# 数值代数2023期末考试

2023 年 12 月 24 日

1.设$B$是$A$的子矩阵,且是方阵,证明$||B||_p \leqslant ||A||_p$,其中$||\cdot||_p$表示相应矩阵由对应尺寸向量的$p$范数诱导出的矩阵算子范数,$1 \leqslant p \leqslant \infty$.

本题选定与$B$维数对应的一个向量后用0进行填充,填充成$A$维数对应的向量即可.

2.(1)对于给定的单位向量$x$,构造两个不同的正交矩阵$Q_1, Q_2$,使得$Q_i e_1 = x, i = 1, 2$.
(2)设$A \in C^{n\times n}$,并假定$\lambda \in C, u \in C^n (u \neq 0)$且$\lambda$不是$A$的特征值,证明可以选择$E \in C^{n\times n}$满足$||E||_F = \frac{||u||_2}{||v||_2}$,使得向量$v = (\lambda I - A)^{-1} u$是 $A + E$的一个特征向量.

第一问考察$householder$变换与$Givens$变换.第二问是作业题,第六章第12题.

3.(1)证明矩阵单特征值的左右特征向量不垂直
(2)证明对称矩阵不同特征值对应的特征向量互相垂直
(3)设$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,考察对$u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$应用幂法得到的序列特性,并给出得到精确到三位有效数字所需的迭代次数.

这题可以说线代特征值那块没忘,知道相关定义,就能做了.

4.

$$T_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} & \beta_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$

是实对称不可约三对角阵,设$p_i(\lambda)$是 $T_n-\lambda I$的各阶顺序主子式,$i=1,2,\cdots,n$.
(1)证明$p_i(\lambda), p_{i+1}(\lambda)$无公共根.
(2)证明$p_n(\lambda)$只有单根.

教材$P219$定理7.4.1的第二、四个命题.

5.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_{n-1} & \alpha_{n-1} & \beta_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$

是非奇异三对角阵,令$A = D + L + U$,$D$是 $A$的对角部分,$L$是$A$的下三角部分,$U$是$A$的上三角部分.
(1)令$B_J = I_n - D^{-1}A$, $B_{GS} = -(L+D)^{-1}U$, $p_{B_J}(\lambda)$, $p_{B_{GS}}(\lambda)$是$B_J, B_{GS}$的特征多项式,证明:

$$p_{B_J}(\lambda) = det(-D^{-1})det(L + \lambda D + U)$$

$$p_{B_{GS}}(\lambda) = det(-(L+D)^{-1})det(\lambda L + \lambda D + U)$$

(2)证明$det(\lambda^2 L + \lambda^2 D + U) = \lambda^n det(L + \lambda D + U)$.
(3)证明$\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$.其中$\rho(B_{GS}), \rho(B_J)$表示$B_{GS}, B_J$的谱半径.当两种算法均收敛时,$Jacobi$迭代和$G-S$迭代哪种收敛速度更快,解释原因.

(1)有放水嫌疑,但需要注意的是这里的特征多项式定义是$p_A(\lambda) = det(A-\lambda I)$,与之前学过的定义不相同.但是用 $p_A(\lambda) = det(\lambda I - A)$来做得到另一个

结论也没有扣分.(2)直接归纳即可.(3)直接利用(2)的结论.

6.给定对称正定矩阵$A$,如果$A$至多有$l$个互不相同的特征值,则共轭梯度法至多$l$步就可以得到方程组$Ax=b$的精确解.

作业题,第五章第8题.