

电磁学与电动力学思考题

Francis

2025 年 1 月 17 日

思考题

第一章——电磁现象的普遍规律

1. 电磁学与电动力学课程的差别在哪里?
2. 若磁场有源, 或者说有磁荷 (磁单极子), 麦克斯韦方程应该如何改造?

注意区分和磁标势法的区别, 磁标势法仍然认为

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

加入磁荷后考虑

$$\nabla \cdot \vec{J}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0$$

考虑 $D \sim B, E \sim H$, 对称写出

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_e, \quad \nabla \times \vec{E} = -\vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = \rho_m, \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_e + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

3. 麦克斯韦方程形式上有三种写法: (1) 将电磁场的空间微分项置于方程左边, 其它在右边; (2) 将电磁场的时间偏微分项置于方程左边, 其它在右边; (3) 将电磁场各项置于方程左边, 源项在右边。你感觉这三种写法有什么不同?

4. 确定区域内, 始终不存在电磁场的条件是什么?

确定区域内始终不存在电磁场的条件是该区域内无自由电荷和无电流密度

5. 电势值在边界连续的理由是什么? 可以不连续吗?

参考作业 2.17。考虑 Maxwell 方程在边界处的应用, 记边界处电荷密度 σ

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, E_{2t} = E_{1t}$$

利用

$$E = -\nabla\varphi$$

将边界条件改写为电势条件

$$-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \varphi_1 = \varphi_2$$

固电势连续。

6. 为什么将 $E \cdot J$ 称为焦耳（加热）功率密度？

考虑电磁场对电荷作用力的力密度

$$\vec{f} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

电磁场对电荷做功

$$P = \vec{f} \cdot \vec{v} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

第二章——静电场

7. 静电问题中，导体是否可以完全等效于介电常数无穷大的介质？如果是，说明理由？

是。导体相当于介电常数趋于无穷时的物理意义。即当介电常数趋于无穷时其内部电场为 0，符合导体模型性质。

8. 为什么 ω 趋于无穷时， ϵ 趋近于 ϵ_0 ， μ 趋近于 μ_0 ？

当电磁波的频率 ω 趋于无穷时，介质中的响应速度不足以跟上电场和磁场的快速变化，因此介电常数和磁导率趋向于它们在真空中的值，即 $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ 和 $\mu \rightarrow \mu_0$ 。

9. 参照球坐标的分离变量法，请思考直角坐标和柱坐标情况下拉普拉斯方程的分离变量解。

参考《数学物理方程》课程讲义

10. 格林函数与什么相关？或者说什么不同导致格林函数不同？

① 格林函数与边界形状和边界条件相关。

② 与空间的性质有关。例如三维无界空间和二维无限大平面。其拉普拉斯方程形式不同，对应格林函数互易

③ 与基本方程的形式有关。例如拉普拉斯方程，亥姆霍兹方程等。

11. 一个电荷体系可以用电荷密度分布来表述（刻画），也可以用系列的位于某点的“电多级子”来表述，请考虑两者的其等效性。

静电条件下，有限限度的连续分布电荷体系可以通过电势的多级展开视为电多级子共同产生。

第三章——静磁场

12. 规范应该如何给才有效？你能给出一个不同于库仑规范的合理规范吗？能再给一个吗？

规范要将四维矢量的自由度减少至和光子的自由度相同才有效

① 广义库伦规范

$$\nabla \cdot \vec{A} = \text{const}$$

② 洛伦兹规范

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

13. 静磁矢势各分量均满足泊松方程，各分量之间通过什么条件相联系？

考虑静磁矢势各分量均满足泊松方程，固符合库伦规范

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

14. 磁矢势在边界连续, 但若边界存在电流, 平行磁场可以不连续, 这有矛盾吗? 界面电流与矢势的哪个分量相关?

不矛盾。 \vec{A} 连续, 但是对 \hat{z} 方向微分不连续, 因此切向 A 连续不能保证 B 切向一定连续。

15. 由麦克斯韦方程可以导出库仑定律和毕 - 萨定律, 请思考。

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{r})$$

推导出库仑定律

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

推导出毕-萨定律

16. 超导体与理想导体的差别在哪里?

- ① 超导体真实存在; 理想导体是理想模型。
- ② 超导体有迈纳斯效应, 其内部磁场强度恒定为 0 (可视为 $\mu = 0$), 与其所经历的过程无关; 理想导体具有磁通冻结效应, 内部磁通量保持不变
- ③ **说明:** 超导体和理想导体内部电场均为 0, 且电阻趋近于 0。

17. 伦敦二定律分别描述了超导体的什么性质?

① 伦敦第一方程:

$$\frac{\partial \vec{J}_s}{\partial t} = \frac{n_s e^2}{m_s} \vec{E}$$

描述了恒定情形下超导的电流全部来自超导电子 s . 即超导效应 (无电阻效应)。

② 伦敦第二方程:

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{\mu_0 n_s e^2}{m_s} \vec{B}$$

描述了超导内部的抗磁性。超导电流主要分布于 $\sim \sqrt{\frac{m_s}{\mu_0 n_s e^2}} = \lambda_L$ 的表面处。在其内部产生的磁场与外场抵消, 从而宏观尺度下显示出抗磁性 (内部磁场为 0)。

18. 请思考在有磁场情况下, 物体降温达超导状态过程中物体内部磁场的变化。

磁场从不为 0 逐渐降低为 0。

第四章——电磁波的传播

19. 介质中电场、磁场方程能否写成波动方程? 如果能, 如何写? 如果不能, 为什么?

① 不能。通过介质中的麦克斯韦方程: 如果要继续写成波动方程形式, 则要求导磁率和介电常数均匀稳定。但由于介质对外界不能瞬时响应——介质的响应会有延时, 并且不同时间的作用会累加, 因此响应的结果与过程有关, 不可能写成瞬时响应的形式。

② 一般介质具有色散性质, 即介质对电磁场的响应性质与电磁场的变化频率有关

③ 定态条件可以预测振幅和相位等参量, 因此波动方程可以在定态条件下成立

Instruction: 定态条件是指时间部分为简谐项 $e^{-i\omega t}$ 且可以和空间部分分离

20. 波动方程有平面波解，这是在什么边界条件和初始条件情况下的解？如何考虑边界条件及初始条件？

① 由于应用了介电常数和磁导率不变的假设，同时未考虑边界效应，因此平面电磁波是对应均匀介质中，无限大空间的麦克斯韦方程的解。

② 实际情况下一方面要求均匀区域的线度远大于波长，可以应用几何光学近似和 *WKB* 近似，另一方面要求边界无反射。

21. 平面电磁波的能量密度包含了介质的极化、磁化能量。你能计算出极化、磁化能量大小吗？

$$w_p = \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E}, w_m = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{M} \cdot \vec{H}$$

22. 在普通介质中，电效应远大于磁效应，为什么？

从洛仑兹力的表达式可以知道，若波的电、磁场是相当的，则当带电粒子的运动速度远小于光速时，粒子对磁场的响应可以忽略。

23. 导体内部可以存在什么样的定态电磁波？试分析波长、衰减特征长度与相位传播方向和幅度衰减方向的关系。

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\vec{\alpha} \cdot \vec{x}} \cdot e^{i\vec{\beta} \cdot \vec{x}}$$

考虑衰减特征长度

$$\delta = \frac{1}{\alpha}$$

$\vec{\alpha}$ 的方向代表波衰减的方向； $\vec{\beta}$ 的方向代表等相位面推进的方向。

24. 导体中电磁场以磁能为主，为什么？

导体中传导电流远远大于位移电流

$$\sigma \vec{E} \gg -i\omega \epsilon \vec{E}$$

即近似条件

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1$$

在导体近似条件下

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega \mu}} e^{i\frac{\pi}{4}} \hat{z} \times \vec{E}$$

进一步得到

$$\frac{w_B}{w_E} = \frac{\mu H^2}{\epsilon E^2} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1$$

因此导体电磁能以磁能为主

25. 试讨论麦克斯韦方程中两个散度方程的冗余性。

在定态的情况下，麦克斯韦方程组的两个散度方程可以由两个旋度方程加上电荷守恒定律直接给出。其边界条件同样如此，若平行方向电磁场的边界条件满足，则垂直方向的边界条件自动成立。

26. 试给出导体表面为平面、柱面、球面情况下电场法向分量的边界条件。

$$\frac{\partial E_n}{\partial n} = 0$$

27. 介质中的电磁波与波导中的电磁波群速度均小于真空中光速，物理原因何在？请思考其共同点与不同点。

波导内部的模式互相叠加和影响导致群速度低于光速（不同频率电磁波叠加形成的波包。）

介质中波速变慢是因为介质在电磁场中极化，偶极子在电磁场作用下运动产生一定延迟。

28. 有限截面确定传播方向电磁波最简单解是高斯光束，思考一下还有什么样稍复杂的解？考虑横向模式。

不做要求。

29. 集体效应是等离子体的根本属性，你认为主要理由是什么？

等离子体主要受长程的电磁相互作用力。

第五章——电磁波的辐射

30. 思考何谓规范，规范变换，规范不变性。再进一步，何谓规范场？

① 变换，映射，将一个集与另一个集元素相联系的规律（操作，动力过程）称为规范变换

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

② 势在作规范变换下保持物理量不变的性质—规范不变性

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \vec{A}'$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi' - \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}$$

③ **规范场**：在基本相互作用中，规范不变性是决定相互作用形式的基本原理，传递这些相互作用的场称为规范场。

31. 你觉得完全可以用势（ A, φ ）描述电磁场吗？即根本不用有电场、磁场的概念？

不可以。 \vec{E}, \vec{B} 是具有真实物理意义的场。而 \vec{A}, φ 是引入的辅助量，经典体系下不具有明确现实物理意义。（ \vec{E}, \vec{B} 可观测且唯一， \vec{A}, φ 可规范变换）

32. 库仑规范和洛伦兹规范各有什么好处？还可以有新的规范吗？请试一试。

① 库仑规范使得标势满足的方程与静电场相同

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

同时电场的纵场完全由 φ 描述，横场部分完全由 \vec{A} 描述

② 洛伦兹规范使得 \vec{A} 和 φ 的方程相互独立（电荷产生标势波动，电流产生矢势波动），且具有相同形式。且在洛伦兹规范下可引入四维电磁势矢量和电流密度矢量将达朗贝尔方程方程转化为相对论协变形式。

33. 思考一维波动方程的平面波解和行波解的关系。

一维波动方程的平面波解叠加后可表示向前、向后运动的行波解（平面波是完备的傅里叶变换基，行波解是平面波解的叠加）。

34. 请斟酌本节中电荷守恒定律的表达形式。

$$\nabla' \vec{J}(\vec{x}', t') + \frac{\partial}{\partial t'} \rho(\vec{x}', t') = 0$$

对场点的微分既对 r 作用，也对 $t' = t - r/c$ 作用，但对 \vec{x}' 不作用。换成对电荷点的微分后，对这三个变量都有作用，因此仅将其对电荷点的作用部分扣除即可，这时不对 t' 作用。

电荷守恒： \vec{x}' 处在 t' 时刻电荷守恒。

35. 考虑在时间任意变化情况下辐射场的多级展开。

36. 思考小孔衍射问题中半无限大面上贡献为零是如何得出的。

ψ 正比于 r^{-1} ，空间场积分式中正比于 r^{-3} ，故在半无限大平面上积分为零。

37. 请考虑电磁场角动量密度及角动量流。

回顾动量流密度

$$\vec{g} = \varepsilon_0(\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

角动量密度

$$\vec{l}_{em} = \vec{r} \times \vec{g} = \varepsilon_0 \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})$$

角动量流密度张量

$$\overleftrightarrow{M} = -(\overleftrightarrow{T} \times \vec{r})$$

第六章——狭义相对论

38. 为什么是光速不变？光速不变确切含意是什么？

原因：相互作用传播速度是有限的，即存在最大值。根据相对性原理，这一最大值与参考系无关，因此最大相互作用速度是不变的。光速具有此特征，理论和实验似乎都表明了这一点。

含义：无论观察者的相对运动状态如何，光速在真空中都是相同的。

39. 思考标、矢、张量的含意，矢量是否是三（四）个标量？为何以坐标变换的联系来划分标、矢、张量？

40. 线性变换有几类？惯性系变换如何同四维空间的旋转变换相联系？

线性变换包含四类变换：平移变换、旋转变换、尺度变换、反射变换。

由于间隔不变，不考虑尺度变换。平移变换只改变坐标原点的位置，不产生实质的作用，也不需考虑。反射变换对自己变到自己（即相对速度为零的参考系之间变化不产生实质性结果）参考系这种事情不自洽，也不应采用。因此线性变换等价于旋转变换。

41. 讨论低速情况下相对论的必要性，并非只有在高速情况下才需要相对论。

电磁场理论：麦克斯韦方程组在特殊相对论的框架内具有洛伦兹不变性。这种理论框架确保了电磁现象在不同参考系下的一致性，即使是在低速情况下。

42. 为什么说在相对论情况下，刚体不存在，基本粒子必须是点粒子？

① 刚体的含义要求部分之间不发生形变。一方面力作用时，刚体要求瞬时传至各部分，故与相互作用传播速度有限相冲突；另一方面旋转的刚体圆盘，由于洛伦兹收缩，直径与周长之比小于 π ，产生矛盾，刚体不存在。

② 基本粒子不能存在独立部分，要求为“刚体”，既然刚体不存在，基本粒子必须是点粒子。

43. 从电磁场变换关系中，我们看到了磁场可以转换为电场，即楞次实验定律所表述的内容；同时电场也可以转换为磁场，但为什么没有相应的实验定律？

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

电生磁现象在低速情况下可以忽略。

44. 电磁场只有两个不变量吗？如何证明？

45. 物理量必须是四度张量（包括标量、矢量），物理规律必须表达成四度张量方程，为什么？

46. 从最小作用量原理出发，导出电磁场运动方程的过程中，还有哪些原理性假定？

电荷守恒：

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

第七章——带电粒子与电磁场的相互作用

47. 带电粒子 t 时刻在远处产生的电磁场仅与该粒子 t^* 时刻的状态相关？与其它时刻状态无关，这奇怪吗？如果在介质中，还可以用这种一一对应的推迟法吗？

仅与 t^* 相关。任何频率的定态电磁波均为光速（由麦克斯韦方程电磁场波动方程推导），因此瞬态的电荷扰动引起的电磁脉冲传播速度也是光速，即 (r, t) 的电磁场只与 (r^*, t^*) 有关，并且相联系的速度是光速。介质中推迟势理论不成立。

48. 如何理解粒子的加速过程可以产生辐射，而匀速过程则必然没有？非加速运动粒子产生辐射的原因？

① 加速运动电荷存在方向径向向外的能流分量，向外总辐射不为零。而真空中匀速运动的点电荷能流沿角向，无辐射。

② **切伦科夫辐射**：介质中粒子运动超过介质中光速时，带电粒子激发介质的本征模式

③ **渡越辐射**：带电粒子穿越边界时，伴随其运动的自场会发生变化，导致辐射

49. 请思考同步回旋辐射的原理及其频谱。

① **原理**：加速度垂直于速度方向的辐射原理。

② 频谱是回旋周期的傅立叶变换谱。

50. 如何理解电子经典半径是电子电磁相互作用等效线度？

考虑电子汤姆逊散射截面

$$\sigma_T = \frac{e^4}{6\pi^2 \epsilon_0^2 m_e^2 c^4} = \frac{8\pi}{3} r_e^2$$