

全类似。

◎9.14　某工厂生产三种产品，各产品重最与利润关系如下表所示。现将此三种产品运往市场出售，运输能力总重量不超过 6 吨。问如何安排运输使总利润最大？

表 9－12

种类	1	2	3
重量	2	3	4
利润	80	130	180

分析　根据题意得到数学模型，可知其为一维背包问题，用动态规划方法求解。

解　设运输三种产品的重量分别为 x_1, x_2, x_3，则有：

$$\max z = 80x_1 + 130x_2 + 180x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leqslant 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \text{ 且为整数} \end{cases}$$

求 $f_3(6) = \max\{f_2(6), 180 + f_2(2)\}$；

$f_2(6) = \max\{f_1(6), 130 + f_1(3), 260 + f_1(0)\}$；　$f_2(2) = f_1(2)$；

$$f_1(w) = \max_{\substack{2x_1 \leqslant w \\ x_1 \geqslant 0\text{且为整数}}} (80x_1) = 80 \times [w/2]$$

$f_1(6) = 80 \times 3 = 240 \quad (x_1 = 3)$；　$f_1(3) = 80 \times 1 = 80 \quad (x_1 = 1)$；

$f_1(2) = 80 \times 1 = 80 \quad (x_1 = 1)$；　$f_1(0) = 80 \times 0 = 0 \quad (x_1 = 0)$。

故

$f_2(6) = \max\{240, 210, 260\} = 260 (x_1 = 0, x_2 = 2)$；

$f_2(2) = 80 (x_1 = 1, x_2 = 0)$；　$f_3(6) = \max\{260, 260\} = 260$

即总利润最大为 260，最佳运输方案有两个：

(1)$x_1^* = 0, x_2^* = 2, x_3^* = 0$；　(2)$x_1^* = 1, x_2^* = 0, x_3^* = 1$。

○9.15　某工厂在一年内进行了 A、B、C 三种新产品试制，由于资金不足，估计在年内这三种新产品研制不成功的概率分别为 0.40、0.60、0.80，因而都研制不成功的概率为 $0.40 \times 0.60 \times 0.80 = 0.192$。为了促进三种新产品的研制，决定增拨 2 万元的研制费，并要资金集中使用，以万元为单位进行分配。其增拨研制费与新产品不成功的概率如表 9－13 所示。试问如何分配费用，使这三种新产品研制都不成功的概率为最小。

表 9－13

新产品 / 研制费 S	不成功概率		
	A	*B*	*C*
0	0.40	0.60	0.80
1	0.20	0.40	0.50
2	0.15	0.20	0.30

解　按产品种类将问题分为 3 个阶段，阶段变量 $k = 1, 2, 3$；

状态变量 s_k 表示分配给第 k 至第 3 种产品的研制费用，$s_1 = 2$；

决策变量 x_k 表示分配给第 k 种产品的研制费用；

状态转移方程：$s_{k+1} = s_k - x_k$；

阶段指标 $p_k(x_k)$ 表示将 x_k 万元的研制费分配给第 k 种产品，该产品不成功的概率；最优值函数 $f_k(s_k)$ 表示将 s_k 万元的研制费分配给第 k 至第 3 种产品，第 k 至第 3 种产品都不成功的概率；

递推关系式：$\begin{cases} f_k(s_k)=\min\limits_{0\leqslant x_k\leqslant s_k}[p_k(x_k)\cdot f_{k+1}(s_{k+1})],k=3,2,1 \\ f_4(s_4)=1 \end{cases}$

计算过程如表 9－14 所示：

表 9－14

k	s_k	x_k	$p_k(x_k)$	$f_{k+1}(s_{k+1})$	$p_k(x_k)\cdot f_{k+1}(s_{k+1})$	$f_k(s_k)$	x_k^*
3	0	0	0.8	1	0.8	0.8	0
	1	1	0.5	1	0.5	0.5	1
	2	2	0.3	1	0.3	0.3	2
2	0	0	0.6	0.8	0.48	0.48	0
	1	0	0.6	0.5	0.3	0.3	0
		1	0.4	0.8	0.32		
	2	0	0.6	0.3	0.18	0.16	2
		1	0.4	0.5	0.2		
		2	0.2	0.8	0.16		
1	2	0	0.4	0.16	0.64	0.06	1
		1	0.2	0.3	0.06		
		2	0.15	0.48	0.072		

由计算表格的结果可以看出，三种新产品研制都不成功的概率最小为 0.06。

按计算表格的顺序反推算，可知最优分配方案为：$x_1^*=1,x_2^*=0,x_3^*=1$。即分配给 A 产品 1 万元，B 产品不分配，分配给 C 产品 1 万元。

◎**9.16** 某一印刷厂有六项加工任务，对印刷车间和装订车间所需时间(单位为天)如表 9－15 所示，试求最优的加工顺序和总加工天数。

表 9－15

车间 \ 任务	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
印刷车间	3	10	5	2	9	11
装订车间	8	12	9	6	5	2

分析 本题为排序问题，先作加工天数矩阵，再根据最优排序规则求解。

解 本题的解题过程同本章典型例题的例 1。

◎**9.17** 试制定五年中的一台机器更新策略，使总收入达到最大。设 $\alpha=1$(α 为折扣因子，表示一年以后的单位收入的价值视为现年的 α 单位)，$T=2$(T 表示在第一年开始时，正在使用的机器的役龄)，有关数据如表 9－16 所示。

表 9－16

年序及机龄 项目	第一年					第二年				第三年		
	0	1	2	3	4	0	1	2	3	0	1	2
收 入	20	19	18	16	14	25	23	22	20	27	24	22
运行费用	4	4	6	6	8	3	4	6	7	3	3	4
更新费用	25	27	30	32	35	27	29	32	34	29	30	31

年序及机龄 项目	第四年		第五年	期前				
	0	1	0	2	3	4	5	6
收 入	28	26	30	16	14	14	12	12
运行费用	2	3	2	6	6	7	7	8
更新费用	30	31	32	30	32	34	34	36

分析 本题内设备更新问题，“K”表示保留使用，“R”表示更新机器。

解 $\alpha=1,T=2,n=5$。设

$I_j(t)$表示第 j 年机器役龄为 t 年的一台机器运行所得收入；

$O_j(t)$表示第 j 年机器役龄为 t 年的一台机器所需运行费用；

$C_j(t)$表示第 j 年机器役龄为 t 年的一台机器更新所需的更新净费用；

$g_j(t)$表示第 j 年开始使用役龄为 t 年的机器时，从第 j 至第 5 年的最佳收入；

$x_j(t)$表示给出 $g_j(t)$时在第 j 年开始时的决策。

则递推关系式

$$\begin{cases} g_j(t)=\max\begin{bmatrix} R:I_j(0)-O_j(0)-C_j(t)+g_{j+1}(1) \\ K:I_j(t)-O_j(t)+g_{j+1}(t+1) \end{bmatrix} \\ g_6(t)=0,t=1,,\cdots,5 \\ j=1,2,\cdots,5,t=1,2,\cdots,j-1 \end{cases}$$

当 $j=5$ 时，$g_5(t)=\max\begin{bmatrix} R:I_5(0)-O_5(0)-C_5(t)+g_6(1) \\ K:I_5(t)-O_5(t)+g_6(t+1) \end{bmatrix}$

$g_5(1)=23$，所以 $x_5(1)=K$； $g_5(2)=18$，所以 $x_5(2)=K$；

$g_5(3)=13$，所以 $x_5(3)=K$； $g_5(4)=6$，所以 $x_5(4)=K$；

$g_5(6)=4$，所以 $x_5(6)=K$。

当 $j=4$ 时，$g_4(t)=\max\begin{bmatrix} R:I_4(0)-O_4(0)-C_4(t)+g_5(1) \\ K:I_4(t)-O_4(t)+g_5(t+1) \end{bmatrix}$

$g_4(1)=39$，所以 $x_4(1)=K$； $g_4(2)=29$，所以 $x_4(2)=K$；

$g_4(3)=17$，所以 $x_4(3)=R$； $g_4(5)=15$，所以 $x_4(5)=R$。

当 $j=3$ 时，$g_3(t)=\max\begin{bmatrix} R:I_3(0)-O_3(0)-C_3(t)+g_4(1) \\ K:I_3(t)-O_3(t)+g_4(t+1) \end{bmatrix}$

$g_3(1)=48$，所以 $x_3(1)=K$； $g_3(2)=33$，所以 $x_3(2)=R$；

$g_3(4)=29$，所以 $x_3(4)=R$。

当 $j=2$ 时，$g_2(t)=\max\begin{bmatrix}R:I_2(0)-O_2(0)-C_2(t)+g_3(1)\\K:I_2(t)-O_2(t)+g_3(t+1)\end{bmatrix}$

$g_2(1)=48$，所以 $x_2(1)=K$；　$g_2(3)=38$，所以 $x_2(3)=R$。

当 $j=1$ 时，$g_1(t)=\max\begin{bmatrix}R:I_1(0)-O_1(0)-C_1(t)+g_2(1)\\K:I_1(t)-O_1(t)+g_2(t+1)\end{bmatrix}$

$g_1(2)=48$，所以 $x_1(2)=K$。

故最大总收入为 48，最佳策略如表 9－17 所示。

表 9－17

年度	1	2	3	4	5
机龄	2	3	1	2	3
最佳策略	K	R	K	K	K

●**9.18** 求解六个城市旅行推销员问题，其距离矩阵如表 9－18 所示。设推销员从 1 城出发，经过每个城市一次且仅一次，最后回到 1 城。问按怎样的路线走，使总的行程最短。

表 9－18

距离 i / j	1	2	3	4	5	6
1	0	10	20	30	40	50
2	12	0	18	30	25	21
3	23	9	0	5	10	15
4	34	32	4	0	8	16
5	45	27	11	10	0	18
6	56	22	16	20	12	0

分析　本题为货郎担问题，属于组合优化问题，当城市数量(本题为 6 个)不太大时，利用动态规利求解是很方便的。

解　从 1 城出发最后回到 1 城中间要经过五个城市，因此将问题划分为五个阶段，阶段变量 $k=1,2,3,4,5$；

由于规定推销员是从城市 1 开始的，设推销员走到 i 城，记 $N_i=\{2,3,4\cdots,i-1,i+1,\cdots,n\}$ 表示由 1 城到 i 城的中间城市的集合；

S 表示到达 i 城之前中途所经过的城市的集合，则有 $S\subseteq N_i$。

因此，可选取 (i,S) 作为描述过程的状态变量，决策为由一个城市走到另一个城市，并定义最优值函数 $f_k(i,S)$ 为从 1 城开始经由 k 个中间城市的 S 集到 i 城的最短路线的距离，则可写出动态规划的递推关系式

$$f_k(i,S)=\min_{j\in S}[f_{k-1}(j,S\backslash\{j\}+d_{ji}],k=1,2,3,4,5;i=2,3,4,5,6;S\subseteq N_i$$

边界条件为 $f_0(i,\Phi)=d_{1i}$，$p_k(i,S)$ 为最优决策函数，它表示从 1 城开始经 k 个中间城市的 S 集到 i 城的最短路线上紧挨着 i 城前面的那个城市。

由边界条件可知

$f_0(2,\Phi)=d_{12}=10$；　$f_0(3,\Phi)=d_{13}=20$；　$f_0(4,\Phi)=d_{14}=30$；

$f_0(5,\Phi)=d_{15}=40$；　$f_0(6,\Phi)=d_{16}=50$。

当 $k=1$ 时，即从 1 城开始，中间经由一个城市到达 i 城的最短距离是

$f_1(2,\{3\})=f_0(3,\Phi)+d_{32}=20+9=29$；　$f_1(2,\{4\})=62$；

$f_1(2,\{5\})=67$；　$f_1(2,\{6\})=72$；

$f_1(3,\{2\})=28$；　$f_1(3,\{4\})=34$；　$f_1(3,\{5\})=51$；　$f_1(3,\{6\})=66$；

$f_1(4,\{2\})=40$；　$f_1(4,\{3\})=25$；　$f_1(4,\{5\})=50$；　$f_1(4,\{6\})=70$；

$f_1(5,\{2\})=35$；　$f_1(5,\{3\})=30$；　$f_1(5,\{4\})=38$；　$f_1(5,\{6\})=62$；

$f_1(6,\{2\})=31$；　$f_1(6,\{3\})=35$；　$f_1(6,\{4\})=46$；　$f_1(6,\{5\})=58$。

当 $k=2$ 时，即从 1 城开始，中间经由两个城市(顺序随便)到达 i 城的最短距离是

$f_2(2,\{3,4\})=\min\{f_1(3,\{4\})+d_{32},f_1(4,\{3\})+d_{42}\}=\min\{34+9,25+32\}=43$，

所以，$p_2(2,\{3,4\})=3$；

$f_2(2,\{3,5\})=5$；　$f_2(2,\{3,6\})=6$；　$f_2(2,\{4,5\})=5$；　$f_2(2,\{4,6\})=6$；

$f_2(2,\{5,6\})=6$；　$f_2(3,\{2,4\})=4$；　$f_2(3,\{2,5\})=5$；　$f_2(3,\{2,6\})=6$；

$f_2(3,\{4,5\})=5$；　$f_2(3,\{4,6\})=6$；　$f_2(3,\{5,6\})=5$；　$f_2(4,\{2,3\})=3$；

$f_2(4,\{2,5\})=5$；　$f_2(4,\{2,6\})=6$；　$f_2(4,\{3,5\})=5$；　$f_2(4,\{3,6\})=6$；

$f_2(4,\{5,6\})=5$；　$f_2(5,\{2,3\})=3$；　$f_2(5,\{2,4\})=4$；　$f_2(5,\{2,6\})=6$；

$f_2(5,\{3,4\})=4$；　$f_2(5,\{3,6\})=6$；　$f_2(5,\{4,6\})=6$；　$f_2(6,\{2,3\})=3$；

$f_2(6,\{2,4\})=4$；　$f_2(6,\{2,5\})=5$；　$f_2(6,\{3,4\})=4$；　$f_2(6,\{3,5\})=5$；

$f_2(6,\{4,5\})=5$。

当 $k=3$ 时，即从 1 城开始，中间经由三个城市(顺序随便)到达 i 城的最短距离是

$p_3(2,\{3,4,5\})=3$；　$p_3(2,\{3,4,6\})=6$；　$p_3(2,\{3,5,6\})=6$；

$p_3(2,\{4,5,6\})=6$；　$p_3(3,\{2,4,5\})=4$；　$p_3(3,\{2,4,6\})=4$；

$p_3(3,\{2,5,6\})=5$；　$p_3(3,\{4,5,6\})=5$；　$p_3(4,\{2,3,5\})=5$；

$p_3(4,\{2,3,6\})=3$；　$p_3(4,\{2,5,6\})=5$；　$p_3(4,\{3,5,6\})=5$；

$p_3(5,\{2,3,4\})=4$；　$p_3(5,\{2,4,6\})=4$；　$p_3(5,\{2,3,6\})=6$；

$p_3(5,\{3,4,6\})=6$；　$p_3(6,\{2,3,4\})=4$；　$p_3(6,\{2,3,5\})=5$；

$p_3(6,\{2,4,5\})=4$；　$p_3(6,\{3,4,5\})=5$。

当 $k=4$ 时，即从 1 城开始，中间经由四个城市(顺序随便)到达 i 城的最短距离是

$p_4(2,\{3,4,5,6\})=6$；　$p_4(3,\{2,4,5,6\})=4$；　$p_4(4,\{2,3,5,6\})=3$；

$p_4(5,\{2,3,4,6\})=4$；　$p_4(6,\{2,3,4,5\})=5$。

当 $k=5$ 时，即从 1 城开始，中间经由五个城市(顺序随便)回到 1 城的最短距离是

$p_5(1,\{2,3,4,5,6\})=3$。

由此可知推销员最短路线为

$$1\to2\to6\to5\to4\to3\to1$$

最短距离为 80。

小结　实际中很多问题可归结为货郎担问题，如物资运输路线中，汽车应走怎样的路线使路程最短等等。

第十章

图与网络优化

内容提要

一、图与树的基本概念

1. 图的基本概念

(1)两点之间的不带箭头的联线称为边,带箭头的联线称为弧。

(2)如果一个图 G 是由点及边所构成的,则称之为无向图(也简称为图),记为 $G=(V,E)$,式中 V,E 分别是 G 的点集合和边集合,一条联结点 $v_i,v_j\in V$ 的边记为 $[v_i,v_j]$(或$[v_j,v_i]$)。

(3)如果一个图 D 是由点及弧所构成的,则称为有向图,记为 $D=(V,A)$,式中 V,A 分别表示 D 的点集合和弧集合,一条方向是从 v_i 指向 v_j 的弧记为(v_i,v_j)。

(4)在无向图 $G=(V,E)$中,若边 $e=[u,v]\in E$,则 u,v 是 e 的端点,也称 u,v 是相邻的,称 e 是点 u(及点 v)的关联边;若图 G 中,某个边的两个端点相同,则称 e 是环;若两点之间有多于一条的边,称这些为多重边。一个多环无多重边的图形称为简单图,一个无环,但允许有多重边的图称为多重图。

图 10—1

以点 v 为端点的边的个数称为 v 的次,记为 $d_G(v)$或 $d(v)$。在图 10—1 中,$d(v_1)$

$=4, d(v_2)=3, d(v_3)=3, d(v_4)=4$(环 e_7 在计算 $d(v_4)$时算作两次)。

称次为 1 的点为悬挂点,悬挂点的关联边称为悬挂边,次为零的点称为弧立点。

(5)**定理** 1:图 $G=(V,E)$中,所有点的次之和是边数的两倍,则

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2q$$

次为奇数的点称为奇点,否则称为偶点。

(6)**定理** 2:任一个图中,奇点的个数为偶数。

(7)图 G 中,若任何两个点之间至少有一条链,则称 G 是连通图,否则称为不连通图。若 G 是不连通图,它的每个连通的部分称为 G 的一个连通分图(也简称分图)。如图 10－2 是一个不连通图,它有两个连通分图。

图 10－2

给了一个图 $G=(V,E)$,如果图 $G'=(V',E')$。做 $V=V'$,及 $E'\subseteq E$,则称 G' 是 G 的一支撑子图。

设 $v\in V(G)$用 $G-v0$ 表示从图 G 中去掉点 v 及 v 的关联后得到的一个图。

例如若 G 如图 10－3(a),所示,则 $G-v_3$ 如图 10－3(b)所示,图 10－3(c)是图 G 的一个支撑子图。

图 10－3

(8)设给一个自向图,$D=(V,A)$从 D 中去掉所有弧上的箭头,就得到一个无向图,称之为 D 的基础图,记之为 $G(D)$。

给 D 中的一条弧 $a=(u,v)$,称 u 为 a 的始点,v 为 a 的终点,称弧 a 是从 u 指向 v 的。

如果$(v_{i_1}, a_{i_1}, v_{i_2}, a_{i_2}, \cdots, v_{i_{k-1}}, a_{i_{k-1}}, v_{i_k})$是 D 中的一条链,并且对 $t=1,2,\cdots,k-1$,均有 $a_{i_t}=(v_{i_t}, v_{i_{t+1}})$,称之为从 v_{i_1} 到 v_{i_k} 的一条路。若路的第一个点和最后一点相同,则称之为回路。类似定义初等路(回路)。

2. 树

(1)树的定义

树图(简称树,记作 $T(V,E)$)是一类简单而十分有用的图。树图的定义是无圈的

连通图。

(2)树的性质

根据树的定义，可以推导出树的以下性质：

性质 1　任何树中必存在次为 1 的点。

性质 2　具有 n 个顶点的树的边数恰好为 $(n-1)$ 条。

性质 3　任何具有 n 个点、$(n-1)$ 条边的连通图是树图。

以上性质说明：

1. 树是无圈连通图中边数最多的，在树图上只要任意再加上一条边，必定会出现圈。
2. 由于树图是无圈的连通图，即树图的任意两个点之间有一条且仅有一条惟一通路。

二、最小树

1. 定义

(1)赋权图：给一个图 $G=(V,E)$，对 G 中每条边 $[v_i,v_j]$ 相应地有一个 w_{ij}（一般地 $w_{ij}\geqslant 0$），则称 G 为一个赋权图；而 w_{ij} 称边 $[v_i,v_j]$ 上的权。

(2)最小支撑树：若 $T=(V,E')$ 为图 $G=(V,E)$ 中的一个支撑，定义 T 中的权为 $W(T)=\sum\limits_{[v_i,v_j]\in T} w_{ij}$ 。如果 G 中存在一个支撑树 T^*，其权 $W(T^*)=\min\limits_{T} W(T)$，则称 T^* 为 G 的最小支撑树。

2. 求法——破圈法，避圈法

(1)破圈法方法是：从网络图 N 中任取一回路，去掉这个回路中权数最大的一条边，得一子网络图 N_1。在 N_1 中再任取一回路，再去掉回路中权数最大的一条边，得 N_2。如此继续下去，一直到剩下的子图中不再含回路为止。该子图就是 N 的最小部分树。

(2)避圈法方法是：

① 在连通图中任取一条边 e_1，找一条与 e_1 不构成圈的另一条边 e_2，继续此过程，直到找不出这样的边使其与已选的边不构成圈为止，这些边所构成的图便是一个支撑树。

② 在赋权图中，首先选一条最小权的边，在往后的每步中也总是从未被选取的边中选权最小的边，并使之与已选的边不构成圈（若每步中有两条以上的权最小边，则任选其中一条）。重复上述步骤，直到选不出这样的边为止，由这些选出的边构成的图就是一个最小支撑树。此方法称为克鲁斯卡尔算法。

三、网络最短路

1. 最短路定义

最短路问题是图论中十分重要的最优化问题之一。它经常被用于解决生产实际中诸如管线铺设、线路安排、工厂布局、设备更新等优化问题。

最短路问题的一般提法：给定一个赋权有向图 $D=\{V,A\}$，对于每一个弧 $a=(v_i,$

v_j)，相应有一个权 w_{ij}。v_s, v_t 是 D 中给定的始点与终点。设 P 是 D 中从 v_s 到 v_t 的任意一条路，定义路 P 的权是 P 中所有弧的权值之和，记为 $w(P)$。最短路问题就是要在所有从 v_s 到 v_t 的路 P 中，寻找一个权值最小的路 P_0，使

$$w(P_0)=\min_{P} w(P)$$

称 P_0 是从 v_s 到 v_t 的最短路。P_0 的权值 $w(P_0)$ 也称为从 v_s 到 v_t 的最短距离，记为 $d(v_s, v_t)$。

2. **最短路求法——迪克斯特拉算法**

这种算法的基本思路是：假定 $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4$ 是 $v_1 \to v_4$ 的最短路（见图 10－4），则 $v_1 \to v_2 \to v_3$ 一定是 $v_1 \to v_3$ 的最短路，$v_2 \to v_3 \to v_4$ 一定是 $v_2 \to v_4$ 的最短路。否则，设 $v_1 \to v_3$ 之间的最短路为 $v_1 \to v_5 \to v_3$，就 $v_1 \to v_5 \to v_3 \to v_4$ 的路必小于 $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4$，这与原假设矛盾。

图 10－4

若用 d_{ij} 表示图中两相邻点 i 与 j 的距离，若 i 与 j 不相邻，令 $d_{ij}=\infty$，显然 $d_{ii}=0$，若用 L_{si} 表示从 s 点到 i 点的最短距离，现要求从 s 点到某一点 t 的最短路用迪克斯特拉算法时步骤如下：

(1)从点 s 出发，因 $L_{ss}=0$，将此值标注在 s 旁的小方框内，表示 s 点已标号；

(2)从 s 点出发，找出与 s 相邻的点中距离最小的一个，设为 r。将 $L_{sr}=L_{ss}+d_{sr}$ 的值标注在 r 旁的小方框内，表明点 r 也已标号；

(3)从已标号的点出发，找出与这些点相邻的所有未标号点 p。若有 $L_{sp}=\min\{L_{ss}+d_{sp}, L_{sr}+d_{rp}\}$，则对 p 点标号，并将 L_{sp} 的值标注在 p 点旁的小方框内；

(4)重复第(3)步，一直到 t 点得到标号为止。

四、最大流最小截

1. **定义及相关定理**

许多系统中都包含了流量问题，例如网络系统中有信息流，公路系统中有车辆流，金融系统中有资金流等。

(1)网络

已知一个赋权有向图 $D=(V,A)$ 在 V 中指定一个发点 v_s，和一个收点 v_t，其他的点为中间点。对于 D 中每一条弧 (v_i, v_j) 都有一个权 $c_{ij} \geqslant 0$，称为弧的容量，D 也称为容量网络，简称网络，记作 $D=(V,A,C)$。

网络 D 上的流，是指定义在弧集合上的一个函数 $f=\{f(v_i, v_j)\}$，$f(v_i, v_j)$ 表示弧 (v_i, v_j) 上的流量，简记为 f_{ij}。

在公路系统中，容量 C_{ij} 对应于公路的最大通过能力，流量 f_{ij} 对应于公路上的车流量。

(2)可行流

若 $D=(V,A,C)$ 中由 v_s 到 v_t 各条弧上的流量 $f=\{f_{ij}\}$ 满足以下条件，则称为可行流：

① 容量限制条件：$0\leqslant f_{ij}\leqslant c_{ij}$

② 平衡条件：对于发点 v_s，有 $\sum\limits_{(v_s,v_j)\in A} f_{sj}-\sum\limits_{(v_j,v_s)\in A} f_{js}=v(f)$；

对于收点 v_t，有 $\sum\limits_{(v_t,v_j)\in A} f_{tj}-\sum\limits_{(v_j,v_t)\in A} f_{jt}=-v(f)$；

对于中间点，有 $\sum\limits_{(v_i,c_j\in A)} f_{ij}-\sum\limits_{(v_j,c_i\in A)} f_{ji}=0$。

其中发点 v_s 的总流出量(或收点 v_t 的总流入量)$v(f)$称为这个可行流的流量。

可行流总是存在的，例如若所有弧的流量 $f_{ij}=0$，就可得到流量 $v(f)=0$ 的可行流，简称零流。

最大流问题就是在给定网络 D 上寻求一个可行流 f，使其流量 $v(f)$ 达到最大值。

(3)增广链

设 f 是网络 $D=(V,A,C)$ 上的一个可行流，μ 是从 v_s 到 v_t 的一条链，若 μ 满足：

① 在弧$(v_i,v_j)\in\mu^+$上，有 $0\leqslant f_{ij}\leqslant c_{ij}$，即 μ^+ 中的每条弧为非饱和弧；

② 在$(v_i,v_j)\in\mu^-$上，有 $0<f_{ij}\leqslant c_{ij}$，即 μ^- 中的每条弧为非零流弧。

则称 μ 为关于可行流 f 的一条增广链。

(4)截集与截量

① 在网络 $D=(V,A,C)$ 中，若点集 V 被剖分为两个非空集合 V_1 和 $\overline{V}_1$，使 $v_s\in V_1$，$v_t\in\overline{V}_1$，则称弧集$(V_1,\overline{V}_1)$为分离 v_s 和 v_t 的截集。

② 给定一个截集$(V_1,\overline{V}_1)$，称此截集中所有弧的容量之和为这个截集的容量(简称为截量)，记作 $c(V_1,\overline{V}_1)$，即

$$c(V_1,\overline{V}_1)=\sum_{(v_i,v_j)\in(V_1,\overline{V}_1)} c_{ij}$$

(5)最大流与最小截

① 任一个可行流的流量都不会超过任一截集的截量，即

$$v(f)\leqslant c(V_1,\overline{V}_1)$$

② 若对于一个可行流 f^*，网络中有一个截集$(V_1^*,\overline{V}_1^*)$使得 $v(f^*)=c(V_1^*,\overline{V}_1^*)$，则 f^* 必是最大流，而$(V_1^*,\overline{V}_1^*)$必是 D 中所有截集中的最小截集。

③ 最大流量最小截量定理：任一网络 D 中，从 v_s 到 v_t 的最大流的流量等于分离 v_s,v_t 的最小截集的截量。

(6)可行流是最大流的判定定理

D 中一个可行流 f^* 是最大流的充分必要条件是不存在关于 f^* 的增广链。

2. 算法——福特－福克森标号算法

从一个可行流出发(若网络中没有给定 f，则可以设 f 是零流)，经过标号过程与调整过程。

① 标号过程

在这个过程中，网络中的点或者是标号点(又分为已检查和未检查两种)，或者是

未标号点，每个标号点的标号包含两部分：第一个标号表示它的标号是从哪一点得到的，以便找出增广链，第二个标号是为确定增广链的调整量 θ 用的。

标号过程开始总先给 v_s 标上 $(0,\infty)$，这时 v_s 是标号而未检查的点，其余都是未标号点。一般地取一个标号而未检查的点 v_i，对一切未标号的点 v_j。

(a)若在弧 (v_i,v_j) 上，$f_{ij}<c_{ij}$，则给 v_j 标号 $(v_i,l(v_j))$。这里

$$l(v_j)=\min=[l(v_i),c_{ij}-f_{ij}]$$

这时点 v_j 成为标号而未检查的点。

(b)若在弧 (v_j,v_i) 上，$f_{ji}>0$，则给 v_j 标号 $(-v_i,l(v_j))$，这里

$$l(v_j)=\min[l(v_i),f_{ji}]$$

这时点 v_j 成为标号而未检查的点。

于是 v_i 成为标号而已检查过的点。重复上述步骤，一旦 v_t 被标上号，得到一条从 v_s 到 v_t 的增广链 μ，转入调整过程。

若所有标号都是已检查过，而标号过程进行不下去，则算法结束，这时的可行流就是最大流。

② 调整过程

首先按 v_t 及其它点的第一个标号，利用“反向追踪”的办法，找出增广链 μ。例如设 v_t 的第一个标号为 v_k（或 $-v_k$），则弧 (v_k,v_t)（或相应地 (v_t,v_k)）是 μ 上的弧。接下来检查 v_k 的第一个标号，若为 v_i（或 $-v_i$），则找出 (v_i,v_k)（或相应地 (v_k,v_i)）。再检查 v_i 的第一个标号，依此下去，直到 v_s 为止。这时被找出的弧就构成了增广链 μ。令调整量 θ 是 $l(v_t)$，即 v_t 的第二个标号。

令
$$f'_{ij}=\begin{cases}f_{ij}+\theta,(v_i,v_j)\in\mu^+\\ f_{ij}-\theta,(v_i,v_j)\in\mu^-\\ f_{ij}, \quad (v_i,v_j)\overline{\in}\mu\end{cases}$$

去掉所有的标号，对新的可行流 $f'=\{f_{ij}'\}$，重新进入标号过程。

典型例题与解题技巧

【例 1】 求该图中从 v_1 到 v_7 的最短路。图如下图所示：

图 10－5

解题分析　用迪克斯特拉算法求解。

解题过程　步骤如下：

(1)从点 v_1 出发，对 v_1 标号，将 $L_{11}=0$ 标注在 v_1 旁的小方框内。令 $v_1\in V$，其

余点属于 $\overline{V}$(见图 10－6(a))；

(2)同 v_1 相邻的未标号点有 v_2、v_3。$L_{1r}=\min\{d_{12},d_{13}\}=\min\{5,2\}=2=L_{13}$，即对点 v_3 标号，将 L_{13} 的值标注在 v_3 旁的小方框内。将 $[v_1,v_3]$ 加粗，并令 $V\cup v_3\to V$，$\overline{V}\setminus v_3\to\overline{V}$(见图 10－6(b))；

(3)同标号点 v_1、v_3 相邻的未标号点有 v_2、v_4、v_6，因为

$$L_{1p}=\min\{L_{11}+d_{12},L_{13}+d_{34},L_{13}+d_{36}\}$$
$$=\min\{0+5,2+7,2+4\}=5=L_{12}$$

故对 v_2 点标号，将 L_{12} 的值标注在 v_2 点旁的小方框内，将 $[v_1,v_2]$ 加粗，并令 $V\cup v_2\to V$，$\overline{V}\setminus v_2\to\overline{V}$(见图 10－7(a))；

图 10－6

图 10－7

(4)同标号点 v_1、v_2、v_3 相邻的未标号点有 v_5、v_4、v_6，有

$$L_{1p}=\min\{L_{12}+d_{25},L_{12}+d_{24},L_{13}+d_{34},L_{13}+d_{36}\}$$
$$=\min\{5+7,5+2,2+7,2+4\}=6=L_{16}$$

故对点 v_6 标号，将 L_{16} 的值标注在 v_6 点旁的小方框内，将 $[v_3,v_6]$ 加粗，并令 $V\cup v_6\to V$，$\overline{V}\setminus v_6\to\overline{V}$(见图 10－7(b))；

(5)同标号点 v_1、v_2、v_3、v_6 相邻的未标号点有 v_4、v_5、v_7，有

$$L_{1p}=\min\{L_{12}+d_{25},L_{12}+d_{24},L_{13}+d_{34},L_{16}+d_{64},L_{16}+d_{65},L_{16}+d_{67}\}$$
$$=\min\{5+7,5+2,2+7,6+2,6+1,6+6\}=7=L_{14}=L_{15}$$

故对点 v_4 和 v_5 同时标号，将 $L_{14}=L_{15}=7$ 的值分别标注在 v_4 和 v_5 点旁的小方框内，将 $[v_2,v_4]$ 及 $[v_6,v_5]$ 加粗，并令 $V\cup v_4\cup v_5\to V$，$\overline{V}\setminus(v_4\cup v_5)\to\overline{V}$

（见图 10－8(a))；

(6)同各标号点相邻的未标号点只有 v_7，因为

$$L_{17}=\min\{L_{15}+d_{57},L_{16}+d_{67}\}=\min\{7+3,6+6\}=10$$

故在点 v_7 旁小方框内标注 $L_{17}=10$，加粗$[v_5,v_7]$(见图 10－8(b))图 10－8(b)中的粗线表明从点 v_1 到网络中其他各点的最短路，各点旁方框中的数字是从 v_1 点到各点的最短距离。

图 10－8

【例 2】 求图 10－9 中 v_1 到 v_7 的最短路。

解题分析　此题用迪克斯特拉算法求解。

图 10－9

解题过程　$l_2=\min[+\infty,l_1+w_{12}]=\min[+\infty,0+4]=4$

$l_3=\min[+\infty,l_1+w_{13}]=\min[+\infty,0+6]=6$

$l_4=\min[+\infty,l_1+w_{14}]=\min[+\infty,0+5]=5$

修改 v_2,v_3,v_4 的 T 标号，分别为(4,1)，(6,1)，(5,1)。

(3)比较所有 T 标号 l_j，得 l_2 最小，v_2 改为 P 标号。

$i=1$

(2)v_2 与 v_3 之间有弧(v_2,v_3)。

$l_3=\min[6,l_2+w_{23}]=\min[6,4+1]=5$

修改 v_3 的 T 标号为(5,2)。

(3)l_3,l_4 在所有 T 标号中同为最小，v_3,v_4 同时改为 P 标号。

$i=2$

(2)v_3 与 v_6 之间有弧(v_3,v_6)。

$l_6=\min[+\infty,l_3+w_{36}]=\min[+\infty,5+4]=9$

修改 v_6 的 T 标号为(9,3)。

v_4 与 v_6 之间有弧(v_4,v_6)。

$l_6=\min[9,l_4+w_{46}]=\min[9,5+5]=9$

v_6 的 T 标号不修改。

(3)l_6 在所有 T 标号中最小，v_6 改为 P 标号。

$i=3$

(2)v_6 与 v_7 之间有弧(v_6,v_7)。

$l_7=\min[+\infty,l_6+w_{67}]=\min[+\infty,9+8]=17$

修改 v_7 的 T 标号为(17,6)。

(3)v_7 改为 P 标号。

$i=4$

(2)v_7 没有相联的弧(v_7,v_j)。

(3)v_1 与 v_5 之间无任何路，计算停止。

根据终点 v_7 的 P 标号(17,6)可得到 v_1 到 v_7 的最短路的距离为 17。

图 10－10 标注出了所有的 P 标号，从 v_7 的 P 标号中的第二部分逆向追踪，得最短路为(v_1,v_2,v_3,v_6,v_7)。

图 10－10

历年考研真题评析

【题 1】 (2006 年华中科技大学)某施工单位有 500 台挖掘设备，在超负荷施工情况下，年产值为 20 万元/台，但其完好率仅为 0.4；正常负荷情况下，年产值为 15 万元/台，完好率为 0.8。在四年内合理安排两种不同负荷下施工的挖掘设备数量，使四年末仍有 160 台设备保持完好，并使产值最高。求解四年末使其产值最高的施工方案和产值数。

解题分析 列出递推关系式，进行分析计算。

解题过程 状态变量 S_k 在第 k 年用于正常生产负荷的设备数决策变量 u_k 在第 k 年用于超负荷生产的设备数

$$S_{k+1}=-0.4u_k+0.8S_k$$

$$\begin{cases} f_4(S_4)=\max\limits_{0\leqslant u_4\leqslant S_4}\{20u_4+15(S_4-u_4)\} \\ f_k(S_k)=\max\limits_{0\leqslant u_k\leqslant S_k}\{5u_k+15S_k+f_{k+1}(S_{k+1})\},k=3,2,1 \end{cases}$$

解得：

$$u_1^*=0 \qquad S_1=500$$

$$u_2^*=0 \qquad S_2=400$$

$$u_3^* = 0 \qquad S_3 = 320$$

$$u_4^* = 112 \qquad S_4 = 144$$

产值总数为 22700 万。

【题 2】 (2005 年四川大学)用表格法求图 10－11 中从点 v_1 到各点的最短路。

图 10－11

解题分析　本题是考察最短路的基本问题。

解题过程　$V_2 = -2, (V_1V_3V_5V_4V_2) = -2$

$V_3 = 2, (V_1V_3) = 2$

$V_4 = 0, (V_1V_3V_5V_4) = 0$

$V_5 = -1, (V_1, V_3, V_5) = -1$

$V_6 = 2, (V_1V_3V_5, V_4, V_6) = 2$

(对循环过程进行归纳判断)

【题 3】 (2005 年东南大学)判断如下容量网络上的可行流是否为最大流，并说明理由(图 10－12)。

图 10－12

解题分析　掌握判断最大流的方法，知道割的定义，对上图进行分析即可。

解题过程　是最大流。

给 v_s 标号$(0, +\infty)$；

检查 v_s，$f_{s1} = c_{13} = 3$，不合标号条件；

检查 v_s，$f_{s2} < c_{s2}$，给 v_2 标号$(s, 1)$；

检查 v_2，弧(v_2, v_3)上，$f_{23} < c_{23}$；

检查 v_3，均无增广链，故是最大流。

课后习题全解

◎**10.1** 证明如下序列不可能是某个简单图的次的序列：

(1)7,6,5,4,3,2。

(2)6,6,5,4,3,2,1。

(3)6,5,5,4,3,2,1。

分析 一个无环、无多重边的图称为简单图。任一图中，所有点的次之和是边数的两倍，穿点的个数为偶数。

证明 (1)已知定理：$\sum_{v\in \bar{v}} d(v)=2q$，而在此序列中，$\sum d(v)=27$，为奇数，所以此序列不可能为图的次的序列。又知定理：奇点的个数应为偶数，而在此序列中，奇点 7、5、3 为奇数个，所以此序列不可能为图的次的序列。

(2)此序列中，奇点 5、3、1 为奇数个，所以此序列不可能为图的次的序列。

(3)对于七顶点的图，假定 $d(v_1)=6,d(v_2)=5,d(v_7)=1$，并假设 G 为简单图，则 v_1 存在与其它六个点的连线(包含与 v_7)；v_2 与 v_1 间存在边 e_{12}，而 v_7 次为 1，所以必不与 v_1 外的其它点相连，因而 v_2 与除 v_1,v_7 外的四点间各有一连线。

假设 $G(V,E)$为简单图，则余下的 v_3,v_4,v_5,v_6 中任一点(用 v_i 表示)已确定存在 e_{i1},e_{i2}，无 e_{i7}，对于 $d(v_i)=5$ 的该点来说，必与除 v_7 外的每一点都有连线，设 $d(v_3)=5$。

由此推论，v_4,v_5,v_6 都同时与 v_1,v_2,v_3 相连，即 v_4,v_5,v_6 的次至少是 3，这与 $d(v_6)=2$ 相矛盾。

故假设不成立，该图中可能有环或多重边，非简单图的次的序列。

○**10.2** 已知九个人 $v_1,v_2,\cdots,v_9$ 中，v_1 和两个人握过手，v_2,v_3 各和四个人握过手，v_4,v_5,v_6,v_7 各和五个人握过手，v_8,v_9 各和六个人握过手，证明这九个人中一定可以找出三个人互相握过手。

证明 该问题可以表述为一个 9 点(代表 9 个人)的简单图问题，不存在多重边及环，则根据题意知，$d(v_1)=2,d(v_2)=d(v_3)=4,d(v_4)=d(v_5)=d(v_6)=d(v_7)=5,d(v_8)=d(v_9)=6$。

对 v_9 而言，因为 $d(v_9)=6$，所以 v_4,v_5,v_6,v_7 中至少有两点存在与 v_9 的连线。设这两点为 v_4 和 v_5，假设 v_4 和 v_9 相连的其它 5 点之间无边，则 $d(v_4)\leqslant 8-5=3$，与已知 $d(v_4)=5$ 相矛盾。

故假设不成立，即 v_4 与上述 5 点间必存在至少两条边，设其中一点为 v_k，由 v_k,v_4,v_9 两两相连，即存在三个人互相握过手。

◎**10.3** 用破圈法和避圈法找出图 10－13 的一个支撑树。

分析 本题考查了破圈法、避圈法以及支撑树的知识。

解 (1)用破圈法。

取一个圈(v_1,v_2,v_3)，从这个圈中去掉边 $e_2=[v_1,v_3]$；在余下的图中，再取一个圈(v_1,v_2,v_5)，从这个圈中去掉边 $e_7=[v_1,v_5]$；在余下的图中，从圈中(v_2,v_3,v_4)去掉边 $e_3=[v_2,v_3]$；在余下的图中，从圈(v_2,v_4,v_5)中去掉边 $e_5=[v_2,v_5]$；在余

下的图中，从圈(v_4，v_5，v_6)中去掉边 $e_{10}=[v_5, v_6]$；在余下的图中，从圈(v_8，v_9，v_{10})中去掉边 $e_{15}=[v_8, v_{10}]$，这时，剩余图中不含圈，于是得到一个支撑树，如图 10－14 所示。

图 10－13

(2)用避圈法。

在图中任取一条边 e_1，找一条与 e_1 不构成圈的边 e_4，找一条与$\{e_1, e_4\}$不构成圈的边 e_6，找一条与$\{e_1, e_4, e_6\}$不构成圈的边 e_8，找一条与$\{e_1, e_4, e_6, e_8\}$不构成圈的边 e_9，找一条与$\{e_1, e_4, e_6, e_8, e_9\}$不构成圈的边 e_{11}，找一条与$\{e_1, e_4, e_6, e_8, e_9, e_{11}\}$不构成圈的边 e_{12}，找一条与$\{e_1, e_4, e_6, e_8, e_9, e_{11}, e_{12}\}$不构成圈的边 e_{13}，找一条与$\{e_1, e_4, e_6, e_8, e_9, e_{11}, e_{12}, e_{13}\}$不构成圈的边 e_{14}。这时由所有取出的边所构成的是一个支撑树，如图 10－14 所示。

图 10－14

●10.4　用破圈法和避圈法求图 10－15 中各图的最小树。

图 10－15

分析　最小树即最小支撑树，最小支撑树问题就是要求给定连通赋权图 G 的最小支撑树.

解　(a)给图中的点和边分别加上名称，如图 10－16。

图 10－16

(1)避圈法的方法为:开始选一条最小权的边,以后每步中,总从未被选取的边上选一条权最小的边,并使之与已选取的边不构成圈(每一步中,如果有两条或两条以上的边都是权最小的边,则从中任选一条)。

按照此方法,算法步骤如下,ⓘ表示第 i 次的选取.

图 10－17

则以$\{e_{13},e_{15},e_3,e_9,e_{10},e_5,e_{17}\}$构成的图正好就是一个支撑树。

支撑树的权为:1＋1＋2＋2＋3＋3＋4＝16

对应的最小树如图 10－18 所示。

图 10－18

(2)破圈法的基本方法为:任取一个圈,从圈中去掉一条权最大的边。(如果两条或两条以上的边都是权最大的边,则去掉任意其中一条),在余下的图中,重复这个步骤,一直得到一个不含圈的图为止,这时的图便是最小树。

按照上述方法,得到最小树如图 10－19 所示。

图 10－19

(b)给(b)中的点和边加上名称分别为 v_i,e_i,如图 10－20 所示。

图 10－20

(Ⅰ)避圈法:依次找不构成圈的最小边,寻找过程如图 10－21 所示。

则由$\{e_3,e_4,e_5,e_9,e_8,e_2\}$构成最小支撑树,如图 10－22 所示。

图 10—21

图 10—22

树的权重为：

$$1+1+2+2+3+2=11$$

(Ⅱ)破圈法：本质为依次从所构成的圈中去除最大边，去除过程如图 10—23 所示。

图 10—23

最后剩下的边$\{e_2,e_3,e_4,e_5,e_8,e_9\}$所构成的图为最小支撑树图

总权重为：

$$1+1+2+2+2+3=11$$

(c)给(c)中的点和边加上名称分别为 v_i,e_i，如图 10—24 所示。

图 10—24

(Ⅰ)避圈法：寻找最小边的过程如图 10—25 所示。

图 10—25

则由$\{e_6,e_5,e_2,e_4,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{15}\}$构成最小支撑树。

如图 10—26 所示。

图 10－26

总权重为：

$$1+2+2+2+3+3+2+2+2=19$$

(Ⅱ)破圈法:去除边的过程过程如图 10－27 所示。

图 10－27

最后剩下$\{e_1,e_2,e_5,e_6,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{15}\}$构成最小支撑树。

如图 10－28 所示。

图 10－28

总权重为：

$$2+2+2+3+1+2+3+2+2=19$$

(d)给(d)中的点和边加上名称分别为 v_i,e_i,如图 10－29 所示。

图 10－29

(Ⅰ)避圈法：

寻找最小边的过程如图 10－30 所示。

图 10－30

最后找出$\{e_7,e_6,e_1,e_8,e_2,e_{10}\}$构成最小支撑树。

如图 10—31 所示。

图 10—31

总权重为：

$$w(T)=3+4+4+2+1+3=17$$

(Ⅱ)破圈法，去除图中最大边的过程如图 10—32 所示。

图 10—32

最后剩下的$\{e_1,e_2,e_{10},e_6,e_7,e_8\}$所构成最小支撑树如图 10—33 所示。

图 10—33

总权重为：

$$w(T)=3+4+4+2+1+3=17$$

小结　避圈法和破圈法的基本方法从其中一道小题便可看出。

◎10.5　已知世界六大城市：(Pe)，(N)，(Pa)，(L)，(T)，(M)。试在由表 10—1 所示交通网络的数据中确定最小树。

表 10—1

	Pe	*T*	*Pa*	*M*	*N*	*L*
Pe	×	13	51	77	68	50
T	13	×	60	70	67	59
Pa	51	60	×	57	36	2
M	77	70	57	×	20	55
N	68	67	36	20	×	34
L	50	59	2	55	34	×

分析　本题用避圈法求解最小树。

解　把题设中的表用图表示如下：

图 10－34

采用避圈法，寻找最小边的过程如图 10－35 所示。

图 10－35

最后找到$\{[L,P_a],[P_l,T],[P_l,L],[L,N],[N,M]\}$

构成最小支撑树如图 10－36 所示。

图 10－36

总权重为：

$$w(T)=2+13+50+34+20=119$$

◎10.6　有九个城市 $v_1,v_2,\cdots,v_9$，其公路网如图 10－37 所示。弧旁数字是该段公路的长度，有一批货物从 v_1 运到 v_9，问走哪条路最短。

分析　本题是最短路问题，公路网中不存在负权，用迪克斯特拉方法求解。

图 10－37

解　最短路线问题的一般提法是：欲寻找网络中从起点 v_1 到终点 v_n 的最短路线，即寻求连接这两点的边的总长度为最小的通路，最短路线中的网络大都是有向网络，也可以是无向网络。

以 l_{ij} 表示 v_i 到 v_j 的弧上的距离权，则可以写出网络的距离矩阵 $L=(l_{ij})$，其中若 v_i 到 v_j 没有弧，则 $l_{ij}=\infty$，若网络为无向网络，则 L 成为一个对称矩阵。

则最短路可以这样描述：要找从 v_1 到 v_n 的通路 μ，使全长为最短，即

$$\min L(\mu)=\sum_{e_{ij}\in\mu} l_{ij}$$

其中 $L(\mu)$ 为沿着通路 μ 从 v_1 到 v_n 的距离，l_{ij} 为 v_i 到 v_j 的弧的长度。

由题设：

$$L=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6\\ v_7\\ v_8\\ v_9\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & 3 & \infty & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & \infty & 2 & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 & \infty & 2.5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 2 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}\end{array}$$

表 10－2

v_j		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
初始值	$T(\ )$	{0}	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
第一次迭代	$P(\ )+l_{ij}$		$0+3$	$0+\infty$	$0+4$	$0+\infty$	$0+\infty$	$0+\infty$	$0+\infty$	$0+\infty$
	$T(\ )$		{3}	∞	4	∞	∞	∞	∞	∞
第二次迭代	$P(\ )+l_{ij}$			$3+3$	$3+\infty$	$3+2$	$3+3$	$3+\infty$	$3+\infty$	$3+\infty$
	$T(\ )$			6	{4}	5	6	∞	∞	∞
第三次迭代	$P(\ )+l_{ij}$			$4+\infty$		$4+\infty$	$4+\infty$	$4+3$	$3+\infty$	$4+\infty$
	$T(\ )$			6		{5}	6	7	∞	∞
第四次迭代	$P(\ )+l_{ij}$			$5+\infty$			$5+3$	$5+\infty$	$5+\infty$	$5+\infty$
	$T(\ )$			{6}			6	7	∞	∞
第五次迭代	$P(\ )+l_{ij}$						$6+\infty$	$6+\infty$	$6+\infty$	$6+5$
	$T(\ )$						{6}	7	∞	11
第六次迭代	$P(\ )+l_{ij}$							$6+1$	$6+\infty$	$6+2.5$
	$T(\ )$							{7}	∞	8.5
第七次迭代	$P(\ )+l_{ij}$								$7+2$	$7+2$
	$T(\ )$								9	{8.5}

其中表中第 1 行是初始值 $T(v_j)$，{　}表示 $P(v_i)$。

以后的 $P(\ )+l_{ij}$ 行是由上一行中{　}中的 $P(v_i)$ 与 l_{ij} 的和，$T(\ )$ 行是由上两行中对应列的元素中取最小的一个，相当于：

$$T(v_j)=\min\{T(v_i),p(v_i)+l_{ij}\}$$

每次迭代在 $T(v_j)$ 行选最小的，用{}表示 $P\{v_k\}$，以后对应的列不再进行计算，相当于从 $\overline{S}$ 中去掉。

根据上面的迭代，得

$$v_1\text{ 到 }v_9\text{ 的最短路为}(v_1,v_2,v_6,v_9)$$

其分解为

$$8.5=6+2.5=3+3+2.5=(v_1,v_2)+(v_2,v_6)+(v_6,v_9)$$

总权值为 8.5。

◎**10.7** 用迪克斯特拉方法求图 10－38 中从 v_1 到各点的最短路。

图 10－38

分析 此为最短路问题，权数为正，可采用迪克斯特拉方法。

解 用迪克斯特拉法的计算步骤如下：

表 10－3

V_j		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
初始值	$T(\ )$	{0}	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
第一次迭代	$P(\ )+l_{ij}$		0+2	$0+\infty$	$0+\infty$	$0+\infty$	$0+\infty$	$0+\infty$	$0+\infty$	$0+\infty$	$0+\infty$	$0+\infty$
	$T(\ )$		{2}	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
第二次迭代	$P(\ )+l_{ij}$			$2+\infty$	2+6	2+1	$2+\infty$	$2+\infty$	$2+\infty$	$2+\infty$	$2+\infty$	$2+\infty$
	$T(\ )$			∞	8	{3}	∞	∞	∞	∞	∞	∞
第三次迭代	$P(\ )+l_{ij}$			$3+\infty$	3+5		$3+\infty$	$3+\infty$	$3+\infty$	3+1	$3+\infty$	$3+\infty$
	$T(\ )$			∞	8		∞	∞	∞	{4}	∞	∞
第四次迭代	$P(\ )+l_{ij}$			$4+\infty$	$4+\infty$		4+6	$4+\infty$	4+7		$4+\infty$	$4+\infty$
	$T(\ )$			∞	8		{10}	∞	11		∞	∞
第五次迭代	$P(\ )+l_{ij}$			$10+\infty$	10+4			$10+\infty$	$10+\infty$		$10+\infty$	$10+\infty$
	$T(\ )$			∞	{8}			∞	11		∞	∞
第六次迭代	$P(\ )+l_{ij}$			8+7				$8+\infty$	$8+\infty$		$8+\infty$	$8+\infty$
	$T(\ )$			{15}				10	11		∞	∞
第七次迭代	$P(\ )+l_{ij}$							15+9	$15+\infty$		$15+\infty$	$15+\infty$
	$T(\ )$							{14}	11		∞	∞
第八次迭代	$P(\ )+l_{ij}$								$14+\infty$		14+1	$10+\infty$
	$T(\ )$								{11}		15	∞
第九次迭代	$P(\ )+l_{ij}$										$11+\infty$	11+9
	$T(\ )$										{15}	20
第十次迭代	$P(\ )7+l_{ij}$											15+4
	$T(\ )$											{19}

由上表的迭代过程可得：

$s_q=\{v_1,v_2,v_5,v_9,v_4,v_6,v_8,v_7,v_3,v_{10},v_{11}\}$

$d(v_1,v_2)=2$，最短路：(v_1,v_2)；

$d(v_1,v_5)=3$，最短路：(v_1,v_2,v_5)；

$d(v_1,v_9)=4$，最短路：(v_1,v_2,v_5,v_9)；

$d(v_1,v_7)=14$，最短路：$(v_1,v_2,v_5,v_9,v_6,v_7)$；

$d(v_1,v_8)=11$，最短路：(v_1,v_2,v_5,v_9,v_8)；

$d(v_1,v_4)=8$，最短路：(v_1,v_2,v_4)或(v_1,v_4)；

$d(v_1,v_6)=10$，最短路：(v_1,v_2,v_5,v_9,v_6)；

$d(v_1,v_3)=15$，最短路：(v_1,v_2,v_4,v_3)或(v_1,v_4,v_3)；

$d(v_1,v_{10})=15$，最短路：$(v_1,v_2,v_5,v_9,v_6.\ v_7,v_{10})$；

$d(v_1,v_{11})=19$，最短路：$(v_1,v_2,v_5,v_9,v_6.\ v_7,v_{10},v_{11})$。

◎10.8　求图 10－39 中从 v_1 到各点的最短路。

图 10－39

分析　图中存在具有负权的弧，而迪克斯特拉算法失效。

解　当赋权有向图 D 中，存在具有负权的弧时，求最短路的方法如下：

不妨设从任一点 v_i 到任一点 v_j 都有一条弧（如果在 D 中，$(v_i,v_j)\notin A$，则添加弧 (v_i,v_j)，令 $w_{ij}=+\infty$）。

显然，从 v_s 到 v_j 的最短路总是从 v_s 出发，沿着一条路到某个点 v_i，再沿 (v_i,v_j) 到 v_j 的（这里 v_i 可以是 v_s 本身），从 v_s 到 v_i 的这条路必定是从 v_s 到 v_j 的最短路，所以 $d(v_s,v_j)$ 必满足如下方程

$$d(v_s,v_j)=\min_i\{d(v_s,v_i)+w_{ij}\}$$

为了求得这个方程的解，$d(v_s,v_1),d(v_s,v_2),\cdots,d(v_s,v_p)$（这里 $p=p(0)$），可用如下递推公式：

开始时，令

$d^{(1)}(v_s,v_j)=w_{s_j}$　　$(j=1,2,\cdots,p)$

对 $t=2,3,\cdots$

$d^{(t)}(v_s,v_j)=\min_i\{d^{(t-1)}(v_s,v_i)+w_{ij}\}$　　$(j=1,2,\cdots,p)$

若进行到某一步，例如第 k 步时，对所求 $j=1,2,\cdots,p$，有

$d^{(k)}(v_s,v_j)=d^{(k-1)}(v_s,v_j)$

则 $\{d^{(k)}(v_s,v_j)\}$，$j=1,2,\cdots,p$，即为 v_s 到各点的最短路的权。

表 10－4

	w_{ij}						$d^{(t)}(v_i,v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
v_1	0	1	1	2	∞	∞	0	0	0	0
v_2	∞	0	3	4	∞	∞	1	1	1	1
v_3	0	-2	0	5	2	∞	∞	4	1	1

	w_{ij}						$d^{(t)}(v_i,v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
v_4	∞	4	∞	0	-3	∞	2	2	2	2
v_5	∞	∞	2	3	0	∞	∞	-1	-1	-1
v_6	∞	∞	2	∞	2	0	∞			

根据下面计算结果填入上表。

(1)当 $t=1$

$d^{(1)}(w_1,v_1)=w_{11}=0$， $d^{(1)}(v_1,w_2)=w_{12}=1$，

$d^{(1)}(v_1,v_3)=w_{13}=+\infty$， $d^{(1)}(v_1,v_4)=w_{14}=2$，

$d^{(1)}(v_1,v_5)=w_{15}=+\infty$， $d^{(1)}(v_1,v_6)=w_{16}=+\infty$；

(2)当 $t=2$

$$d^{(2)}(v_1,v_1)=\min\{d^{(1)}(v_1,v_1)+w_{11},d^{(1)}(v_1,v_2)+w_{21},d^{(1)}(v_1,v_3)+w_{31},d^{(1)}(v_1,v_4)+w_{41},d^{(1)}(v_1,v_5)+w_{51},d^{(1)}(v_1,v_6)+w_{61}\}=0,$$

$d^{(2)}(v_1,v_2)=1$， $d^{(2)}(v_1,v_3)=4$， $d^{(2)}(v_1,v_4)=2$，

$d^{(2)}(v_1,v_5)=-1$， $d^{(2)}(v_1,v_6)=\infty$；

(3)当 $t=3$

$d^{(3)}(v_1,v_1)=0$， $d^{(3)}(v_1,v_2)=1$， $d^{(3)}(v_1,v_3)=1$，

$d^{(3)}(v_1,v_4)=2$， $d^{(3)}(v_1,v_5)=-1$， $d^{(3)}(v_1,v_6)=+\infty$；

(4)当 $t=4$

$d^{(2)}(v_1,v_1)=d^{(3)}(v_1,v_1)=0$， $d^{(2)}(v_1,v_2)=d^{(3)}(v_1,v_2)=1$，

$d^{(2)}(v_1,v_5)=d^{(3)}(v_1,v_5)=-1$， $d^{(2)}(v_1,v_6)=d^{(3)}(v_1,v_6)=+\infty$。

即 v_1 到 v_1 的距离为 0，v_1 到 v_2 的距离为 1，v_1 到 v_5 的距离为 -1，v_1 到 v_6 的距离为 $+\infty$，只要继续计算 $d^{(4)}(v_1,v_3)$，$d^4(v_1,v_4)$。

$d^{(4)}(v_1,v_3)=1$， $d^{(4)}(v_1,v_4)=2$， $d^{(4)}(v_1,v_2)=-1$。

由

$d^{(3)}(v_1,v_3)=d^{(4)}(v_1,v_3)=1$， $d^{(3)}(v_1,v_4)=d^{(4)}(v_1,v_4)=2$。

故 v_1 到 v_3 的距离为 1，v_1 到 v_4 的距离为 2. 综上所得：

$d(v_1,v_2)=-1$， $d(v_1,v_3)=1$， $d(v_1,v_4)=2$，

$d(v_1,v_5)=-1$， $d(v_1,v_6)=+\infty$。

○**10.9** 在图 10－40 中(1)用 Dijkstra 方法求从 v_1 到各点的最短路；(2)指出对 v_1 来说哪些顶点是不可到达的。

图 10－40

解　首先设

$$P(v_1)=0,\qquad T(v_j)=+\infty\qquad (j=2,3,\cdots,8)$$

第 1 步

v_1 已经 P 标号，$(v_1,v_2),(v_1,v_5),(v_1,v_7)\in A$

$$T'(v_2)=P(v_1)+w_{12}=0+4=4$$

由

$$T'(v_2)<T(v_2)$$

则

$$T(v_2)=4,T'(v_5)=P(v_1)+w_{15}=0+1=1$$

由

$$T'(5)=T'(v_5)$$

则

$$T(v_5)=1,T'(v_7)=P(v_1)+w_{17}=0+3=3$$

由

$$T'(v_7)<T(v_7)$$

则

$$T'(v_7)=3$$

则

$$\min\{T(v_2),T(v_5),T(v_7)\}=\min\{4,1,3\}=1$$

于是，有

$$P(v_5)=1$$

第 2 步

v_5 已标号，由 $(v_5,v_6)\in A$

$$T'(v_6)=P(v_5)+w_{56}=1+6=7$$

因

$$T'(v_6)<T(v_6)$$

则

$$T(v_6)=7$$

$$\min\{T(v_2),T(v_7),T(v_6)\}=3$$

故

$$P(v_7)=3。$$

第 3 步

对于已 P 标号的 v_7

$$\min\{T(v_2),T(v_6)\}=4$$

故

$$P(v_2)=4。$$

第 4 步

对于已 P 标号的 v_2，则

$$P(v_6)=7$$

第 5 步

已 P 标号的 v_6，$(v_6,v_8)\in A$

$$T'(v_8)=P(v_6)+w_{68}=7+3=10$$

由于

$$T'(v_8)=<T(v_8)$$

故

$$T(v_8)=10,\min\{T(v_8)\}=10$$

故

$$P(v_8)=10$$

第 6 步

已 P 标号 v_8，$(v_8,v_j)\notin A$，$j\in$ 其它剩余点，故

$d(v_1,v_2)=4$，　$d(v_1,v_7)=3$，　$d(v_1,v_5)=1$，

$d(v_1,v_6)=7$，　$d(v_1,v_8)=10$。

(2) v_1 不能到达 v_3 和 v_4。

○**10.10**　求图 10－41 中从任意一点到另外任意一点的最短路。

图 10－41

解　(1)从 v_1 始发求最短路。

表 10－5

v_j		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
初始值	$T(\ )$	$\{0\}$	∞	∞	∞	∞	∞
第一次迭代	$P(\ )+l_{ij}$		$0+1$	$0+2$	$0+\infty$	$0+\infty$	$0+\infty$
	$T(\ )$		$\{1\}$	2	∞	∞	∞
第二次迭代	$P(\ )+l_{ij}$			$1+3$	$1+3$	$1+\infty$	$1+7$
	$T(\ )$			$\{2\}$	4	∞	8
第三次迭代	$P(\ )+l_{ij}$				$2+2$	$2+2$	$2+\infty$
	$T(\ )$				$\{4\}$	4	8
第四次迭代	$P(\ )+l_{ij}$					$4+\infty$	$4+3$
	$T(\ )$					$\{4\}$	7
第五次迭代	$P(\ )+l_{ij}$						$4+6$
	$T(\ )$						$\{7\}$

由上计算过程可知

$d(v_1,v_2)=1$，最短路为 (v_1,v_2)；　$d(v_1,v_3)=2$，最短路为 (v_1,v_3)；

$d(v_1,v_4)=4$，最短路为 (v_1,v_3,v_4) 或 (v_1,v_2,v_4)；

$d(v_1,v_5)=4$，最短路为(v_1,v_3,v_5)；

$d(v_1,v_6)=7$，最短路为(v_1,v_2,v_4,v_6)。

(2)v_2 为出发点，

$d(v_2,v_3)=3$，最短路为(v_2,v_3)；　$d(v_2,v_4)=3$，最短路为(v_2,v_4)；

$d(v_2,v_5)=5$，最短路为(v_2,v_3,v_5)；

$d(v_2,v_6)=6$，最短路为(v_2,v_4,v_6)。

v_1 为不可到达点。

(3)以 v_3 为始发点，

$d(v_3,v_4)=2$，最短路为(v_3,v_4)；　$d(v_3,v_5)=2$，最短路为(v_3,v_5)；

$d(v_3,v_6)=5$，最短路为(v_3,v_4,v_6)。

v_1,v_2 均为不可到达点。

(4)以 v_4 为始发点，只有一条路 $d(v_4,v_6)$，且 $d(v_4,v_6)=3$. 其余均为不可到达点。

(5)以 v_5 为始发点，只有路(v_5,v_6)，且 $d(v_5,v_6)=6$。

(6)以 v_6 为始发点，则没有路。

◎**10.11**　在如图 10－42 所示的网络中，每孤旁的数字是(c_{ij},f_{ij})。

图 10－42

(1)确定所有的截集；

(2)求最小截集的容量；

(3)证明指出的流是最大流。

分析　根据定义确定截集，比较各个截集的容量即可得最小截集的容量，最后由最大流量最小截量定理求证。

解　把题设中的中间点标号。如图 10－43 所示。

图 10－43

(1)首先确定所有的截集与对应的容量。

①若 $v_1=\{v_s\}$,则其截集为

$$(v_1,\overline{v_1})=\{(v_s,v_1),(v_s,v_2)\}$$

其容量为

$$c(v_1,\overline{v_1})=c_{s1}+c_{s2}=4+2=6$$

②若 $v_1=\{v_s,v_1\}$,则其截集为

$$(v_1,\overline{v_1})=\{(v_s,v_2),(v_1,v_2),(v_1,v_3)\}$$

其容量为

$$c(v_1,\overline{v_1})=c_{s2}+c_{12}+c_{13}=2+3+2=7$$

③若 $v_1=\{v_s,v_1,v_2\}$,截集为

$$(v_1,\overline{v_1})=\{(v_1,v_3),(v_2,v_t)\}$$

容量为

$$c(v_1,\overline{v_1})=c_{2t}+c_{3t}=2+3=5$$

④若 $v_1=\{v_s,v_1,v_2,v_3\}$,截集为

$$(v_1,\overline{v_1})=\{(v_2,v_t),(v_3,v_t)\}$$

容量为

$$c(v_1,\overline{v_1})=c_{2t}+c_{3t}=3+5=8$$

⑤若 $v_1=\{v_s,v_2\}$,截集为

$$(v_1,\overline{v_1})=\{(v_s,v_1),(v_2,v_t)\}$$

容量为

$$c(v_1,\overline{v_1})=c_{s1}+c_{2t}=4+3=7$$

⑥若 $v_1=\{v_s,v_2,v_3\}$,截集为

$$(v_1,\overline{v_1})=\{(v_s,v_1),(v_3,v_t),(v_2,v_t)\}$$

容量为

$$c(v_1,\overline{v_1})=c_{s1}+c_{3t}+c_{2t}=4+3+5=12;$$

⑦若 $v_1=\{v_s,v_3\}$,截集为

$$(v_1,\overline{v_1})=\{(v_s,v_1),(v_s,v_2),(v_3,v_t),(v_3,v_2)\}$$

容量为

$$c(v_1,\overline{v_1})=c_{s1}+c_{s2}+c_{3t}+c_{32}=4+2+5+1=12$$

⑧若 $v_1=\{v_s,v_1,v_2,v_3\}$,截集为

$$(v_1,\overline{v_1})=\{(v_s,v_2),(v_1,v_2),(v_3,v_2),(v_3,v_t)\}$$

容量为

$$c(v_1,\overline{v_1})=c_{s2}+c_{12}+c_{32}+c_{3t}=2+3+1+5=11$$

(2)由(1)所求,最小截集的容量为

$$c(v_1^*,\overline{v_1^*})=\min\{c(v_1,\overline{v_1})\}=5$$

其中 $v_1^*=\{v_s,v_1,v_2\}$,$\overline{v_1^*}=\{v_3,v_t\}$。

(3)根据最大流量最小截量定理,最大流量为

$$v(f^*)=c(v_1^*,\overline{v_1^*})=5$$

◎10.12　求如图 10－44 所示的网络的最大流。(每弧旁的数字是(c_{ij},f_{ij}))。

图 10－44

分析　用寻求最大流的标号法求解。

解　给中间点标上编号如下：

图 10－45

(1)标号过程

开始先给 v_s 标上$(0,+\infty)$，这时，v_s 是标号而未检查的点。

第 1 步：弧(v_1,v_4)，因 $f_{s1}=3,c_{s1}=4$，则 $f_{s1}<c_{s1}$. 则给 v_1 标号$(v_s,L(v_1))$

$$L(v_1)=\min\{L(v_s),c_{s1}-f_{s1}\}=\min\{+\infty,4-3\}=1$$

第 2 步：检查弧(v_1,v_4)。

$f_{14}=1,c_{14}=1$，不满足标号条件，对 v_4 不进行标号。

对于弧(v_1,v_5)，$f_{15}=2,c_{15}=3$，则 $f_{15}<c_{15}$。

给 v_5 标号$(v_1,L(v_5))$

$$L(v_5)=\min\{L(v_1),c_{15}-f_{15}\}=\min(1,1)=1$$

第 3 步：弧(v_5,v_4)，$f_{54}=3,c_{54}=5$，则 $f_{54}<c_{54}$，

则给 v_4 标号$(v_5,L(v_4))$。

$$L(v_4)=\min\{L(v_5),c_{54}-f_{54}\}=\min\{1,4-3\}=1$$

第 4 步：对于弧$(v_4v_t,)$因 $f_{4t}=0,c_{4t}=7,f_{4t}<c_{4t}$。

则给 v_t 标号$(v_4,L(v_t))$

$$L(v_t)=\min\{L(v_4),c_{4t}-f_{4t}\}=\min\{1,7-6\}=1$$

故　$$\theta=L(v_t)=1$$

(2)调整过程

由点的第一个标号找到一条增广链，如图 10－46 中的"/"所示：

图 10－46

按 $\theta=1$ 在 M 上进行调整，

$$f_{s1}+1=4, f_{15}+1=2+1=3, f_{54}+1=4, f_{4t}+1=7$$

其余 f_{ij} 不变，调整后如图 10－47 所示。

图 10－47

再对这个可行流进行标号过程，寻找增广链。

(1)标号过程

开始先给 v_s 标上$(0,+\infty)$，

第 1 步：对于(v_s,v_2)，$f_{s2}=2$，$c_{s2}=10$，$f_{s2}<c_{s2}$，则给 v_1 标号$(v_2,L(v_2))$

$$L(v_2)=\min\{L(v_s),c_{s2}-f_{s2}\}=\min\{+\infty,10-4\}=6$$

第 2 步：对于弧(v_2,v_3)，$f_{23}=4$。$c_{23}=4$。则 $f_{23}<c_{23}$。

给 v_2标号$(v_s,L(v_3))$

$$L(v_3)=\min\{L(v_2),c_{23}-f_{23}\}=\min\{6,4,-2\}=2$$

第 3 步：对于弧(v_3,v_t)，$f_{3t}=3$，$c_{3t}=8$，则 $f_{3t}<c_{3t}$。

给 v_t 标号$(v_3,L(v_t))$

$$L(v_t)=\min\{L(v_3),c_{3t}-f_{3t}\}=\min\{2,8-3\}=2$$

故 v_t 有了标点，转入调整过程。

(2)调整过程

由点的第一个标号找到一条增广链，如图 10－48 中的“/”表示。

图 10－48

根据 $\theta=2$，在 M 上调整 f：

$$f_{s2}+2=8, f_{23}+2=4, f_{3t}+2=5$$

其他 f_{ij} 不变,调整后得到如图 10－49 所示的可行流。对这个可行流进入标号过程,寻找增广链。

图 10－49

(1)标号过程

首先给 v_s 标号$(0,+\infty)$。

第 1 步:对于弧(v_s,v_5),$f_{s5}=2$,$c_{s5}=3$,则 $f_{s5}<c_{s3}$,故给 v_5 标号$(v_s,L(v_5))$。

这里

$$L(v_5)=\min\{L(v_s),L_{s5}-f_{s5}\}=\min\{+\infty,3-2\}=1$$

第 2 步:对于弧(v_5,v_4),$f_{54}=4$,$c_{54}=4$. 则 v_4 不能标号。

第 3 步:对于弧(v_s,v_2),$f_{s2}=8$,$c_{s2}=10$,则 $f_{s2}<c_{s2}$,给 v_2 标号$(v_s,L(v_2))$,这里

$$L(v_2)=\min\{L(v_5),c_{s2}-f_{s2}\}=\min\{+\infty,10-8\}=2$$

第 4 步:对于弧(v_2,v_3),$f_{23}=4$,$c_{23}=4$,则 $f_{23}=c_{23}$,故 v_3 不能标号。

此时,标号无法继续下去,算法结束。此时的可行流即为网络最大流,其最大流为

$$v(f^*)=f_{s1}+f_{54}+f_{23}=4+4+4=12$$

对应的最小截集为$(v_1^*,\overline{v_1^*})$,其中

$$v_1^*=\{v_s,v_2,v_5\},\overline{v_1^*}=\{v_1,v_3,v_4,v_t\}$$

●**10.13**　求如图 10－50 所示的网络的最大流。

图 10－50

分析　本题是网络最大流问题,用标号法求解。

解　由题设,给图中的中间点加上名称如图 10－51 所示,令所有弧的可行流为 0。

用标号法求所示的网络最大流,弧旁的数字为(c_{ij},f_{ij})。过程和步骤参考 10.12。

最大流为:$v(f^*)=5+9+11=25$。

最小截集为:$(v_1^*,\overline{v_1^*})$,$v_1^*=\{v_s,v_2,v_6,v_3,v_1,v_4\}$,$\overline{v_1^*}=\{v_5,v_7,v_8,v_t\}$。

小结　用标号法找增广链以求最大流的结果同时得到一个最小截集。

图 10－51

○**10.14** 两家工厂 x_1 和 x_2 生产一种商品，商品通过如图 10－52 所示的网络运送到市场 y_1，y_2，y_3，试用标号法确定从工厂到市场所能运送最大总量。

图 10－52

解 添加 v_s，v_t 点，给中间点加上名称，令所有弧的可行流都为 0，如图 10－53 所示。

图 10－53

不断重复标号过程及调整过程。

最大流量为：6＋13＋4＝23。

◎**10.15** 求如图 10－54 所示的网络的最小费用最大流，每弧旁的数字是(b_{ij}，c_{ij})。

图 10－54

分析　本题为最小费用最大流问题。

解　给题设中的图的中间点加上名称如图 10－55 所示。

图 10－55

(1)取 $f^{(0)}=0$ 为初始可行流。

(2)构造有向赋权图 $w(f^{(0)})$

① 当(v_i,v_j)为前向弧时，

$$w_{ij}=\begin{cases}b_{ij}, & 若\ f_{ij}<c_{ij}\\ +\infty, & f_{ij}=c_{ij}\end{cases}$$

② 当(v_i,v_j)为后向弧时，

$$w_{ij}=\begin{cases}-b_{ij}, & 若\ f_{ij}>0\\ +\infty, & f_{ij}=0\end{cases}$$

求出从 v_s 到 v_t 的最短路(v_s,v_2,v_4,v_t)，如图 10－56 所示(标有“/”为最短路)。

图 10－56

(3)在原网络 D 中，与这条最短路相应的增广链为 $\mu=\{v_s,v_2,v_4,v_t\}$。

(4)在 μ 上进行调整，$\theta=3$，得图 $f^{(1)}$。

按照上述算法依次得 $f^{(2)}$，$f^{(3)}$，流量依次为 3，4，5。构造相应的赋权图：$w(f^1)$，$w(f^2)$，$w(f^3)$。

注意到 $w(f^{(3)})$中已不存在从 v_s 到 v_t 的最短路，所以 $f^{(3)}$ 即为最小费用最大流。

最大流为：$5+0=5$，　$4\times1+1\times1+3\times1+2\times4+3\times3+2\times1+5\times2=37$。

◎10.16　求如图 10－57 所示的中国邮递员问题。

图 10－57

分析 使用奇偶点图上作业法求解。

解 图中有 4 组奇点,分别为 v_2 和 v_5,v_4 和 v_7,v_6 和 v_9,v_8 和 v_{11}. 然后得图中奇点按最短连线两两相连,如图 10－58 所示。

图 10－58

由上图可知:

(1)在图的每一条边上至多有一条重复边;

(2)图中每圈上重复边的总权不大于该圈总权的一半。

故任一欧拉圈就是邮递员的最优邮递路线。

○**10.17** 设 $G=(V,E)$是一个简单图,令 $\delta(G)=\min\limits_{v\in V}\{d(v)\}$(称 $\delta(G)$为 G 的最小次)。证明:(1)若 $\delta(G)\geqslant 2$,则 G 必有圈;(2)若 $\delta(G)\geqslant 2$,则 G 必有包含至少 $\delta(G)+1$ 条边的圈。

证明 (1)由题设 $G(V,E)$是简单图,即该图中无环,无重复边。由已知,$\delta(G)\geqslant 2$,即 G 的最小边大于或等于 2。假设 G 中无圈,则 G 可能为树或非连通图,对该两种情况均存在悬挂点,即$\min\limits_{v\in V}\{d(v)\}=1$,与 $\delta_1(G)\geqslant 2$ 矛盾,故假设不成立,G 必有圈。

(2)若 $\delta(G)\geqslant 2$,设与 $\delta(G)$对应的点为 v_k,即 v_k 必与$\delta(G)$个端点相连。根据(1)结论,G 中必有圈(由于圈中的连通图至少 v_k 与这 $\delta(G)$个端点构成圈)。

$v_i(i=1,2,\cdots,\delta(G))$的次至少为 $\delta(G)$,至少与 $\delta(G)$个端点相联。若 v_k 与 v_i 这 $\delta(G)+1$ 个端点不构成圈,则在端点处必向外延伸,对该圈而言,边数大于 $\delta(G)+1$ 条,故 G 必有包含至少 $\delta(G)+1$ 条边的圈。

○**10.18** 设 G 是一个连通图,不含奇点。证明:G 不含割边。

证明 因 G 连通且不含奇点,则 $d(v)=2n$,无悬挂点。根据上题中的结论,G 必有圈,又因为 G 是连通的,所以从 G 中去掉任一条边,都必在某一圈中,从圈中去掉任一条边,所得仍为连通图。

○**10.19** 给一个连通赋权图 G,类似于求 G 的最小支撑树的 KrusKal 方法,给出一个求 G 的最大支撑树的方法。

答 首先选一条最大权边,以后每步均从未被选取的边中选最大权边,并使之与已选取的边不构成圈(如在某步中有两条或两条以上的边都是最大权边,则从中任取一条)。

○**10.20** 下述论断正确与否:可行流 f 的流量为零,即 $v(f)=0$,当且仅当 f 是零流。

答 论断错误,流量

$$v(f)=\sum_{(v_s,v_j)\in A}f_{sj}-\sum_{(v_j,v_s)\in A}f_{js}=0$$

只表明发点净输出流量。可能流出等于流入，而 f 为零流，则 $f_{ij}=0$。如对以下简单网络如图 10－59 所示。

图 10－59

$$v(f)=1-1=0$$

而 $f_{ij}=1\neq 0$。非零流。

◎**10.21**　设 $D=(V,A,C)$ 是一个网络。证明：如果 D 中所有弧的容量 c_{ij} 都是整数，那么必存在一个最大流 $f=\{f_{ij}\}$，使所有 f_{ij} 都是整数。

分析　用标号法求证。

证明　由标号法，初始 $f_{ij}=0$。

因对弧 (v_i,v_j)，v_j 标号，$c(v_j)=\min\{c(v_i),c_{ij}-f_{ij}\}$

弧 (v_j,v_i)，v_j 标号，$c(v_j)=\min\{c(v_i),f_{ij}\}$

依此类推，因 c_{ij} 均为整数，故最终得到调整量 $\theta=c(v)$ 也为整数。

$$f'_{ij}=\begin{cases} f_{ij}+\theta, & (v,v_j)\in\mu^{+} \\ f_{ij}-\theta, & (v_i,v_j)\in u^{-} \\ f_{ij}, & (v,v_j)\notin\mu \end{cases}$$

标号最终结果，得最大流 f 必为整数。

◎**10.22**　已知有六台机床 $x_1,x_2,\cdots,x_6$，六个零件 $y_1,y_2,\cdots,y_6$。机床 x_1 可加工零件 y_1；x_2 可加工零件 y_1,y_2；x_3 可加工零件 y_1,y_2,y_3；x_4 可加工零件 y_2；x_5 可加工零件 y_2、y_3、y_4；x_6 可加工零件 y_2、y_5、y_6。现在要求制定一个加工方案，使一台机床只加工一个零件，一个零件只在一台机床上加工，要求尽可能多地安排零件的加工。试把这个问题化为求网络最大流的问题，求出能满足上述条件的加工方案。

分析　将问题化为网络最大流问题后即可用标号法求解。

解　由题设，添上标号 v_s 和 v_t 可得最大容量的网络图如图 10－60 所示（$f^{(0)}=0$）。

图 10－60

(1)标号过程

按照 10.13 题的步骤进行标号，找出增广链：$v_s(0,+\infty)$，$x_1(v_s,1)$，$y_1(x_1,1)$，$v_t(y_1,1)$。因 v_t 已经标号，故转入调整过程。

(2)调整过程

按点的第一个标号找到一条增广链：$\mu=(v_s,x_1,y_1,v_t)$。按照 $\theta=1$ 在 μ 上调整：$f_{v_sx_1}+1=1$，$f_{x_1y_1}+1=1$，$f_{y_1v_t}+1=1$。

调整后得到如图 10－61 所示的可行流，对这个可行流进入标号过程，寻找增广链。

图 10－61

反复进行标号过程和调整过程，最后得结果如图 10－62 所示。

图 10－62

所以加工方案为：机床 x_1 加工 y_1 零件，机床 x_2 加工 y_2 零件，机床 x_3 加工 y_3 零件，机床 x_5 加工 y_4 零件，机床 x_6 加工 y_6 零件，机床 x_4 不加工零件，零件 y_5 没有机床加工。$V(f)=5$。

第十一章

网 络 计 划

内容提要

一、网络计划图

1. 网络图相关术语

(1)作业　指任何消耗时间或资源的行动，如新产品设计中的初步设计、技术设计、工装制造等。根据需要，作业可以划分得粗一些，也可以划分得细一些。

(2)事件　标志作业的开始或结束，本身不消耗时间或资源，或相对作业讲，消耗量可以小得忽略不计。

PERT 网络图中，事件通常用圆圈表示，作业用箭线表示(见图 11－1)。图中事件①是开始进行初步设计的标志，称为该项作业的起点事件；事件②是初步设计的结束标志，称为为作业的终点事件。将初始设计这项作业标记为(1,2)。

图 11－1

(3)路线　指 PERT 网络图中，从最初事件到最终事件的由各项作业连贯组成的一条路。各项作业累计时间最长的那条路，称为关键路线，它决定完成网络图上所有作业需要的最短时间。如图 11－2 中用双箭线表示的那条路是关键路线，需要 11 小时。

图 11－2

2. 网络图相关概念

网络图是由结点(点),弧及权所构成的有向图。即有向的赋权图。

(1)结点表示一个事项(事件)。它是一个或若干个工序的开始或结束是相邻工序的时间上的分界点。结点用圆圈和里面的数字表示,数字表示结点的编号,如①,②,…等。

(2)弧表示一个工序,工序需要一定的人力,物力等资源和时间,弧用箭线"→"表示。

(3)权表示为完成某个工序所需要的时间或资源等数据,通常标注在箭线下面或其他合适的位置上。

在网络图中,用一条弧和两个结点表示一个确定的工序。例如,$②\xrightarrow{b}⑦$表示一个确定的工序 b。

3. 绘制网络图应遵循的原则

(1)方向、时序与结点编号

网络图是有向图,按照工艺流程的顺序,规定工序从左向右排列,网络图中的各个结点都有一个时间,一般按各个结点的时间顺序编号。

(2)紧前工序与紧后工序

如只有在 a 工序结束后,b 工序才能开始,则 a 工序是 b 工序的紧前工序,b 工序是 a 工序的紧后工序。

(3)虚工序

为了用来表达相邻工序之间的衔接关系,是实际上并不存在而虚设的工序。用虚箭线ⓘ→ ⓙ表示,虚工序不需要人力,物力等资源和时间。

(4)相邻的两个结点之间只能有一条弧。

(5)网络图中不能有缺口和回路。

(6)平行作业

某些工序可以同时进行,即可采用平行作业的方式。

(7)交叉作业

对需要较长时间才能完成的一些工序,在工艺流程与生产组织条件允许的情况下,可以不必等待工序全部结束后再转入其紧后工序,而是分期分批的转入,这种方式称为交叉作业。

(8)始点和终点

为表示工程的开始和结束,在网络图中只能有一个始点和一个终点。当工程开始时有几个工序平行作业,或在几个工序结束后完工,用一个始点,一个终点表示。若这些工序不能用一个始点或一个终点表示时,可用虚工序把它们与始点与终点连接起来。

(9)网络图的分解与综合

根据综合程度高网络图的要求,制作本部门综合程度低的网络图(子网络),将母网络分解为若干个子网络,称为网络的分解。而将若干个子网络综合为一个母网络,则称为网络图的综合。

(10)网络图的布局

网络图中，尽可能将关键路线布置在中心位置，并尽量将联系紧密的工作布置在相近的位置。

为使网络图清楚和便于在图上填写有关的时间数据与其它数据，弧线尽量用水平线或具有一段水平的折线。

二、时间参数及优化

1. 时间参数

(1)对结点

① 结点的最早开始时间 $T_E(j)$

$$T_E(j)=\max\{T_E(i)+t(i,j)\},j=2,3,\cdots,n$$

② 结点的最迟完成时间 $T_L(j)$

$$T_L(i)=\min\{T_L(j)-t(i,j)\},i=n-1,n-2,\cdots,1$$

(2)对作业

① 对作业的最早开始时间 $T_{ES}(i,j)$

作业(i,j)的最早开始时间显然等于箭尾结点 i 的最早开始时间，将这一参数值填入作业线下所画的“□”符号中，即

$$T_{ES}(i,j)=T_E(i)$$

② 作业的最早完成时间 $T_{EF}(i,j)$

在正常情况下，作业(i,j)若能在最早开始时间开始，就有一个最早完成时间，该最早完成时间为箭尾结点的最早时间加上作业(i,j)所需的工时，即

$$T_{EF}(i,j)=T_E(i)+t(i,j)=T_{ES}(i,j)+t(i,j)$$

③ 作业的最迟完成时间 $T_{LF}(i,j)$

作业的最迟完成时间等于箭头结点 j 的最迟完成时间，即

$$T_{LF}(i,j)=T_L(j)$$

④ 作业的最迟开始时间 $T_{LS}(i,j)$

在正常情况下，作业(i,j)完成的最迟是因为开工迟，所以对应于最迟完成时间 $T_{LF}(i,j)$，就有一个最迟开始时间 $T_{LS}(i,j)$，它等于作业(i,j)的箭头结点 j 的最迟时间减去作业自身所消耗的工时，即

$$T_{LS}(i,j)=T_L(j)-t(i,j)=T_{LF}(i,j)-t(i,j)$$

这一参数填入作业线下所画的“△”符号中。

2. 网络的优化

(1)时间优化

① 采取技术措施，缩短工程完工时间；

② 采取组织措施，充分利用非关键工序的总时差，合理调配技术力量及人、财、物等资源，缩短关键工序的作业时间。

(2)时间-资源优化

① 优先安排关键工序所需要的资源；

② 利用非关键工序的总时差，错开各工序的开始时间，拉平资源需要量的高峰；

③ 在资源受到限制或考虑综合经济效益的条件下，也可以适当地推迟工程完工时间。

(3)时间-费用优化

在编制网络计划过程中，研究如何使工程完工时间短、费用少；或按计划完工的条件下，使费用最少；或限制费用的条件下使工程完工的时间最短。

典型例题与解题技巧

【例 1】 已知下列资料

表 11－1

活　动	作业时间	紧前活动	正常完成进度的直接费用(百元)	赶进度一天所需费用(百元)
A	4		20	5
B	8		30	4
C	6	B	15	3
D	3	A	5	2
E	5	A	18	4
F	7	A	40	7
G	4	B、D	10	3
H	3	E、F、G	15	6
合计			153	
工程的间接费用			5(百元/天)	

求出该工程的最低成本日程。

解题分析 由题设绘制网络图如图 11－3 所示：

图 11－3

图中，箭线 A、B、C、D、E、F、G、H 分别代表 8 个工序，箭线旁边的数字分别表示为完成该个工序所需的时间(天数)。

解题过程 结点①②③④⑤⑥⑦⑧分别表示工序的开始和结束，在上述网络中，各事项的最早时间分别为：

$T_E(1)=0$，　$T_E(2)=T_E(1)+T(1,2)=0+8=8$，

$T_E(3)=T_E(1)+T(1,3)=0+4=4$，

$T_E(4)=\max\{T_E(3)+T(3,4),T_E(2)+T(2,4)\}=\max\{4+3,8+0\}=8$，

$T_E(5)=T_E+T(3,5)=4+7=11$，

$T_E(7)=\max\{T_E(4)+T(4,7),T_E(3)+T(3,7),T_E(5)+T(5,7)\}$

$\quad=\max\{8+4,4+5,11+10\}=\max\{12,9,11\}=12$，

$T_E(8)=\max\{T_E(2)+T(2,8),T_E(7)+T(7,8)\}=\max\{8+6,12+3\}$

$=\max\{14,15\}=15$。

对于上述网络图中，计算各事项最迟时间为：

$T_L(8)=15$， $T_L(7)=T_L(8)-T(7,8)=15-3=12$，

$T_L(4)=T_L(7)-T(4,7)=12-4=8$，

$T_L(2)=\min\{T_L(8)-T(2,8),T_L(4)-T(2,4)\}=\min\{15-6,8-0\}$

$=\min\{9,8\}=8$，

$T_L(3)=\min\{T_L(4)-T(3,4),T_L(7)-T(3,7),T_L(5)-T(3,5)\}$

$=\min\{8-3,12-5,12-7\}=\min\{5,7,5\}=5$，

$T_L(1)=\min\{T_L(2)-T(1,2),T_L(3)-T(1,3)\}=\min\{8-8,5-4\}$

$=\min\{0,1\}=0$。

由于事项的最早时间与事项最迟时间相等时为关键工序，从而可得关键路线为：

①→②→…→④→⑦→⑧，

对应的关键工序为 $B \to G \to H$，

由题设，工程工期为 15 天，则工程的直接费用(各工序直接费用之和)为(20+30+15+5+18+40+10+15)×100=15 300 元，间接费用为 15×500=7 500 元，总费用为 15 300+7 500=22 800 元。

以上这个按正常时间进行的方案称作第Ⅰ方案。

若要减少第Ⅰ方案的完工时间，首先要缩短关键路线上直接费用变动率最低的工序的作业时间。

例如，关键路线 B,G,H 中，工序中 B,G 的直接费用率低于间接费用，缩短 G 工序 1 天，此时总费用为 22 800+(300−500)=22600 元，则关键路线有三条，分别为 B,G,H； B,C； A,D,G,H，为第Ⅱ方案。

此时缩短工期减少间接费用，要大大增加三条关键路线的直接费用。由最低成本方程可知第Ⅱ方案为最优方案。

故工程为 14 天时，总成本最低。

【例 2】 根据表 11−2 中给出的条件，绘制网络图。

表 11−2

作业代号	紧前作业	时间	成本斜率	作业代号	时间	紧前作业	成本斜率
A	—	5	1	F	2	C	2
B	—	2	1.2	G	5	D.E	1.8
C	A	2	1	H	3	D.E	0.7
D	A	2	0.8	*I*	4	H	1
E	B	3	1.3				

解题分析 该题是网络图中比较简单的一种类型，之所以要作为例题，只是想说明几个问题：第一，关键路线的判定不能依靠结点的时间参数，即路线①→③→④→⑥→⑦是关键路线，而①→③→④→⑦不是关键路线；第二，网络图的绘制应尽可能

地合理;第三,当要优化网络时,首先从结构上考虑,是否能够改变;其次是减少各作业的天数,这时要考虑每个作业的成本斜率,如果要使工期减少一天,那么在关键路线上应对作业 H 调整,此时 H 作业减少一天费用最便宜。在调整的过程中,当关键路线减少一天时,要看其他路线是否变成关键路线,如果有两条关键路线时,则应再减少公共关键路线上的时间,如 A 作业。

解题过程 首先按紧前作业的逻辑关系画出网络图,如图 11—4 所示,然后逐点计算。

对图 11—4 所示的网络图计算结点时间参数。

图 11—4

从结点 1 开始,从左向右逐点计算 $T_E(i)$:

$T_E(1)=0$, $T_E(2)=T_E(1)+t(1,2)=0+2=2$,

$T_E(3)=T_E(1)+t(1,3)=0+5=5$,

$T_E(4)=\max\{T_E(2)+t(2,4),T_E(3)+t(3,4)\}=\max\{2+3,5+2\}=7$,

$T_E(5)=T_E(3)+t(3,5)=5+2=7$,

$T_E(6)=T_E(4)+t(4,6)=7+3=10$,

$T_E(7)=\max\{T_E(4)+t(4,7),T_E(5)+t(5,7),T_E(6)+t(6,7)\}$

$=\max\{7+5,7+2,10+4\}=14$。

将所得数据分别填入图 11—4 结点上方或下方的"□"中。

然后从结点 7 开始,从右向左逐点计算 $T_L(i)$:

$T_L(7)=T_E(7)=14,T_L(6)=T_L(7)-t(6,7)=14-4=10$,

$T_L(5)=T_L(7)-t(5,7)=14-2=12$,

$T_L(4)=\min\{T_L(7)-t(4,7),T_L(6)-t(4,6)\}=\min\{14-5,10-3\}=7$,

$T_L(3)=\min\{T_L(5)-t(3,5),T_L(4)-t(3,4)\}=\min\{12-2,7-2\}=5$,

$T_L(2)=T_L(4)-t(2,4)=7-3=4$,

$T_L(1)=\min\{T_L(3)-t(1,3),T_L(2)-t(1,2)\}=\min\{5-5,4-2\}=0$。

作业的时间参数:

作业的最早开始时间 $T_{ES}(i,j)$:

$$T_{ES}(i,j)=T_E(i)$$

将这一参数值填入作业线下所画的"□"符号中。

图 11－5

作业的最迟开始时间 $T_{LS}(i,j)$：

$$T_{LS}(i,j)=T_L(j)-t(i,j)=T_{LF}(i,j)-t(i,j)$$

将这一参数填入作业线下所画的“△”符号中。如图 11－5 中，结点的时间参数已算出，故可计算出 $T_{ES}(i,j)$，$T_{LS}(i,j)$，分别标在图 11－5 上。

历年考研真题评析

【题 1】（2006 年重庆大学）某企业要进行一工程项目，工序的相互关系见表 11－3。

表　11－3

工序	a	b	c	d	e	f	g
紧前工序	/	/	a,b	a,b	b	c	d,e
时间/天	4	2	3	4	3	1	2

根据以上资料：

(1)绘制网络图；

(2)计算各结点的时间参数；

(3)确定关键路线和总工期；

(4)试分析工期提前 1 天的方案。

解题分析　本题考察网络的基本知识，要求会画网络图并进行分析。

解题过程　(1)如图 11－6 所示。

(2)如图 11－6 所示。

(3)关键路线①→③→④→⑥，总工期 10 天。

(4)略。

图 11—6

【题 2】 (2005 年吉林大学)间接费用为每天 4.5 元。某高架工程的作业明细表及有关资料如表 11—4,试计算最低成本日程。

表 11—4

工序代号	紧前工序	正常进度		赶工进度		每赶工一天需要的费用
		工序时间	直接费用	工序时间	直接费用	
		天	元	天	元	元/天
a		3	10	1	18	4
b	a	7	15	3	19	1
c	a	4	12	2	20	4
d	c	5	18	2	24	2

解题分析 先画出网络图再进行分析。

解题过程 (1)网络图如图 11—7 所示。其关键路线为 $a-c-d$,共用时 12 天。

图 11—7

全部费用 327 元。

(2)先缩短 d 工程 2 天,全部费用为 322 元。

(3)再将 b 与 d 各缩短一天(这时全部费用为 320.5 元)。

(4)再将 a 缩短 2 天(总费用 319.5 元)。

第十二章

排　队　论

内容提要

一、排队

1. 排队系统的组成

一般的排队系统都有3个基本组成部分：输入过程，排队规则，服务机构。

输入过程

(1)顾客源可能是有限的也可能是无限的。

(2)顾客到达的方式可能是单个的，也可能是成批的。

(3)顾客相继到达的间隔时间可以是确定的，也可以是随机的，一般到达是随机的。

(4)顾客之间到达可以是独立的或相关的。

(5)输入过程可以是平稳的，或称对时间是齐次的，即指间隔时间的分布和所含参数均与时间无关，否则称为非平稳的，不过一般总假定是平稳的。

排队规则

三种排队规则：

(1)损失制：顾客到达后发现服务台正被占用，则离去。

(2)等待制：顾客到达后发现服务台正被占用，排队等待。

等待制的服务规则有：

① 先到先服务

② 后到先服务

③ 随机服务

④ 优先权服务

(3)混合制：是等待制和损失制相结合的一种排队服务规则。有两种：

① 队长有限制的情况，即当顾客排队等待服务的人数超过规定数量时，后来的顾客就自动离去，另求服务。

② 排队时间有限制的情况，当顾客排队时间超过一定时间时，顾客就自动离去。

服务机构情况

服务机构可以从下述几个方面来描述：

① 服务台数量及布置形式

从数量上来看，是单服务台还是多服务台，在多服务台的情况下，是串列的还是并列的，或是串、并列结合的。

如图 12－1 所示。

图 12－1

② 在某一时刻接受服务的顾客数，即每个服务台每次对单个顾客还是成批顾客。

③ 服务时间分布，服务时间和顾客来到时间一样，多数情况下是随机的。

常见的分布有：定长分布，负指数分布，爱尔朗分布等。

2. 主要数量指标

(1)队长和等待队长

队长是指系统中全体顾客的数目，而排队长度仅指在队列中排队等待的顾客数。

(2)顾客的逗留时间与等待时间

顾客自到达系统的时刻直到接受服务完毕离开系统的这段时间称为顾客在系统中的逗留时间；而顾客自到达系统时刻到开始接受服务台的服务之前的这段时间就称之为等待时间。

(3)系统的忙期与闲期

忙期是指顾客从到达空闲的服务台起到服务台再次变为空闲时止的连续繁忙的时间；与忙期相对应的，服务台连续保持空闲的时间长度就称为闲期。在一个较长的时间段内，系统的忙期与闲期是交替出现的。

二、排队模型

1. 有关指标与记号

(1)系统状态——指一个排队服务系统中顾客数(包括正在被服务的顾客数)；

(2)队长——指系统中等待服务的顾客数，它等于系统状态减去正在被服务的顾客数；

(3)$N(t)$——在时刻 t 排除服务系统中的顾客数，即系统在时刻 t 的瞬时状态；

(4)$P_n(t)$——在时刻 t 系统中恰好有 n 个顾客的概率；

(5)λ_n——当系统中有 n 个顾客时，新来顾客的平均到达率(单位时间内新顾客的到达数)，当对所有 n 值 λ_n 为常数时，可用 λ 代替 λ_n；

(6)μ_n——当系统中有 n 个顾客时，整个系统的平均服务率(单位时间内服务完毕离去的顾客数)，当 $n\geqslant 1$，μ_n 是常数时，可用 μ 代替 μ_n；

(7)S——排队服务系统中并联的服务站个数；

(8)稳定状态——当一个排队服务系统开始运转时，系统状态很大程度上取决于系统的初始状态和运转经历的时间，但过了一段时间后，系统的状态将独立于初始状态及经历的时间，这时称系统处于稳定状态。由于对系统的瞬时状态研究分析起来很困难，所以排队论中主要研究系统处于稳定状态的工作情况。由于稳定状态时工作情况与时刻 t 无关，这时 $P_n(t)$ 可写为 P_n，$N(t)$ 可写为 N。

2. 常见模型

(1)生灭过程

设$\{N(t),t\geqslant 0\}$为一随机过程。若 $N(t)$ 的概率分布具有以下性质：

① 当 $N(t)=j$，从时刻 t 起到下一个顾客到达时刻止的时间服从参数为 λ_j 的负指数分布，$j=0,1,2,\cdots$。

② 当 $N(t)=j$ 时，从时刻 t 起到下一个顾客离去时刻止的时间服从参数为 μ_j 的负指数分布，$j=0,1,2,\cdots$。

③ 同一时刻时只有一个顾客到达或离去。

称$\{N(t),t\geqslant 0\}$为一个生灭过程。

具有这样特点的排队系统当达到平稳状态时，队长的分布为：

$$P_j=\frac{\lambda_{j-1}\lambda_{j-2}\cdots\lambda_0}{\mu_j\mu_{j-1}\cdots\mu_1}P_0 \qquad (j=1,2,\cdots)$$

(2)$M/M/1/N$ 系统

$M/M/1/N$ 系统是指顾客按泊松流输入，平均每单位时间到达 λ 个顾客，服务时间服从负指数分布，平均每单位时间服务 μ 个顾客，只有一个服务台，服务规则是先到先服务，系统中能容纳顾客的最大数为 N 的系统，当顾客数来到系统时，若顾客已经等于 N 时，则自动离去，另求服务。

状态转移速度图如图 12－2。

图 12－2

稳态概率方程为

$$P_n = \frac{\lambda}{\mu}P_{n-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \qquad (1 \leqslant n \leqslant N)$$

由 $\sum\limits_{n=0}^{N} P_n = 1$ 得

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = 1$$

则

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{N+1}, & \lambda = \mu \\ \dfrac{1-\dfrac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}, & \lambda < \mu \end{cases}$$

则

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{1}{N+1}, & \lambda = \mu \\ \dfrac{\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n}{1-\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}, & \lambda < \mu \end{cases}$$

$$L_s = \sum_{n=0}^{N} nP_n$$

$$\lambda_e = \sum_{n=0}^{N-1}\lambda P_n = \lambda(rP_n) + 0 \cdot P_N = \lambda(1-P_N)$$

（系统不满时顾客以 λ 的速度进入系统）

$$\mu_e = \sum_{n=1}^{N}\mu P_n = \mu(1-P_0) + 0 \cdot P_0 = \mu(1-P_0)$$

（系统不空时顾客以 μ 的速度离开系统）

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_e}, W_q = W_s - \frac{1}{\mu}, L_q = W_q \cdot \lambda_e$$

(3)$M/M/1/N/\infty$

在(2)中取 $N \to \infty$，并假设 $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$，都可以得到以下结果

$$P_j = \rho^j P_0, j \geqslant 1$$

其中 $P_0 = 1 - \rho$

平均排队长 $L_q = \sum\limits_{j+1}^{\infty} jP_{j+1} = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$

平均队长 $L=L_q+\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\rho}{1-\rho}$

等待时间 T_q 的平稳分布为

$$P\{T_q>x\}=\rho e^{-(\mu-\lambda)x},x\geqslant 0$$

逗留时间 T 的平稳分布为

$$P\{T>x\}=e^{-(\mu-\lambda)x},x\geqslant 0$$

平均等待时间 $W_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{\rho}{\mu-\lambda}$

平均逗留时间 $W=\frac{L}{\lambda}=\frac{1}{\mu-\lambda}$。

三、系统的优化问题

最优设计的优化目标一般是要么总费用最小，要么纯收入或利润最大，从而确定最优的服务水平或最佳服务台数。优化中常用的处理方法是边际分析法或经典的微分法，对于过于复杂的表达式或表达式无法得到的排队系统，可以采用计算机模拟技术处理。

典型例题与解题技巧

【例 1】 某加油站有一台油泵。来加油的汽车按泊松分布到达，平均每小时 20 辆，但当加油站中已有 n 辆汽车时，新来汽车不愿等待而离去，离去概率为 $n/4(n=0,1,2,3,4)$。油泵给一辆汽车加油所需要的时间为具有均值为 3min 的负指数分布。

(1)画出此排队系统的速率图；

(2)导出其平衡方程式；

(3)求出加油站中汽车数的稳态概率分布；

(4)求那些在加油站的汽车的平均逗留时间。

解题分析 这是一道典型的排队模型问题，要求读者基础知识要扎实，一步一步分析，对排队问题常见模型分布熟悉，思路清晰正确。

解题过程 (1)系统的状态可能值 $n=0,1,2,3,4$。当系统的状态取值为 i 时，其有效到达率为$(1-\frac{i}{4})\lambda_0\lambda_0=\lambda=20$ 辆/h，$\lambda_1=15$ 辆/h，$\lambda_2=10$ 辆/h，$\lambda_3=5$ 辆/h。该排队系统的速率图如图 12－3 所示。

图 12－3

(2)当系统达到平稳状态时，此时对各状态节点而言，进速率＝出速率，可得如下平衡方程式：

$$\begin{cases}\mu P_1=\lambda_0 P_0\\ \lambda_0 P_0+\mu P_2=(\lambda_1+\mu)P_1\\ \lambda_1 P_1+\mu P_3=(\lambda_2+\mu)P_2\\ \lambda_2 P_2+\mu P_4=(\lambda_3+\mu)P_3\\ \lambda_3 P_3=\mu P_4\end{cases}$$

(3)解上面方程组，得到

$$P_i=\frac{\lambda_o\cdots\lambda_{i-1}}{\mu^i}P_0$$

又 $\sum_{i=0}^{4}P_i=1$，且 $\mu=\frac{60}{3}=20$ 辆 /h

故 $P_0\left(1+\frac{\lambda_0}{\mu}+\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu^2}+\frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu^3}+\frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\mu^4}\right)=1$

即

$P_0=\left[1+\frac{20}{20}+\frac{20\times15}{20^2}+\frac{20\times15\times10}{20^3}+\frac{20\times15\times10\times5}{20^4}\right]^{-1}=0.311$，

$P_1=\frac{20}{20}P_0=0.311$， $P_2=\frac{20\times15}{20^2}P_0=0.233$，

$P_3=\frac{20\times15\times10}{20^3}P_0=0.117$，$P_4=\frac{20\times15\times10\times5}{20^4}P_0=0.029$。

(4)逗留时间 T 的期望值 $W=E(T)$，根据数学期望全概率公式，有

$$W=E(T)=\sum_{i=1}^{4}P_iE(T/i)$$

T/i 表示一顾客到达且留在系统内时，系统已有 i 个顾客，按先到先服务的规则，这个顾客的逗留时间，T/i 就是原有各顾客的服务时间 T_j 和这个顾客服务时间 T_{i+1}之和

$$W_i=T'_1+T_2+\cdots+T_{i+1}$$

其中第一个顾客正被服务，T'_1 是到服务完了的部分时间。又知 $T_j(j=2,\cdots,i+1)$都服从负指数分布，由负指数分布的无记忆性知，T'_1 也服从负指数分布，由此我们知 T/i 服从 $i+1$ 阶爱尔朗分布。

$$E(T/i)=\frac{i+1}{\mu}$$

故 $W=0.311\times\frac{1}{20}+0.311\times\frac{2}{20}+0.233\times\frac{3}{20}+0.117\times\frac{4}{20}=0.105$

【例 2】 某厂有大量同一型号的车床，当该种车床损坏后或送机修车间或由机修车间派人来修理。已知该种车床损坏率服从泊松分布，平均每天 2 台。又机修车间对每台损坏车床的修理时间为负指数分布的随机变量，平均每台的修理时间为 $1/\mu$ 天。但 μ 是一个与机修人员编制及维修设备配备好坏(即与机修车间每年开支费用 K)有关的函数。已知

$$\mu(K)=0.1+0.001K \quad (K\geqslant1900\text{ 元})$$

又已知机器损坏后，每台每天的生产损失为 400 元，试决定使该厂生产最经济的 K

及 μ 值。

解题分析　在这个问题中包括两方面费用：(1)机器损坏造成的生产损失 S_1；(2)机修车间的开支 S_2。要使整个系统最经济，就是要使 $S=S_1+S_2$ 为最小。

解题过程　下面以一个月为期进行计算：

S_1 =(正在修理和待修机器数)×(每台每天的生产损失)×(每个月的工作日数)

$$=L_s\times 400\times 22=8800\left(\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\right)=8800\left(\frac{\lambda}{0.1+0.001K-\lambda}\right)$$

$$=8800\left(\frac{2}{0.001K-1.9}\right)$$

$S_2=K/12$

所以
$$S=K/12+8800\left(\frac{2}{0.001K-1.9}\right)$$

令
$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}K}=\frac{1}{12}-\frac{176000}{(0.001K-1.9)^2}(0.001)=0$$

$$(0.001K-1.9)^2=211.2$$

$$0.001K-1.9=14.53$$

得
$$K=16430\text{ 元},\mu=17.65$$

$$S=\frac{16430}{12}+8800\left(\frac{2}{16.43-1.9}\right)=1369+1211=2580\text{ 元}$$

历年考研真题评析

【题】　(2005 年上海交通大学)某工厂生产一项产品，其加工的某道工序可有两种方案：采用设备 A，平均加工时间为 4min，负指数分布，设备费用为每小时 2 元；采用设备 B，加工时间恰为 5min，设备费用为每小时 1.8 元。产品以每小时 8 件的速率到达这一工序。产品在加工过程中每延误 1h，对工厂将有 3 元的损失，问应选择哪一种设备？

解题分析　本题综合性较强，要求读者有很好的数学基础与排队论知识。

解题过程　本题考虑“$\underbrace{\text{每件产品加工(占用设备时间)费用与}}_{\text{记为(1)}}\underbrace{\text{加工过程延误的损失}}_{\text{(2)}}$”的和为最小。

采用设备 A 时，费用(1)$=\frac{4}{60}\times 2=\frac{8}{60}$元，费用(2)$=3\times W_s=\frac{3}{7}$元，

$W_s=\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{1}{15-8}=\frac{1}{7}\text{h}$　$\left(\lambda=\frac{8}{\text{h}},\frac{1}{\mu}=4\text{min}=\frac{1}{15\text{h}}\right)$

费用(1)+(2)$=\frac{8}{60}+\frac{3}{7}=0.562$ 元；

采用设备 B 时，费用(1)$=\frac{5}{60}\times 1.8=\frac{9}{60}$元，

$$\text{费用(2)}=3\times W_s,\lambda=\frac{8}{\text{h}},\frac{1}{\mu}=\frac{1}{12}\text{h},\rho=\frac{2}{3},$$

$$W_s=\frac{\rho^2}{2\lambda(1-\rho)}+\frac{1}{\mu}=\frac{1}{6},$$

故费用(2)$=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$,

费用(1)+(2)$=\frac{9}{60}+\frac{1}{2}=0.65$ 元。

因采用设备 B 时费用高于采用设备 A 的总费用,故应采用设备 A。

课后习题全解

◎**12.1** 某工地为了研究发放工具应设置几个窗口,对于请领和发放工具分别作了调查记录:

(1)以 10 分钟为一段,记录了 100 段时间内每段到来请领工具的工人数,见表 12—1;

(2)记录了 1000 次发放工具(服务)所用的时间(秒)见表 12—2,试求:

①平均到达率和平均服务率。

②利用统计学的方法证明:若假定到来的数是服务从参数 $\lambda=1.6$ 的泊松分布,服务时间服从参数 $\mu=0.9$ 的负指数分布,这是可以接受的。

(3)这时只设一个服务员是不行的,为什么?试分别就服务员数 $c=2,3,4$ 各情况计算等待时间 W_q。

(4)设请领工具的工人等待的费用损失为每小时 6 元,发放工具的服务员空闲费用损失为每小时 3 元,每天按八小时计算,问设几个服务员使总费用损失为最小?

表 12—1

每 10 分钟内领工具人数	次数
5	1
6	0
7	1
8	1
9	1
10	2
11	4
12	6
13	9
14	11
15	12
16	13
17	10
18	9
19	7

每 10 分钟内领工具人数	次数
20	4
21	3
22	3
23	1
24	1
25	1
合计	100

表 12－2

发放时间(秒)	次数
15	200
30	175
45	140
60	104
75	78
90	69
105	51
120	47
135	38
150	30
165	16
180	12
195	10
210	7
225	9
240	9
255	3
270	1
285	1
合计	1000

分析　①平均到达率＝到达总数/总时间，平均服务率＝服务总数/总时间。

②$E[N(t)]=\lambda t, E(x)=\dfrac{1}{\mu}$，再证 $\lambda \geqslant \mu$ 即可。

③$\rho=\dfrac{\lambda}{c\mu}$。

解 (1)平均到达率＝到达总数/总时间

$=\sum$[每 10 分钟内领工具人数×次数]/10 分钟/Σ次数

＝1570÷1000＝1.6(人/分)

平均服务率＝服务总数/总时间

$=1000/\sum$[发放时间×次数]

＝1000÷1120＝0.9(人/分)

(2)令 $P_n(t)=\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}(n=0,1,2,\cdots,t>0)$表示 t 时间内到达 n 个顾客的概率；随机变量$\{N(t)=N(s+t)-N(s)\}$服从泊松分布且有 $E[N(t)]=\lambda t$，于是单位时间内平均到达率为 λ，而此处 $\lambda=1.6$(人/分)，因此假设到来的人数服从参数$\lambda=1.6$的泊松分布是可以接受的。

对于负指数分布 $f(x)=\mu e^{-\mu x}$(当 $x\geqslant0$)知 $E(x)=\dfrac{1}{\mu}$，即期望服务时间为$\dfrac{1}{\mu}$，亦即单位时间服务 μ 人，而平均服务率为 0.9(人/分)，所以假设服务时间服从参数$\mu=0.9$的负指数分布是可以接受的。

(3)此时假若只设一个服务员，因 $\lambda>\mu$，即平均到达率大于平均服务率，将使队伍越排越长，所以只设一个服务员是不行的。

① 当 $c=2$ 时，$\rho=\dfrac{\lambda}{c\mu}=\dfrac{1.6}{2\times0.9}\approx0.9$. 查“多服务台 $W_q\cdot\mu$ 的数值表”(见清华版《运筹学(第三版)》第 325 页)，得 $W_q\cdot\mu=4.2632$，从而 $W_q=4.2632/\mu=4.2632/0.9\approx4.748$(分)。

② 当 $c=3$ 时，$\rho=\dfrac{\lambda}{c\mu}=\dfrac{1.6}{3\times0.9}\approx0.6$. 查“多服务台 $W_q\cdot\mu$ 的数值表”，得 $W_q\cdot\mu=0.2956$。从而 $W_q=0.2956/\mu=0.2956/0.9\approx0.33$(分)。

③ 当 $c=4$ 时，$\rho=\dfrac{\lambda}{c\mu}=\dfrac{1.6}{4\times0.9}\approx0.44$. 查“多服务台 $W_q\cdot\mu$ 的数值表”，无此数。故用线性插值法求得 $W_q\cdot\mu=0.0597$，从而 $W_q=0.0597/\mu=0.0597/0.9\approx0.067$(分)。

(4)每天平均到达 $R=8\times60\times1.6=768$(人)，需服务时间 $T=768\div0.9=853$(分)。

① 当 $c=2$ 时，损失$=4.43\times768\div60\times6+(8\times60\times2-853)\div60\times3=345.574$(元)；

② 当 $c=3$ 时，损失＝54.694(元)；

③ 当 $c=4$ 时，损失＝58.49(元)。

所以，设 3 个服务员使总费用损失为最小。

◎**12.2** 某修理店只有一个修理工人，来修理的顾客到达次数服从泊松分布，平均每小时 4 人，修理时间服从负指数分布，平均需 6 分钟。求：

(1)修理店空闲时间概率；

(2)店内有 3 个顾客的概率；

(3)店内至少有 1 个顾客的概率；

(4)在店内顾客平均数；

(5)在店内平均逗留时间；

(6)等待服务的顾客平均数；

(7)平均等待修理(服务)时间；

(8)必须在店内消耗 15 分钟以上的概率。

分析　本题是标准的 $M/M/1$ 模型。

解　该系统为$(M/M/1/\infty/\infty)$模型，$\lambda=4$，$\mu=\frac{60}{6}=10$。

(1)$P_0=1-\rho=1-\frac{4}{10}=0.6$；

(2)$P_3=(1-\rho)\rho^3=\left[1-\frac{4}{10}\right]\left[\frac{4}{10}\right]^3=0.0384$；

(3)$1-P_0=1-\frac{6}{10}=0.4$；

(4)$L_s=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{4}{10-4}=\frac{2}{3}$(人)；

(5)$w_s=\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{1}{10-4}=\frac{1}{6}$(小时)$=10$(分钟)；

(6)$L_q=\frac{\rho\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{\frac{4}{10}\times 4}{10-4}=\frac{4}{15}$(人)；

(7)$w_q=\frac{\rho}{\mu-\lambda}=\frac{4/10}{10-4}=\frac{1}{15}$(小时)$=4$(分钟)；

(8)$1-F(w)=e^{-(\mu-\lambda)w}=e^{-(10-4)\times\frac{15}{60}}=0.2231$。

○**12.3**　在某单人理发店顾客到达为泊松流，平均到达间隔为 20 分钟，理发时间服从负指数分布，平均时间为 15 分钟。求：

(1)顾客来理发不必等待的概率；

(2)理发店内顾客平均数；

(3)顾客在理发店内平均逗留时间；

(4)若顾客在理发店内平均逗留时间超过 1.25 小时，则店主将考虑增加设备及理发员，问平均到达率提高多少时店主才作这样的考虑？

解　该系统为 $M/M/1$ 模型，$\lambda=\frac{60}{20}=3$(人/小时)，$\mu=\frac{60}{15}=4$(人/小时)。

(1)$P_0=1-\rho=1-\frac{3}{4}=0.25$；

(2)$L_s=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{3}{4-3}=3$(人)；

(3)$w_s=\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{1}{4-3}=1$(小时)；

(4)由 $w_s=\frac{1}{\mu-\lambda}>1.25$ 得 $\lambda>3.2$，$3.2-3=0.2$(人/小时)，所以平均到达率提高 0.2

(人/小时)时,店主才考虑增加设备及理发员。

◎**12.4** 某医院手术室根据病人来诊和完成手术时间的记录,任意抽查了100个工作小时,每小时来就诊的病人数 n 的出现次数如表12—3所示。又任意抽查了100个完成手术的病历,所用时间 v(小时)出现的次数如表12—4所示。

表12—3

到达的病人数 n	出现次数 f_n
0	10
1	28
2	29
3	16
4	10
5	6
6以上	1
合计	100

表12—4

为病人完成手术时间 v(小时)	出现次数 f_v
0.0～0.2	38
0.2～0.4	25
0.4～0.6	17
0.6～0.8	9
0.8～1.0	6
1.0～1.2	5
1.2以上	0
合计	100

(1)试求系统中(包括手术室和候诊室)有0,1,2,3,4,5个病人的概率。

(2)设 λ 不变而 μ 是可控制的,证明:若医院管理人员认为使病人在医院平均耗费时间超过2小时是不允许的,那么平均服务率 μ 必须达到2.6(人/小时)以上。

分析 $\rho=\lambda/\mu, W_s=\dfrac{1}{\mu-\lambda}$。

解 (1)因为 $\lambda=2.1, \mu=2.5, \rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=\dfrac{2.1}{2.5}=0.84$,所以

$P_0=1-\rho=1-0.84=0.16$;

$P_1=(1-\rho)\rho=(1-0.84)\times0.84=0.134$;

$P_2=(1-\rho)\rho^2=(1-0.84)\times0.84^2=0.113$;

$P_3=(1-\rho)\rho^3=(1-0.84)\times0.84^3=0.095$;

$P_4=(1-\rho)\rho^4=(1-0.84)\times0.84^4=0.080$；

$P_5=(1-\rho)\rho^5=(1-0.84)\times0.84^5=0.067$。

(2)证明：不允许使病人在医院平均耗费时间超过2小时，也即 $W_s=\dfrac{1}{\mu-\lambda}=\dfrac{1}{\mu-2.1}\leqslant2$，故 $\mu\geqslant2.6$，即平均服务率 μ 必须达到2.6人/小时以上。证毕。

○**12.5**　称顾客为等待所费时间与服务时间之比为顾客损失率，用 R 表示。

(1)试证：对于 $M/M/1$ 模型　$R=\dfrac{\lambda}{\mu-\lambda}$；

(2)在上题中，设 λ 不变，μ 是可控制的，试定 μ 使顾客损失率小于4。

证明　(1)对于 $M/M/1$ 模型，$w_q=\dfrac{\rho}{\mu-\lambda}$，由定义，$R=w_q\mu=\dfrac{\rho\mu}{(\mu-\lambda)}=\dfrac{(\lambda/\mu)\mu}{(\mu-\lambda)}=\dfrac{\lambda}{(\mu-\lambda)}$。证毕。

(2)由 $R=\dfrac{\lambda}{\mu-\lambda}=\dfrac{2.1}{\mu-2.1}<4$ 得 $\mu>2.6$，所以当 $\mu>2.6$(人/小时)时，顾客损失率小于4。

○**12.6**　设 n_s 表示系统中顾客数，n_q 表示对列中等候的顾客数，在单服务台系统中有

$$n_s=n_q+1(n_s,n_q>0)$$

试说明它们的期望值

$$L_s\neq L_q+1$$

$$L_s=L_q+\rho$$

根据这关系式给 ρ 以直观解释。

解　因为 $L_q=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nP_n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}P_n=L_s-(\sum\limits_{n=1}^{\infty}P_n-P_0)=L_s-(1-P_0)=L_s-\rho$，所以 $L_s=L_q+\rho$。

因为系统中的顾客数和等候服务的顾客数期望值之间相差 ρ，所以 ρ 可直观解释为服务台的繁忙程度，即服务台的利用率。

◎**12.7**　某工厂为职工设立了昼夜24小时都能看病的医疗室(按单服务台处理)。病人到达的平均间隔时间为15分钟，平均看病时间为12分钟，且服从负指数分布，因工人看病每小时给工厂造成损失为30元。

(1)试求工厂每天损失的期望值。

(2)问平均服务率提高多少，方可使上述损失减少一半？

分析　本题是 $M/M/1$ 模型。

解　(1)对于 $M/M/1$ 模型，$w_s=\dfrac{1}{\mu-\lambda}=\dfrac{1}{\frac{60}{12}-\frac{60}{15}}=1$(小时)，即每位病人在系统中的时间期望为1小时。而每天平均有 $\dfrac{60}{15}\times24=96$ 位病人到达系统，所以工厂每天损失的期望值为 $96\times30=2880$ 元。

(2)要想使损失减少一半，必须使 w_s 减少一半，即 $w_s=\dfrac{1}{\mu-\lambda}=\dfrac{1}{\mu-4}=0.5$，解之得 $\mu=6$(人/小时)。$6-\dfrac{60}{12}=1$(人/小时)，所以平均服务率提高1人/小时，方可使

上述损失减少一半。

○12.8 对于 $M/M/1/\infty/\infty$ 模型，在先到先服务的情况下，试证：顾客排队等待时间分布概率密度是

$$f(w_q)=\lambda(1-\rho)e^{-(\mu-\lambda)w_q},w_q>0$$

并根据这式求等待时间的期望值 W_q。

证明 令 N' 表示在统计平衡下一个顾客到达时刻看到系统中已有的顾客数(不包含此顾客)，T_q 表示在统计平衡下顾客的等待时间，则

$$P\{T_q>t\}=\sum_{n=0}^{\infty}P\{T_q>t,N'=n\}=\sum_{n=0}^{\infty}P\{T_q>t\mid N'=n\}\cdot P\{N'=n\}$$

依 a_n 的定义，得 $P\{N'=n\}=a_n$，有

$$P\{T_q>t\}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot P\{T_q>t\mid N'=n\}$$

由定理，对任何一个输入为最简单流的单服务台或多服务台的等待制排队系统，恒有

$$P_n=a_n=b_n,n=0,1,2,\cdots$$

所以

$$P\{T_q>t\}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n\cdot P\{T_q>t\mid N'=n\}$$

到达者遇到系统中有不少于 1 个顾客是他需要等待的充要条件，因此

$$P\{T_q>t|N'=0\}=0$$

$$P\{T_q>t\}=\sum_{n=1}^{\infty}P_n\cdot P\{T_q>t\mid N'=n\}\tag{1}$$

因为当系统中有 $n(n\geqslant1)$ 个顾客时，其中只有一个正在接受服务，而其余 $n-1$ 个在排队等待，所以新到顾客必须在服务台轮空 n 次后，才能接受服务。于是，服务台得空次数 $m(t)<n$ 是新到顾客的等待时间 $T_q>t$ 的充要条件，因此

$$P\{T_q>t\mid N'=n\}=\sum_{k=0}^{n-1}P\{m(t)=k\},n\geqslant1\tag{2}$$

其次，因为服务时间为负指数分布，故其输出流，即服务台得空次数 $m(t)$ 为一最简单流，其参数为 μ，故

$$P\{m(t)=k\}=e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^k}{k!}\tag{3}$$

将(3)式代入(2)式，然后将(2)式再代入(1)式，得

$$P\{T_q>t\}=\sum_{n=1}^{\infty}P_n\cdot\sum_{k=0}^{n-1}e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^k}{k!}$$

其中，$P_n=(1-\rho)\rho^n$，当 $\rho<1,n\geqslant0$ 时，有

$$\begin{aligned}P\{T_q>t\}&=\sum_{n=1}^{\infty}P_n\cdot\sum_{k=0}^{n-1}e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^k}{k!}=e^{-\mu t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu t)^k}{k!}\sum_{n=k+1}^{\infty}P_n\\&=e^{-\mu t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu t)^k}{k!}\left[1-\sum_{n=0}^{k}P_n\right]=e^{-\mu t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu t)^k}{k!}\left[1-(1-\rho)\frac{1-\rho^{k+1}}{1-\rho}\right]\\&=e^{-\mu t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu t)^k}{k!}\rho^{k+1}=\rho e^{-\mu t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu t)^k}{k!}\rho^k\end{aligned}$$

$$= \rho e^{-\mu t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu\rho t)^k}{k!}$$

$$= \rho e^{-\mu(1-\rho)t},\ t \geqslant 0, \rho < 1 \tag{4}$$

所以顾客在系统中的等待时间分布为

$w_q(t)=P\{T_q\leqslant t\}=1-P\{T_q>t\}=1-\rho e^{-\mu(1-\rho)t}, t\geqslant 0, \rho<1$

因为 T_q 以正概率 $1-\rho$ 取 0 值，而当 $t>0$ 时它又具有连续型随机变量的性质，其分布函数必在$(0,+\infty)$上连续。因此 T_q 既不是连续型随机变量，又不是离散型随机变量。然而类似于连续型随机变量那样，定义 T_q 的密度函数为

$$f[w_q(t)]=w_q'(t)=\begin{cases}1-\rho, & t=0\\ \lambda(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)t}, & t>0\end{cases}$$

$$E[w_q(t)] = \int_0^{+\infty} t\lambda(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)t}dt$$

$$= \lambda(1-\rho)\left[-\frac{t}{\mu(1-\rho)}-\frac{1}{\mu^2(1-\rho)^2}\right]e^{-\mu(1-\rho)t}\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\lambda(1-\rho)}{\mu^2(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$$

○**12.9**　在 $M/M/1/N/\infty$模型中，如 $\rho=1(\lambda=\mu)$，试证：

$$\begin{cases}P_0=\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}, & \rho\neq 1\\ P_n=\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\rho^n, & n\leqslant N\end{cases}$$

应为

$$P_0=P_1=\cdots=\frac{1}{N+1}$$

于是

$$L_s=N/2$$

证明　系统在时刻 t 的顾客数 $N(t)$仍为一生灭过程，且有

$$\lambda_n=\begin{cases}\lambda, & 0\leqslant n<N\\ 0, & n\geqslant N\end{cases}$$

$$\mu_n=\begin{cases}\mu, & 1\leqslant n<N\\ 0, & n\geqslant N\end{cases}$$

当 $t\to\infty$时，由系统的稳定状态概率可知

$$P_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, 1\leqslant n<N$$

因为 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=1$，所以

$$P_0=\left[1+\sum_{n=1}^{N}P_n\right]^{-1}=\left[1+\sum_{n=1}^{N}1\right]^{-1}=\frac{1}{N+1}$$

故

$$P_n=\rho^n P_0=P_0=\frac{1}{N+1}, 1\leqslant n<N$$

即

$$P_0=P_1=\cdots=P_N=\frac{1}{N+1}$$

从而

$$L_s=\sum_{n=0}^{N}nP_n=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}n=\frac{1}{N+1}\cdot\frac{N(N+1)}{2}=\frac{N}{2}$$

○**12.10** 对于 $M/M/1/N/\infty$ 模型，试证：

$$\lambda(1-P_n)=\mu(1-P_0)$$

并对上式给予直观的解释。

证明 若令 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$，则

$$P_0=\begin{cases}\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}, & \rho\neq 1\\[2mm] \dfrac{1}{N+1}, & \rho=1\end{cases}$$

故

$$P_n=\begin{cases}\dfrac{(1-\rho)^n}{1-\rho^{N+1}}, & \rho\neq 1,0\leqslant n\leqslant N\\[2mm] \dfrac{1}{N+1}, & \rho=1\end{cases}$$

当 $\rho=1$ 时，$P_0=P_N=\dfrac{1}{N+1}$，　$\lambda=\mu$，所以 $\lambda(1-P_N)=\mu(1-P_0)$，

当 $\rho\neq 1$ 时，$P_N=\dfrac{(1-\rho)\rho^N}{1-\rho^{N+1}}$，　$P_0=\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$，

$$\rho(1-P_N)=\rho\left[1-\frac{(1-\rho)\rho^N}{1-\rho^{N+1}}\right]=\frac{\rho-\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}},\quad 1-P_0=1-\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}=\frac{\rho-\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}}$$

所以 $\rho(1-P_N)=1-P_0$，即 $\lambda(1-P_N)=\mu(1-P_0)$。

此系统因为等待空间有限制，一旦顾客满 N 个时，新来顾客就无法进入系统，此时到达率为0. 因此，需要求出实际进入系统的平均到达率 λ_e。由于正在接受服务的顾客平均数为 $\sum\limits_{n=1}^{N}P_n=1-P_0=\dfrac{\lambda_e}{\mu}$，所以 $\lambda_e=\mu(1-P_0)$；另一方面，在单位时间内实际进入服务系统的顾客平均数为 $\lambda_e=\lambda(1-P_N)$，因此 $\mu(1-P_0)=\lambda(1-P_N)$。

◎**12.11** 在第12.2题中，如店内已有3个顾客，那么后来的顾客即不再排队，其他条件不变。试求：

(1)店内空闲的概率；

(2)各运行指标 L_s,L_q,W_s,W_q。

分析 本题为 $M/M/1/N/\infty$ 排队模型，$\rho_0=\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$，由课本式(12－25)可解(2)。

解 此系统为 $M/M/1/N/\infty$ 排队模型，$N=3$，$\lambda=4$ 人/小时，$\mu=10$ 人/小时，$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=0.4$。

(1)店内空闲的概率为 $P_0=\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}=\dfrac{1-0.4}{1-0.4^4}=0.62$。

(2)$L_s=\frac{\rho}{1-\rho}-\frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}}=\frac{0.4}{1-0.4}-\frac{(3+1)0.4^4}{1-0.4^4}\approx 0.77$，

$L_q=L_s-(1-P_0)=0.7718-(1-0.6158)=0.39$，

$W_s=\frac{L_s}{\lambda_e}=\frac{L_s}{\mu(1-P_0)}=\frac{0.7718}{10\times(1-0.6158)}=0.2$(分)，

$W_q=W_s-\frac{1}{\mu}=0.2009-\frac{1}{10}=0.1$(分)。

◎**12.12**　在第12.2题中，若顾客平均到达率增加到每小时12人，仍为泊松流，服务时间不变，这时增加了一个工人。

(1)根据 λ/μ 的值说明增加工人的原因。

(2)增加工人后求店内空闲概率；店内有2个或更多顾客(即工人繁忙)的概率。

(3)求 L_s,L_q,W_s,W_q。

分析　本题为 $M/M/2$ 排队模型。

解　(1)$\lambda=12$ 人/小时，$\mu=10$ 人/小时。因为 $c=1,\lambda>\mu$，意味着系统的流入量大于流出量，显然队列越来越长，所以要增加工人。

(2)增加1个工人后，此系统变为 $M/M/2$ 排队系统。

$\rho_c=\frac{\lambda}{c\mu}=\frac{12}{2\times 10}=0.6<1,\quad \rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{12}{10}=1.2$，

$$P\{n\geqslant 2\}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{C!C^{n-c}}\left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^n P_0=1-P_0-P_1,$$

$$P_0=\left[\sum_{k=0}^{c-1}\frac{1}{k!}\left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^k+\frac{1}{C!}\cdot\left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^c\right]^{-1}=\left[\rho^0+\rho^1+\frac{1.2^2}{2!}\cdot\frac{1}{1-0.6}\right]^{-1}$$

$$=\left[1+1.2+\frac{1.2^2}{2}\times\frac{1}{0.4}\right]^{-1}=0.25,$$

$$P_1=\frac{1}{1!}\left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^1 P_0=1.2\times 0.25=0.3,$$

故 $P\{n\geqslant 2\}=1-P_0-P_1=1-0.25-0.3=0.45$。

(3)$P_c=P_2=\frac{1}{2!}\left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^2 P_0=\frac{1}{2}\times 1.2^2\times 0.25=0.18$，

$L_q=\frac{\rho_c}{(1-\rho_c)^2}P_c=\frac{0.6}{(1-0.6)^2}\times 0.18=0.675$，

$L_s=L_q+\rho=0.675+1.2=1.875$，

$W_s=\frac{L_s}{\lambda}=\frac{1.875}{12}=0.15625$(小时)，　$W_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{0.675}{12}=0.05625$(小时)。

◎**12.13**　有 $M/M/1/5/\infty$ 模型，平均服务率 $\mu=10$，就两种到达率：$\lambda=6,\lambda=15$，已计算出相应的概率 P_n 如表12－5所示。试就这两种情况计算：

表12－5

系统中顾客数 n	$(\lambda=6)P_n$	$(\lambda=15)P_n$
0	0.42	0.05

系统中顾客数 n	$(\lambda=6)P_n$	$(\lambda=15)P_n$
1	0.25	0.07
2	0.15	0.11
3	0.09	0.16
4	0.05	0.24
5	0.04	0.37

(1)有效到达率和服务台的服务强度；

(2)系统中平均顾客数；

(3)系统的满员率；

(4)服务台应从哪些方面改进工作？理由是什么？

分析 本题属于系统容量有限制的情形$(M/M/1/5/\infty)$。

解 当$\lambda=6,\mu=10$时，有$P_N=P_5=0.04,\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=0.6$。

(1)有效到达率$\lambda_e=\lambda(1-P_5)=6\times(1-0.04)=5.76$，

服务台的服务强度$\bar{\rho}=\dfrac{\lambda}{\mu}(1-P_N)=\dfrac{6}{10}\times(1-0.04)=0.576$。

(2)$$L_q=\frac{P_0\rho^{c-1}}{(c-1)!\ (c-\rho)^2}\left[1-\rho_c^{N-c}-(N-c)(1-\rho_c)^{N-c}c\right]$$
$$=\frac{0.42\times0.6^0}{0!\ (1-0.6)^2}\left[1-0.6^{5-1}-(5-1)\times(1-0.6)\times0.6^{5-1}\right]$$
$$=0.6962,$$

系统中平均顾客数$L_s=L_q+\dfrac{\lambda_e}{\mu}=0.6962+\dfrac{5.76}{10}=1.2722$。

(3)系统的满员率$P_5=0.04$。

(4)服务台应降低服务强度，原因是系统中没有顾客的概率$(P_0=0.42)$比重较大。

当$\lambda=15,\mu=10$时，有$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=1.5$。

①有效到达率$\lambda_e=\lambda(1-P_5)=15\times(1-0.37)=9.45$，

服务台的服务强度$\bar{\rho}=\dfrac{\lambda}{\mu}(1-P_N)=\dfrac{15}{10}\times(1-0.37)=0.945$。

②$$L_q=\frac{P_0\rho^{c+1}}{(c-1)!\ (c-\rho)^2}\left[1-\rho_c^{N-c}-(N-c)(1-\rho_c)\rho_c^{N-c}\right]$$
$$=\frac{0.03\times1.5^2}{(1-1.5)^2}\left[1-1.5^{5-1}-(5-1)\times(1-1.5)\times1.5^{5-1}\right]$$
$$\approx1.6369,$$

系统中平均顾客数$L_s=L_q+\dfrac{\lambda_e}{\mu}=1.6369+\dfrac{9.45}{10}=2.5819$。

③系统的满员率$P_5=0.37$。

④服务台应提高服务率，原因是$\dfrac{\lambda}{\mu}=1.5>1$，会使排队队长增大而等待空间有

限,致使有些顾客得不到服务而自动离开。

○**12.14** 对于/$M/M/1/m/m$ 模型,试证:

$$L_s=m-\frac{\mu(1-P_0)}{\lambda}$$

并给予直观解释。

证明 因为 $1-P_0=\frac{\lambda_e}{\mu}$,所以 $\lambda_e=\mu(1-P_0)$。

若 L_s 表示系统中平均出故障的机器数,则系统外的机器平均数应是 $m-L_s$。于是系统的有效到达率,即 m 台机器单位时间内实际发生故障的平均数 $\lambda_e=\lambda(m-L_s)$。因此有 $\mu(1-P_0)=\lambda(m-L_s)$,即 $L_s=m-\frac{\mu(1-P_0)}{\lambda}$。证毕。

○**12.15** 对于 $M/M/c/\infty/\infty$模型,μ 是每个服务台的平均服务率,试证:

(1)$L_s-L_q=\frac{\lambda}{\mu}$;

(2)$\lambda=\mu[c-\sum_{n=0}^{c}(c-n)P_n]$。

并给予直观解释。

证明 (1)因为 $L_s=L_q+\bar{c}$,其中 $\bar{c}$ 为系统服务台的平均繁忙个数,即为服务台的强度 ρ,所以 $L_s-L_q=\rho=\frac{\lambda}{\mu}$。

(2) $$\bar{c}=\rho=\sum_{n=0}^{c-1}nP_n+c\sum_{n=c}^{\infty}P_n=\sum_{n=0}^{c-1}nP_n+c\left[1-\sum_{n=0}^{c-1}nP_n\right]$$

$$=c-\sum_{n=0}^{c-1}(cn-n)P_n=c-\sum_{n=0}^{c}(c-n)P_n$$

即

$$\lambda=\mu\left[c-\sum_{n=0}^{c-1}(cn-n)P_n\right]=\mu\left[c-\sum_{n=0}^{c}(c-n)P_n\right]$$

其中,$\left[c-\sum_{n=0}^{c-1}(cn-n)P_n\right]$ 为系统服务台的平均空闲个数,而 $\left[c-\sum_{n=0}^{c}(c-n)P_n\right]$ 则为系统服务台的平均繁忙个数,即为服务台的强度 ρ。

○**12.16** 车间内有 m 台机器,有 c 个修理工($m>c$)。每台机器发生故障率为 λ,符合 $M/M/c/m/m$ 模型,试证:

$$\frac{W_S}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)+W_S}=\frac{L_S}{m}$$

并说明上式左右两端的概率意义。

证明 因为 $W_S=\frac{L_S}{\lambda_e}=\frac{L_S}{\lambda(m-L_S)}$,所以

$$\frac{W_S}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)+W_S}=\frac{\frac{L_S}{\lambda(m-L_S)}}{\frac{1}{\lambda}+\frac{L_S}{\lambda(m-L_S)}}=\frac{\frac{L_S}{\lambda(m-L_S)}}{\frac{m}{\lambda(m-L_S)}}=\frac{L_S}{m}$$

一个周期 T_c 等于发生故障的机器在系统中的逗留时间 W_S 加上机器连续正常工作时间 $\frac{1}{\lambda}$，则 $\frac{W_S}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)+W_s}$ 为服务台繁忙的概率。服务台繁忙的概率也为 $\frac{L_S}{m}$，所以 $\frac{W_S}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)+W_S}=\frac{L_S}{m}$。

◎**12.17** 有一售票口，已知顾客按平均为 2 分 30 秒的时间间隔的负指数分布到达，顾客在售票口前服务时间平均为 2 分钟。若经过调查，顾客在售票口前至少要占用 0.8 分钟，且认为服务时间分布的概率密度函数是

$$f(z)=\begin{cases}1.25e^{-1.25z+1}, & z\geqslant 0.8\\ 0, & z<0.8\end{cases}$$

求顾客的逗留时间和等待时间。

分析 利用课本式(12－38)求得..

解 $\lambda=\frac{1}{2.5}=0.4$，$\mu=\frac{1}{2\times(1-20\%)}=\frac{1}{1.6}$，$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=0.4\times1.6=0.64$

令 $x=z-0.8$，则 $f(x)=\begin{cases}1.25e^{-1.25x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

从而

$E(x)=\frac{1}{1.25}=0.8$，$Var(x)=\frac{1}{1.25^2}=0.64$，

$E(z)=E(x+0.8)=E(x)+0.8=0.8+0.8=1.6$，

$Var(z)=Var(x+0.8)=Var(x)=0.64$，

$L_S=\rho+\frac{\rho^2+\lambda^2Var(z)}{2(1-\rho)}=0.64+\frac{0.64^2+0.4^2\times0.64}{2(1-0.64)}\approx1.67$，

$L_q=L_S-\rho=1.67-0.64=1.03$，

$w_S=\frac{L_S}{\lambda}=\frac{1.67}{0.4}=4.18(分)$，$w_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{1.03}{0.4}=2.58(分)$。

所以顾客逗留时间为 4.18 分，等待时间为 2.58 分。

○**12.18** 在 12.2 题，如服务时间服从正态分布，数学期望值仍是 6 分钟，方差 $\sigma^2=1/8$，求店内顾客数的期望值。

解 $\lambda=4$ 人/小时，$E(T)=\frac{1}{10}$小时，$\rho=\frac{4}{10}$，$Var(T)=\frac{1}{8}$，

$$L_S=\rho+\frac{\rho^2+\lambda^2Var(T)}{2(1-\rho)}=\frac{4}{10}+\frac{\left[\frac{4}{10}\right]^2+4^2\times\frac{1}{8}}{2\times\left(1-\frac{4}{10}\right)}=\frac{11}{5}。$$

所以店内顾客数的期望值为 $\frac{11}{5}$。

◎**12.19** 一个办事员核对登记的申请书时，必须依次检查 8 张表格，核对每份申请书需 1 分钟。顾客到达率为每小时 6 人，服务时间和到达间隔均为负指数分布，求：

(1)办事员空闲的概率；

(2)L_S,L_q,W_S,W_q。

分析 利用课本式(12—40)求解即可。

解 因为该办事员核对登记的申请书时,必须依次检查8张表格,且每张表格花费的服务时间服从负指数分布,则总的服务服从E_k分布,此系统为$M/E_k/1$排队系统。

$k=8,\mu=60$人/小时,$\lambda=6$人/小时,$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{6}{60}=0.1$。

(1)办事员空闲的概率$P_0=1-\rho=1-0.1=0.9$。

(2)$L_s=\frac{\rho}{1-\rho}-\frac{(k-1)\rho^2}{2k(1-\rho)}=\frac{1}{16},L_q=\frac{\rho^2}{1-\rho}-\frac{(k-1)\rho^2}{2k(1-\rho)}=\frac{1}{160}$,

$w_S=\frac{L_S}{\lambda}=\frac{\frac{1}{16}}{6}=\frac{1}{96}$(小时),$w_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{\frac{1}{160}}{6}=\frac{1}{960}$(小时)。

○**12.20** 对于单服务台情形,试证:

(1)定长服务时间$L_q^{(1)}$是负指数服务时间$L_q^{(2)}$的一半;

(2)定长服务时间$W_q^{(1)}$是负指数服务时间$W_q^{(2)}$的一半。

证明 对于$M/E_k/1$排队系统,

$$L_q=\frac{\rho^2}{1-\rho}-\frac{(k-1)\rho^2}{2k(1-\rho)}$$

$$W_q=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}-\frac{(k-1)\rho}{2k\mu(1-\rho)}$$

若令$k=1$,则E_k分布变成M分布,上式指标变为$M/M/1$排队系统指标,即

$$L_q^{(2)}=\frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$W_q^{(2)}=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

当$k\to\infty$时,E_k分布变成D分布,上式指标变为$M/D/1$排队系统指标,即

$$L_q^{(1)}=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{\rho^2}{1-\rho}-\frac{(k-1)\rho^2}{2k(1-\rho)}\right]=\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{(1-\rho)}=\frac{1}{2}L_q^{(2)}$$

$$W_q^{(1)}=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}-\frac{(k-1)\rho}{2k\mu(1-\rho)}\right]=\frac{1}{2}\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}=\frac{1}{2}W_q^{(2)}$$

所以,定长服务时间$L_q^{(1)}$是负指数服务时间$L_q^{(2)}$的一半;定长服务时间$W_q^{(1)}$是负指数服务时间$W_q^{(2)}$的一半。

第十三章

存　储　论

内容提要

一、基本概念

1. **存储论的基本概念**

(1)需求:对存储来说,由于需求,从存储中取出一定的数量,使贮存量减少,这就是存储的输出,有的需求是间断式的,有的需求是连续均匀的。

(2)补充(订货或生产):存储由于需求而不断减少,必须加以补充,否则最终将无法满足需求。补充就是存储的输入。

(3)费用:主要包括下列一些费用:

① 存储费:包括货物占用资金应付的利息以及使用仓库、保管货物、货物损坏变质等支出的费用。

② 订货费:包括两项费用,一项是订购费用(固定费用),如手续费、电信往来、派人员外出采购等费用。订购费与订货次数有关而与订货数量无关。另一项是货物的成本费用,它与订购费用有关(可变费用),如货物本身的价格、运费等。

③ 生产费:补充存储时,如果不需向外厂订购货,由本厂自行生产,这时仍需要支出两项费用:一项是装配费用(或称准备、结束费用,是固定费用),如更换模夹具需要工时,或添置某些专用设备等属于这项费用。另一项是与生产产品的数量有关的费用如材料费、加工费等(可变费用)。

④ 缺货费:当存储供不应求时所引起的损失。如失去销售机会的损失,停工待料的损失、以及不能履行合同而缴纳罚款等。

(4)存储策略:如前所述决定何时补充,补充多少数量的办法称之为"存储策略"。常见的策略有三种类型:

t_0——循环策略:每隔 t_0 时间补充存储量 Q。

(s,S)策略:每当存储量 $x>s$ 时不补充。当 $x\leqslant s$ 时补充存储。

补充量 $Q=S-x$(即将存储量补充到 S)。

(t,s,S)混合策略：每经过 t 时间检查存储量 x，当 $x>s$ 时不补充。当 $x\leqslant s$ 时补充存储量使之达到 S。

2. 常见模型

(1)允许缺货且供货速率有限的模型

模型假定：

① 单品种货物存储，连续盘点；

② 单位时间供货速率(或生产率)为 P，且 $P>R$。R 是需求速率；

③ 需求速率 R 为常数；

④ 允许缺货，且缺货在以后补足；

⑤ 采用(s,S)策略；

⑥ 目标函数为长期运行下单位时间中的平均总费用。总费用中包括存储费、缺货费和订购费，暂不考虑货物进货费用(或货物价值)。一般设下面有关参数为常数：

单位时间单位货物的存储费用记为 C_1；

单位时间单位货物的缺货费用记为 C_2；

一次订购费用记 C_3。

运用微分法可以得到以下结果：

最佳存储周期 $t^*=\sqrt{\dfrac{2C_3}{C_1R}}\cdot\sqrt{\dfrac{C_1+C_2}{C_2}}\cdot\sqrt{\dfrac{P}{P-R}}$；

最佳进货批量 $Q^*=S-s=Rt^*=\sqrt{\dfrac{2C_3R}{C_1}}\cdot\sqrt{\dfrac{C_1+C_2}{C_2}}\cdot\sqrt{\dfrac{P}{P-R}}$；

最小平均总费用 $C^*=\sqrt{2C_1C_3R}\cdot\sqrt{\dfrac{C_2}{C_1+C_2}}\cdot\sqrt{\dfrac{P-R}{P}}$；

最大存储量 $A^*=\sqrt{\dfrac{2C_3R}{C_1}}\cdot\sqrt{\dfrac{C_2}{C_1+C_2}}\cdot\sqrt{\dfrac{P-R}{P}}$；

最大缺货量 $B^*=\sqrt{\dfrac{2C_1C_3R}{(C_1+C_2)C_2}}\cdot\sqrt{\dfrac{P-R}{P}}$。

(2)不允许缺货，生产需一定时间

设生产批量为 Q，所需生产时间为 T，则生产速度为 $P=\dfrac{Q}{T}$。

已知需求速度为 $R(R<P)$，生产的产品一部分满足需求，剩余部分才作为存储，这时存储变化如图 13－1 所示。

图 13－1

由图 13－1 易知：

$$(P-R)T=R(t-T)$$

即

$$PT=Rt$$

t 时间内的平均存储量为$\frac{1}{2}(P-R)T$；

t 时间内所需存储费为$\frac{1}{2}C_1(P-R)T$；

t 时间所需装配费为 C_3，单位时间总费用(平均费用)为

$$C(t)=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}C_1(P-R)Tt+C_3\right]=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}C_1(P-R)\frac{Rt^2}{P}+C_3\right]$$

设 $\min C(t)=C(t_0)$，利用微积分方法可求得

$$t_0=\sqrt{\frac{2C_3P}{C_1R(P-R)}}$$

$$Q_0=E.O.Q=\sqrt{\frac{2C_3RP}{C_1(P-R)}}$$

$$\min C(t)=C(t_0)=\sqrt{2C_1C_3R\frac{P-R}{P}}$$

$$T_0=\frac{Rt_0}{P}=\sqrt{\frac{2C_3P}{C_1P(P-R)}}$$

进入存储的最高数量

$$S_0=Q_0-RT_0=\sqrt{\frac{2C_3RP}{C_1(P-R)}}-R\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1P(P-R)}}=\sqrt{\frac{2C_3R(P-R)}{C_1P}}$$

(3)允许缺货，生产时间很短

设单位存储费为 C_1，每次订购费用 C_3，缺货费 C_2(单位缺货损失)。R 为需求速度。求最佳存储策略，使平均费用最小(见图 13－2)。

图 13－2

假设最初存储量为 S，可以满足 t_1 时间的需求，t_1 时间的平均存储量为 $\frac{1}{2}S$，在 $(t-t_1)$ 时间的存储为零，平均缺货量为 $\frac{1}{2}R(t-t_1)$。由于 S 仅能满足 t_1 时间的需求 $S=Rt_1$，有

$$t_1=\frac{S}{R}$$

在 t 时间内所需存储费

$$C_1\,\frac{1}{2}St_1=\frac{1}{2}C_1\,\frac{S^2}{R}$$

在 t 时间内的缺货费

$$C_2\,\frac{1}{2}R(t-t_1)^2=\frac{1}{2}C_2\,\frac{(Rt-S)^2}{R}$$

订购费为 C_3

平均总费用

$$C(t,S)=\frac{1}{t}\left[C_1\,\frac{S^2}{2R}+C_2\,\frac{(Rt-S)^2}{R}+C_3\right]$$

利用多元函数求极值的方法 $C(t,S)$ 的最小值得

$$t_0=\sqrt{\frac{2C_3(C_1+C_2)}{C_1RC_2}}$$

$$S_0=\sqrt{\frac{2C_2C_3R}{C_1(C_1+C_2)}}$$

$$\min C(t,S)=C(t_0,S_0)=\sqrt{\frac{2C_1C_2C_3R}{C_1+C_2}}$$

$$Q_0=\sqrt{\frac{2RC_3}{C_1}\cdot\frac{(C_1+C_2)}{C_2}}$$

在允许缺货情况下，存储量只需达到 S_0 即可，显然 $Q_0>S_0$，它们的差值

$$Q_0-S_0=\sqrt{\frac{2RC_3}{C_1}\cdot\frac{(C_1+C_2)}{C_2}}-\sqrt{\frac{2RC_3}{C_1}\cdot\frac{C_2}{(C_1+C_2)}}$$

$$=\sqrt{\frac{2RC_3}{C_1}}\left(\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}-\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{2RC_3}{C_1}}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_2(C_1+C_2)}}\right)=\sqrt{\frac{2RC_3C_1}{C_2(C_1+C_2)}}$$

表示在 t_0 时间内的最大缺货量。

二、随机性存储模型

可供选择的策略主要有三种：

第一种策略：定期订货，但订货数量需要根据上一个周期末剩下货物的数量决定订货量，剩下的数量少，可以多订货；剩下的数量多，可以少订或不订货。这种策略可称为定期订货法。

第二种策略：定点订货，存储降到某一确定的数量时即订货，不再考虑间隔的时间。这一数量值称为订货点，每次定货的数量不变，这种策略可称为定点订货法。

第三种策略：是把定期订货与定点订货结合起来的方法，隔一定时间检查一次存储，如果存储数量高于一个数值 s，则不定货；小于 s 时则订货补充存储，订货量要使存储量达到 S，这种策略可以简称为 (s,S) 存储策略。

典型例题与解题技巧

【例 1】 设一种物品的需求率 D(件/年)是已知常数，并以一定的批量 Q 供应给需求方，提前期为零。这意味着需要这种物品时可以马上得到，并且不允许发生供应短缺。当收到一批物品以后，将其暂存在中间仓库，以速率 D(件/年)消耗掉。这里只考虑两种费用：与每次组织订货有关的费用 C_D(元/次)和存储物品所需费用 C_P(元/件·年)。要求确定每次订货的批量为多大，使全年总的费用为最少。

解题分析 这类存储模型可以用图 13－3 表示。图中表示每到一批货，库存量由零立刻上升到 Q，然后以 D 的速率均匀消耗掉。库存量沿斜线下降，一旦库存量为零时，立刻补充，库存量再次恢复到 Q，如此往复循环。

图 13－3

用 TC 表示全年发生的总费用，TOC 表示全年内用于订货的费用，TCC 表示全年内存储的费用，n 表示全年的平均订货次数，$n=\dfrac{D}{Q}$。

本模型中

$$TOC=C_D\cdot n=C_D\cdot\frac{D}{Q}$$

$$TCC=\frac{1}{2}C_PQ$$

$$TC=TOC+TCC=C_D\cdot\frac{D}{Q}+\frac{1}{2}C_PQ \tag{13.1}$$

我们的目标是希望 TC 最小。从 TC 表达式中看出 TC 是 Q 的函数。将 TC 对 Q 求导,并令其等于零得

$$\frac{\mathrm{d}TC}{\mathrm{d}Q}=-\frac{C_DD}{Q^2}+\frac{1}{2}C_P=0$$

故

$$Q^*=\sqrt{\frac{2C_D\cdot D}{C_P}} \tag{13.2}$$

因$\frac{\mathrm{d}^2TC}{\mathrm{d}Q^2}=-\frac{2C_DD}{Q^3}>0$,故(13.2)式中得到 Q^* 使 TC 为最小。将(13.2)代入(13.1)得

$$TC=\sqrt{2C_DC_PD} \tag{13.3}$$

【例 2】 某厂为了满足生产的需要,定期地向外单位订购一种零件,然后对方均匀供应,供应速度 200 个/天。这种零件的平均日需求量为 100 个,每个零件一天的存储费为 0.02 元,订购一次的费用 100 元。允许缺货,缺货损失为 0.08 元/个·天,求最佳订购量、最大缺货量、订货周期和单位时间总费用。

解题分析 允许缺货,缺货需补足,生产需一定时间的确定性存储模型假设:(1)允许缺货,且单位缺货损失费用不变,但缺货一定要补足;(2)补充需要一定的时间(即需要一定的生产时间或拖后时间);且生产是连续的、均匀的,生产速度 P(单位时间的生产量)为常数,则 T 时间的生产量为 $Q=PT$;(3)需求是连续的、均匀的,且需求速度 R(单位时间的需求量)为常数,$R<P$,则 t 时间的需求量为 Rt;(4)每次订货量不变,订购费不变(每次生产量不变,装配费不变);(5)单位存储费不变。

此模型的存储策略为

$$t_0=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}\cdot\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\cdot\sqrt{\frac{P}{P-R}};Q_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\cdot\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\cdot\sqrt{\frac{P}{P-R}}$$

$$C_0=\sqrt{2C_1C_3R}\cdot\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}\cdot\sqrt{\frac{P-R}{P}};S_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\cdot\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}\cdot\sqrt{\frac{P-R}{P}}$$

$$B_0=\sqrt{\frac{2C_1C_3R}{(C_1+C_2)C_2}}\cdot\sqrt{\frac{P-R}{P}}$$

解题过程 由题意知 $P=200$ 个/天,$R=100$ 个/天,$C_1=0.02$ 元/天·个,$C_2=0.08$ 元/天·个,$C_3=100$ 元,则

最佳订货周期

$$t_0=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}\cdot\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\cdot\sqrt{\frac{P}{P-R}}$$

$$=\sqrt{\frac{2\times100}{0.02\times100}}\cdot\sqrt{\frac{0.02+0.08}{008}}\cdot\sqrt{\frac{200}{200-100}}\approx16\text{ 天}$$

最佳订购量

$$Q_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\cdot\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\cdot\sqrt{\frac{P}{P-R}}$$

$$=\sqrt{\frac{2\times100\times100}{0.02}}\cdot\sqrt{\frac{0.02+0.08}{0.08}}\cdot\sqrt{\frac{200}{200-100}}\approx1600\text{ 个}$$

单位时间总费用

$$C_0=\sqrt{2C_1C_3R}\cdot\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}\cdot\sqrt{\frac{P-R}{P}}$$

$$=\sqrt{2\times0.02\times100\times100}\cdot\sqrt{\frac{0.08}{0.02+0.08}}\cdot\sqrt{\frac{200-100}{200}}\approx12.65\text{ 元}$$

最大缺货量

$$B_0=\sqrt{\frac{2C_1C_3R}{(C_1+C_2)C_2}}\cdot\sqrt{\frac{P-R}{P}}=\sqrt{\frac{2\times0.02\times100\times100}{(0.02+0.08)\times0.08}}\cdot\sqrt{\frac{200-100}{200}}$$

$$=159\text{ 个}$$

历年考研真题评析

【题 1】 (2005 年上海大学)某产品的需要量为每周 650 单位,且均匀领出。订购费为 25 元。每件产品的单位成本为 3 元,存货保存成本为每单位每周 0.05 元。

(1)假定不许缺货,求多久订购一次与每次应购数量;

(2)设缺货成本每单位每周 2 元,求多久订购一次与每次应购数量;

(3)可允许缺货且设送货延迟为一周,求多久订购一次与每次应购数量。

解题分析 本题考察了存储问题的三种情况,要求读者进行分析再对号入座即可。

解题过程 $D=650$/周,$C_D=25$ 元,$C_P=0.05$ 元/件·周

(1)$Q^*=\sqrt{\dfrac{2C_D\cdot D}{C_P}}=\sqrt{\dfrac{2\times25\times650}{0.05}}=\sqrt{650\ 000}=806$ 件

订购间隔期为$\dfrac{806}{650}=1.24$ 周,每批订 806 件。

(2)$C_s=2$ 元/件·周

所以

$$Q^*=\sqrt{\frac{2C_D\cdot D\cdot(C_P+C_S)}{C_PC_S}}=\sqrt{\frac{2\times25\times650\times(0.05+2)}{0.05\times2}}=\sqrt{650\ 000\times1.025}$$

$$=\sqrt{666\ 250}=816\text{ 件}$$

订货间隔期$\dfrac{816}{650}=1.255$ 周,每批订 816 件。

(3)订货间隔期与订货批量与(2)相同,但考虑到送货的延期,所有订货点均提前一周,即订第一批 816 件时,应在需求发生前一周提出订货。

【题 2】 (2006 年大连理工大学)某公司生产 A 和 B 两种产品,已知随后 4 周内对这两种产品的分别需求量及相应生产费用(见表 13—1),生产 A 或 B 每件所需工时,生产该种产品时的当月生产准备费用(当月不生产某种产品时,该产品生产准备费用为零)及生产量多于需求时每件每周的存储费(见表 13—2)。

表 13—1

周	需求量/件		生产费用/(元·件$^{-1}$)	
	A	B	A	B
1	5	6	10	8
2	7	2	15	12
3	4	5	18	16
4	3	8	23	19

表 13—2

	单件工时/h	生产准备费用/元	存储费/(元·年$^{-1}$·周$^{-1}$)
A	5	50	4
B	4	72	3

又月初 A 有 2 件库存,B 有 7 件库存,要求第 4 周末库存量为 A—3 件,B—3 件;又每周工作时间均不超过 50h。要求确定 A,B 每周各自的生产量,在满足题中各项约束条件下,使生产和存储费总和为最小。试建立数学模型,但不需求解。

解题分析 本题是新问题旧知识,主要考察线性规划的建模。

解题过程 设 x_{Ai} 和 x_{Bi} 分别为 A,B 两种产品的第 i 周产量($i=1,\cdots,4$)则问题的模型为

$$\min z=10x_{A1}+15x_{A2}+18x_{A3}+23x_{A4}+4[(x_{A1}-3)+(x_{A2}+x_{A2}-10)+(x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}-14)]+50(y_{A1}+y_{A2}+y_{A3}+y_{A4})+8x_{B1}+12x_{B2}+16x_{B3}+3[(x_{B1}+1)+(x_{B1}+x_{B2}-1)+(x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}-6)]+72(y_{B1}+y_{B2}+y_{B3}+y_{B4})$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_{A1}+2\geqslant 5 & x_{B1}+7\geqslant 6 \\ x_{A1}+x_{A2}+2\geqslant 12 & x_{B1}+x_{B2}+7\geqslant 8 \\ x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+2\geqslant 16 & x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4}+7\geqslant 24 \\ x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4}+2\geqslant 22 & x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4}+7\geqslant 24 \\ 5x_{Ai}+4x_{Bi}\leqslant 50 & (i=1,2,3,4) \\ x_{Ai}\leqslant My_{Ai},x_{Bi}\leqslant My_{Bi} & (i=1,\cdots,4) \\ x_{Ai},x_{Bi}\geqslant 0 & \\ y_{Ai}=0,1,y_{Bi}=0,1 & (i=1,\cdots,4) \end{cases}$$

课后习题全解

○**13.1** 设某工厂每年需用某种原料 1800 吨,不需每日供应,但不得缺货。设每吨每月的保管费为 60 元,每次订购费为 200 元,试求最佳订购量。

解 由题意知,该题模型为“不允许缺货,生产时间很短”,按 E.O.Q 公式计算 Q_0,得

$$Q_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}=\sqrt{\frac{2\times200\times\frac{1800}{12}}{60}}\approx32(\text{吨})$$

所以最佳订购量为 32 吨。

○**13.2** 某公司采用无安全存量的存储策略。每年使用某种零件 100000 件，每件每年的保管费用为 30 元，每次订购费为 600 元，试求：

(1)经济订购批量；

(2)订购次数。

解 (1)按 E.O.Q 公式计算 Q_0，得

$$Q_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}=\sqrt{\frac{2\times600\times100000}{30}}=2000(\text{件})$$

所以最佳订购量为 2000 件。

(2)
$$n_0=\frac{R}{Q_0}=\frac{100000}{2000}=50(\text{次})$$

所以每年订购 50 次。

○**13.3** 设某工厂生产某种零件，每年需要量为 18000 个，该厂每月可生产 3000 个，每次生产的装配费为 5000 元，每个零件的存储费为 1.5 元，求每次生产的最佳批量。

解 由题意知，该题模型为“不允许缺货，生产需一段时间”。

已知 $C_3=5000,C_1=1.5,P=3000,R=18000\div12=1500$，故

$$Q_0=\sqrt{\frac{2C_3RP}{C_1(P-R)}}=\sqrt{\frac{2\times5000\times\frac{1800}{12}\times3000}{1.5\times(3000-1500)}}\approx4472(\text{个})$$

所以每次生产的最佳批量为 4472 个。

◎**13.4** 某产品每月用量为 4 件，装配费为 50 元，存储费每月每件为 8 元，求产品每次最佳生产量及最小费用。若生产速度每月可生产 10 件，求每次生产量及最小费用。

分析 第一问用“不允许缺货，生产时间很短”模型求解，第二问用“不允许缺货，生产需一段时间”模型求解。

解 用“不允许缺货，生产时间很短”的模型求解。

已知 $C_3=50,R=4,C_1=8$，故

最佳批量
$$Q_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}=\sqrt{\frac{2\times50\times4}{8}}\approx7(\text{件})$$

以月为单位的平均费用为

$$C(Q_0)=\frac{C_1Q_0}{2}+\frac{C_3R}{Q_0}=8\times\frac{7}{2}+50\times\frac{4}{7}=56.6(\text{元})$$

用“不允许缺货，生产需一段时间”的模型求解。

已知 $C_3=50,C_1=8,P=10,R=4$，故

最佳批量
$$Q_0=\sqrt{\frac{2C_3RP}{C_1(P-R)}}=\sqrt{\frac{2\times50\times4\times10}{8\times(10-4)}}\approx9(\text{件})$$

最小费用 $C_0=\sqrt{\frac{2C_1C_3R(P-R)}{P}}=\sqrt{\frac{2\times8\times50\times4\times(10-4)}{10}}\approx43.8(\text{元})$

所以，若生产时间足够短，则最佳生产量为 7 件，最小费用为 56.6 元；若生产速度为每月可生产 10 件，则最佳生产量为 9 件，最小费用为 43.8 元。

○13.5　每月需要某种机构零件 2000 件，每件成本 150 元，每年的存储费用为成本的 16%，每次订购费 100 元，求 E. O. Q 及最小费用。

解　用“不允许缺货，生产时间很短”的模型求解。

已知 $C_3=100, R=2000\times12=24000, C_1=150\times16\%=24$，故

最佳批量 $Q_0=\sqrt{\dfrac{2C_3R}{C_1}}=\sqrt{\dfrac{2\times100\times24000}{24}}=447$（件）

最小费用 $C(Q_0)=\dfrac{C_1Q_0}{2}+\dfrac{C_3R}{Q_0}=24\times\dfrac{447}{2}+100\times\dfrac{24000}{447}\approx10733$（元）

所以，E. O. Q 为 447 件，最小费用为 10733 元。

○13.6　在 13.5 题中如允许缺货，求库存量 s 及最大缺货量，设缺货费为 $C_2=200$ 元。

解　用“允许缺货，生产时间很短”的模型求解。

已知 $C_1=24, C_2=200, C_3=100, R=24000$，故

库存量 $s=\sqrt{\dfrac{2C_2C_3R}{C_1(C_1+C_2)}}=\sqrt{\dfrac{2\times200\times100\times24000}{24\times(24+200)}}\approx423$（件）

$$t_0=\sqrt{\frac{2C_3(C_1+C_2)}{C_1RC_2}}=\sqrt{\frac{2\times100\times(24+200)}{24\times24000\times200}}\approx0.0197$$

最大缺货量为 $24000\times0.0197-423\approx50$（件）。

◎13.7　某制造厂每周购进某种机构零件 50 件，订购费为 40 元，每周保管费为 3.6 元，

(1)求 E. O. Q。

(2)该厂为少占用流动资金，希望存储量达到最低限度，决定可使总费用超过最低费用的 4% 作为存储策略，问这时订购批量为多少？

分析　本题为“不允许缺货，备货时间很短”模型，由课本中式(13－2)、(13－3)、(13－4)求解。

解　已知 $R=50, C_3=40, C_1=3.6$，故

(1)
$$Q_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}=\sqrt{\frac{2\times40\times50}{3.6}}\approx33.3\text{（件）}$$

因为 $C(Q)=\dfrac{1}{2}C_1Q+\dfrac{C_3R}{Q}$，所以

$$C(33)=\frac{33C_1}{2}+\frac{C_3R}{33}=33\times\frac{3.6}{2}+40\times\frac{50}{33}=120.006$$

$$C(34)=\frac{33C_1}{2}+\frac{C_3R}{34}=34\times\frac{3.6}{2}+40\times\frac{50}{34}=120.02$$

因为 $C(33)<C(34)$，所以 $Q^*=33$。

(2) $\dfrac{C_1Q}{2}+\dfrac{C_3R}{Q}=120.006\times(1+4\%)$

代入数字，$\dfrac{3.6\times Q}{2}+\dfrac{40\times50}{Q}=120.006\times1.04$

整理得　　$1.8Q^2-120.006\times1.04Q+2000=0$

解之得 $Q_1=44, Q_2=25$。

因为为了少占用流动资金，所以，订购批量为 25 件。

◎13.8 某公司采用无安全存量的存储策略，每年需电感 5000 个，每次订购费 500 元，保管费用每年每个 10 元，不允许缺货。若采购少量电感每个单价 30 元，若一次采购 1500 个以上则每个单价 18 元，问该公司每次应采购多少个？

（提示：本题属于订货量多，价格有折扣的类型。即订货费 C_3+KQ，K 为阶梯函数）

分析 见提示。

解 $R=5000, C_3=500, C_1=10$，

设电感单价为 $K(Q)$，则

$$K(Q)=\begin{cases}30, & Q<1500\\ 18, & Q\geqslant 1500\end{cases}$$

按 E. O. Q 计算 Q_0，得

$$Q_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}=\sqrt{\frac{2\times500\times5000}{10}}=707(\text{个})$$

分别计算每次订购 707 个和 1500 个电感平均单位电感所需费用

$$C(707)=\frac{707C_1}{2R}+\frac{C_3}{707}+K(707)=707\times\frac{10}{2\times5000}+\frac{500}{707}+30=31.414(\text{元/个})$$

$$C(1500)=\frac{1500C_1}{2R}+\frac{C_3}{1500}+K(1500)=1500\times\frac{10}{2\times5000}+\frac{500}{1500}+18=19.83(\text{元/个})$$

因为 $C(707)>C(1500)$，所以 $Q^*=1500$，即该公司每次应采购 1500 个。

◎13.9 某工厂的采购情况为

表 13－3

采购数量(单位)	单价(元)
0～1999	100
2000 以上	80

假设年需要量为 10000，每次订货费为 2000 元，存储费率为 20%，则每次应采购多少？

分析 本题为价格有折扣的存储问题，用课本中式(13－3)求解 Q。

解 $R=10000, C_3=2000$，

$$\text{单价 } K(Q)=\begin{cases}100, & 0\leqslant Q\leqslant 1999\\ 80, & Q\geqslant 2000\end{cases}$$

$$\text{存储费 } C_1(Q)=K(Q)\times20\%=\begin{cases}20, & 0\leqslant Q\leqslant 1999\\ 16, & Q\geqslant 2000\end{cases}$$

假定 $0\leqslant Q_0\leqslant 1999$，则 $Q_0=\sqrt{\dfrac{2C_3R}{C_1(Q_0)}}=\sqrt{\dfrac{2\times2000\times10000}{20}}\approx1414$；

假定 $Q_0\geqslant 2000$，则 $Q_0=\sqrt{\dfrac{2C_3R}{C_1(Q_0)}}=\sqrt{\dfrac{2\times2000\times10000}{16}}\approx1581$，与假定矛盾，舍去。

分别计算每次订购 1414 单位和 2000 单位所需费用

$$C(1414)=\frac{1414C_1(1414)}{2R}+\frac{C_3}{1414}+K(1414)=1414\times\frac{20}{2\times10000}+\frac{2000}{1414}+100$$
$$=102.83$$

$$C(2000)=\frac{2000C_1(2000)}{2R}+\frac{C_3}{2000}+K(2000)=2000\times\frac{16}{2\times10000}+\frac{2000}{2000}+80=82.6$$

因为 $C(1414)>C(2000)$，所以 $Q^*=2000$，即每次应采购 2000 单位。

●**13.10**　一个允许缺货的 E. O. Q 模型的费用绝不会超过一个具有相同存储费，订购费，但不允许缺货的 E. O. Q 模型的费用，试说明之。

分析　见课本 353 页及 355 页的公式，并进行比较。

解　设单位存储费用为 C_1，每次订购费为 C_3，缺货费为 C_2（单位缺货损失），R 为需求速度，P 为补充需求的速度。

模型一，在不允许缺货，生产时间很短的情况下，

其存储策略 $t_0=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}$，$Q_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}$

最大存储量 $s_0=Q_0$，$C_0=\sqrt{2C_1C_3R}$

模型二，在不允许缺货，生产需一定时间的情况下，

其存储策略 $t_0=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}\cdot\sqrt{\frac{P}{P-R}}$，$Q_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\cdot\sqrt{\frac{P}{P-R}}$

最大存储量 $s_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\cdot\sqrt{\frac{P-R}{P}}$，$C(t_0)=\sqrt{2C_1C_3R\cdot\frac{P-R}{P}}$

模型三，在允许缺货，生产需时间很短的情况下，

其存储策略 $t_0=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}\cdot\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}$，$Q_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\cdot\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}$

最大存储量 $s_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\cdot\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}$，$C(t_0,s_0)=\sqrt{2C_1C_3R\cdot\frac{C_2}{C_1+C_2}}$

模型四，在允许缺货，生产需一定时间的情况下，

其存储策略 $t_0=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}\cdot\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\cdot\sqrt{\frac{P}{P-R}}$，$Q_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\cdot\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\cdot\sqrt{\frac{P}{P-R}}$

最大存储量 $s_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\cdot\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}\cdot\sqrt{\frac{P-R}{P}}$，

$C_0=\sqrt{2C_1C_3R\cdot\frac{C_2}{C_1+C_2}\cdot\frac{P-R}{P}}$

从模型一和模型三的存储策略可以看出

$$\sqrt{2C_1C_3R}>\sqrt{2C_1C_3R}\cdot\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}$$

从模型二和模型四的存储策略可以看出

$$\sqrt{2C_1C_3R}\cdot\sqrt{\frac{P-R}{P}}>\sqrt{2C_1C_3R}\cdot\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}\cdot\sqrt{\frac{P-R}{P}}$$

所以一个允许缺货的 E. O. Q 模型的费用绝不会超过一个具有相同存储费、订购费、但不允许缺货的 E. O. Q 模型的费用。

小结 要求熟练掌握这四种模型。

◎**13.11** 某厂对原料需求的概率如下：

表 13－4

需求量 r(吨)	20	30	40	50	60
概率 $P(r)$($\sum P(r)=1$)	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

每次订购费 $C_3=500$ 元，原料每吨价 $K=400$ 元，每吨原料存储费 $C_1=50$ 元，缺货费每吨 $C_2=600$ 元。该厂希望制定(s,S)型存储策略，试求 s 及 S 值。

分析 计算临界值 N，选使不等式，$P(r)\geqslant N$ 成立的 S_i 最小值 S。

解 (1)计算临界值

$$N=\frac{C_2-K}{C_2+C_1}=\frac{600-400}{600+50}=0.3077$$

(2)求 S

$P(r=20)+P(r=30)=0.1+0.2<0.3077$

$P(r=20)+P(r=30)+P(r=40)=0.1+0.2+0.3=0.6>0.3077$

可知 $S=40$

(3)因为 $S=40$，所以

$$C_3+KS+\sum_{r\leqslant S}C_1(S-r)P(r)+\sum_{r>S}C_2(r-S)P(r)$$

$=500+400\times40+50\times[(40-20)\times0.1+(40-30)\times0.2+(40-40)\times0.3]$
$+600\times[(50-40)\times0.3+(60-40)\times0.1]=19700$

当 $s=20$ 时，

$$K_s+\sum_{r\leqslant S}C_1(s-r)P(r)+\sum_{r>S}C_2(r-s)P(r)$$

$=400\times20+600\times[(30-20)\times0.2+(40-20)\times0.3+(50-20)\times0.3+(60-20)\times0.1]=20600$

由于 $20600>19700$，所以 $s=20$ 应舍去。

当 $s=30$ 时，

$$K_s+\sum_{r\leqslant S}C_1(s-r)P(r)+\sum_{r>S}C_2(r-s)P(r)$$

$=400\times30+50\times(30-20)+600\times[(40-30)\times0.3+(50-30)\times0.3+(60-30)\times0.1]=19250$

由于 $19250<19700$，所以 $s=30$。

故该厂存储策略为：每当存储 $I\leqslant30$ 时补充存储使存储量达到 40，每当存储 $I>30$ 时，不补充。

◎**13.12** 某厂需用配件数量 r 是一个随机变量，其概率服从泊松分布，t 时间内需求概率为

$$\varphi_t(r)=\frac{e^{-\rho t}(\rho\, t)^r}{r!}\qquad \text{平均每日需求为 } 1(\rho=1)$$

备货时间为 x 天的概率服从正态分布

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

平均拖后时间 $\mu=14$ 天，方差 $\sigma^2=1$

在生产循环周期内存储费 $C_1=1.25$ 元，缺货费 $C_2=10$ 元，装配费 $C_3=3$ 元。问两年内应分多少批订货？每次批量及缓冲存储量各为何值才能使总费用量小？

分析　本题需求和备货时间都是随机离散的，可根据课本 371 页的过程来解。

解　$Q_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}=\sqrt{\frac{2\times3\times365}{1.25}}=41.86\approx42$，　$n_0=\frac{365\times2}{42}\approx17$

下面计算 L 及 B，各步算出的数值列于表 13－5。

表 13－5

(一)拖后时间 x	(二)拖后时间的概率 $P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-14)^2/2}$	(三)x 天内的平均需求（算式为 ρx）
① 13	0.24	13
② 14	0.40	14
③ 15	0.24	15
④ 16	0.05	16
⑤ 17	0.0044	17

(四)需求 $r>L$，$F_x(L)$ 的概率，算式为 $F_x(L)\sum\limits_{r>L}\frac{e^{-x}x^r}{r!}=1-\sum\limits_{r=0}^{L}\frac{e^{-x}x^r}{r!}$

表 13－6

$L=15$	$L=21$	$L=22$	$L=23$	$L=24$	$L=25$	$L=26$	$L=31$
① 0.236	0.014	0.008	0.004	0.002	0.001	0	0
② 0.331	0.029	0.017	0.009	0.005	0.003	0.001	0
③ 0.432	0.053	0.033	0.019	0.011	0.006	0.003	0
④ 0.533	0.089	0.058	0.037	0.022	0.013	0.008	0
⑤ 0.629	0.138	0.095	0.063	0.040	0.025	0.015	0.001

(五)相应拖后时间及需求两者概率的乘积 $P(x)F_x(L)$，(五)＝(二)×(四)

表 13－7

$L=15$	$L=21$	$L=22$	$L=23$	$L=24$	$L=25$	$L=26$	$L=31$
① 0.057	0.030	0.002	0.001	0	0	0	0
② 0.132	0.012	0.007	0	0.002	0.001	0	0
③ 0.104	0.013	0.008	0.005	0.003	0.001	0.001	0
④ 0.027	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0	0
⑤ 0.003	0.001	0	0	0	0	0	0

根据表 13－7 算出 P_L，B 和费用的各种数值见表 13－8。算式为：$P_L = \sum_{x=13}^{17} P(x)F_x(L)$，$B = L - \rho x$，费用 $= n_0 C_2 P_L + C_1 B$。

表 13－8

L	$L=15$	$L=21$	$L=22$	$L=23$	$L=24$	$L=25$	$L=26$	$L=31$
P_L	0.322	0.032	0.020	0.008	0.006	0.004	0.002	0
B	1	1	8	9	10	11	12	17
费用	56.014	14.316	13.393	12.552*	13.587	14.369	15.27	21.251

故该厂订购批量 42，订购点 23，两年应分 17 批订货，缓冲存储量为 9。

第十四章

对策论基础

内容提要

一、对策论基本内容

1. 对策行为的三个基本要素

具有对策行为的模型称为对策模型，或对策，包含三个基本要素：

(1)局中人：在一个对策行为(或一局对策)中，有权决定自己行动方案的对策参加者，称为局中人。用Ⅰ表示局中人的集合，若有 n 个局中人，则 $\mathrm{I}=\{1,2,\cdots,n\}$，一般要求一个对策中至少要有两个局中人。

(2)策略集：一局对策中，可供局中人选择的一个实际可行的完整的行动方案，称为一个策略。参加对策的每一个局中人 $i,i\in\mathrm{I}$，都有自己的策略集 S_i，一般，每一个局中人的策略集中至少应包括两个策略。

(3)赢得函数(支付函数)

在一局对策中，各局中人所选定的策略形成的策略组称为一个局势，即若 S_i 是第 i 个局中人的一个策略，则 n 个局中人的策略组

$$s=(S_1,S_2,\cdots S_n)$$

为一个局势，全体局势的集合 S 可用局中人策略集的笛卡尔积表示，即

$$S=S_1\times S_2\times\cdots\times S_n$$

当局势出现后，对策的结果也就确定了，$\forall s\in S$，局中人 i 可以得到一个赢得 $H_i(s)$，$H_i(s)$为局势 s 的函数，称之为第 i 个局中人的赢得函数。

一般当这三个基本因素确定后，一个对策模型也就给定了。

2. **对策的分类**

图 14－1

3. **矩阵对策的基本定理**

定理 1　矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$在纯策略意义下有解的充分必要条件是：存在纯局势(d_i^*,β_j^*)使得对一切 $i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n$，均有 $a_{ij^*}\leqslant a_{i^*j^*}\leqslant a_{i^*j}$。

定理 2　矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$在混合策略意义下有解的充要条件是：存在 $x^*\in S_1^*,y^*\in S_2^*$，使$(x^*,y^*)$为函数 $E(x,y)$的一个鞍点，即对一切 $x\in S_1^*,y\in S_2^*$，有

$$E(x,y^*)\leqslant E(x^*,y^*)\leqslant E(x^*,y)$$

定理 3　设 $x^*\in S_1^*,y^*\in S_2^*$，则$(x^*,y^*)$是对策 G 的解的充要条件是：对任意 $i=1,2,\cdots m$ 和 $j=1,2,\cdots,n$，有

$$E(i,y^*)\leqslant E(x^*,y^*)\leqslant E(x^*,j)$$

定理 4　设 $x^*\in S_1^*,y^*\in S_2^*$，则$(x^*,y^*)$为对策 G 的解的充要条件是：存在数 v，使得 x^* 和 y^* 分别是不等式组

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\sum_i a_{ij}x_i\geqslant v & (j=1,2,\cdots,n)\\ \sum_i x_i=1 & (i=1,2,\cdots,m)\\ x_i\geqslant 0\end{cases}$$

和不等式组

$$(\mathrm{II})\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_i\leqslant v\\ \sum_{j=1}^{n} y_i=1 & (j=1,2,\cdots,n)\\ y_j\geqslant 0\end{cases}$$

的解，且 $v=V_G$。

$$V_G=E(X^*,Y^*)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i^*y_j^*$$

定理 5　对任一矩阵对策 $G=\{S_1,Sm2,A\}$，一定存在混合策略意义下的解。

定理 6　设 (x^*,y^*) 是矩阵对策 G 的解，则对某一个 i 或 j，有

(1) 若 $x_i^*>0$，则 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j^*=v_G$ 。

(2) 若 $y_j^*>0$，则 $\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i^*=v_G$ 。

(3) 若 $\sum_{j}a_{ij}y_j^*<v$，则 $x_i^*=0$ 。

(4) 若 $\sum_{i}a_{ij}x_i^*>v$，则 $y_j^*=0$ 。

定理 7　设有两个矩阵对策

$$G_1=\{S_1,S_2;A_1\}$$
$$G_2=\{S_1,S_2;A_2\}$$

其中$\mathbf{A}_1=[a_{ij}]$，$\mathbf{A}_2=[a_{ij}+L]$，L 为任一常数。则有

(1)$V_{G2}=V_{G1}+L$；

(2)$T(G_1)=T(G_2)$（$T(G)$表示矩阵 G 的解集）。

定理 8　设有两个矩阵对策

$$G_1=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$$
$$G_2=\{S_1,S_2;\alpha\mathbf{A}\}$$

其中$\alpha>0$ 为任一常数。则

(1)$V_{G_2}=\alpha V_{G_1}$；

(2)$T(G_1)=T(G_2)$。

定理 9　设 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$为一矩阵对策，且 $\mathbf{A}=-\mathbf{A}^T$ 为斜对称矩阵。则

(1)$V_G=0$；

(2)$T_1(G)=T_2(G)$，其中 $T_1(G)$和 $T_2(G)$分别为局中人Ⅰ和Ⅱ的最优策略集。

定理 10　设 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$为矩阵对策，其中 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m\}$，$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$，$\mathbf{A}=(a_{ij})$。如果纯策略 α_1 被其余纯策略 $\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中之一所优超，由 G 可得到一个新的矩阵对策 G'：

$$G'=\{S'_1,S_2;\mathbf{A}'\}$$

其中

$$S'_1=\{\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$$
$$\mathbf{A}'=[a'_{ij}]_{(m-1)\times n}$$
$$a'_{ij}=a_{ij},i=2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$$

于是有

(1)$V_{G'}=V_G$；

(2)G'中局中人Ⅱ的最优策略就是其在 G 中的最优策略；

(3)若$[x_2^*,x_3^*\cdots x_m^*]^{\mathrm{T}}$ 是 G'中局中人Ⅰ的最优策略，则 $x^*=$

$[0\ x_2^*, x_3^* \cdots x_m^*]^T$ 便是其在 G 中的最优策略。

二、矩阵对策的解法

1. 最优混合策略的求解方法

(1)2×2 对策的公式法

2×2 对策是局中人Ⅰ的赢得矩阵为 2×2 阶的，即

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

若 A 不存在鞍点，为求最优混合策略可求下列等式组：

$$(\mathrm{I})\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2=v \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2=v \\ x_1+x_2=1 \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases} a_{11}y_1+a_{12}y_2=v \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2=v \\ y_1+y_2=1 \end{cases}$$

其中

$$x_1^*=\frac{a_{22}-a_{21}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}$$

$$x_2^*=\frac{a_{11}-a_{12}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}$$

$$y_1^*=\frac{a_{22}-a_{12}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}$$

$$y_2^*=\frac{a_{11}-a_{22}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}$$

$$V_G=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}$$

(2)2×n 或 m×2 对策的图解法

设缩减后的赢得矩阵为 2 阶无鞍点对策问题，设局中人Ⅰ的混合策略为$(x,1-x)^{\mathrm{T}}$，局中人Ⅱ的混合策略$(y,1-y)^T$。

即

$$A=\begin{array}{c} \\ x \\ 1-x \end{array}\begin{bmatrix} y & 1-y \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

则赢得期望值为

$$E(X,Y)=(x,1-x)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix}$$

局中人Ⅰ的期望方程为

$$\begin{cases} V=a_{11}x+a_{21}(1-x)=a_{21}+(a_{11}-a_{21})x & ① \\ V=a_{12}x+a_{22}(1-x)=a_{22}+(a_{12}-a_{22})x & ② \end{cases}$$

将①和②式用图形绘出，两图形中的 V 值先取小然后取大，所得点的坐标即为局中人Ⅰ的最优混合策略。

$$\begin{cases} V = a_{11}y + a_{12}(1-y) = a_{12} + (a_{11} - a_{12})y & ③ \\ V = a_{21}y + a_{22}(1-y) = a_{22} + (a_{21} - a_{22})y & ④ \end{cases}$$

将③和 ④式用图形绘出，两图形中的 V 值先取大然后取小，所得点的坐标即为局中人Ⅱ的最优混合策略。

(3)线性方程组法

假定对策 $G=\{S_1,S_2;A\}$解中的 x_i^* 和 y_i^* 均不为零，则可通过求解以下两个线性方程组：

$$\begin{cases} \sum\limits_i a_{ij}x_i = v & (j=1,2\cdots,n) \\ \sum\limits_i x_i = 1 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} \sum\limits_j a_{ij}y_j = v & (i=1,2,\cdots m) \\ \sum\limits_j y_j = 1 \end{cases}$$

确定对策的解。若上述方程组存在非负解 x^* 和 y^*，则便求得对策的一个解 (x^*,y^*)；若求出的解中有负的分量，则无对策的解；若 x^* 和 y^* 的某些分量为零时，上述方程组一般无非负解。

(4)线性规划法

设局中人Ⅰ的混合策略为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，局中人Ⅱ的混合策略为$(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，赢得矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

则赢得期望值为

$$V=E(X,Y)=X^TAY=\sum_{i=j}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$$

其中

$$\sum_{i=j}^{m}x_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n}y_i = 1$$

作变量代换

$$\tilde{x}_i \qquad i=1,2\cdots,m; \qquad \tilde{y}_j=\frac{y_j}{V} \qquad j=1,2,\cdots,n$$

不妨设 $V>0$，否则令 $a'_{ij}=a_{ij}+k$，使得 $V'=V+K>0$，可得下列两个互为对偶的 LP 数学模型。

$$(P)\begin{cases} \min\ z = \sum\limits_{i=j}^{m}\tilde{x}i \\ \sum\limits_{i}^{m}a_{ij}\tilde{x}_i \geqslant 1, \qquad j = 1,2\cdots,n \\ \tilde{x}_i\geqslant 0, \qquad i=1,2,\cdots,m \end{cases}$$

$$(D)\begin{cases}\max w = \sum\limits_{i=j}^{n}\tilde{y}j \\ \sum\limits_{j}^{n} a_{ij}\tilde{y}_j \leqslant 1 \qquad i=1,\cdots,m \\ \tilde{y}_j \geqslant 0 \qquad j=1,\cdots,n\end{cases}$$

解出其中一个数学模型的最优解，利用对偶性，可得另一个数学模型的最优解，由此可得局中人Ⅰ、Ⅱ的最优混合策略及最优对策值。

典型例题与解题技巧

【例 1】 一矩阵对策的赢得矩阵为 $\boldsymbol{A}$，先尽可能利用优超原则简化，再用图解法确定双方的最优策略和对策值。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -5 & 7 & -9 \\ 2 & -4 & 6 & -8 & 10\end{bmatrix}$$

解题分析 由于(第 2 列)＋$\frac{1}{2}$×(第 5 列)优超于第 1 列，(第 2 列)＋(第 5 列)优超于第 3 列，5×(第 2 列)＋(第 5 列)优超于第 4 列，故可将第 1，3，4 列划去得到新的赢得矩阵

$$A_1=\begin{bmatrix}3 & -9 \\ -4 & 10\end{bmatrix}$$

解题过程 设局中人Ⅰ的混合策略为 $x^*=(x,1-x)^{\mathrm{T}}$，在直角坐标系中分别画出以下两条直线：

$$l_1: -4(1-x)+3x=v$$

$$l_2: 10(1-x)-9x=v$$

如图 14－2 所示。

图 14－2

【例 2】 用线性规划求下列矩阵对策：

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & -3\\ -3 & 3 & -1\\ -4 & -3 & 3\end{bmatrix}$$

解题分析 熟练掌握线性规划的解法。

因为 $\max\limits_{i}\min\limits_{j}a_{ij}=-3$，$\min\limits_{j}\max\limits_{i}a_{ij}=3$，所以 $-3<V<3$ 将所给赢得矩阵各元素分别加上 3 得

$$A_1=\begin{bmatrix}6 & 2 & 0\\ 0 & 6 & 2\\ -1 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

局中人Ⅱ的线性规划模型为：

$$\max w=y_1+y_2+y_3$$

$$s.t.\begin{cases}6y_1+2y_2\leqslant 1\\ 6y_2+2y_3\leqslant 1\\ -y_1+6y_3\leqslant 1\\ y_1,y_2,y_3\geqslant 0\end{cases}$$

解题过程 以 u_1,u_2,u_3 为松弛变量，可求得最终的最优纯形表如表 14—1。

表 14—1

C_j			1	1	1	0	0	0	w
C_B	y_B	b	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2	u_3	
1	y_1	$\frac{7}{53}$	1	0	0	$\frac{9}{53}$	$-\frac{3}{53}$	$\frac{1}{53}$	
1	y_2	$\frac{11}{106}$	0	1	0	$-\frac{1}{106}$	$\frac{9}{53}$	$-\frac{3}{53}$	
1	y_3	$\frac{10}{53}$	0	0	1	$\frac{3}{106}$	$-\frac{1}{106}$	$\frac{9}{53}$	
c_j-z_j			0	0	0	$-\frac{10}{53}$	$-\frac{11}{106}$	$-\frac{7}{53}$	$\frac{45}{106}$

由表 14—1 知，局中人Ⅱ的最优混合策略为

$$y^*=\frac{106}{45}\begin{bmatrix}\frac{7}{53} & \frac{11}{106} & \frac{10}{53}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\frac{106}{45}\begin{bmatrix}\frac{14}{45} & \frac{11}{45} & \frac{20}{45}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

局中人Ⅰ的最优混合策略为

$$x^*=\frac{106}{45}\begin{bmatrix}\frac{10}{53} & \frac{11}{106} & \frac{7}{53}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{20}{45} & \frac{11}{45} & \frac{14}{45}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

对策值为

$$V_G=\frac{106}{45}-3=-\frac{29}{45}$$

历年考研真题评析

【题 1】 (2005 年武汉大学)某厂生产 A,B,C 三种产品。每单位产品需花费的资源如下:

A 需要 1h 技术准备、10h 加工、3kg 材料;

B 需要 2h 技术准备、4h 加工、2kg 材料;

C 需要 1h 技术准备、5h 加工、1kg 材料。

可利用的技术准备总时间为 100h,加工总时间为 700h,材料总量为 400kg。考虑到销售时对销售量的优惠,利润定额确定如表 14－2。

表 14－2

产品 A		产品 B		产品 C	
销售量/件	单位利润/元	销售量/件	单位利润/元	销售量/件	单位利润/元
0～40	10	0～50	6	0～100	5
40～100	9	50～100	4	100 以上	4
100～150	8	100 以上	3		
150 以上	7				

试确定利润最大的产品品种方案(模型),并讨论用何种方法可以解决此问题(不计算)。

解题分析 本题是一道综合性题目,用线性规划建立模型,用对策论知识进行分析。

解题过程 X_{A1}＝产品 A 以每件 10 元出售数;

⋮　　　⋮

X_{C2}＝产品 C 以每件 4 元出售数;

$$\max z=10X_{A1}+9X_{A2}+8X_{A3}+7X_{A4}+6X_{B1}+4X_{B2}+3X_{B3}+5X_{C1}+4X_{C2}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}1\sum\limits_{1}^{4}X_{Aj}+2\sum\limits_{1}^{3}X_{Bj}+1\sum\limits_{1}^{2}X_{Cj}\leqslant 100\\ 10\sum\limits_{1}^{4}X_{Aj}+4\sum\limits_{1}^{3}X_{Bj}+5\sum\limits_{1}^{2}X_{Cj}\leqslant 700\\ 3\sum\limits_{1}^{4}X_{Aj}+2\sum\limits_{1}^{3}X_{Bj}+1\sum\limits_{1}^{2}X_{Cj}\leqslant 400\\ 0\leqslant X_{A1}\leqslant 40\cdots\cdots(\text{略})\end{cases}$$

【题 2】（2006 年复旦大学）在两人零和对策 G 中，局中人Ⅰ和Ⅱ分别有四种和两种策略可供选择。局中人Ⅰ的赢得矩阵如表 14－3 所示。

表 14－3

		Ⅱ	
		1	2
Ⅰ	1	-1	-1
	2	0	1
	3	$-\frac{3}{2}$	0
	4	$\frac{1}{2}$	0

解题分析　本题属于零和对策，按零和对策的解法对号入座即可。

解题过程　根据优势原则，矩阵中第一、三行劣于第四行，故划去。故矩阵变为

		Ⅱ	
		1	2
Ⅰ	2	0	1
	4	$\frac{1}{2}$	0

显然，上述对策无鞍点，故求解具有混合策略的对策。

故所求的解为：Ⅰ分别以 $0,\frac{1}{3},0,\frac{2}{3}$ 的概率使用策略 1,2,3,4，Ⅱ分别以 $\frac{2}{3},\frac{1}{3}$ 的概率使用策略 1,2，此时Ⅰ的期望赢得为 $\frac{1}{3}$。

课后习题全解

○**14.1**　甲、乙两个儿童玩游戏，双方可分别出拳头（代表石头）、手掌（代表布）、两个手指（代表剪刀），规则是：剪刀赢布，布赢石头，石头赢剪刀，赢者得一分。若双方所出相同算和局，均不得分。试列出儿童甲的赢得矩阵。

解　儿童甲的赢得矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

○14.2　“二指莫拉问题”。甲、乙二人游戏，每人出一个或两个手指，同时又把猜测对方所出的指数叫出来。如果只有一个人猜测正确，则他所赢得的数目为二人所出指数之和，否则重新开始，写出该对策中各局中人的策略集合及甲的赢得矩阵，并回答局中人是否存在某种出法比其他出法更为有利。

解　甲、乙二人的策略集合均为{出 1 猜 1，出 1 猜 2，出 2 猜 1，出 2 猜 2}。根据题意，甲的赢得矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

根据赢得矩阵，有

表 14—4

	β_1	β_2	β_3	β_4	$\min\limits_j a_{ij}$
α_1	0	2	−3	0	−3
α_2	−2	0	0	3	−2*
α_3	3	0	0	−4	−4
α_4	0	−3	4	0	−3
$\max\limits_i a_{ij}$	3	2*	4	3	

因为$\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}=-2$，$\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}=2$，$\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}\neq\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$，所以，局中人不存在某种出法比其他出法更为有利。

◎14.3　求解下列矩阵对策，其中赢得矩阵 A 分别为

(1) $\begin{bmatrix} -2 & 12 & -4 \\ 1 & 4 & 8 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$　　(4) $\begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 & 8 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

分析　根据赢得矩阵，计算$\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$和$\min\limits_i \max\limits_j a_{ij}$。

解　(1)根据赢得矩阵，有

表 14－5

	β_1	β_2	β_3	$\min\limits_j a_{ij}$
α_1	－2	12	－4	－4
α_2	1	4	8	1*
α_3	－5	2	3	－5
$\max\limits_i a_{ij}$	1*	12	8	

因为$\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}=\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}=1$，所以 G 的解为(α_2,β_1)，$V_G=1$。

(2)根据赢得矩阵，有

因为$\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}=\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}=3$，所以 G 的解为(α_2,β_1)，$V_G=3$。

(3)根据赢得矩阵，有

$\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}=3$，所以 G 的解为(α_3,β_1)，$V_G=3$。

(4)根据赢得矩阵，有

$\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}=4$，所以 G 的解为(α_2,β_3)，$V_G=4$。

◎14.4　证明：

(1)若$(\alpha_{i_1},\beta_{j_1})$和$(\alpha_{i_2},\beta_{j_2})$是对策 G 的两个解，则 $a_{i_1j_1}=a_{i_2j_2}$。

(2)若$(\alpha_{i_1},\beta_{j_1})$和$(\alpha_{i_2},\beta_{j_2})$是对策 G 的两个解，则$(\alpha_{i_1},\beta_{j_2})$和$(\alpha_{i_2},\beta_{j_1})$也是对策 G 的解。

分析　用反证法。

证明　(1)用反证法。

不妨令 $a_{i_1j_1}>a_{i_2j_2}$，则Ⅰ会选择 α_{i_1} 而不选 α_{i_2}，相应地Ⅱ会选择 β_{j_1} 而不选 β_{j_2}，从而$(\alpha_{i_2},\beta_{j_2})$不是 G 的解，同理，若 $a_{i_1j_1}<a_{i_2j_2}$，则$(\alpha_{i_1},\beta_{j_1})$不是 G 的解。这与已知条件矛盾，故必有 $a_{i_1j_1}=a_{i_2j_2}$。证毕。

(2)由于$(\alpha_{i_1},\beta_{j_1})$和$(\alpha_{i_2},\beta_{j_2})$是对策 G 的两个解，所以 $a_{i_1j_1}=a_{i_2j_2}$ 且 $\alpha_{i_1j_1}\leqslant\alpha_{i_1j_2}\leqslant\alpha_{i_2j_2}$，$\alpha_{i_2j_2}\leqslant\alpha_{i_2j_1}\leqslant\alpha_{i_1j_1}$，从而 $\alpha_{i_1j_2}=\alpha_{i_2j_1}=\alpha_{i_1j_1}=\alpha_{i_2j_2}$。

由$(\alpha_{i_1},\beta_{j_1})$和$(\alpha_{i_2},\beta_{j_2})$是对策 G 的两个解可知，$\alpha_{ij_1}\leqslant\alpha_{i_1j_1}\leqslant\alpha_{i_1j}$，$\alpha_{ij_2}\leqslant\alpha_{i_2j_2}\leqslant\alpha_{i_2j}$，从而 $\alpha_{ij_2}\leqslant\alpha_{i_1j_2}\leqslant\alpha_{i_1j}$，$\alpha_{ij_1}\leqslant\alpha_{i_2j_1}\leqslant\alpha_{i_2j}$，故$(\alpha_{i_1},\beta_{j_2})$和$(\alpha_{i_2},\beta_{j_1})$也是对策 G 的解。

证毕。

○14.5　甲、乙两个企业生产同一种电子产品，两个企业都想通过改革管理获取更多的市场销售份额。

甲企业的策略措施有：(1)降低产品价格；(2)提高产品质量，延长保修年限；(3)推出新产品。

乙企业考虑的策略措施有：(1)增加广告费用；(2)增设维修网点，扩大维修服务；(3)改进产品性能。

假定市场份额一定，由于各自采取的策略措施不同，通过预测，今后两个企业的市场有份额变动情况如表 14－6 所示(正值为甲企业增加的市场占有份额，负值为减少的市场占有份额)。试通过对策分析，确定两个企业各自的最优策略。

表 14—6

甲企业策略	乙企业策略		
	1	2	3
1	10	−1	3
2	12	10	−5
3	6	8	5

解 根据赢得矩阵，有

表 14—7

	1	2	3	$\min\limits_j a_{ij}$
1	10	−1	3	−1
2	12	10	−5	−5
3	6	8	5	5*
$\max\limits_i a_{ij}$	12	10	5*	

因为$\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}=\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}=5$，所以 G 的角为(3,3)，$V_G=5$，即甲企业的最优策略是“推出新产品”，乙企业的最优策略是“改进产品性能”。

◎**14.6** 证明：矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;S\}$ 在混合策略意义下有解的充要条件是：存在 $x^*\in S_1^*$，$y^*\in S_2^*$，使(x^*,y^*)为函数 $E(x,y)$ 的一个鞍点，即对一切 $x\in S_1^*$，$y^*\in S_2^*$ 有

$$E(x,y^*)\leqslant E(x^*,y^*)\leqslant E(x^*,y)$$

分析 根据课本中定理的证明，将 a_{ij} 按写成 $E(x,y)$ 再证。

证明 先证充分性。

由于对任意 i,j 均有 $E(x,y^*)\leqslant E(x^*,y^*)\leqslant E(x^*,y)$，故

$$\max_x E(x,y^*)\leqslant E(x^*,y^*)\leqslant \min_y E(x^*,y),$$

又因$\min\limits_y \max\limits_x E(x,y)\leqslant \max\limits_x E(x,y^*)$，$\min\limits_y E(x^*,y)\leqslant \max\limits_x \min\limits_y E(x,y)$，所以

$$\min_y \max_x E(x,y)\leqslant E(x^*,y^*)\leqslant \max_x \min_y E(x,y) \tag{1}$$

另一方面，对任给 x,y，有$\min\limits_y E(x,y)\leqslant \max\limits_x E(x,y^*)$，所以

$$\max_x \min_y E(x,y)\leqslant \min_y \max_x E(x,y) \tag{2}$$

由(1)、(2)式，有$\max\limits_x \min\limits_y E(x,y)=\min\limits_y \max\limits_x E(x,y)=E(x^*,y^*)$且 $V_G=E(x^*,y^*)$。

再证必要性。

设有 x^*,y^*，使得$\min\limits_y E(x^*,y)=\max\limits_x \min\limits_y E(x,y)$，$\max\limits_x E(x,y^*)=\min\limits_y \max\limits_x E(x,y)$，则由$\max\limits_x \min\limits_y E(x,y)=\min\limits_y \max\limits_x E(x,y)$，有

$\max\limits_x E(x,y^*)=\min\limits_y E(x^*,y)\leqslant E(x^*,y^*)\leqslant \max\limits_x E(x,y^*)=\min\limits_y E(x^*,y)$所以

对任意 x,y,有

$$E(x,y^*)\leqslant\max_x E(x,y^*)\leqslant E(x^*,y^*)\leqslant\min_y E(x^*,y)\leqslant E(x^*,y)$$

证毕。

◎14.7　证明:设 $x^*\in S_1^*,y^*\in S_2^*$,则$(x^*,y^*)$为 G 的解的充要条件是:存在数 v,使得 x^* 和 y^* 分别是不等式组(Ⅰ)和(Ⅱ)的解,且 $v=V_G$。

$$\mathrm{I}\begin{cases}\sum\limits_i a_{ij}x_i\geqslant v,j=1,2,\cdots,n\\ \sum\limits_i x_i=1\\ x_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

$$\mathrm{II}\begin{cases}\sum\limits_j a_{ij}y_j\geqslant v,i=1,2,\cdots,m\\ \sum\limits_j y_j=1\\ y_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

分析　可借助 14.6 的结论证明。

证明　由 14.6 的证明可知,当 y^* 是局中人Ⅱ的最优策略时,对于每一个 $\alpha_i\in S_1,i=1,2,\cdots,m$ 均有 $E(\alpha_i,y^*)\leqslant v$,而 $E(\alpha_i,y^*)=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}y_j^*,(i=1,2,\cdots,m)$,

其中 $y^*=(y_1^*,y_2^*,\cdots,y_n^*)$, $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}y_j^*=1,y_1^*\geqslant 0,(j=1,2,\cdots,n)$。故(Ⅱ)得证。

同理,当 x^* 是局中人Ⅰ的最优策略时,对于每一个 $\beta_j\in S_2,j=1,2,\cdots,n$ 均有 $E(x^*,\beta_j)\geqslant v$,而 $E(x_1^*,\beta_j)=\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}x_i^*,(j=1,2,\cdots,n)$,

其中 $x^*=(x^*,x_2^*,\cdots,x_m^*)$, $\sum\limits_{i=1}^{m}x_i^*=1,x_i^*\geqslant 0,(i=1,2,\cdots,m)$。故(Ⅰ)得证。

证毕。

○14.8　证明下列定理:

定理 7　设有两个矩阵对策 $G_1=\{S_1,S_2;A_1\},G_2=\{S_1,S_2;A_2\}$,其中 $A_1=(a_{ij}),A_2=(a_{ij}+L)$,$L$ 为任一常数,则有(1)$V_{G_2}=V_{G_1}+L$;(2)$T(G_1)=T(G_2)$。

证明　设(x^*,y^*)为 G_1 的解,则对一切 $x\in S_1^*,y\in S_2^*$,有 $E_1(x,y^*)\leqslant E_1(x^*,y^*)\leqslant E_1(x^*,y)$。由于 $A_1=(a_{ij}),A_2=(a_{ij}+L)$,所以 $E_2(x,y^*)=E_1(x,y^*)+L$, $E_2(x^*,y^*)=E_1(x^*,y^*)+L,E_2(x^*,y)=E_1(x^*,y)+L$,从而 $E_2(x,y^*)\leqslant E_2(x^*,y^*)\leqslant E_2(x^*,y)$,故$(x^*,y^*)$也为 G_2 的解,即 $T(G_1)=T(G_2)$。

因为 $E_2(x^*,y^*)=E_1(x^*,y^*)+L$,所以 $V_{G_2}=V_{G_1}+L$。

证毕。

定理 8　设有两个矩阵对策 $G_1=\{S_1,S_2;A\},G_2=\{S_1,S_2;\alpha A\}$,其中 $\alpha>0$ 为任一常数。则(1)$V_{G_2}=\alpha V_{G_1}$;(2)$T(G_1)=T(G_2)$。

证明　设(x^*,y^*)为 G_1 的解,则对一切 $x\in S_1^*,y\in S_2^*$,有 $E_1(x,y^*)\leqslant E_1(x^*,y^*)\leqslant E_1$

(x^*, y)。

由于 $E_2(x,y^*)=\alpha E_1(x,y^*)$，$E_2(x^*,y^*)=\alpha E_1(x^*,y^*)$，$E_2(x^*,y)=\alpha E_1(x^*,y)$，从而 $E_2(x,y^*)\leqslant E_2(x^*,y^*)\leqslant E_2(x^*,y)$，故$(x^*,y^*)$也为 G_2 的解，即 $T(G_1)=T(G_2)$。

因为 $E_2(x^*,y^*)=\alpha E_1(x^*,y^*)$所以 $V_{G_2}=\alpha V_{G_1}$。

证毕。

定理 9 设 $G=\{S_1,S_2;A\}$为一矩阵对策，且 $A=-A^{\mathrm{T}}$ 为斜对称矩阵(亦称这种对策为对称对策)，则(1)$V_G=0$；(2)$T_1(G)=T_2(G)$，其中 $T_1(G)$和 $T_2(G)$分别为局中人Ⅰ和Ⅱ的最优策略集。

证明 不妨设(X^*,Y^*)为 G 的解，则对一切 $X\in S_1^*$，$Y\in S_2^*$，有 $E(X,Y^*)\leqslant E(X^*,Y^*)\leqslant E(X^*,Y)$，即 $XAY^{*T}\leqslant X^*AY^{*T}\leqslant X^*AY^{\mathrm{T}}$。

由于 $A=-A^{\mathrm{T}}$，所以 $-XA^{\mathrm{T}}Y^{*T}\leqslant -X^*A^{\mathrm{T}}Y^{*T}\leqslant -X^*A^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}$，即 $XA^{\mathrm{T}}Y^{*T}\geqslant X^*A^{\mathrm{T}}Y^{*T}\geqslant X^*A^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}$，转置可得 $YAX^{*T}\leqslant Y^*AX^{*T}\leqslant Y^*AX^{\mathrm{T}}$，即 $E(Y,X^*)\leqslant E(Y^*X^*)\leqslant E(Y^*,X)$，故$(Y^*,X^*)$为 G 的解，从而必有 $X^*=Y^*$，所以 $T_1(G)=T_2(G)$。

由于 $V_G=X^*AX^{*T}=-X^*A^{\mathrm{T}}X^{*T}=-X^*A^{\mathrm{T}}X^{*T}=-V_G$，所以 $V_G=0$。

证毕。

◎**14.9** 设G为 2×2 对策，且不存在鞍点，证明若 $x^*=(x_1^*,x_2^*)^{\mathrm{T}}$ 和 $y^*=(y_1^*,y_2^*)^{\mathrm{T}}$ 是G的解，则

$$x_i^*>0 \qquad i=1,2$$
$$y_j^*>0 \qquad j=1,2$$

分析 用反证法。

证明 用反证法，不妨令 $x_1^*=0$，则 $x_2^*=1$。此时，若 $a_{21}\geqslant a_{22}$，则 $y_1^*=0$，$y_2^*=1$，即G存在鞍点，最优纯策略为(α_2,β_2)；若 $a_{21}<a_{22}$，则 $y_1^*=1$，$y_2^*=0$，即G存在鞍点，最优纯策略为(α_2,β_1). 这与G不存在鞍点相矛盾，从而必有 $x_i^*>0$，$i=1,2$；$y_j^*>0$，$j=1,2$。

证毕。

○**14.10** 证明：矩阵对策 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$的鞍点不存在的充要条件是有一条对角线的每一个元素均大于另一条对角线上的每一个元素。

证明 先证充分性。

不失一般性，不妨令 $a_{11}>a_{12}$，$a_{11}>a_{21}$，$a_{22}>a_{12}$，$a_{22}>a_{21}$，显然，不存在(α_i^*,β_j^*)使对一切 $i=1,2$；$j=1,2$，有 $a_{ij^*}\leqslant a_{i^*j^*}\leqslant a_{i^*j}$，故不存在鞍点。

再证必要性。因为不存在鞍点，所以不存在(α_i^*,β_j^*)，使对一切 $i=1,2$；$j=1,2$，有 $a_{ij^*}\leqslant a_{i^*j^*}\leqslant a_{i^*j}$，即对任意$(\alpha_i^*,\beta_j^*)$，对一切 $i=1,2$；$j=1,2$，均有 $a_{i^*j^*}>a_{i^*j}$，$a_{i^*j^*}>a_{ij^*}$ 或 $a_{i^*j^*}<a_{i^*j}$，$a_{i^*j^*}<a_{ij^*}$。

不失一般性，不妨令 $a_{11}>a_{12}$，$a_{11}>a_{21}$，若 $a_{22}<a_{21}$，$a_{22}<a_{12}$，则由于 $a_{22}<a_{12}<a_{11}$，所以 a_{12}是矩阵 A 的一个鞍点，这与已知条件矛盾，故必有 $a_{22}>a_{12}$，$a_{22}>a_{21}$，从而 A 必有一条对角线的每一个元素均大于另一条对角线上的每一个元素。

证毕。

●**14.11**　推导 2×2 对策的求解公式

$$x_1^*=\frac{a_{22}-a_{21}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}$$

$$x_2^*=\frac{a_{11}-a_{12}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}$$

$$y_1^*=\frac{a_{22}-a_{12}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}$$

$$y_2^*=\frac{a_{11}-a_{21}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}$$

$$V_G=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}$$

并由习题 14.10 的结果证明习题 14.9。

分析　根据课本定理 6,求解课本中式(14—23)、(14—24)即可推导出 2×2 对策的求解公式。

证明

$$(\text{I})\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}x_2=V_G & (1)\\ a_{12}x_1+a_{22}x_2=V_G & (2)\\ x_1+x_2=1 & (3)\end{cases}$$

$$(\text{II})\begin{cases}a_{11}y_1+a_{12}y_2=V_G & (4)\\ a_{21}y_1+a_{22}y_2=V_G & (5)\\ y_1+y_2=1 & (6)\end{cases}$$

由(3)得 $x_2=1-x_1$,代入(1)、(2) 得

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}(1-x_1)=V_G & (7)\\ a_{12}x_1+a_{22}(1-x_1)=V_G & (8)\end{cases}$$

(7)－(8)得 $a_{11}x_1+a_{21}(1-x_1)-a_{12}x_1-a_{22}(1-x_1)=0$,解之得

$$x_1^*=\frac{a_{22}-a_{21}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}\tag{9}$$

将(9)代入(3)得

$$x_2^*=\frac{a_{11}-a_{12}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}\tag{10}$$

将(9)、(10)代入(1)得

$$V_G=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}$$

由(6)得 $y_2=1-y_1$,代入(4)、(5) 得

$$\begin{cases}a_{11}y_1+a_{12}(1-y_1)=V_G & (11)\\ a_{12}y_1+a_{22}(1-y_1)=V_G & (12)\end{cases}$$

(11)－(12)得 $a_{11}y_1+a_{12}(1-y_1)-a_{21}y_1-a_{22}(1-y_1)=0$,解之得

$$y_1^*=\frac{a_{22}-a_{12}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}\tag{13}$$

将(13)代入(6)得

$$y_2^* = \frac{a_{11}-a_{21}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})} \tag{14}$$

由 14.10 的结论可知，若矩阵对策 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 的鞍点不存在，则有一条对角线的每一个元素均大于另一条对角线上的每一个元素。

不失一般性，不妨令 $a_{11}>a_{12}, a_{11}>a_{21}, a_{22}>a_{12}, a_{22}>a_{21}$，代入(9)、(10)、(13)、(14)可得

$$x_i^* > 0 \qquad i=1,2$$
$$y_j^* > 0 \qquad j=1,2$$

小结 2×2 对策指局中人Ⅰ的赢得矩阵为 2×2 阶的，若矩阵有鞍点，则很快可求出局中人的最优纯策略；若无鞍点，则各局中人最优混合策略中的 x_i^*，y_j^* 均大于零。

○**14.12** 设 $m\times m$ 对策的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

其中当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=1$，当 $i=j$ 时，$a_{ii}=-1$，证明此对策的最优策略为

$$x^*=y^*=(1/m,1/m,\cdots,1/m)^{\mathrm{T}}$$

$$V_G=\frac{m-2}{m}$$

证明 令 $A'=A-(1)_{m\times m}=\begin{bmatrix} -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2 \end{bmatrix}$，易知 A 的最优策略与 A' 相同，且

$V_{G'}=V_G-1$. 因 $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}=-2$，而 $\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}=0$，所以 A' 没有鞍点。

设最优混合策略为 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_m^*)^{\mathrm{T}}, y^*=(y_1^*,y_2^*,\cdots,y_m^*)^{\mathrm{T}}$，从 A' 的元素来看，每个局中人选取每个纯策略的可能性都是存在的，故可事先假定 $x_i^*>0, i=1,2,\cdots,m; y_j^*>0, j=1,2,\cdots,m$。于是求解线性方程组

$$\begin{cases} -2x_i=v, i=1,2,\cdots,m \\ \sum\limits_{i=1}^m x_i=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2y_j=v, j=1,2,\cdots,m \\ \sum\limits_{j=1}^m y_j=1 \end{cases}$$

得到

$$x^*=y^*=(1/m,1/m,\cdots,1/m)^{\mathrm{T}}$$

$$V_G+V_{G'}+1=E(x^*,y^*)=1-2(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_my_m)=1-2\,\frac{1}{m}=\frac{m-2}{m}$$

◎**14.13**　利用优超原则求解下列矩阵对策

$$(1)A=\begin{bmatrix}1&0&3&4\\-1&4&0&1\\2&2&2&3\\0&4&1&1\end{bmatrix}\qquad (2)A=\begin{bmatrix}3&4&0&3&0\\5&0&2&5&9\\7&3&9&5&9\\4&6&8&7&6\\6&0&8&8&3\end{bmatrix}$$

分析　优超原则即课本中的定理10。

解　(1)原矩阵对策的解为(α_3,β_1)，$V_G=2$。

(2)由于第3行优超于第2行，第4行优超于第1行，故可划去第1、2行，得到新的赢得矩阵

$$A_1=\begin{bmatrix}7&3&9&5&9\\4&6&8&7&6\\6&0&8&8&3\end{bmatrix}$$

对于A_1，第2列优超于第3、4、5列，故可划去第3、4、5列，得到

$$A_2=\begin{bmatrix}7&3\\4&6\\6&0\end{bmatrix}$$

对于A_2，第1行优超于第3行，故可划去第3行，得到

$$A_3=\begin{bmatrix}7&3\\4&6\end{bmatrix}$$

易知A_3没有鞍点，故求解

$$\begin{cases}7x_3+4x_4=v\\3x_3+6x_4=v\\x_3+\ x_4=1\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}7y_1+3y_2=v\\4y_1+6y_2=v\\y_1+\ y_2=1\end{cases}$$

得

$$x_3^*=\frac{1}{3},x_4^*=\frac{2}{3},y_1^*=\frac{1}{2},y_2^*=\frac{1}{2},v=5$$

所以原矩阵对策的一个解为$x^*=\left(0,0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},0\right)^{\mathrm{T}}$，$y^*=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,0\right)^{\mathrm{T}}$，$V_G=5$。

◎**14.14**　利用图解法求解下列矩阵对策，其中A为

$$(1)\begin{bmatrix}2&4\\2&3\\3&2\\-2&6\end{bmatrix}\qquad (2)\begin{bmatrix}5&7&-6\\-6&0&4\\7&8&5\end{bmatrix}$$

$$(3)\begin{bmatrix}4&2&3&-1\\-4&0&-2&-2\end{bmatrix}\qquad (4)\begin{bmatrix}1&3&11\\8&5&2\end{bmatrix}$$

分析　图解法对3阶以上的矩阵不适用。

解 (1)由于第 1 行优超于第 2 行，故可划去第 2 行，得到新的赢得矩阵

$$A'=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

设局中人Ⅱ的混合策略为$(y,1-y)^{\mathrm{T}}$，由图 14－3 可知，直线 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 在任一点 $y\in[0,1]$处的纵坐标分别是局中人Ⅱ采取混合策略$(y,1-y)^{\mathrm{T}}$ 时的支付。根据最不利当中选取最有利的原则，局中人Ⅱ的最优选择就是如何确定 y，以使三个纵坐标值中的最大值尽可能地小。由图 14－3 可见，应选择 $y=OA$，而 AB 即为对策值。求过 B 点的二条直线 α_1,α_3 所确定的方程：

$$\begin{cases} 2y+4(1-y)=V_G \\ 3y+2(1-y)=V_G \end{cases}$$

解得 $y=\frac{2}{3},V_G=\frac{8}{3}$。所以局中人Ⅱ的最优混合策略为 $y^*=(\frac{2}{3},\frac{1}{3})^{\mathrm{T}}$。此外从下图可看出，局中人Ⅰ的最优混合策略只由 α_1,α_3 组成，求$\begin{cases} 2x_1+3x_3=\frac{8}{3} \\ 4x_1+2x_3=\frac{8}{3} \\ x_1+x_3=1 \end{cases}$，得 $\begin{cases} x_1=\frac{1}{3} \\ x_3=\frac{2}{3} \end{cases}$，所以局中人Ⅰ的最优混合策略为 $x^*=(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3},0)^{\mathrm{T}}$。

图 14－3

(2)由于第 3 行优越于第 1 行，第 1 列优超于第 2 列，故可划去第 1 行和第 2 列，得到新的赢得矩阵

$$A'=\begin{bmatrix}-6 & 4\\ 7 & 5\end{bmatrix}$$

设局中人Ⅱ的混合策略为$(y,1-y)^{\mathrm{T}}$，由图 14—4 可知，直线 α_1,α_2 在任一点 $y\in[0,1]$处的纵坐标分别是局中人Ⅱ采取混合策略$(y,1-y)^{\mathrm{T}}$ 时的支付。根据最不利当中选取最有利的原则，局中人Ⅱ的最优选择就是如何确定 y，以使两个纵坐标值中的最大值尽可能地小。由图 14—4 可见，应选择 $y=0$，而 $V_G=5$。所以局中人Ⅱ的最优混合策略为 $y^*=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，而局中人Ⅰ的最优策略显然只能是

$x^*=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$。

图 14—4

(3)由于第 4 列优超于第 2、3 列，故可划第 2、3 列，得到新的赢得矩阵

$$A'=\begin{bmatrix}4 & -1\\ -4 & -2\end{bmatrix}$$

设局中人Ⅱ的混合策略为$(y,1-y)^{\mathrm{T}}$，由图 14—5 可知，直线 α_2,α_3 在任一点 $y\in[0,1]$处的纵坐标分别是局中人Ⅱ采取混合策略$(y,1-y)^{\mathrm{T}}$ 时的支付。根据最不利当中选取最有利的原则，局中人Ⅱ的最优选择就是如何确定 y，以使两个纵坐标值中的最大值尽可能地小。由图 14—5 可见，应选择 $y=0$，而 $V_G=-1$。所以局中人Ⅱ的最优混合策略为 $y^*=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，而局中人Ⅰ的最优策略显然只能是 $x^*=(1,0)^{\mathrm{T}}$。

(4)设局中人Ⅰ的混合策略为$(x,1-x)^{\mathrm{T}}$，$x\in[0,1]$。由图 14—6 可知，直线 β_1,β_2,β_3 在任一点 $x\in[0,1]$处的纵坐标分别是局中人Ⅰ采取混合策略$(x,1-x)^{\mathrm{T}}$ 时的支付。根据最不利当中选取最有利的原则，局中人Ⅰ应选择 $y=OA$，而 AB 即为对策值。求过 B 点的二条直线 β_2,β_3 所确定的方程：

$$\begin{cases}3x+5(1-x)=V_G\\ 11x+2(1-x)=V_G\end{cases}$$

解得 $x=\dfrac{3}{11}$，$V_G=\dfrac{49}{11}$。所以局中人Ⅰ的最优混合策略为 $x^*=(\dfrac{3}{11},\dfrac{8}{11})^{\mathrm{T}}$。此外从图 14—6 可看出，局中人Ⅱ的最优混合策略只由 β_2,β_3 组成，求

图 14－5

$\begin{cases}3y_2+11y_3=\dfrac{49}{11}\\ 5y_2+2y_3=\dfrac{49}{11}\\ y_2+y_3=1\end{cases}$，得 $\begin{cases}y_2=\dfrac{9}{11}\\ y_3=\dfrac{2}{11}\end{cases}$，所以局中人Ⅱ的最优混合策略为 $y^*=\left(0,\dfrac{9}{11},\dfrac{2}{11}\right)^{\mathrm{T}}$。

图 14－6

○**14.15** 已知矩阵对策

$$A=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&0&8\\0&6&0\end{bmatrix}$$

的解为 $x^*=(6/13,3/13,4/13)^{\mathrm{T}}$，$y^*=(6/13,4/13,3/13)^{\mathrm{T}}$，对策值为24/13。求下列矩阵对策的解，其赢得矩阵 A 分别为

(1) $\begin{bmatrix}6&2&2\\2&2&10\\2&8&2\end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix}2&-2&2\\6&-2&-2\\-2&4&-2\end{bmatrix}$　　(3) $\begin{bmatrix}32&20&20\\20&20&44\\20&38&20\end{bmatrix}$

解　(1)因为$\begin{bmatrix}6&2&2\\2&2&10\\2&8&2\end{bmatrix}=A+(2)_{3\times3}$,所以$x^*=(6/13,3/13,4/13)^{\mathrm{T}}$,

$y^*=(6/13,4/13,3/13)^{\mathrm{T}}$,$V_G=\dfrac{24}{13}+2=\dfrac{50}{13}$。

(2)$\begin{bmatrix}2&-2&2\\6&-2&-2\\-2&4&-2\end{bmatrix}+(2)_{3\times3}=\begin{bmatrix}0&0&4\\8&0&0\\0&6&0\end{bmatrix}=A'$,易知$A'$的第1、2、3列分别对应$A$的第3、2、1列,所以$x^*=(6/13,3/13,4/13)^{\mathrm{T}}$,$y^*=(3/13,4/13,6/13)^{\mathrm{T}}$,$V_G=\dfrac{24}{13}-2=-\dfrac{2}{13}$。

(3)$\begin{bmatrix}32&20&20\\20&20&44\\20&38&20\end{bmatrix}=3A+(20)_{3\times3}$,所以$x^*=(6/13,3/13,4/13)^{\mathrm{T}}$,

$y^*=(6/13,4/13,3/13)^{\mathrm{T}}$,$V_G=\dfrac{24}{13}\times3+20=\dfrac{332}{13}$。

●**14.16**　用线性规划方法求下列矩阵对策,其中A为

(1)$\begin{bmatrix}8&2&4\\2&6&6\\6&4&4\end{bmatrix}$　　(2)$\begin{bmatrix}2&0&2\\0&3&1\\1&2&1\end{bmatrix}$

分析　将求解问题利用优超原则处理,再化为两个互为对偶的线性规划问题并求解。

解　(1)由于第2列优于第3列,故可划去第3列,得到新的赢得矩阵

$$A'=\begin{bmatrix}8&2\\2&6\\6&4\end{bmatrix}$$

求解问题可化成两个互为对偶的线性规划问题

$$\min(x_1+x_2+x_3)$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}8x_1+2x_2+6x_3\geqslant1\\2x_1+6x_2+4x_3\geqslant1\\x_1,x_2,x_3\geqslant0\end{cases}$$

$$\max(y_1+y_2)$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}8y_1+2y_2\leqslant1\\2y_1+6y_2\leqslant1\\6y_1+4y_2\leqslant1\\y_1,y_2\geqslant0\end{cases}$$

将线性规划问题化为标准型并列出初始单纯形表逐步迭代,计算结果如表14－8

所示。

表 14－8

c_j			1	1	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	y_1	y_2	u_1	u_2	u_3	
0	u_1	1	[8]	2	1	0	0	1/8
0	u_2	1	2	6	0	1	0	1/2
0	u_3	1	6	4	0	0	1	1/6
c_j-z_j			1	1	0	0	0	
1	y_1	1/8	1	1/4	1/8	0	0	1/2
0	u_2	3/4	0	11/12	−1/4	1	0	3/22
0	u_3	1/4	0	[5/2]	−3/4	0	1	1/10
c_j-z_j			0	3/4	−1/8	0	0	
1	y_1	1/10	1	0	1/5	0	−1/10	1/2
0	u_2	1/5	0	0	[7/5]	1	−11/5	1/7
1	y_2	1/10	0	1	−3/10	0	2/5	—
c_j-z_j			0	0	1/10	0	−3/10	
1	y_1	1/14	1	0	0	−1/7	3/14	
0	u_1	1/7	0	0	1	5/7	−11/7	
1	y_2	1/7	0	1	0	3/14	−1/14	
c_j-z_j			0	0	0	−1/14	−1/7	

由单纯形表的计算结果可得：$y_1=\dfrac{1}{14}$，$y_2=\dfrac{1}{7}$，$w=y_1+y_2=\dfrac{3}{14}$；$x=\left(0,\dfrac{1}{14},\dfrac{1}{7}\right)^{\mathrm{T}}$，$z=\dfrac{3}{14}$。于是

$$V_G=\frac{14}{3}$$

$$x^*=\frac{14}{3}\times\left(0,\frac{1}{14},\frac{1}{7}\right)^{\mathrm{T}}=\left(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$y^*=\frac{14}{3}\times\left(\frac{1}{14},\frac{1}{7},0\right)^{\mathrm{T}}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0\right)^{\mathrm{T}}$$

(2)由于第 1 列优超于第 3 列，故可划去第 3 列，得到新的赢得矩阵

$$A'=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}$$

求解问题可化成两个互为对偶的线性规划问题

$$\min(x_1+x_2+x_3)$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+x_3\geqslant 1\\3x_2+2x_3\geqslant 1\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

$$\max(y_1+y_2)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2y_1\leqslant 1\\3y_2\leqslant 1\\y_1+2y_2\leqslant 1\\y_1,y_2\geqslant 0\end{cases}$$

将线性规划问题化为标准型并列出初始单纯形表逐步迭代,计算结果如表 14—9 所示。

表 14—9

c_j			1	1	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	y_1	y_2	u_1	u_2	u_3	
0	u_1	1	[2]	0	1	0	0	1/2
0	u_2	1	0	3	0	1	0	—
0	u_3	1	1	2	0	0	1	1
c_j-z_j			1	1	0	0	0	
1	y_1	1/2	1	0	1/2	0	0	—
0	u_2	1	0	3	0	1	0	1/3
0	u_3	1/2	0	[2]	−1/2	0	1	1/4
c_j-z_j			0	1	−1/2	0	0	
1	y_1	1/2	1	0	1/2	0	0	
0	u_2	1/4	0	0	3/4	1	−3/2	
1	y_2	1/4	0	1	−1/4	0	1/2	
c_j-z_j			0	0	−1/4	0	−1/2	

由单纯形表的计算结果可得:$y_1=\frac{1}{2},y_2=\frac{1}{4},w=y_1+y_2=\frac{3}{4};x=\left(\frac{1}{4},0,\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}},z=\frac{3}{4}$。于是

$$V_G=\frac{14}{3}$$

$$x^*=\frac{4}{3}\times(\frac{1}{4},0,\frac{1}{2})^{\mathrm{T}}=(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$$

$$y^*=\frac{4}{3}\times(\frac{1}{2},\frac{1}{4},0)^{\mathrm{T}}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0)^{\mathrm{T}}$$

小结　在求解一个矩阵对策时,应首先判断其是否具有鞍点,若无,则应将原对策赢得矩阵尽量化简,再求解。线性规划问题是具有一般性的。

第十五章

单目标决策

内容提要

一、基本内容

决策模型包含的要素

(1)决策者:其任务是进行决策。

(2)可供选择的方案:了解研究对象的属性,确定目的和目标。

(3)准则:衡量选择方案的标准。

(4)事件:不为决策者所控制的客观存在的将要发生的状态。

(5)结果:每一事件的发生将会产生的结果,如获得收益或损失。

(6)决策者的价值观:如决策者对不同风险程度的主观价值观念。

二、决策分类

1. 不确定型决策

(1)基本特征

决策过程中含有不确定性因素,且无法确定其发生的概率。

当决策者选定方案 S_i,对应自然状态(不确定性因素的某种可能状况)E_j 时的收益为条件收益 a_{ij}。对应所有 m 个方案及 n 个自然状态的条件收益的集合可排列为如下矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_m \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & \cdots & E_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

上述矩阵称为收益矩阵。

(2)决策准则

① 悲观主义准则　又称 max min 决策准则,即

$$\max_i\{\min_j(a_{1j}),\min_j(a_{2j}),\cdots,\min(a_{mj})\}$$

② 乐观主义准则　又称 max　max 准则,即

$$\max_i\{\max_j(a_{1j}),\max_j(a_{2j}),\cdots,\max_j(a_{mj})\}$$

③ 折衷主义准则　该准则是将悲观准则与乐观准则相结合的结果。令 α 为乐观系数,且 $0\leqslant\alpha\leqslant1$,并设

$$H_i=\alpha a_{i_{\max}}+(1-\alpha)\cdot a_{i_{min}}$$

其中 $a_{i\max}$ 与 $a_{i\min}$ 分别表示第 i 个方案可能得到的最大收益与最小收益值。

④ 等可能准则　　又称拉普拉斯(Laplace)准则。

2. **风险决策**

风险决策是指决策者对客观情况不甚了解,但对将发生各事件的概率是已知的。

在风险决策中,一般采用期望值作为决策准则。若决策矩阵是收益矩阵,则采用最大期望收益作为决策准则;若决策矩阵是损失矩阵,则采用最小期望损失作为决策准则。

(1)最大期望收益决策准则

设决策矩阵为收益矩阵,各事件发生的概率 p_j 已知,则先计算各策略 S_i 的期望收益值

$$E(S_i)=\sum_j p_j a_{ij}$$

然后从这些期望收益值中选取最大者,它对应的策略为决策策略,即

$$S_k^*\to\max\{E(S_i)\}$$

(2)最小机会损失决策准则

矩阵的各元素代表“策略—事件”对的机会损失值,各事件发生的概率为 p_j,先计算各策略的期望损失值

$$\sum_j p_j a'_{ij},i=1,2,\cdots,n$$

然后从这些期望损失值中选取最小者,它对应的策略应是决策者所选策略。即

$$S_k^*\to\min_i(\sum_j p_j a'_{ij})$$

(3)主观概率

风险决策时决策者要估计各事件出现的概率,而许多决策问题的概率不能通过随机试验去确定,只能由决策者根据他对这事件的了解去确定,这样确定的概率反映了决策者对事件出现的信念程度,称为主观概率。确定主观概率时,一般采用专家估计法。

① 直接估计法:要求参加估计者直接给出概率的估计方法。

② 间接估计法:通过排队或相互比较等间接途径给出概率的估计方法。

(4)修正概率的方法——贝叶斯公式的应用

① 先由过去的经验或专家估计获得将要发生事件的事前(先验)概率。

② 根据调查或试验计算得到条件概率，利用贝叶斯公式得

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)(A \mid B_i)}{\sum_j P(B_j)P(A \mid B_j)} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

计算出各事件后验概率。

三、决策树及灵敏度

1. 决策树

(1)概念：决策树是研究序列决策的有力工具，决策树是由决策点、事件点及结果构成的树形结构图。

(2)决策准则：期望值或效用值。

(3)求解步骤

计算采用逆决策顺序方法求解，计算步骤如下：

① 计算各事件点的期望值。

② 按最大期望或最大效用决策准则给出各决策点的抉择。

③ 在决策树上保留决策点应选方案，把淘汰策略去掉。

④ 重复①②③直至起点，即可得到最优策略。

2. 灵敏度分析

其主要任务为：一是确定最优方案不变条件下变量允许变动的范围；二是存在多个变量时进行敏感性比较，以明确敏感变量与非敏感变量，以供决策，在方案抉择及实施时参考。

基本分析方法为盈亏平衡分析，其关键是确定两个或多个方案效果相当时变量的临界值。

典型例题与解题技巧

【例 1】 今要建立一个企业，有 4 个投资方案，三种自然状态，投资数量如表 15－1

表 15－1

方案 \ 自然状态	Q_1	Q_2	Q_3
概　率	1/2	1/3	1/6
A_1	4	7	4
A_2	5	2	3
A_3	8	6	10
A_4	3	1	9

单位：百万元

用矩阵法进行决策。

解题分析　首先根据题意画出效益矩阵，进行分析计算。关键是得掌握本章的决策方法，进行正确的分析。

解题过程　由题设中的表格可知，效益矩阵为

$$B=\begin{bmatrix}4 & 7 & 4\\ 5 & 2 & 3\\ 8 & 6 & 10\\ 3 & 1 & 9\end{bmatrix}$$

概率矩阵为

$$P=\left[\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right]$$

概率矩阵的转置为

$$P^T=\left[\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right]^T$$

则期望矩阵为

$$E(A)=\begin{bmatrix}E(A_1)\\ E(A_2)\\ E(A_3)\\ E(A_4)\end{bmatrix}=BP^T=\begin{bmatrix}4 & 7 & 4\\ 5 & 2 & 3\\ 8 & 6 & 10\\ 3 & 1 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{30}{6}\\ \frac{22}{6}\\ \frac{46}{6}\\ \frac{20}{6}\end{bmatrix}$$

$$\max\left(\frac{30}{6},\frac{22}{6},\frac{46}{6},\frac{20}{6}\right)=\frac{20}{6}=E(A_4)$$

所以投资方案 A_3 为最优。

【例 2】　某企业有三种方案可供选择：方案 S_1 是对原厂进行扩建；方案 S_2 是对原厂进行技术改造；方案 S_3 是建新厂，而未来市场可能出现滞销(E_1)、一般(E_2)和畅销(E_3)三种状态，其收益矩阵如表 15－2。

表 15－2

利润\万元　状态 / 方案	E_1	E_2	E_3	
S_1	－4	13	15	
S_2	4	7	8	
S_3	－6	12	17	

试分别按以下决策准则确定最优方案：

(1)悲观准则；

(2)乐观准则；

(3)折衷准则(乐观系数 $a=0.6$)；

(4)后悔值准则；

(5)等可能性准则。

解题分析 本题是一道决策知识的基础题，需要读者对整体知识有个总体的把握，知道每种类型的决策的求法。

解题过程 (1)据悲观准则有

$$\max\begin{Bmatrix}\min\{-4,13,15\}=-4\\ \min\{4,7,8\}=4\\ \min\{-6,12,17\}=-6\end{Bmatrix}=4$$

故最优决策为方案 S_2。

(2)据乐观准则有

$$\max\begin{Bmatrix}\max\{-4,13,15\}=15\\ \max\{4,7,8\}=8\\ \max\{-6,12,17\}=17\end{Bmatrix}=17$$

故最优决策为方案 S_3。

(3)据折衷准则有

$$\max\begin{Bmatrix}15\times0.6+(-4)\times0.4\\ 8\times0.6+4\times0.4\\ 17\times0.6+(-6)\times0.4\end{Bmatrix}=\max\{7.4,6.4,7.8\}=7.8$$

故方案 S_3 为最优方案。

(4)据后悔值准则有后悔值矩阵(表 15－3)。

表 15－3

后悔值 状态 方案	E_1	E_2	E_3	max
S_1	8	0	2	8←min
S_2	0	6	9	9
S_3	10	1	0	10

由上表中的分析知，最优决策为方案 S_1。

(5)据等可能性准则，三个方案的评价值分别为：

$$\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}a_{1j}=\frac{1}{3}(-4+13+15)=8$$

$$\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}a_{2j}=\frac{1}{3}(4+7+8)=6\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}a_{3j}=\frac{1}{3}(-6+12+17)=7\,\frac{2}{3}$$

历年考研真题评析

【题】 (2005 年上海交通大学)拉斯维加斯赌场有一种轮盘赌,其盘上有 38 个不同的数字。如果对某个数字打赌,赢可得赌金的 35 倍,输则赌金全部归赌场老板。

(1)如果某人押 10 元在某数字上打赌,写出赌与不赌这二个方案的损益矩阵表;

(2)用期望值法决策;

(3)求该人损益值为零元的效用值;

(4)赌场老板喜欢保险型顾客,还是冒险型顾客?

解题分析 本题是本章决策内容的一个典型实例,考察读者对期望法的掌握。

首先,应列出损益矩阵表并进行分析(利用期望法,据题目要求)。此外,还考到效用值部分。

解题过程 (1)设参赌时每次压注 1 元,正数为赢得,负数为损失。赌与不赌的损益矩阵表如表 15－4 所示。

表 15－4

方案	事件 / 事件概率	事件(轮盘上数字)					EMV
	事件	1	2	3	…	38	
	概率	1/38	1/38	1/38	…	1/38	
不赌		0	0	0	…	0	0
参赌	押 1	35	−1	−1	…	−1	
	押 2	−1	35	−1	…	−1	
	押 3	−1	−1	35	…	−1	
	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	
	押 38	−1	−1	−1	…	35	

(2)用期望值法决策时,应不参赌。

(3)因有 $U(0)=\frac{1}{38}U(35)+\frac{37}{38}U(-1)$,设 $\nu(-1)=0$,$U(35)=1$,所以 $U(0)=\frac{1}{38}=0.0263$。

(4)赌场老板喜欢冒险型顾客。

课后习题全解

◎**15.1** 某厂考虑生产甲、乙两种产品,根据过去市场需求统计 见表 15—5:

表 15—5

方　　案	自然状态	旺　　季	淡　　季
	概　　率	$\alpha_1=0.7$	$\alpha_2=0.3$
甲　　种		4	3
乙　　种		7	2

用最大可能性法进行决策。

分析 选择概率最大的自然状态进行决策。

解 从题设所给的表格中可以看出,自然状态为旺季出现的概率最大(即 $P(\alpha_1)=0.7$),因而出现旺季的可能性也最大,现在就考虑按这一种自然状态进行决策,则上表就变成如下的表,这样就变成了确定型决策问题。

表 15—6　决策表

自然状态 / 市场需求 / 方案	旺季
甲种	4
乙种	7

从表 15—6 中通过比较可以知道,某厂考虑乙种方案市场需求量大,所以选取乙种方案是最优决策。

○**15.2** 对 15.1 题用期望值法进行决策并进行灵敏度分析,求出转折概率。

解 生产甲产品的期望收益为 $4\times0.7+3\times0.3=3.7$。生产乙产品的期望收益为 $7\times0.7+2\times0.3=5.5$。生产乙产品比生产甲产品的期望收益大,因此,最优方案为生产乙产品。

设 p 为出现旺季的概率,相应的,$1-p$ 为出现淡季的概率,当生产甲、乙两种产品的期望相等时,即

$$4p+3(1-p)=7p+2(1-p)$$

求得转折概率 $p=0.25$,即当 $p>0.25$ 时,生产乙产品是最优方案;当 $p<0.25$ 时,生产甲产品是最优方案。

◎15.3　某公司为了扩大市场，要举行一个展销会，会址打算选择在甲、乙、丙三地。获利情况除了与会址有关系外，还与天气有关，天气可区分为晴、普通、多雨三种（分别以 N_1、N_2、N_3 表示），通过天气预报，估计三种天气情况可能发生的概率为 0.25、0.50、0.25，其收益情况见表 15－7，用期望值准则进行决策。

表 15－7　　　　单位/万元

选址方案 \ 自然状态及概率	晴(N_1)	普通(N_2)	多雨(N_3)
	0.25	0.50	0.25
甲地	4	6	1
乙地	5	4	1.5
丙地	6	2	1.2

分析　计算出各方案的数学期望即可。

解　选择甲、乙、丙三地的期望收益分别为：

$$4\times0.25+6\times0.5+1\times0.25=4.25(\text{万元})$$
$$5\times0.25+4\times0.5+1.5\times0.25=3.625(\text{万元})$$
$$6\times0.25+2\times0.5+1.2\times0.25=2.8(\text{万元})$$

选择甲地的期望收益最大，因此，最优方案为选择甲地。

○15.4　将 15.3 题用矩阵法进行决策。

解

表 15－8

	晴(N_1)	普通(N_2)	多雨(N_3)	期望收益
	0.25	0.50	0.25	
甲地	4	6	1	4.25←max
乙地	5	4	1.5	3.625
丙地	6	2	1.2	2.8

选择甲地的期望收益最大，因此，最优方案为选择甲地。

15.5　今要建立一个企业，有 4 个投资方案，三种自然状态，投资数量见表 15－9，用矩阵法进行决策。

表 15－9　　　　单位/百万元

投资方案 \ 自然状态及概率	Q_1	Q_2	Q_3
	1/2	1/3	1/6
A_1	4	7	4
A_2	5	2	3
A_3	8	6	10
A_4	3	1	9

解 本题同例 1。见例 1 的分析与解答。

表 15－10　　　　单位/百万元

自然状态 / 概率 / 投资方案	Q_1	Q_2	Q_3	期望投资额
概率	1/2	1/3	1/6	
A_1	4	7	4	5
A_2	5	2	3	11/3
A_3	8	6	10	23/3
A_4	3	1	9	10/3←min

投资方案 A_4 的期望投资数量最小，因此，A_4 为最优投资方案。

◎**15.6** 某公司需要决定建大工厂还是建小工厂来生产一种新产品，该产品的市场寿命为 10 年，建大工厂的投资费用为 280 万元，建小工厂的投资费用为 140 万元。10 年内销售状况的离散分布的状态如下：高需求量的可能性为 0.5；中等需求量的可能性为 0.3；低需求量的可能性为 0.2。

公司进行了成本—产量—利润分析，在工厂规模和市场容量的组合下，它们的条件收益如下：

(1)大工厂，高需求，每年获利 100 万元。

(2)大工厂，中等需求，每年获利 60 万元。

(3)大工厂，低需求，由于开工不足，引起亏损 20 万元。

(4)小工厂，高需求，每年获利 25 万元(供不应求引起销售损失较大)。

(5)小工厂，中等需求，每年获利 45 万元(销售损失引起的费用较低)。

(6)小工厂，低需求，每年获利 55 万元(因工厂规模与市场容量配合得好)。

用决策树方法进行决策。

分析 画出决策树，计算各事件点的收入期望值，根据期望值的大小选择最大值。

解 将有关数据标在决策树上，如图 15－1 所示。事件点(1)的收入期望值为：$1000\times0.5+600\times0.3+(-20)\times0.2=676$(万元)

事件点(2)的收入期望值为：$250\times0.5+450\times0.3+550\times0.2=370$(万元)

在决策点[1]，建大厂的收入期望值为：$676-280=396$(万元)；建小厂的收入期望值为：$370-140=230$。因此，建大厂为最优方案。

○**15.7** 将第 5 题用决策树法进行决策。

解 由第 5 题的表格，可画决策树如图 15－2。

则各点的期望值为

点 2：$$4\times\frac{1}{2}+7\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{6}=\frac{30}{6}$$

点 3：$$5\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{22}{6}$$

点 4：$$8\times\frac{1}{2}+6\times\frac{1}{3}+10\times\frac{1}{6}=\frac{46}{6}$$

图 15－1

图 15－2

点 5：
$$3\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{3}+9\times\frac{1}{6}=\frac{20}{6}$$

由
$$\max\left[\frac{30}{6},\frac{22}{6},\frac{46}{6},\frac{20}{6}\right]=\frac{46}{6}$$

故投资方案 A_3 为最优。

○**15.8**　将第 6 题用矩阵法决策。

解　由第 6 题中的题设，得两个方案的年度益损值列表如下：

表 15—11

自然状态	概率	建大厂	建小厂
高需求	0.5	100	25
中等需求	0.3	60	45
低需求	0.2	−20	55

则收益矩阵为

$$B=\begin{bmatrix}100 & 60 & -20\\ 25 & 45 & 55\end{bmatrix}$$

概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}0.5, 0.3, 0.2\end{bmatrix}$$

概率矩阵转置为

$$P^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0.5\\ 0.3\\ 0.2\end{bmatrix}$$

则一年的年度的期望矩阵为

$$E_1(A)=\begin{bmatrix}E_1(A_1)\\ E_1(A_2)\end{bmatrix}=BP^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}100 & 60 & -20\\ 25 & 45 & 55\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5\\ 0.3\\ 0.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}64\\ 37\end{bmatrix}$$

则 10 年的期望为

$$E_{10}(A)=\begin{bmatrix}E_1(A_1)\times 10-280\\ E_1(A_2)\times 10-140\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}64\times 10-280\\ 37\times 10-140\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}360\\ 230\end{bmatrix}$$

由 360>230。故建大厂的方案为最优。

○**15.9** 将第 3 题用决策树方法进行决策。

解 由第 3 题的题设，可得决策树如下：计算各点的期望值为：

点 2： $4\times 0.25+6\times 0.5\times 1\times 0.25=4.25$

点 3： $5\times 0.25+4\times 0.5+1.5\times 0.25=3.625$

点 4： $6\times 0.25+2\times 0.5+1.2\times 0.25=2.8$

由 $4.25>3.625>2.8$

可知，选址甲地的收益期望最大。故选址甲地为最优方案。

图 15—3

◎**15.10**　某厂有一种新产品，其推销策略有 S_1，S_2，S_3 三种可供选择，但各方案所需的资金、时间都不同，加上市场情况的差别，因而获利和亏损情况不同。而市场情况也有三种：Q_1（需要量大），Q_2（需要量一般），Q_3（需要量低）。市场情况的概率并不知道，其益损矩阵如表 15—12，用乐观法进行决策。

表 15—12　　单位/万元

Q_i \ S_i	市　场　情　况		
	Q_1	Q_2	Q_3
S_1	50	10	−5
S_2	30	25	0
S_3	10	10	10

分析　用公式 $S_K^* \to \max\limits_i \max\limits_j (a_{ij})$。

解　由题意，把每个方案在各种自然状态下的最大效益值为：

$$\max_{S_1}\{50,10,-5\}=50$$

$$\max_{S_2}\{30,25,10\}=30$$

$$\max_{S_3}\{10,10,10\}=10$$

它们相应的效益值如下表所示

表 15—13　决策表　　单位/万元

效益矩阵 \ 方案	市场情况			$\max\limits_Q[\alpha(S_i,Q)]$
	Q_1	Q_2	Q_3	
S_1	50*	10	−5	50*
S_2	30*	25	0	30
S_3	10	10	10*	10
决策	$\max\limits_S\{\max\limits_Q[\alpha(S,Q)]\}=950$			

则各最大效益的最大值为

$$\max_{S}\{\max_{Q}[\alpha(S,Q)]\}=\max\{50,30,10\}=50$$

最大值 50 对应的行动方案为 S_1，故结果选方案 A_2。

◎**15.11** 将 10 题用悲观准则进行决策。

分析 用公式 $S_K^* \to \max_i \max_j (a_{ij})$。

解 由题设，每个方案在自然状态下的最小效益值分别为

$$\min_{S_1}\{50,10,-5\}=-5$$

$$\min_{S_2}\{30,25,0\}=0$$ 各个最小效益的最大值为

$$\min_{S_3}\{10,10,10\}=10$$

$$\max_{S}\{\min_{Q}[\alpha(S,Q)]\}=\max\{-5,0,10\}=10$$

如下表所示：

表 15－14 决策表 单位/万元

效益矩阵 / 方案	市场情况			$\min_{Q}[\alpha(S_i,Q)]$
	Q_1	Q_2	Q_3	
S_1	50	10	-5^*	-5
S_2	30	25	0^*	0
S_3	10	10^*	10	10^*
决策→	$\max_{S}\{\min_{Q}[\alpha(S,Q)]\}=10$			

10 对应的行动方案为 S_3。故选择方案 S_3。

◎**15.12** 某企业面临三种方案可以选择，五年内的益损表如下：

表 15－15 单位/万元

自然状态 / 决策方案	需求量			
	高	中	低	失败
扩建	50	25	－25	－45
新建	70	30	－40	－80
转包	30	15	－1	－10

用乐观系数法($\alpha_1=0.3,\alpha_2=0.7$)决策，然后加以比较。

分析 乐观系数法即折中主义准则。

解 由 $CV_i=\alpha \max_j[a_{ij}]+(1-\alpha)\min_j[a_{ij}]$

也就是先找到每个方案在各自然状态下的最大效益值，乘以 α 加上最小效益值乘以

$(1-\alpha)$，最后比较 CV_i，若 $CV_k=\max_i(CV_i)$，则选 A_k。

当 $\alpha_1=0.3$ 时

$$CV_1=50\times0.3+(1-0.3)\times(-45)=15-31.5=-16.5$$

$$CV_2=70\times0.3+(1-0.3)\times(-80)=21-56=-35$$

$$CV_3=30\times0.3+(1-0.3)\times(-10)=9-7=2$$

得决策表表 15—16 如下

表 15—16　决策表　　单位:百万元

决策方案＼自然状态	高	中	低	失败	CV_i
扩建(A_1)	50*	25	−25	<u>−45</u>	−16.5
新建(A_2)	70*	30	−40	<u>−80</u>	−35
转包(A_3)	30*	15	−1	<u>−10</u>	2*
决策→	$\max_i[CV_i]=2$				

其中加"＊"表示最大值，加"一"表示最小值。则

$$\max\{-16.5,-35,2\}=2$$

2 对应的方案为转包。

当 $\alpha_2=0.7$ 时

$$CV_1=50\times0.7+(1-0.7)\times(-45)=35-13.5=21.5$$

$$CV_2=70\times0.7+(1-0.7)\times(-80)=49-24=25$$

$$CV_3=30\times0.7+(1-0.7)\times(-10)=21-3=18$$

得决策表表 15—17 如下

表 15—17　决策表　　单位/百万元

决策方案＼自然状态	高	中	低	失败	CV_i
扩建(A_1)	50*	25	−25	<u>−45</u>	21.5
新建(A_2)	70*	30	−40	<u>−80</u>	25*
转包(A_3)	30*	15	−1	<u>−10</u>	18
决策→	$\max_i[CV_i]=25$				

则　$$\max\{11.5,-7,-14\}=25$$

25 对应的方案为新建，故选择新建。

◎**15.13**　将 12 题用等可能准则(Laplace)进行决策，并与上题比较结果。

分析　用公式 $S_K^*\to\max_i\{E(S_i)\}$。

解　$$E(A_1)=50\times\frac{1}{4}+25\times\frac{1}{4}+(-25)\times\frac{1}{4}+(-45)\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

$$E(A_2)=70\times\frac{1}{4}+30\times\frac{1}{4}+(-40)\times\frac{1}{40}+(-80)\times\frac{1}{4}=-\frac{20}{4}$$

$$E(A_3)=30\times\frac{1}{4}+15\times\frac{1}{4}+(-1)\times\frac{1}{4}+(-10)\times\frac{1}{4}=\frac{34}{4}$$

得决策表表 15－18 如下

表 15－18　决策表　　　　单位/百万元

效益矩阵 \ 状态 / 可能性 \ 方案	高	中	低	失败	$E(A)$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
扩建(A_1)	50	25	－25	－45	$\frac{5}{4}$
新建(A_2)	70	30	－40	－80	$-\frac{20}{4}$
转包(A_3)	30	15	－1	－10	$\frac{34}{4}$
决策→	$\max\limits_{A}[E(A)]=\frac{34}{4}$				

$$\max\left\{\frac{5}{4},-\frac{20}{4},\frac{34}{4}\right\}=\frac{34}{4}$$

而$\frac{34}{4}$对应的方案为转包，故选择转包。

◎**15.14**　在开采油井时，出现不定情况，用后悔值准则决定是否开采。益损矩阵见表 15－19。

表 15－19

自然状态 \ 方案	有　油	无　油
	Q	$\bar{Q}$
开　采	5	1
不开采	0	0

分析　先将收益矩阵中各元素变换为每一“策略—事件”对的机会损失值，再求解。

解　将每种自然状态的最高值(指收益矩阵，损失矩阵应为最低值)订为该状态的理想目标，并将该状态中的其他值与最高值相减所得之差，称为未达到理想之后悔值。

在 Q 状态下，理想值为 5，则开采的后悔值为 5－5＝0，不开采的后悔值为 5－0＝5。

在 $\bar{Q}$ 状态下，理想值为 0，则开采的后悔值为 0－(－1)＝1，不开采的后悔值为 0－0＝0。

如表 15－20：

表 15－20　决策表

后悔值 \ 状态 \ 方案	有油	无油
开采(A_1)	0	1
不开采(A_2)	5	0

方案 A_1 的最大后悔值为：max (0,1)＝1

方案 A_2 的最大后悔值为：max (5,0)＝5

再求这些最大值中的最小值为：min (1,5)＝1

而 1 对应的方案为开采，故选择开采。

○**15.15**　某企业要投产一种新产品，投资方案有三个：S_1、S_2、S_3，不同经济形势下的利润如表表 15－21 所示。用乐观系数准则($\alpha_1=0.6$，$\alpha_2=0.4$)进行决策。

表 15－21　　　　单位/万元

投资方案	不同经济形势		
	好	平	差
S_1	10	0	－1
S_2	25	10	5
S_3	50	0	－40

解　由

$$CV_i=\alpha \min_j[a_{ij}]+(1-\alpha)\max_j[a_{ij}]$$

当 $\alpha=0.6$ 时

$CV_1=0.6\times10+(1-0.6)\times(-1)=5.6$

$CV_2=0.6\times25+(1-0.6)\times5=13$

$CV_3=0.6\times50+(1-0.6)\times(-40)=14$

得决策表如下

表 15－22　决策表　　　　单位/万元

收益 状态 / 方案	好	平	差	CV_i
S_1	10	0	－1	5.6
S_2	25	10	5	13
S_3	50	0	－40	14
决策→	$\max_i[CV_i]=$			14

由

$$\max\{5.6,13,16\}=14$$

14 对应的方案为 S_3。故选取 S_3。

当 $\alpha=0.4$ 时

$CV=0.4\times10+(1-0.4)\times(-1)=3.4$

$CV_2=0.4\times25+(1-0.4)\times5=13$

$CV_3=0.4\times50+(1-0.4)\times(-40)=-4$

得决策表表 15－23

表 15—23　决策表　　　　单位/万元

收益＼状态＼方案	好	平	差	CV_i
S_1	10	0	−1	3.4
S_2	25	10	5	13
S_3	50	0	−40	−4
决策→	$\max\limits_i[CV_i]=13$			

$$\max\{3.4, 13, -4\}=13$$

13 对应的方案为 S_2，故选取 S_2。

◎**15.16**　将 15 题用等可能准则进行决策。

分析　用公式 $S_K^* \to \max\limits_i\{E(S_i)\}$求解。

解　$E(S_1)=10\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+(-1)\times\frac{1}{3}=\frac{9}{3}$

$E(S_2)=25\times\frac{1}{3}+10\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{3}=\frac{40}{3}$

$E(S_3)=50\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+(-40)\times\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

得决策表表 15—24

表 15—24

效益矩阵＼状态 可能性＼方案	好	平	差	$E(S)$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
S_1	10	0	−1	$\frac{9}{3}$
S_2	25	10	5	$\frac{40}{3}$
S_3	50	0	−40	$\frac{10}{3}$
决策→	$\max\limits_S[E(S)]=\frac{40}{3}$			

由　$$\frac{40}{3}>\frac{10}{3}>\frac{9}{3}$$

即　$$E(S_2)>E(S_3)>E(S_1)$$

故选方案 S_2。

◎**15.17**　建厂投资有三个行动方案可以选择，并有三种自然状态，其损失表见表 15－25，用乐观准则进行决策。

表 15－25

状态 / 损失值 / 方案	自然状态		
	Q_1	Q_2	Q_3
A_1	3	7	3
A_2	6	5	4
A_3	5	6	10

分析　用公式 $S_K^* \to \max\limits_i \max\limits_i (a_{ij})$ 求解。

解　由于题设中所给的是损失表，故应采取最小原则，各个方案在各种自然状态下的最小损失为：

$$\min_{A_1}\{3,7,3\}=3,\qquad \min_{A_2}\{6,5,4\}=4,\qquad \min_{A_3}\{5,6,10\}=5$$

则

$$\min_A\{\min_Q[\alpha(A,Q)]\}=\min\ \{3,4,5\}=3$$

得决策表如下

表 15－26　决策表

状态 / 损失值 / 方案	Q_1	Q_2	Q_3	$\min\limits_Q[\alpha(A_i,Q)]$
A_1	3	7	3	3
A_2	6	5	4	4
A_3	5	6	10	5
决策→	$\min\limits_A\{\min\limits_Q[\alpha(A,Q)]\}=3$			

3 对应的方案为 A_1。故选取 A_1。

◎**15.18**　将 15.17 题用悲观准则进行决策。

分析　用公式 $S_k^* \to \max\min\ \{a_{ij}\}$ 求解。

解　由于为损失矩阵，故用悲观法则进行决策时，应选用最小最大方法。

各个状态下的最大损失值为

$$\max_{A_1}\{3,7,3\}=7,\qquad \max_{A_2}\{6,5,4\}=6,\qquad \max_{A_3}\{5,6,10\}=10$$

各个最大损失值的最小值为

$$\min_A\{\max_Q[\alpha(A,Q)]\}=\min\ \{7,6,10\}=6$$

得决策表表 15－27

表 15－27　决策表

损失值 状态 / 方案	Q_1	Q_2	Q_3	$\min\limits_{Q}[\alpha(A_i,Q)]$
A_1	3	7	3	7
A_2	6	5	4	6
A_3	5	6	10	10
决策→	$\min\limits_{A}\{\max\limits_{Q}[\alpha(A,Q)]\}=6$			

6 对应的决策为 A_2。故选取方案 A_2。

第十六章 多目标决策

内容提要

一、基本概念

1. 共同最优解:假定有 m 个目标 $f_1(x),\cdots,f_m(x)$ 同时要考察,并要求越大越好,在不考虑其他目标时,记第 i 个目标的最优值为

$$f_i^{(0)}=\max_{x\in R} f_i(x)$$

相应的最优解记为 $x^{(i)}, i=1,2,\cdots,m$;其中 R 是解的约束集合

$$R=\{x\mid g(x)\geqslant 0\}, g(x)=\{g_1(x),\cdots,g(x)\}^T$$

当这些 $x^{(i)}$ 都相同时,就以这共同解作为多目标的共同最优解。

2. 非劣和最优:在单目标时任何两个解都可以比较其优劣,因此是完全有序的,可是在多目标时,任何两个解不一定都是可比出优劣的,因此只能是半有序的。若 x_0 是最优解,则必为非劣解,反之不然,在单目标最优化问题时,对最优和非劣可以不区分,但在多目标最优化问题时,这两个概念必须加以区别。

二、求解多目标规划问题的方法

1. 主要目标法

解决主要问题,并适当兼顾其他要求。

(1)优选法:在实际问题中通过分析讨论,抓住其中一两个主要目标,让它们尽可能地好,而其他指标只要满足一定条件即可通过若干次试验以达到最佳。

(2)数学规划法:设有 m 个目标 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x)$ 要考察其中方案变量 $x\in R$(约束集合),若以某目标为主要目标,如 $f_1(x)$ 要求实现最优(最大),而对其他目标只是满足一定规格要求即可。

(3)线性加权和法

① α一法

对于有 m 个目标 $f_1(x),\cdots,f_m(x)$ 的情况，不妨设其中 $f_1(x),\cdots,f_k(x)$ 是要求最小化而 $f_{k+1}(x),\cdots,f_m(x)$ 是要求最大化，这时可构成下重新目标函数。

$$\max_{x\in R} U(x) = \max_{x\in R}\left\{-\sum_{j=1}^{k}\alpha_j f_j(x) + \sum_{j=k+1}^{m}\alpha_j f_j x\right\}$$

其中 $\{a_j\}$ 满足下列方程组

$$-\sum_{j=1}^{k}\alpha_j f_{ij} + \sum_{j=1+k}^{m}\alpha_j f_{ij} = c_1, i = 1,2,\cdots,m$$

其中

$$f_{ii}=f_i=\min_{x\in R} f_i(x)=f_i(x^{(i)}), i=1,2,\cdots,k$$

$$f_{ii}=f_i^{(0)}=\max_{x\in R} f_i(x)=f_i(x^{(i)}), i=k+1,\cdots,m$$

$$f_{ij}=f_j(x^{(i)}), j\neq i, i,j=1,2,\cdots,m$$

② λ一法

当 m 个目标都要求实现最大时，可用下述加权和效用函数，即

$$U(x)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_i f_i(x)$$

其中 λ_i 取

$$\lambda_i=\frac{1}{f_i^0},\ f_i^0=\max_{x\in k} f_i(x)=\max_{x\in R} f_i(x)$$

2. 多目标线性规划的解法

(1)逐步法

逐步法是一种迭代法，在求解过程中，每进行一步，分析者把计算结果告诉决策者，决策者对计算结果做出评价，若认为已满意了，则停止迭代，否则分析者再根据决策者的意见修改和再计算。如此，直到求得决策者认为满意的解为止。

设有 k 个目标的线性规划问题

$$V=\max_{x\in R} Cx$$

其中 $R=\{x_1, Ax\leqslant b, x\geqslant 0\}$，$A$ 为 $m\times n$ 矩阵。

C 为 $k\times n$ 矩阵，也可表示为

$$C=\begin{bmatrix}c^1\\ \vdots \\ c^k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1^1 & c_1^2 & \cdots & c_n^1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_1^k & c_2^k & \cdots & c_n^k\end{bmatrix}$$

求解的计算步骤为：

① 分别求 k 个单目标线性规划问题的解

$$\max_{x\in R} c^j x, j=1,2,\cdots,k$$

由 $c^i x^{(j)}=\max_{x\in R} c^j x$ 得到最优解 $x^{(j)}, i=1,2,\cdots,k$ 及相应的 $c^i x^{(j)}$，则并作表

$$Z=(z_i^j)$$

其中

$$z_i^j=c^i x^{(j)}, z_i^j=\max_{x\in R} c^j x=c^j x^{(j)}=M_j$$

② 求权系数

从 z 表中得到 M_j 及 $m_j=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant k} z_i^j, j=1,2,\cdots,k$

为了找出目标值的相对偏差以及消除不同目标值的量纲不同的问题，进行如下处理：

当 $M_j>0$ 时

$$\alpha_i=\frac{M_j-m_j}{M_j}\frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(c_i^j)^2}}$$

当 $M_j<0$ 时

$$\alpha_j=\frac{m_j-M_j}{m_j}\frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(c_i^j)^2}}$$

经归一化后，得权系数

$$\pi_j=\frac{\alpha_j}{\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j},\quad 0\leqslant\pi_j\leqslant 1$$

$$\sum_{j=1}^{k}\pi_j=1,\quad j=1,2,\cdots,k$$

典型例题与解题技巧

【例】 某厂拟从下列 4 种新研制的产品中组织并选择两种产品进行生产。由于对市场的需求预测不准，故对每种产品，分别估计了在销售好与销售不好情况下的预期利润，上述 4 种产品均需经 A,B 两台设备可用的加工时间及有关预期，利润如表16－1所示。要求：

(1)分别列出各生产方案的多目标、决策模型；

(2)对目标 f_1 和 f_2 分别求解，并在以 f_1 和 f_2 为坐标轴的平面坐标上标出各个方案解的相应点。

表 16－1

单位加工时间 产品 / 设备	1	2	3	4	工时
A	4	3	6	5	45
B	2	5	4	3	30
销售好时预期利润/(元・件$^{-1}$)	8	6	10	12	
销售不好时预期利润/(元・件$^{-1}$)	5	5	6	4	

解题分析 本题是多目标决策的基本内容考察，要求读者掌握多目标决策的基本概念和模型。

解题过程 (1)共有 6 种组织生产方案见表 16－2。

表 16－2

方案	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ
选择生产的产品	1,2	1,3	1,4	2,3	2,4	3,4

方案Ⅰ的模型为

$$\max z_1 = 8x_1 + 6x_2 = f_1$$
$$\max z_2 = 5x_1 + 5x_2 = f_2$$
$$\text{s. t.} \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leqslant 45 \\ 2x_1 + 5x_2 \leqslant 30 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

方案Ⅱ的模型为

$$\max z_1 = 8x1 + 10x2 = f_1$$
$$\max z_2 = 5x_1 + 6x_2 = f_2$$
$$\text{s. t.} \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leqslant 45 \\ 2x_1 + 4x_2 \geqslant 30 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

方案Ⅲ的模型为

$$\max z_1 = 8x_1 + 12x_2 = f_1$$
$$\max z_2 = 5x_1 + 4x_2 = f_2$$
$$\text{s. t.} \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leqslant 45 \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 30 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

方案Ⅳ的模型为

$$\max z_1 = 6x_1 + 10x_2$$
$$\max z = 5x_1 + 6x_2$$
$$\text{s. t.} \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leqslant 45 \\ 5x_1 + 4x_2 \leqslant 30 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

方案Ⅴ的模型为

$$\max z_1 = 6x_1 + 12x_2$$
$$\max z_2 = 5x_1 + 4x_2$$
$$\text{s. t.} \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leqslant 45 \\ 5x_1 + 3x_2 \leqslant 30 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

方案Ⅵ的模型为

$$\max z_1 = 10x_1 + 12x_2$$
$$\max z_2 = 6x_1 + 4x_2$$
$$\text{s. t.} \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \leqslant 45 \\ 4x_1 + 3x_2 \leqslant 30 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(2)由线性规划的解法,得各方案的解分别为如表 16－3 所示:

表 16－3

方案		Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ
解	f_1	90	90	108	75	108	108
	f_2	58.93	56.25	56.25	45	38.44	45

第十七章

启发式方法

课后习题全解

○17.1 什么是启发式方法？说明用启发式方法解决实际问题的过程和步骤。

答 为得到结构不良问题的近似可用的解，分析人员必须运用自己的感知和洞察力，从与其有关而较基本的模型及算法中寻求其间的联系，从中得到启发，去发现适于解决该问题的思路和途径，这种方法称为启发式方法。

用启发式方法解决实际问题的过程和步骤：(1)选择启发式策略；(2)通过解决经过简化的问题得到启示，设计启发式方法；(3)按启发式方法的步骤逐步迭代，直至得到满意解(或最优解)。

○17.2 在解决实际问题时应如何运用启发式策略？除本书上列出的几个启发式策略之外，你认为还有什么样的策略可以使用？

答 在解决实际问题时，可根据问题的性质和要求选用某一个启发式策略，也可将几个启发式策略联合起来使用。除本书上列出的几个启发式策略之外，还有类比策略、近似策略等可以使用。

○17.3 对在多台设备上加工多个工件的工件排序问题来说，应如何衡量不同排序方案的优劣？你认为应有哪些准则？这些准则的适用条件是什么？请举出两个实例加以详细说明。

答 应以总加工时间的长短衡量不同排序方案的优劣。应遵循设备等待时间最短的准则。举例请读者自行思考

○17.4 试说明 $C-W$ 节约算法的基本思想，你认为还可用它解决哪些方面的问题？举例加以说明。

答 $C-W$ 节约算法的基本思想是：优先考虑把节约值最大的弧插入到旅行线路中，这样在满足访问若干城市各一次且仅一次的条件下，最大限度地缩短了路程。

○17.5 试将诺贝克和拉夫提出的几何法与 $C-W$ 节约算法进行比较。

答 诺贝克和拉夫提出的几何法首先寻找凸包，然后考查以不在旅行线路上的点为角

顶，以线路上的点的连线为对边角的大小，选出最大者所对应的角顶，插入旅行线路，直至得到回路

$C-W$ 节约算法首先以某一点为基点，确定初始解，然后考查基点之外的其他点的连线所构成的弧的节约值的大小，选出节约值最大者所对应的弧，插入到旅行线路中，直至旅行线路中包含所有的点。。

○17.6 说明本书所述货运车辆优化调度算法的原理和求解步骤，并绘出求解过程框图。请简要回答以下问题：

(1)若有两种车型的车可用，书中提出的模型应怎样修改？在书中所提算法的启发下，试拟定出一套求解的迭代步骤。

(2)你认为应如何将书中提出的模型和算法推广到多目标的情形。

答 货运车辆优化调度算法的原理：最小费用最大流原理。

货运车辆优化调度算法的求解步骤：(1)仅考虑重载点，运用表上作业法，求出最优解作为原问题的可行解；(2)进行解的扩展和解的收缩，直至得到可接受可行解；(3)以该可接受可行解为依据确定初始行车路线；(4)根据具体约束条件进行调整，直至得到最优行车路线。

◎17.7 表 17—1 给出了 12 个工件在设备 A 和 B 上的加工时间，要求：

(1)若所有工件都先在设备 A 上加工，再在设备 B 上加工，试确定使总加工时间最短的工件加工顺序，并计算总加工时间。

(2)若工件 8～12 先在设备 B 上加工，再在设备 A 上加工，其他条件同上，试设计一套启发式算法，以计算最小总加工时间和安排相应的工件最优加工顺序。

表 17—1

设备 \ 工件	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	5	8	11	2	4	7	12	3	9	3	6	10
B	5	9	4	3	7	6	9	4	5	8	9	4

分析 根据第 9 年的最优排序规则(课本 240 页)求解(1)；再参考课本 463 页的启发式方法步骤求解(2)。

解 (1)$i=1,k=0,t_r=A_4$，工件 4 为第 1 个加工工件；

$i=2,t_r=A_8$，工件 8 为第 2 个加工工件；

$i=3,t_r=A_{10}$，工件 10 为第 3 个加工工件；

$i=4,t_r=A_5$，工件 5 为第 4 个加工工件；

$i=5,t_r=B_3$，工件 3 为第 12 个加工工件；

$k=1,t_r=B_{12}$，工件 12 为第 11 个加工工件；

$k=2,t_r=B_1$，工件 1 为第 10 个加工工件；

$k=3.\ t_r=B_9$，工件 9 为第 9 个加工工件；

$k=4.\ t_r=B_6$，工件 6 为第 8 个加工工件；

$k=5,t_r=B_{11}$，工件 11 为第 5 个加工工件；

$i=6, t_4=A_2$，工件 2 为第 6 个加工工件；

$i=7, t_r=B_7$，工件 7 为第 7 个加工工件。

最短工件加工顺序：4→8→10→5→11→2→7→6→9→1→12→3。

总加工时间为 80。

(2)启发式算法：

① $i_A=i_B=1, k_A=k_B=0$。

② $i_{r1}=\max\{A_1, A_2, \cdots, A_7, B_8, B_9, \cdots, B_{12}\}$，$t_{r2}=\min\{B_1, B_2, \cdots, B_7, A_8, A_9, \cdots, A_{12}\}$。

③ 若 $t_{r1}=A_j(j=1,2,\cdots,7)$，工件为 A 设备第 i_A 个加工工件，并置 $i_A:=i_A+1$；

若 $t_{r1}=B_j(j=8,9,\cdots,12)$，工件 j 为 B 设备第 i_B 个加工工件，并置 $i_B:=i_B+1$；

若 $t_{r2}=A_j(j=8,9,\cdots,12)$，工件 j 为 A 设备第 $12-k_A$ 个加工工件，并置 $k_A:=k_A+1$；

若 $t_{r2}=B_j(j=1,2,\cdots,7)$，工件 j 为 B 设备第 $12-k_B$ 个加工工件，并置 $k_B:=k_B+1$

④ 将 A_j, B_j 去掉，即不再考虑已排好加工顺序的工件 j。

⑤ 转步骤②，直至②中的工件加工时间表变成空集。

利用该启发式算法求解，得

A 设备最优加工顺序：7→3→2→6→1→5→4→12→9→11→10→8；

B 设备最优加工顺序：11→10→9→12→8→7→2→5→6→1→3→4。

总加工时间为 80。

○**17.8**　有 4 个工件 J_1、J_2、J_3、J_4，要求在三台设备 A, B, C 上顺次加工，各工件在各设备上的加工时间示于表 17－2 中。试构造一启发式算法，用于寻求使总加工时间最短的工件加工顺序。

表 17－2

工件 / 设备	J_1	J_2	J_3	J_4
A	5	10	9	5
B	7	5	7	8
C	9	4	5	10

解　启发式算法：

① $i=1, k=0$。

② $t_r=\min\{A_1, A_2, A_3, A_4, C_1, C_2, C_3, C_4\}$。

③ 若 $t_r=A_j(j=1,2,3,4)$，工件 j 为第 i 个加工工件，并置 $i:=i+1$；

若 $t_r=C_j(j=1,2,3,4)$，工件 j 为第 $4-k$ 个加工工件，并置 $k:=k+1$。

④ 将 A_j、B_j、C_j 去掉，即不再考虑已排好加工顺序的工件 j。

⑤ 转步骤②，直至②中的工件加工时间表变成空集。

利用该启发式算法求解，得

$i=1,k=0,t_r=C_2$，工件 J_2 为第 4 个加工工件；

$k=1,t_r=A_1$，工件 J_1 为第 1 个加工工件；

$i=2,t_r=A_4$，工件 J_4 为第 2 个加工工件；

$i=3,t_r=C_3$，工件 J_3 为第 3 个加工工件。

即最优加工顺序：$J_1 \to J_4 \to J_3 \to J_2$。

总加工时间为 40。

●**17.9** 有 10 个城市，它们在坐标系中的位置如表 17－2 所示，试完成以下工作：

(1)用 C－W 节约算法求出经过每个城市一次且仅一次的一条最短线路。

(2)用 Norback 和 Love 提出的几何法，求出经过每个城市一次且仅一次的一条最短线路。

(3)比较上述两种方法得出的结果，并设计一种启发式方法，对上述较差的结果进行改进。

表 17－3

坐标 \ 城市	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	5	8	7	10	15	16	18	18	20
y	0	20	12	4	15	4	18	8	15	17

分析 本题为 TSP 问题。(1)C－W 节约算法见课本 464 页，(2)几何法见课本 467 页。

解 (1)计算各点对之间的欧氏距离 c_{ij}，计算结果列于表 17－4 中。

表 17－4

始点 \ 终点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	20.62	14.42	8.06	18.03	15.52	24.08	19.70	23.43	26.25
2	20.62	0	8.54	16.12	7.07	18.87	11.18	17.69	13.93	15.30
3	14.42	8.54	0	8.06	3.61	10.63	10.00	10.77	10.44	3.00
4	8.06	6.12	8.06	0	11.40	8.00	16.64	11.70	15.56	18.38
5	18.03	7.07	3.61	11.40	0	12.08	6.71	10.63	8.00	10.20
6	15.52	18.87	10.63	8.00	12.08	0	14.04	5.00	11.40	13.93
7	24.08	11.18	10.00	16.64	6.71	14.04	0	10.20	3.61	4.12
8	19.70	17.69	10.77	11.70	10.63	5.00	10.20	0	7.00	9.22
9	23.43	13.93	10.44	15.56	8.00	11.40	3.61	7.00	0	2.83
10	26.25	15.30	13.00	18.38	10.20	13.93	4.12	9.22	2.83	0

取城市 5 为基点(也可取其他城市为基点),构成初始线路图(图 17—1)。再利用公式 $s_{ij}=c_{5i}+c_{5j}-c_{ij}$ 计算将弧$(i,j)(i,j\neq5)$插入到线路中时引起的路程节约值,并按节约值由大到小的顺序将它们填入表 17—5 中。

图 17—1

表 17—5

序号	弧	节约值	号	弧	节约值	序号	弧	节约值
1	(1,4)	21.37	13	(6,10)	8.35	25	(2,4)	2.35
2	(6,8)	17.71	14	(1,3)	7.21	26	(2,3)	2.13
3	(4,6)	15.48	15	(7,8)	7.14	27	(1,10)	1.98
4	(9,10)	15.37	16	(3,4)	6.95	28	(2,10)	1.97
5	(1,6)	14.59	17	(3,6)	5.06	29	(4,7)	1.47
6	(7,10)	12.78	18	(6,7)	4.76	30	(3,9)	1.17
7	(8,9)	11.63	19	(1,2)	4.48	31	(2,9)	1.14
8	(8,10)	11.61	20	(4,9)	3.85	32	(3,10)	0.80
9	(7,9)	11.10	21	(3,8)	3.47	33	(1,7)	0.65
10	(4,8)	10.33	22	(4,10)	3.22	34	(3,7)	0.31
11	(1,8)	8.96	23	(1,9)	2.60	35	(2,6)	0.29
12	(6,9)	8.68	24	(2,7)	2.60	36	(2,8)	0.01

按节约值由大到小的顺序,对每条弧加以考查,看能否将其插入到线路中。若能将其插入,就对线路作相应的改变。线路调整过程如表 17—6 所示。

表 17－6

序号	弧	线路与说明	插入该弧的节约值
0		5→1→5,5→2→5,5→3→5,5→4→5,5→6→5,5→7→5,5→8→5,5→9→5,5→10→5	
1	(1,4)	5→1→4→5,5→2→5,5→3→5,5→6→5,5→7→5,5→8→5,5→9→5,5→10→5	21.37
2	(6,8)	5→1→4→5,5→2→5,5→3→5,5→6→8→5,5→7→5,5→9→5,5→10→5	17.71
3	(4,6)	5→1→4→6→8→5,5→2→5,5→3→5,5→7→5,5→9→5,5→10→5	15.48
4	(9,10)	5→1→4→6→8→5,5→2→5,5→3→5,5→7→5,5→9→10→5	15.37
5	(1,6)	点 6 与基点 5 不相邻,不插入	14.59
6	(7,10)	5→1→4→6→8→5,5→2→5,5→3→5,5→9→10→7→5	12.78
7	(8,9)	5→1→4→6→8→9→10→7→5,5→2→5,5→3→5	11.63
8	(8,10)	点 10 与基点 5 不相邻,不插入	11.61
9	(7,9)	点 9 与基点 5 不相邻,不插入	11.10
10	(4,8)	点 8 与基点 5 不相邻,不插入	10.33
11	(1,8)	点 8 与基点 5 不相邻,不插入	8.96
12	(6,9)	点 9 与基点 5 不相邻,不插入	8.68
13	(6,10)	点 10 与基点 5 不相邻,不插入	8.35
14	(1,3)	5→3→1→4→6→8→9→10→7→5,5→2→5	7.21
15	(7,8)	点 8 与基点 5 不相邻,不插入	7.14
16	(3,4)	点 4 与基点 5 不相邻,不插入	6.95
17	(3,6)	点 6 与基点 5 不相邻,不插入	5.06
18	(6,7)	点 6 与基点 5 不相邻,不插入	4.76
19	(1,2)	点 1 与基点 5 不相邻,不插入	4.48
20	(4,9)	点 9 与基点 5 不相邻,不插入	3.85
21	(3,8)	点 8 与基点 5 不相邻,不插入	3.47
22	(4,10)	点 10 与基点 5 不相邻,不插入	3.22
23	(1,9)	点 9 与基点 5 不相邻,不插入	2.60
24	(2,7)	5→3→1→4→6→8→9→10→7→2→5	2.60

当插入弧之后,线路已包含所有要访问的城市,这时算法终止。用该方法得到的线路(图 17－2)是 5→3→1→4→6→8→9→10→7→2→5。

该条线路的总长度 $z=3.61+14.42+8.06+8+5+7+2.83+4.12+11.18+7.07=71.29$。

图 17－2

(2)开始时构成凸包 1－6－8－10－2(图 17－3)，以它为初始线路，然后将不在初始线路上的 3、4、5、7、9 分别与 1、6、8、10、2 五点相连(图 17－4)，考查以 3、4、5、7、9 为角顶，分别以 1－6、6－8、8－10、10－2、2－1 为对边形成的各个角度，由于∠10－7－2 最大，故将点 7 插入在 10 和 2 两点之间，形成新的线路(图 17－5)。

图 17－3

图 17－4

图 17—5

现不在线路上的点为 3、4、5、9，连接 3、4、5、9 与 7 的连线，考查以 3、4、5、9 为角顶，分别以 1—6、6—8、8—10、10—7、7—2、2—1 为对边形成的各个角度，由于 ∠1—4—6 最大，故将点 4 插入在 1 和 6 两点之间，形成新的线路(图 17—6)。

图 17—6

现不在线路上的点为 3、5、9，连接 3、5、9 与 4 的连线，考查以 3、5、9 为角顶，分别以 1—4、4—6、6—8、8—10、10—7、7—2、2—1 为对边形成的各个角度，由于 ∠8—9—10 最大，故将点 9 插入在 8 和 10 两点之间，形成新的线路(图 17—7)。

图 17－7

现不在线路上的点为 3、5，连接 3、5 与 9 的连线，考查以 3、5 为角顶，分别以 1－4、4－6、6－8、8－9、9－10、10－7、7－2、2－1 为对边形成的各个角度，由于∠1－3－2 最大，故将点 3 插入在 1 和 2 两点之间，形成新的线路(图 17－8)。

图 17－8

图 17－9

现不在线路上的点为 5，连接 5 与 3 的连线，考查以 5 为角顶，分别以 1－4、4－6、6－8、8－9、9－10、10－7、7－2、2－3、3－1 为对边形成的各个角度，由于∠3－5－2 最大，故将点 5 插入在 2 和 3 两点之间，形成新的线路(图 17－9)。这就得到了本问题的哈密尔顿回路：5→3→1→4→6→8→9→10→7→2→5，可把它作为本问题的解。该条线路的总长度 $z=3.61+14.42+8.06+8+5+7+2.83+4.12+11.18+7.07=71.29$。

(3)易见，用两种方法得到相同的结果。

小结 一般 TSP 问题还没有多项式算法，对于较大多问题就需要使用启发式方法求解。

◎**17.10** 有一运输问题，它有 3 个重载点和 2 个车场，其运输表如表 17－7 所示。表中小方框内的数字为两点间的车辆空驶距离，1，2 和 3 三项运输业务的重载里程(已将装卸车时间折算在内)分别为 7，8 和 9，其他有关情况如表中所示。此外，要求车辆的每条行车路线总长度(包括重驶、空驶及装卸车所用时间的折算长度)L 在 45～60 之间。试用本章给出的车辆优化调度启发式算法，求出其满意的可接受可行解，并据此排出行车路线。

表 17－7

发空车＼收空车		重载点 1	重载点 2	重载点 3	车场 4	车场 5	发车数
重载点	1	4	12	10	8	10	10
	2	2	8	8	6	10	6
	3	12	4	6	14	2	7
车场	4	6	4	6	M	M	≤4
	5	14	2	8	M	M	≤6
收车数		10	6	7	≤8	≤7	

分析 本题为 VSP 问题，利用表上作业法求解重载点，此问题的算法部分见课本 471 页。

解 (1)首先仅考虑重载点，利用表上作业法求解。各重载点的发车数、收车数以及两点间的空驶里程如表 17－8 所示。

表 17－8

收空车 / 发空车	1	2	3	发车数
1	4	12	10	10
2	2	8	8	6
3	12	4	6	7
收车数	10	6	7	

利用伏格尔法求出初始解。

第一步：分别计算表 17－8 中各行、各列的最小空驶里程和次最小空驶里程的差额，并填入该表的最后列和最下行。

第二步：从行或列差额中选出最大者，选择它所在行或列中的最小元素。同时将空观里程表中第一行、第一列数字划去。

第三步：对未划去的元素再分别计算出各行、各列的最小空驶里程和次最小空驶里程的差额，并填入该表的最右列和最下行，重复第一、二步，直到给出初始解为止。利用位势法进行检验。

检验数均为非负，说明已得到最优解：

$$x_{11}^{(0)}=10,x_{23}^{(0)}=6,x_{32}^{(0)}=6,x_{33}^{(0)}=1,x_{12}^{(0)}=x_{13}^{(0)}=x_{21}^{(0)}=x_{22}^{(0)}=x_{31}^{(0)}=0$$

(2)解的扩展

$$\bar{b}_4=b_4-\sum_{j=1}^{3}x_{4j}^{(0)}=4,\bar{b}_5=b_5-\sum_{j=1}^{3}x_{5j}^{(0)}=6,\bar{b}'_4=b'_4-\sum_{j=1}^{3}x_{i4}^{(0)}=8,$$

$$\bar{b}'_5=b'_5-\sum_{j=1}^{3}x_{i5}^{(0)}=7$$

$$\delta_{11}=\min_{4\leqslant i\leqslant 5}\{c_{i1}\,|\,\bar{b}>0\}+\min_{4\leqslant j\leqslant 5}\{c_{1j}\,|\,\bar{b}'_j>0\}-c_{11}=6+8-4=10,k=4,l=4$$

$$\delta_{23}=\min_{4\leqslant i\leqslant 5}\{c_{i3}\,|\,\bar{b}>0\}+\min_{4\leqslant j\leqslant 5}\{c_{2j}\,|\,\bar{b}'_j>0\}-c_{23}=6+6-8=4,k=4,l=4$$

$$\delta_{32}=\min_{4\leqslant i\leqslant 5}\{c_{i2}\,|\,\bar{b}>0\}+\min_{4\leqslant j\leqslant 5}\{c_{3j}\,|\,\bar{b}'_j>0\}-c_{32}=2+2-4=0,k=5,l=5$$

$$\delta_{33}=\min_{4\leqslant i\leqslant 5}\{c_{i3}\,|\,\bar{b}>0\}+\min_{4\leqslant j\leqslant 5}\{c_{3j}\,|\,\bar{b}'_j>0\}-c_{33}=6+2-6=2,k=4,l=5$$

按 δ_{ij} 的大小由小到大依次对 $x_{ij}^{(0)}$ 进行调整：

$$\begin{cases}x_{32}:=x_{32}^{(0)}-\min\{x_{32}^{(0)},\bar{b}_5,\bar{b}'_5\}=6-\min\{6,6,7\}=0\\x_{52}:=x_{52}^{(0)}+\min\{x_{32}^{(0)},\bar{b}_5,\bar{b}'_5\}=0+\min\{6,6,7\}=6\\x_{35}:=x_{35}^{(0)}+\min\{x_{32}^{(0)},\bar{b}_5,\bar{b}'_5\}=0+\min\{6,6,7\}=6\end{cases}$$

$$\bar{b}'_5=b'_5-\sum_{i=1}^{3}x_{i5}^{(0)}=b'_5-x_{35}^{(0)}=7-6=1$$

$$\begin{cases}x_{33}:=x_{33}^{(0)}-\min\{x_{33}^{(0)},\bar{b}_4,\bar{b}'_5\}=1-\min\{1,4,1\}=0\\x_{43}:=x_{43}^{(0)}+\min\{x_{33}^{(0)},\bar{b}_4,\bar{b}'_5\}=0+\min\{1,4,1\}=1\\x_{35}:=x_{35}^{(0)}+\min\{x_{33}^{(0)},\bar{b}_4,\bar{b}'_5\}=6+\min\{1,4,1\}=7\end{cases}$$

$$\bar{b}_4 = b_4 - \sum_{j=1}^{3} x_{4j}^{(0)} = b_4 - x_{43}^{(0)} = 4 - 1 = 3$$

$$\begin{cases} x_{23} := x_{23}^{(0)} - \min\{x_{23}^{(0)}, \bar{b}_4, \bar{b}'_4\} = 6 - \min\{6,3,8\} = 3 \\ x_{43} := x_{43}^{(0)} + \min\{x_{23}^{(0)}, \bar{b}_4, \bar{b}'_4\} = 1 + \min\{6,3,8\} = 4 \\ x_{24} := x_{24}^{(0)} + \min\{x_{23}^{(0)}, \bar{b}_4, \bar{b}'_4\} = 0 + \min\{6,3,8\} = 3 \end{cases}$$

$$\bar{b}_4 = b_4 - \sum_{i=1}^{3} x_{4j}^{(0)} = b_4 - x_{43}^{(0)} = 4 - 4 = 0, \bar{b}'_4 = b'_4 - \sum_{i=1}^{3} x_{i4}^{(0)} = b'_4 - x_{24}^{(0)} = 8 - 3 = 5$$

$$\begin{cases} x_{11} := x_{11}^{(0)} - \min\{x_{11}^{(0)}, \bar{b}_4, \bar{b}'_4\} = 10 - \min\{10,0,5\} = 10 \\ x_{41} := x_{41}^{(0)} + \min\{x_{11}^{(0)}, \bar{b}_4, \bar{b}'_4\} = 0 + \min\{10,0,5\} = 0 \\ x_{14} := x_{11}^{(0)} + \min\{x_{11}^{(0)}, \bar{b}_4, \bar{b}'_4\} = 0 + \min\{10,0,5\} = 0 \end{cases}$$

(3)解的收缩

因为 $\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=4}^{5} x_{kj}^{(1)} = 4 + 6 = 10 \leqslant 10$，$\sum_{i=1}^{3}\sum_{l=4}^{5} x_{il}^{(1)} = 3 + 7 = 10 \leqslant 10$，故不需进行解的收缩过程。从而得到可行解 $X^{(1)}$，其非零分量为：

$x_{11} = 10 > 0, x_{23} = 3 > 0, x_{24} = 3 > 0, x_{35} = 7 > 0, x_{43} = 4 > 0, x_{53} = 6 > 0$。

以可行解 $X^{(1)}$ 为依据可安排行车路线，限于篇幅，具体步骤略。