

《线性代数与解析几何》期中考试试题 (B)

一 (30 分)、已知点 $A(1, 2, 3)$, $B(2, 1, 4)$, $C(1, 3, 5)$, $D(3, 2, 1)$. 求

1. C, D 所在直线 L 的方程和 B, C, D 所在平面 Π 的方程;
2. $\triangle BCD$ 的面积 S 、 $\angle BCD$ 和四面体 $ABCD$ 的体积 V ;
3. B 到 L 的距离、 A 到 Π 的距离和直线 AD 与 BC 间的距离;
4. 过 A, B, C, D 的球面方程和过 B, C, D 的圆方程;
5. 直线 AD 绕 BC 旋转一周所得曲面的方程并指出曲面的类型.

二 (15 分)、设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

矩阵 X 满足 $X(I - A^{-1}B)^T A^T = I$, 求 X .

三 (15 分)、设 A, B 分别是 $n \times m$ 和 $m \times n$ 矩阵, 若 $D_1 = \det(I_n - AB)$,

$D_2 = \det(I_m - BA)$, $r_1 = r(I_n - AB)$ 和 $r_2 = r(I_m - BA)$ 已知. 求

1. $\det \begin{pmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix}$ 和 $r \begin{pmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix}$;
2. D_1 与 D_2 , r_1 与 r_2 , D_1 与 r_1 以及 D_2 与 r_2 之关系.

四 (20 分)、当 λ, μ 分别取何值时, 线性方程组
$$\begin{cases} \lambda x + \mu y + 2z = 1 \\ (\mu - 1)y + z = 0 \\ \lambda x + \mu y + (1 - \mu)z = 3 - 2\mu \end{cases}$$

有解, 并求出其所有解.

五 (20 分)、计算 n 阶行列式 $D_n = \det \begin{pmatrix} b & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & b \end{pmatrix}$.