

# 中国科学技术大学

## 2018—2019学年第一学期期末试卷

考试科目 时间序列分析 得分 \_\_\_\_\_

所在系 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_

考试时间: 2019年6月27日14:30—16:30

### 一. (32分) 填空题(每题2分,答案请写在答题纸上):

1. 设随机变量 $U$ 与 $V$ 不相关而方差相同均为 $\sigma^2$ , 令

$$X_t = U \cos(\omega t) + V \sin(\omega t), t \in T$$

其中 $\omega(\neq 0)$ 为常数, 则序列 $\{X_t, t \in T\}$ 的自相关函数 $\rho(t, s) =$ \_\_\_\_\_.

2. 设ARMA(2, 1):  $X_t - 0.1X_{t-1} + aX_{t-2} = \epsilon_t - 0.5\epsilon_{t-1}$ , 当 $a$ 满足\_\_\_\_\_条件时, 模型是平稳的.

3. 设MA( $q$ )模型

$$X_t = \epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\epsilon_{t-q}$$

的逆转形式为 $\epsilon_t = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k X_{t-k}$ , 则 $\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k =$ \_\_\_\_\_.

4. 设 $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 是满足平稳可逆的ARMA( $p, q$ )模型

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \mu + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}, \quad \epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

的序列, 则 $X_t$ 的谱密度为\_\_\_\_\_.

5. 若 $Y_t$ 满足 $Y_t = \Phi Y_{t-12} + \epsilon + \theta \epsilon_{t-1}$ ,  $|\Phi| < 1, |\theta| < 1$ , 该模型为一个为季节周期为\_\_\_\_\_的季节模型, 记为\_\_\_\_\_,  $Y_t$ 的方差为\_\_\_\_\_.

6. 为了判断一个平稳序列中是否含有信息, 是否可以继续分析, 需要对该序列进行\_\_\_\_\_检验, 该检验用到的统计量是\_\_\_\_\_分布. 原假设为\_\_\_\_\_.

7. 对于时间序列 $\{X_t\}$ , 如果满足\_\_\_\_\_, 称 $\{X_t\} \sim I(d)$ .

8. 零均值平稳列 $X_t$ 满足\_\_\_\_\_称为非决定性序列, 非决定性序列平稳列满足\_\_\_\_\_称为纯非决定的.

9. 对平稳的AR(2)模型 $X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \epsilon_t$ , 则偏相关系数 $\phi_{11} =$ \_\_\_\_\_,  $\phi_{22} =$ \_\_\_\_\_,  $\phi_{33} =$ \_\_\_\_\_.



二. (24分)简单计算题(每题8分,答案请写在答题纸上)

1. 从AR(2)模型 $X_t = 1.5X_{t-1} - 0.75X_{t-2} + \epsilon_t$ ,  $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ 模拟产生了 $n = 144$ 个数据, 从这组数据计算的 $\hat{\gamma}(0) = 8.434$ ,  $\hat{\rho}(1) = 0.834$ ,  $\hat{\rho}(2) = 0.476$ , 求 $a_1, a_2$  及 $\sigma^2$ 的估计以及 $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T$ 估计的协差阵的渐近估计.
2. 考虑一随机游走序列 $X_t = c + X_{t-1} + \epsilon_t + \nabla\eta_t, t \geq 1$ , 其中 $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2), \eta_t \sim WN(0, \sigma_\eta^2), \mathbb{E}\epsilon_t\eta_s = 0$  对任意的 $t, s$ .  $y_0, \eta_0$ 为初值. 求 $X_t$ 的均值和协方差.
3. 对任意一个简单季节模型序列,

$$X_t = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-12}, \quad \epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2),$$

求它的自相关系数.

三. (44分) 计算题(每题答案请写在答题纸上):

1. 考虑如下的时间序列模型MA(2)

$$Y_t = 40 + \epsilon_t - 0.6\epsilon_{t-1} + 0.8\epsilon_{t-2}, \quad \epsilon_t \sim N(0, 20),$$

$$\epsilon_t = 2, \epsilon_{t-1} = -4, \epsilon_{t-2} = -6.$$

- (1) 预测未来2期的值.
  - (2) 求出未来两期预测值的95%的置信区间.
  - (3) 求出 $y_t$ 的谱密度函数.
2. 设 $Y_t$ 为 $t$ 时段股票的收益,  $X_t$ 为这个时段的通货膨胀率, 假定GARCH-M模型为 $Y_t = 0.05 + 0.3X_t + 0.2h_t + \epsilon_t$ , 其中 $\epsilon_t = v_t\sqrt{1 + 0.05\epsilon_{t-1}^2}$ ,  $h_t = \text{Var}(\epsilon_t|\epsilon_{t-1}, \dots)$  和 $v_t$  为相互独立的 $N(0,1)$ 随机变量. 求
    - (1)  $E(Y_t|X_t = 0.1, \epsilon_{t-1} = 0.6)$ 为多少?
    - (2)  $\text{Var}(Y_t|X_t = 0.1, \epsilon_{t-1} = 0.6)$ 为多少?
    - (3)  $Y_t$ 在给定 $X_t$ 及 $\epsilon_{t-1}$ 下的分布是否为正态? 为什么?
  3. 对ARMA( $p, q$ )序列

$$X_t = a_1X_{t-1} + \dots + a_pX_{t-p} + \epsilon_t + b_1\epsilon_{t-1} + \dots + b_q\epsilon_{t-q}, \quad \epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2),$$

- (1) 令 $m = \max\{p, q\}$

$$Y_t = \begin{cases} X_t/\sigma, & t = 1, \dots, m \\ (X_t - aX_{t-1} - \dots - a_pX_{t-p})/\sigma, & t = m+1, \dots, \end{cases}$$

求解 $\mathbb{E}Y_t$ .

- (2) 令 $\{\eta_t\}$ 是和 $\{\epsilon_t\}$ 独立的白噪声 $WN(0, \nu^2)$ , 试问

$$Z_t = X_t + \eta_t$$

还是ARMA序列吗? 如果是, 阶数是多少?