数 字 电 路

Digital Circuits

03_逻辑代数基础(1)

张俊霞
zjx@ustc.edu.cn

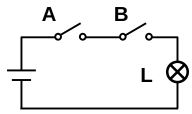
内容提纲

逻辑代数基本概念

Geroge Boole

- 逻辑代数，也称布尔代数，是分析和设计数字电路的数学基础
- 逻辑变量
  - 取值只有0和1两个值，又称二值变量
  - 0，1不代表数量大小，而是表示完全对立的逻辑状态
- 逻辑运算
  - 基本逻辑运算：与 、或 、非
  - 常用复合逻辑运算：与非、或非、异或、同或
- 逻辑函数
  - 描述输入逻辑变量和输出逻辑变量之间的因果关系
  - 表示方法：逻辑表达式、真值表、逻辑图、波形图、卡诺图、硬件描述语言表示法

基本逻辑运算—与

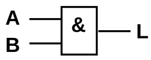


- 与逻辑关系
  - 条件全部具备，结果才发生
- 与逻辑真值表

A	B	L
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

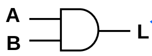
特点：
全1得1
有0得0

- 与逻辑符号
  - 能实现与运算的逻辑电路称为与门



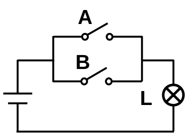
- 与逻辑表达式
  - L=A•B=AB

输入变量



输出变量

基本逻辑运算—或

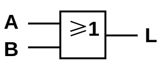


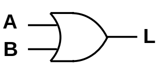
- 或逻辑关系
  - 条件之一具备，结果就发生
- 或逻辑真值表

A	B	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

特点：
有1得1
全0得0

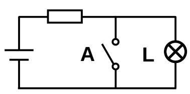
- 或逻辑符号
  - 能实现或运算的逻辑电路称为或门





- 或逻辑表达式
  - L = A+B

基本逻辑运算—非

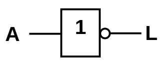


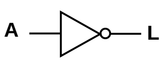
- 非逻辑关系
  - 条件不具备，结果发生
  - 条件具备，结果不发生
- 非逻辑真值表

A	L
0	1
1	0

特点：
取反

- 非逻辑符号
  - 能实现非运算的逻辑电路称为非门





- 非逻辑表达式
  - L = $\overline{A}$

A和$\overline{A}$分别称原变量和反变量

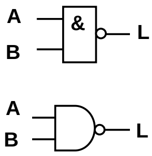
常用复合逻辑运算—与非

- 与非逻辑表达式 $L = \overline{AB}$
- 与非逻辑真值表

A	B	L
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

特点：
全1得0
有0得1

- 与非逻辑符号



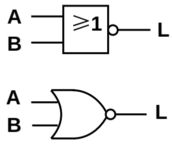
常用复合逻辑运算—或非

- 或非逻辑表达式 $L = \overline{A+B}$
- 或非逻辑真值表

A	B	L
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

特点：
有1得0
全0得1

- 或非逻辑符号



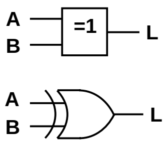
常用复合逻辑运算—异或

- 异或逻辑表达式 $L = \bar{A}B + A\bar{B} = A \oplus B$
- 异或逻辑真值表

A	B	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

特点：
不同得1
相同得0

- 异或逻辑符号



常用复合逻辑运算—同或

- 同或逻辑表达式 $L = \bar{A}\,\bar{B} + AB = \overline{A \oplus B}$

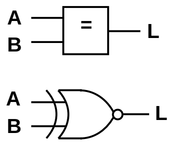
$= A \odot B$

- 同或逻辑真值表

A	B	L
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

特点：
相同得1
不同得0

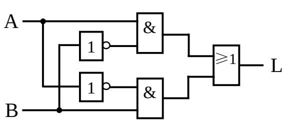
- 同或逻辑符号



逻辑函数表示方法

- 逻辑表达式
  - 用与/或/非运算式表示逻辑运算关系
- 真值表
  - 用表格列出输入和输出间的对应关系
- 逻辑图
  - 用逻辑图形符号表示逻辑运算关系
- 波形图
  - 反映输入和输出波形变化的图形

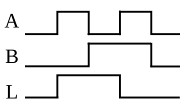
$L = f(A,B) = A\bar{B} + \bar{A}B$



逻辑图

真值表

A	B	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



波形图

逻辑代数基本定律

- 0—1律：$A \cdot 0=0$, $A \cdot 1 = A$ ； $A+1=1$, $A+0=A$
- 重迭律：$A \cdot A=A$ ； $A+A=A$
- 互补律：$A \cdot \bar{A}=0$ ； $A+\bar{A}=1$
- 交换律：$A \cdot B= B \cdot A$ ； $A+B=B+A$
- 结合律：$A(BC)=(AB)C$ ； $A+(B+C)=(A+B)+C$
- 分配律：$A(B+C)=AB+AC$ ； $A+BC=(A+B)(A+C)$
- 反演律：$\overline{A+B}=\bar{A}\cdot\bar{B}$ ； $\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$ 德.摩根定理
- 还原律：$\bar{\bar{A}} = A$

示例—基本定律的证明

证明： $\overline{A+B} = \bar{A}\,\bar{B}$， $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$

真值表

A　B	$\bar{A}$　$\bar{B}$	$\overline{A+B}$	$\bar{A}\,\bar{B}$	$\overline{AB}$	$\bar{A}+\bar{B}$
0　0	1　1	$\overline{0+0}=1$	1	$\overline{0\cdot 0} = 1$	1
0　1	1　0	$\overline{0+1}=0$	0	$\overline{0\cdot 1} = 1$	1
1　0	0　1	$\overline{1+0}=0$	0	$\overline{1\cdot 0} = 1$	1
1　1	0　0	$\overline{1+1}=0$	0	$\overline{1\cdot 1} = 0$	0

等式两边对应的真值表相同，故等式成立

逻辑代数若干常用公式

$AB+A\bar{B} = A$

$A+AB = A$

$A+\bar{A}B = A+B$

$AB+\bar{A}C+BC = AB+\bar{A}C$

证明： $A+\bar{A}B$

$= (A+\bar{A})(A+B)$

$= 1\bullet (A+B)$

$= A+B$

证明： $AB+A\bar{C}+BC$

$=AB+\bar{A}C+(A+\bar{A})BC$

$=AB+\bar{A}C+ABC+\bar{A}BC$

$=AB(1+C)+\bar{A}C(1+B)$

$=AB+A\bar{C}$

逻辑代数基本规则—代入规则

- 代入规则：在任意一个包含某变量**A**的逻辑等式中，如果用一个函数代替等式中所有**A**，则所得等式仍然成立
- 代入规则可以扩展基本定律的应用范围

例，用**B+C**代替等式 $\overline{A+B} = \bar{A}\,\bar{B}$ 中**B**，得

$$\overline{A+(B+C)} = \bar{A}\;\overline{B+C} = \bar{A}\;\bar{B}\;\bar{C}$$

由此反演律可推广到n个变量：

$$\overline{A_1 \bullet A_2 \bullet \ldots \bullet A_n} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \ldots + \bar{A}_n$$

$$\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \bar{A}_1 \bullet \bar{A}_2 \bullet \ldots \bullet \bar{A}_n$$

逻辑代数基本规则—反演规则

- 反演规则：对于任意逻辑表达式**L**，若将**L**中所有运算符、常量及变量作如下变换

•	+	0	1	原变量	反变量
↓	↓	↓	↓	↓	↓
+	•	1	0	反变量	原变量

则所得结果就是**L**的反函数 $\bar{L}$

- 求反函数时，注意保持原函数的运算次序,即先与后或，必要时适当地加入括号

示例—求反函数

1、 $L = A\,\bar{B} + \bar{A}\,B$

$\bar{L} = (\bar{A} + B)(A + \bar{B})$

2、 $L = A\bar{B} + \overline{(A+C)\,B} + \bar{A} \bullet \bar{B} \bullet \bar{C}$

$\bar{L} = (\bar{A}+B) \bullet \overline{\bar{A} \bullet \bar{C} + \bar{B}} \bullet (A+B+C)$

$\bar{L} = (\bar{A}+B) \bullet (A+C) \bullet B \bullet (A+B+C)$

逻辑代数基本规则—对偶规则

- 对于任意逻辑表达式**L**，若将**L**中所有运算符和常量作如下变换：

•	+	0	1
↓	↓	↓	↓
+	•	1	0

则所得新的逻辑表达式即为**L**的对偶式**L’**

- 对偶规则：当某个逻辑恒等式成立时，则该恒等式两侧的对偶式也相等
- 利用对偶规则，从已知公式可以得到更多公式

例，$A(\bar{A} + B) = AB \;\Rightarrow\; A + \bar{A}B = A + B$