复变函数A

授课老师　李书敏

为什么学习复变函数?

1. 会复习到《微积分》和《线性代数》的知识，
巩固所学，增长数学修养，

- 可应用于计算一些复杂的广义积分.

如 $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax \, \mathrm{d}x}{x^2+b^2}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+x^2+1}{(x^2+2)^2} \mathrm{d}x$, $\int_0^{\pi} \frac{\cos 2x}{3-2\cos x} \mathrm{d}x$, $\int_0^{+\infty} \sin x^2 \, \mathrm{d}x$, ...

2. 为后续课程(如《数理方程》)打基础.

3. 在科学研究和各行各业中有广泛的实际应用，如

- 空气动力学
- 流体力学
- 电磁场理论
- 热学
- 地球物理学
- ……

复变函数的主要内容

1 复数和平面点集　　2 复变数函数及其解析性质☆

3 复变函数的积分表示☆☆　4 调和函数☆

5 解析函数的级数展开☆☆　6 留数及应用☆☆

7 解析开拓☆　　8 保形变换及其应用☆☆

9 Laplace变换☆

第一章 复数和平面点集

1.1 复数

引进虚单位 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$， $\mathrm{i}^2=-1$. ★★★

规定：i能和任意实数进行运算，服从原实数的基本运算法则.

• 定义：称任意由有序实数对(x,y)确定的数 $z=x+\mathrm{i}\,y$为复数.

$x,y\in\mathbb{R}$， $\mathbb{R}$：实数域.

x： z的实部
记作： $x=\mathrm{Re}\,z$

y： z的虚部
记作： $y=\mathrm{Im}\,z$

$x^2+1=0$有两个解：$x_1=\mathrm{i}$， $x_2=-\mathrm{i}$. ★★

• 当 $\mathrm{Im}\,z=0$ 时， $z=x$ 是实数.

• 当 $\mathrm{Re}\,z=x=0$, $\mathrm{Im}\,z=y\neq 0$ 时， $z=\mathrm{i}\,y$ 称为纯虚数.

今后记$z = x + \mathrm{i}\, y,\ z_1 = x_1 + \mathrm{i}\, y_1,\ z_2 = x_2 + \mathrm{i}\, y_2,$

$x, y, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$.

- 复数相等:

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} x_1 = x_2, & \text{(实部与实部相等)} \\ y_1 = y_2. & \text{(虚部与虚部相等)} \end{cases} \quad \text{同时成立.}$$

- 共轭: $z = x + \mathrm{i}\, y$ 与 $\bar{z} = x - \mathrm{i}\, y$ 相互共轭.

共轭复数：实部相同，虚部绝对值相等符号相反.

$$\boxed{z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z};}$$

复数的四则运算

$z_1 = x_1 + \mathrm{i}\, y_1,\ z_2 = x_2 + \mathrm{i}\, y_2,\quad \left(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2 \in \mathbb{R}\right).$

- 和：$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2)$,

  差：$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2)$.

- 积：$\boxed{z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + y_1 x_2)}$ 建议记住

推导：因$\mathrm{i}^2 = -1$且i能和任意实数运算，服从基本运算法则，

故 $z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}\, y_1)(x_2 + \mathrm{i}\, y_2)$ ★★★★★

$$= x_1 x_2 + \mathrm{i}\, x_1 y_2 + \mathrm{i}\, y_1 x_2 + \mathrm{i}^2\, y_1 y_2$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + y_1 x_2).\quad \#$$

注意：一般情形下(如$y_1 y_2 \neq 0$ 时)，$z_1 z_2 \neq x_1 x_2 + \mathrm{i}\, y_1 y_2$.

$\boxed{z = x + \mathrm{i}\, y \text{ 与 } \overline{z} = x - \mathrm{i}\, y \text{ 相互共轭.}}$

- 积：$\boxed{z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2)}$
- $z\bar{z}=(x+\mathrm{i}\,y)(x-\mathrm{i}\,y)=x^2-\mathrm{i}^2y^2=x^2+y^2.$

$\boxed{\mathrm{i}^2=-1}$

记：$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$，称为z的**模.**

$$\boxed{z\bar{z}=|z|^2=x^2+y^2.}$$ ★★★★★

由$|x|\le\sqrt{x^2+y^2}$，$|y|\le\sqrt{x^2+y^2}$知

$$\boxed{|\mathrm{Re}\,z|\le|z|,\quad|\mathrm{Im}\,z|\le|z|}$$ ★★★★★

背熟

$\boxed{i^2=-1}$ 设$z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2,\ (x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2\in\mathbb{R})$.

积：$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2)$

商：根据分子分母同时乘以分母的共轭使分母实数化.

$z_2\neq 0$时，$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\dfrac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{|z_2|^2}$ 记住 ★★★★★

$$=\frac{\{x_1x_2-y_1(-y_2)\}+i\{x_1\cdot(-y_2)+x_2y_1\}}{x_2^2+y_2^2}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.\quad \#$$

积：$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$

$z_2\neq 0$时，$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}=\dfrac{(x_1+\mathrm{i}\,y_1)(x_2-\mathrm{i}\,y_2)}{|z_2|^2}=\cdots$

复数的运算性质P2 熟背

(1)交换律 $z_1+z_2=z_2+z_1$， $z_1z_2=z_2z_1$;

(2)结合律：$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$,

$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$;

(3)乘法分配律 $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

- $z_1z_2=0\Leftrightarrow z_1=0$或$z_2=0$. (例1(P3),参见此PPT第34页.)
- 复数不能比较大小. ★★★

- $z_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$或$z_2 = 0.$ ★★★★★

(参见P3例1.)

证明：1) $\Leftarrow$ 不妨设$z_1 = 0$，则$z_1 z_2 = (0 + i\,0)(x_2 + i\,y_2) = 0.$

2). $\Rightarrow$. 若$z_1 z_2 = 0$, 且$z_2 \neq 0$，由1)知

$$0 = 0 \cdot z_2^{-1} = (z_1 z_2) \cdot z_2^{-1} = z_1 (z_2 \cdot z_2^{-1}) = z_1 \cdot 1 = z_1.$$

同理，若$z_1 z_2 = 0$，$z_1 \neq 0$，则 $z_2 = 0.$ #

1.1.2 共轭复数

$z = x + \mathrm{i}y$ 与 $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$ 相互共轭.

运算性质P3: 熟背

1) $\bar{\bar{z}} = z$;

2) $z + \bar{z} = 2x = 2\mathrm{Re}\,z$, $z - \bar{z} = 2y\mathrm{i} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z$,

$$x = \mathrm{Re}\,z = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad y = \mathrm{Im}\,z = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}};$$ ★★★

3) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$;

4) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$; $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

5) $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2 = (\mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2$, $|z| = |\bar{z}|$;

例5(P5) $\left|z_1+z_2\right|^2=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+2\operatorname{Re}\left(z_1\bar{z}_2\right).$

证明：$\left|z_1+z_2\right|^2=\left(z_1+z_2\right)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)$

$=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+\left(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\right)=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+2\operatorname{Re}\left(z_1\bar{z}_2\right).$

例4(P 5). 实系数的多项式的根共轭存在.

证明：设 $P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_{n-1}z+a_n,$

$$a_j\in\mathbb{R},\ j=1,2,\cdots n.$$

设z_0是$P(z)$的一个根，则$P(z_0)=0,$

下面只需证明$P(\overline{z}_0)=0.$

因$a_j\in\mathbb{R}$，故$a_j=\overline{a}_j$, $j=1,2,\cdots n.$

故$P(\overline{z}_0)=\overline{z}_0{}^n+a_1\overline{z}_0{}^{n-1}+a_2\overline{z}_0{}^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\overline{z}_0+a_n$

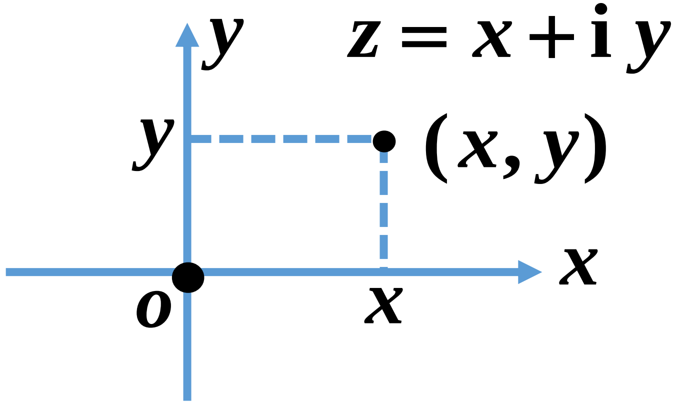
$$=\overline{z}_0{}^n+\overline{a}_1\overline{z}_0{}^{n-1}+\overline{a}_2\overline{z}_0{}^{n-2}+\cdots+\overline{a}_{n-1}\overline{z}_0+\overline{a}_n$$

$$=\overline{z_0{}^n+a_1z_0{}^{n-1}+a_2z_0{}^{n-2}+\cdots+a_{n-1}z_0+a_n}=\overline{P(z_0)}=0.\ \#$$

1.1.3 复数的几何表示

任一复数$z = x + \mathrm{i}\, y\ (x, y \in \mathbb{R})$，可用

平面上在直角坐标系Oxy下坐标为(x, y)的点与之对应，对应是一对一的.



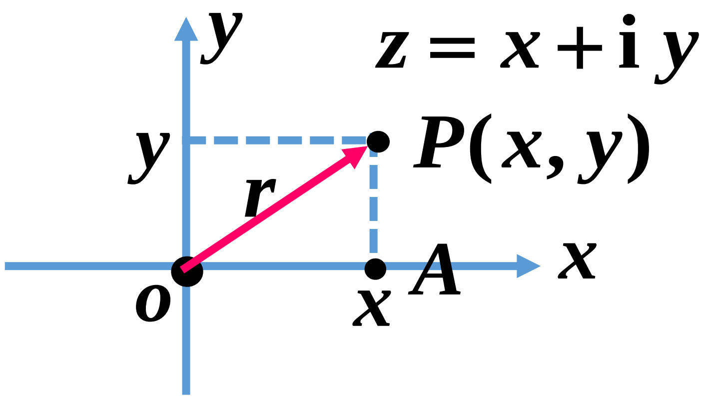
用来表示复数的平面叫复平面，

称横轴叫实轴或x轴，纵轴叫虚轴或y轴.

复数的向量表示:

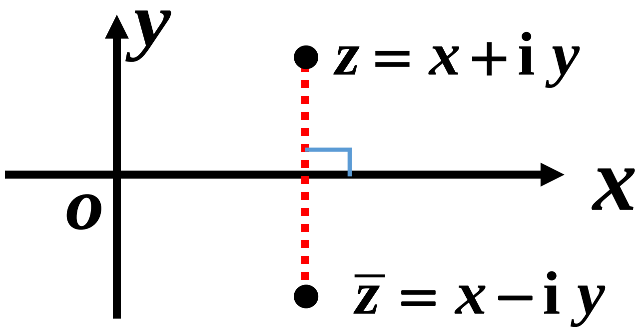
复数 $z=x+\mathrm{i}\,y(x,y\in\mathbb{R})$

可以用由原点指向点(x,y) 的向量$\overrightarrow{OP}$表示. ★★★



$$\left|\overrightarrow{OP}\right|=r=\sqrt{x^2+y^2}=|z|.$$

共轭几何含义



z 和 $\bar{z}$ 关于实轴对称.

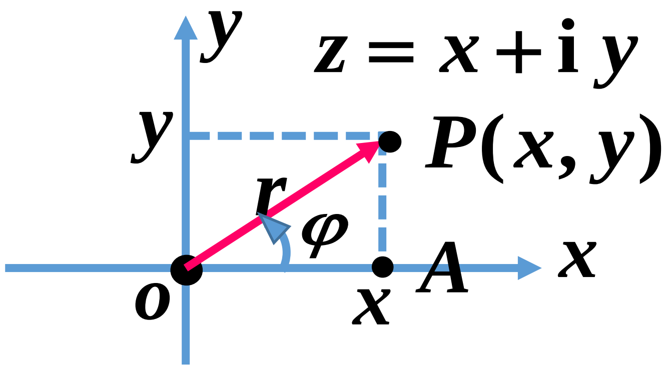
★★★

复数辐角的定义

当$z \neq 0$时，$z = x + \mathrm{i}\,y$在直角坐标下对应的点(x, y),

也可用极坐标(r, φ)表示：$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$,

φ是正向x轴到向量$\overrightarrow{OP}$的夹角,$\tan\varphi = \dfrac{y}{x}$.



称 φ 是 $z = x + \mathrm{i}\,y$ 的辐角，

记作$\varphi = \mathrm{Arg}\, z$.

- 任一复数 z的辐角无穷多.

用$\arg z$表示辐角$\mathrm{Arg}\, z$的某个特定值，则

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

注意 当$z = 0$时，z辐角无意义.

辐角主值

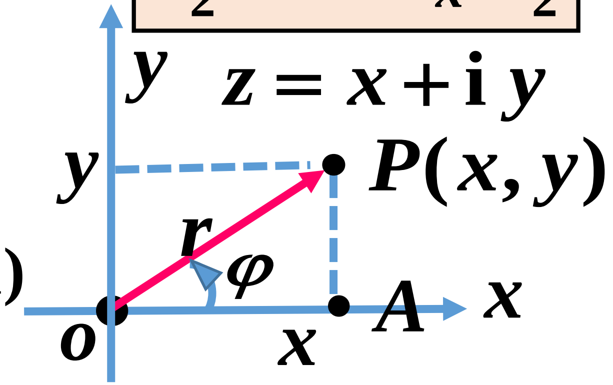
当$z \neq 0$时，若把满足$-\pi < \varphi \leq \pi$的辐角值φ，称为z的辐角主值，也记作$\arg z$.

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

(当$z \neq 0$时，有时也把满足$0 \leq \varphi < 2\pi$的辐角值φ，称为z的辐角主值.)

$z = x + \mathrm{i}\,y \neq 0$的辐角主值$(-\pi < \arg z \leq \pi)$

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$$



$$\arg z = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & x > 0, \quad (一、四象限) \\ \pi + \arctan\frac{y}{x}, & x < 0, y > 0, \quad (二象限) \\ -\pi + \arctan\frac{y}{x}, & x < 0, y < 0, \quad (三象限) \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0,\ y > 0, \quad (上半虚轴) \\ \pi, & x < 0,\ y = 0, \quad (负实轴) \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \quad (下半虚轴) \end{cases}$$

P 6

★★★★★

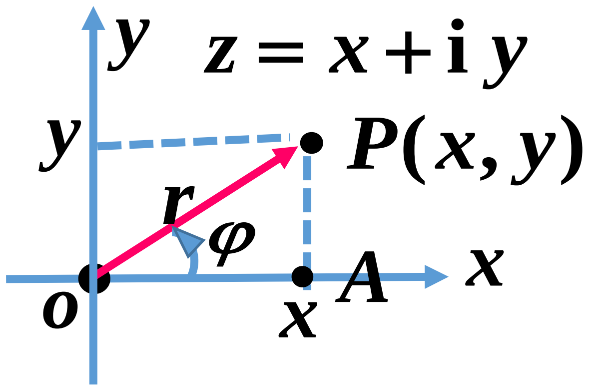
$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha.$

复数的三角表示法

当$z \neq 0$时，$z = x + \mathrm{i}\, y$在直角坐标下对应的点(x, y)，

极坐标(r, φ)表示：

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|,\ \varphi = \operatorname{Arg} z.$$



利用直角坐标与极坐标的关系

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

得 $z = x + \mathrm{i}\, y = \underline{r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)},\quad r > 0.$

复数的三角表示法

$$z = x + \mathrm{i}\, y = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)\text{(三角表示法)},\ \ r > 0.$$

复数的指数表示法

定义复指数： $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \triangleq \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi,$ ★★★★★

P 6　　称为Euler公式　　**背熟**

则 $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},\ r > 0,\ \varphi \in \mathbb{R}.$

复数的指数表示法 ★★★★★

注意：$-r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pm\pi+\varphi)},\ \ r > 0,\ \varphi \in \mathbb{R}.$

Euler公式：$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi.$

$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{i\varphi},\ r>0,\ \varphi\in\mathbb{R}.$

例　将下列复数化为三角表示式与指数表示式：

(1) $z=-3-\sqrt{3}\,i$;　　(2) $z=\cos\alpha-i\sin\alpha$，$\alpha\in\mathbb{R}$.

解　(1) $r=|z|=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$.　因 z 在第三象限，故

$$\arg z=-\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{-3}\right)=-\pi+\frac{\pi}{6}=-\frac{5}{6}\pi.$$ 故

$$z=\underbrace{2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]}_{\text{(三角式)}}=\underbrace{2\sqrt{3}e^{-\frac{5}{6}\pi i}}_{\text{(指数式)}}.$$

Euler公式：$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi.$

$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{i\varphi},\ r>0,\ \varphi\in\mathbb{R}.$

(2) $\cos\alpha-i\sin\alpha$ (不是三角式)

$=\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)$ (三角式)

$=e^{-\alpha i}$. # (指数式)

因$\cos\alpha-i\sin\alpha=\overline{\cos\alpha+i\sin\alpha}=\overline{e^{\alpha i}}$，故

$$\boxed{\overline{e^{\alpha i}}=e^{-\alpha i}.}$$ ★★★

- 设$z_1=r_1e^{i\varphi_1},\ r_1>0,\ z_2=r_2e^{i\varphi_2},\ r_2>0$, 则

$z_1=z_2\Leftrightarrow r_1=r_2$, 且$\varphi_1=\varphi_2+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$

★★★

Euler公式：$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$ ★★★★★

指数式乘法：设$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$，则$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$. 背熟

证明：$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\varphi_1})\cdot(r_2 e^{i\varphi_2}) = r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$= r_1 r_2\{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\}$

$= r_1 r_2\{\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$. #

$\Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$，$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi.$

除法：$z_2 \neq 0$时，$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \dfrac{r_1 e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_2}}{r_2 e^{i\varphi_2} e^{-i\varphi_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

$\Rightarrow \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$，$\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi.$

乘法：设$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$，则 $z_1 z_2 = r_2 r_1 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

n 个复数相乘的情况 $(n \in \mathbb{Z}^+)$：

设 $z_k = r_k e^{i\varphi_k}, \quad k = 1, 2, \cdots, n,$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n e^{i(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)}.$$

背熟

$$\Rightarrow |z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cdots \cdot |z_n|,$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + \cdots + \operatorname{Arg} z_n + 2k\pi,$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

关于复数模的不等式(P 7)

1)设$z=x+\mathrm{i}\,y$，$x,y\in\mathbb{R}$，则

$|x|\le|z|$, $|y|\le|z|$, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}\le|x|+|y|$; (两边平方, 即可证明)

2) $\big||z_1|-|z_2|\big|\le|z_1\pm z_2|\le|z_1|+|z_2|$. ★★★

证明: 首先, $|z_1\pm z_2|^2=|z_1|^2+|\pm z_2|^2+2\,\mathrm{Re}\left(\overline{(\pm z_2)}\cdot z_1\right)$ $\boxed{\text{见例5(P5)}}$

$\le|z_1|^2+|z_2|^2+2\left|\overline{(\pm z_2)}\cdot z_1\right|=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||\pm z_2|=\left(|z_1|+|z_2|\right)^2$.

开方得 $|z_1\pm z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

其次, $|z_1|=|(z_1\pm z_2)\mp z_2|\le|z_1\pm z_2|+|z_2|$，故$|z_1|-|z_2|\le|z_1\pm z_2|$.

同理$|z_2|-|z_1|\le|z_1\pm z_2|$. 故 $\big||z_1|-|z_2|\big|\le|z_1\pm z_2|$. #

作业

P17-20

1(1),(2),(3),

5(选做, 提示: 由欧拉公式得$e^{i\theta}+e^{2i\theta}+\cdots+e^{ni\theta}=\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta+i\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$,

用等比数列求和公式计算左端并化简，再比较左右实部虚部.)

6(利用公式$|z|^2=z\bar{z}$)

7(选做)(利用$|z|^2=z\bar{z}$计算$|z-a|^2-|1-\bar{a}z|^2$, 再因式分解)(仿照P4 例2)

12(选做)(在$z_1+z_2=\overline{z_1+z_2}$两边乘以$z_2$,并利用另一条件，再因式分解)

积：$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$

$$z_2\neq 0\text{时，}\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}=\frac{(x_1+\mathrm{i}\,y_1)(x_2-\mathrm{i}\,y_2)}{|z_2|^2}=\cdots$$

例 设 $z_1=5-5\mathrm{i},\ z_2=-3+4\mathrm{i},$

解 $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{5-5\mathrm{i}}{-3+4\mathrm{i}}=\frac{(5-5\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}{(-3+4\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}$$

利用 $\mathrm{i}^2=-1$

$$=\frac{(-15-20)+\mathrm{i}(-20+15)}{(-3)^2+4^2}=\frac{-35-5\mathrm{i}}{25}=-\frac{7}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{i}.$$

例2. 设 $z=x+\mathrm{i}\,y$, $y\neq 0$, $z\neq\pm\mathrm{i}$.

证明：当且仅当 $x^2+y^2=1$ 时，$\dfrac{z}{1+z^2}\in\mathbb{R}$.

证 $z\neq\pm\mathrm{i}\ \Rightarrow\ 1+z^2\neq 0$.

$$\frac{z}{1+z^2}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \underline{\frac{z}{1+z^2}=\overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)}=\frac{\bar z}{1+\bar z^2}} \Leftrightarrow z\left(1+\bar z^2\right)=\left(1+z^2\right)\bar z$$

★★

$$\Leftrightarrow z+z\bar z^2-\bar z-z^2\bar z=0$$ (左端因式分解)★★

$$\Leftrightarrow (z-\bar z)(1-z\bar z)=0 \Leftrightarrow (2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z)\left(1-|z|^2\right)=0.$$

因 $\mathrm{Im}\,z=y\neq 0$,

故当且仅当 $1-|z|^2=0$ 即 $x^2+y^2=1$ 时，$\dfrac{z}{1+z^2}\in\mathbb{R}$. #

$$5)\ z\bar{z}=|z|^2=x^2+y^2=(\mathrm{Re}\,z)^2+(\mathrm{Im}\,z)^2,\quad |z|=|\bar{z}|;$$

6) $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$, 特别是, $\forall a\in\mathbb{R}$, $|az|=|a|\cdot|z|$;

证明 $|z_1z_2|^2=z_1z_2\cdot\overline{z_1z_2}=(z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2)=|z_1|^2|z_2|^2$.

两边开方得结论. #

7) $z_2\neq 0$时, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$; 证明: $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\left|\dfrac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}\right|=\dfrac{1}{|z_2|^2}|z_1\bar{z}_2|=\dfrac{1}{|z_2|}|z_1|$.

1)设$z = x + \mathrm{i}\,y$，$x, y \in \mathbb{R}$，则

$|x| \le |z|$，$|y| \le |z|$，$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \le |x| + |y|$；

2) $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

3) $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$.

证明：利用2)和归纳法证明. #

4) $|z_1| - |z_2| - \cdots - |z_n| \le |z_1 + z_2 + \cdots + z_n|$.

证明 $|z_1| = |(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) - z_2 - \cdots - z_n|$

$\le |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| + |z_2| + \cdots + |z_n|$. #

例 1 将下列复数化为三角表示式与指数表示式:

(2) $z=\sin\alpha+\mathrm{i}\cos\alpha$ (不是三角式)

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \quad \text{(三角式)}$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}. \quad \text{(指数式)}$$

此外，$z=-\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha=\cos(\pi+\alpha)+\mathrm{i}\sin(\pi+\alpha)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+\alpha)}$;

$z=-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha=\cos(\pi-\alpha)+\mathrm{i}\sin(\pi-\alpha)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\alpha)}$;

$z=\sin\alpha-\mathrm{i}\cos\alpha=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$;

……

$|z_1 - z_2|$ 表示 z_1 和 z_2 之间的距离. ★★★

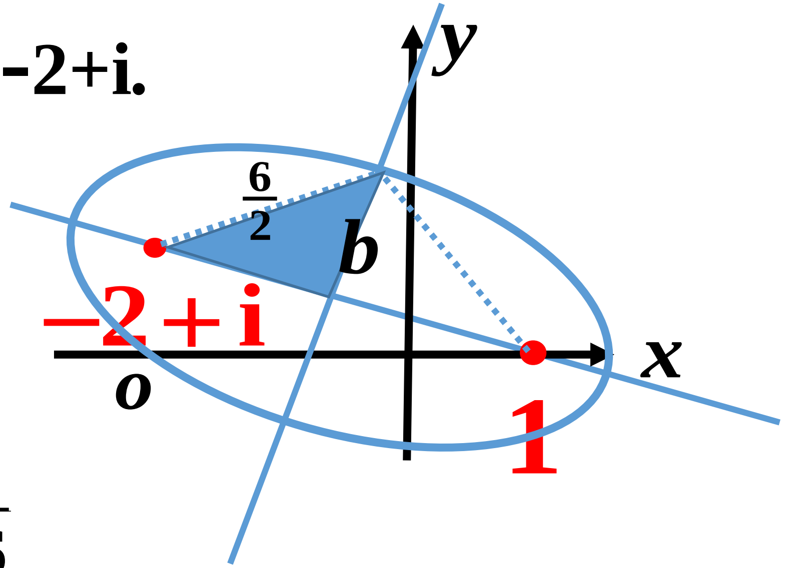
例7(P9-P10). $|z-1|+|z+2-\mathrm{i}|=6$表示

由与点1和与点$-2+\mathrm{i}$的距离之和是6 的所有点集合,

故它表示一个椭圆，焦点是1和 -2+i.

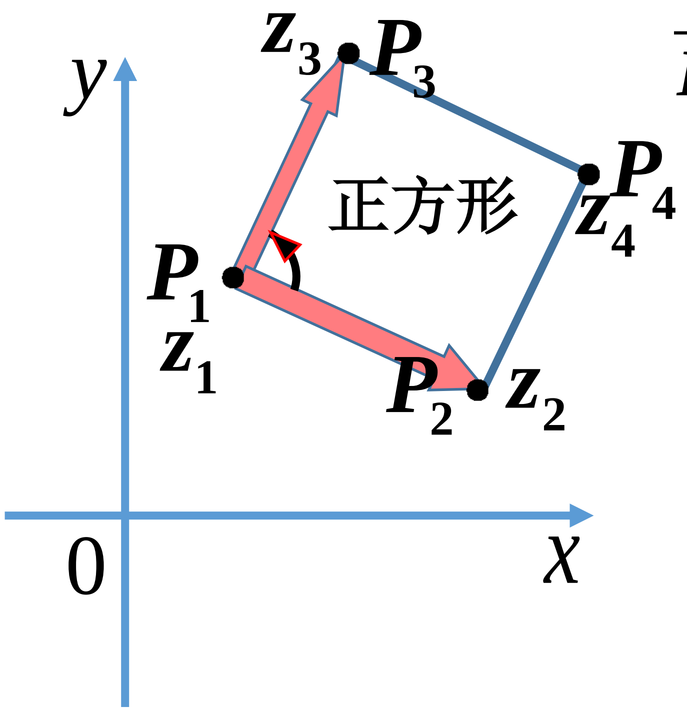
设短半轴b, 长半轴为a, 则

$$2a=6,\quad a=3.$$



$$b=\sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2-\left(\frac{|(-2+\mathrm{i})-1|}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{26}}{2},$$

P18习题第13题可参考此页



$\overrightarrow{P_1P_3} = z_3 - z_1$, $\overrightarrow{P_1P_2} = z_2 - z_1$,

$\overrightarrow{P_1P_3}$可看成由$\overrightarrow{P_1P_2}$逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$所得:

故$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)e^{\frac{\pi}{2}i} = i(z_2 - z_1)$,

$\boxed{e^{\frac{\pi}{2}i} = i}$

其余边类似.

P17-18

第9题提示：

由$\overrightarrow{z_2z_1}$和$\overrightarrow{z_3z_2}$夹角各种情况, 利用复数乘积几何意义推导：共线$\Leftrightarrow$(1);

利用“z是实数$\Leftrightarrow z=\bar{z}$”推导：(1)$\Leftrightarrow$(2);

设(1)中实数为$\dfrac{b}{a}$, a和b是实数, $b\neq 0$推导：(1)$\Leftrightarrow$(3).

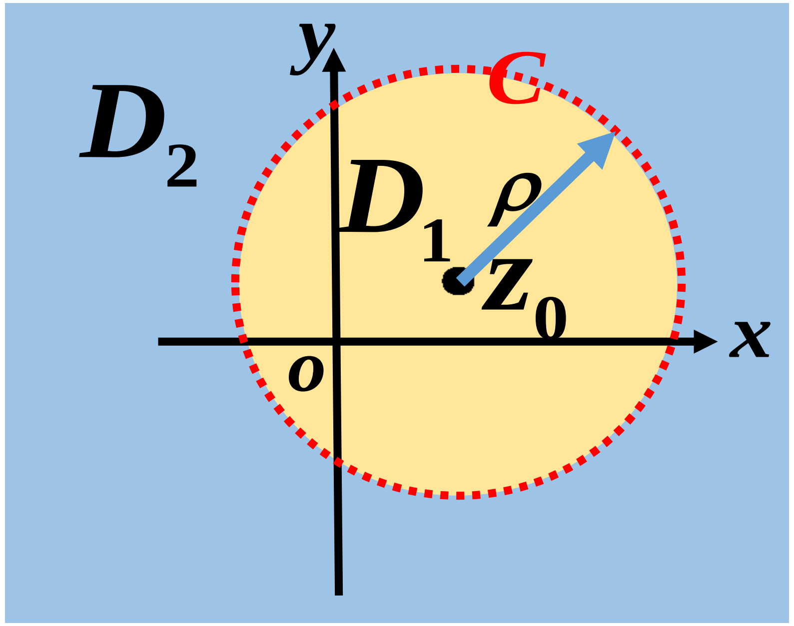
$|z_1 - z_2|$ 表示 z_1和z_2 之间的距离.

特殊图形的复数表示

$|z - z_0| = \rho$ 表示以 z_0为中心、ρ为半径的圆周.

$D_1 = \{z \mid |z - z_0| < \rho\}$ 表示以 z_0为中心、ρ为半径的圆的内部.

$D_2 = \{z \mid |z - z_0| > \rho\}$ 表示以 z_0为中心、ρ为半径的圆的外部.



称$D_1 = \{z \mid |z - z_0| < \rho\}$ 为z_0的ρ邻域,

称$\{z \mid 0 < |z - z_0| < \rho\}$ 为z_0的去心ρ邻域.