

0515 习题答案

中国科学技术大学
李雨桥 刘元彻

0519

例 0.0.1. 倘若电荷分布的体密度 $\rho(\vec{r})$ 关于原点具有空间反射对称性, 即 $\rho(\vec{r}) = \rho(-\vec{r})$, 请计算其电偶极矩矢量。

解. 按照电偶极矩矢量的定义:

$$\vec{p} = \int_{\Omega} d^3x' \vec{r}' \rho(\vec{r}')$$

注意到对于任意 $\vec{r}' = (x', y', z')$, 其反射 $-\vec{r}' = (-x', -y', -z')$, 我们知道 $-\vec{r}' \rho(-\vec{r}') = -\vec{r}' \rho(\vec{r}')$. 由于积分测度处处一致, 因此对空间中任意一点处的积分都会与其空间反射处的积分抵消, 因此上述积分给出 $\vec{p} = 0$, 即在这个空间不能定义电偶极矩矢量。□

例 0.0.2. 当不考虑原子核的运动以及原子核的电荷分布时, 氢原子的电荷分布在球坐标系中可表为:

$$\rho(r, \theta) = -\frac{er^2 \sin^2 \theta}{64\pi} e^{-r}, \quad 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

e 是电子电荷量的绝对值. 请计算氢原子所有的非零电多极矩 (精确到电四极矩, 10 分), 计算其在远处的静电势分布 (10 分)。

解. 精确到电四极矩, 体系的电多极矩可表为:

$$q_{lm} = \int d^3x \rho(\vec{x}) r^l Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (l = 0, 1, 2)$$

因为题设 $\rho(\vec{x})$ 在球坐标系中的表达式与方位角 ϕ 无关, 故非零的电多极矩只有 q_{l0} :

$$q_{l0} = \int_0^\infty dr r^{l+2} \int d\Omega \rho(r, \theta) Y_{l0}(\theta, \phi)$$

计及“提示”中枚举的球谐函数表达式以及

$$Y_{20}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

体系的电荷体密度可表为:

$$\rho(r, \theta) = -\frac{e}{64\pi} r^2 \exp(-r) \sin^2 \theta = -\frac{e}{96\pi} \sqrt{\frac{4\pi}{5}} r^2 \exp(-r) \left[\sqrt{5} Y_{00}(\theta, \phi) - Y_{20}(\theta, \phi) \right]$$

所以,

$$q_{l0} = -\frac{e}{96\pi} \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \int_0^\infty dr r^{l+4} \exp(-r) \int d\Omega \left[\sqrt{5} Y_{00}(\theta, \phi) - Y_{20}(\theta, \phi) \right] Y_{l0}(\theta, \phi) \quad (1)$$

$$= -\frac{e}{96\pi} \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \Gamma(l+5) \left[\sqrt{5} \delta_{l0} - \delta_{l2} \right] \quad (2)$$

$$= -\frac{e}{96\pi} \sqrt{\frac{4\pi}{5}} (\sqrt{5} 4! \delta_{l0} - 6! \delta_{l2}) \quad (3)$$

换言之，此氢原子非零的电多极矩为：

$$q_{00} = -\frac{e}{\sqrt{4\pi}}, \quad q_{20} = 6e\sqrt{\frac{5}{4\pi}}$$

它们激发的静电势分布是：

$$\varphi(r, \theta) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{lm} \frac{1}{2l+1} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{q_{00}}{r} Y_{00}(\theta, \phi) + \frac{q_{20}}{5r^3} Y_{20}(\theta, \phi) \right] \quad (4)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r} \left[1 - \frac{3}{r^2} (3\cos^2\theta - 1) \right] \quad (5)$$

若不使用球多极展开，则计算过程略繁。计算结果应是：体系的总电荷量为 $Q = -e$ ，电偶极矩为零 ($\vec{p} = 0$)，电四极矩张量非零的笛卡尔分量是 $D_{11} = D_{22} = -6e$, $D_{33} = 12e$ 。静电势的表达式同上。□

例 0.0.3. 空心导体球壳的内外半径分别为 R_1 与 R_2 。球心放置一个电偶极子 \vec{p} 。请计算空间各点的静电势。

解. 由于导体球壳，在内部，夹层，外部分别由金属球壳隔开，所以我们只需要算出每个区域的源电荷，然后分别使用各个区域的格林函数求解。

我们首先可以给出电偶极子的电荷密度表达式：

$$\rho(r') = -\vec{p} \cdot \nabla' \delta^{(3)}(\vec{r}')$$

进一步地，给出球壳空间格林函数，特别是其在球坐标下的展开：

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{lm} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)\epsilon_0 [1 - (R_1/R_2)^{2l+1}]} \left(r_{<}^l - \frac{R_1^{2l+1}}{r_{<}^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{R_2^{2l+1}} \right)$$

在这个问题中，由于不接地，我们不能直接钦定导体球壳的电势为 0，而是应该取 $\varphi = 0$ 作为边界条件，但最后再计算出无穷远处的电势，以定出这里的电势到底是多少。

这样，电势解就写为：

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \int_{B(r)} d^3x' G(r, r') \rho(r') - \epsilon_0 \oint_{\partial B(r)} ds' \varphi \frac{\partial G}{\partial n'} \\ &= - \int_{B(r)} d^3x' G(r, r') \vec{p} \cdot \nabla' \delta^{(3)}(\vec{r}') \\ &= \vec{p} \cdot \nabla' [G(r, r')] \Big|_{r'=0} \end{aligned}$$

我们这里可以直接把 $r_{<} = r', r_{>} = r$ 代入化简：

$$G(r, r') = \sum_{lm} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)\epsilon_0 [1 - (R_1/R_2)^{2l+1}]} \left(r'^l - \frac{R_1^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{R_2^{2l+1}} \right)$$

在考察球内部空间时, 我们取 $R_1 \rightarrow 0, R_2 \rightarrow R_1$, 于是:

$$G(r, r') = \sum_{lm} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)\varepsilon_0} \left(\frac{r'^l}{r^{l+1}} - \frac{r'^l r'^l}{R_1^{2l+1}} \right)$$

而 ∇' 可以展开为:

$$\nabla' = e_{r'} \frac{\partial}{\partial r'} + \frac{e_{\theta'}}{r'} \frac{\partial}{\partial \theta'} + \frac{e_{\varphi'}}{r' \sin \theta'} \frac{\partial}{\partial \varphi'}$$

$l=0$ 显然没有贡献, $l \geq 2$ 的项最后会因为 $r' \rightarrow 0$ 的极限而消去, 因而我们只要考虑 $l=1$ 的三项。最终化简得:

$$\phi(r) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_1^3} \right)$$

这是球壳内部的电势。

在考察球壳之间空间时, 我们保持 R_1, R_2 不变, $R_1 < r < R_2$ 。所以格林函数不变。但是我们注意到, 金属内部不可能有任何自由电荷, 所以 $\rho(r') = 0$, 这样自然 $\phi(r) = 0$

在考察球壳外部时, 我们同样知道导体外表面没有电荷。我们首先来考察球壳内壁的电荷密度。我们不妨沿着 \vec{p} 的方向来建立一根轴, 这样就可以有 $\vec{p} \cdot \vec{r} = pr \cos \theta$ 。由此, 我们在球坐标下, $\phi(r, \theta) = \frac{pr \cos \theta}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_1^3} \right)$, 接着就可以求出电场强度:

$$\begin{aligned} E_r &= e_r \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ &= \frac{p \cos \theta}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{-3}{r^3} - \frac{1}{R_1^3} \right) \end{aligned}$$

这里我们只求了径向分量, 因为根据边界条件, 球壳内壁上的电荷分布即为:

$$\begin{aligned} \sigma(\theta, \varphi) &= \varepsilon_0 \vec{E}(r = R_1) \cdot \hat{n} \\ &= \varepsilon_0 \vec{E}(r = R_1) \cdot e_r \\ &= -\frac{p \cos \theta}{\pi R_1^3} \end{aligned}$$

在这个内壁上面积分, 立刻可以得到 $Q_{in} = 0$ 。由于导体本身并不带电, 所以 $Q_{out} = 0$, 这就表明整个球外部和球面上都没有宏观电荷。所以可以知道外部的 $\rho(r') = 0$, 由格林函数法可以得到 $\phi(r) = 0$ 。

注意到, 这里我们求出无穷远点的电势也为 0, 这就表明了我们认为球壳内壁的电势为 0 是合理的, 不需要作修正。因而我们给出了:

$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_1^3} \right) & (0 < r < R_1) \\ 0 & (R_1 < r < R_2) \\ 0 & (R_2 < r < \infty) \end{cases}$$

□

例 0.0.4. 一个半径为 R_0 的球面，球坐标 $0 < \theta < \pi/2$ 的上半球面电势为 φ_0 ，球坐标 $\pi/2 < \theta < \pi$ 的下半球面电势为 $-\varphi_0$ 。请计算空间各点的静电势。

解. 我们可以注意到电势仅在球面不同 θ 处有差异。对球内外，我们不妨用 Legendre 函数展开：

$$\begin{aligned}\phi_{in} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta) \\ \phi_{out} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)\end{aligned}$$

我们在球面 $\partial B(R_0)$ 上作广义 Fourier 展开，可以得到：

$$\phi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n P_n(\cos \theta)$$

反演可以得到广义 Fourier 系数：

$$\begin{aligned}\phi_n &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 \phi(\theta) P_n(\cos \theta) d \cos \theta \\ &= \frac{2n+1}{2} [\varphi_0 \int_0^1 P_n(x) dx - \varphi_0 \int_{-1}^0 P_n(x) dx] \\ &= \frac{2n+1}{2} \varphi_0 \int_0^1 dx [P_n(x) - P_n(-x)]\end{aligned}$$

注意到， n 为偶数时， $P_n(-x) = P_n(x)$ ，于是 $\phi_n = 0$ ； n 为奇数时， $P_n(-x) = -P_n(x)$ ，并且积分得到：

$$\begin{aligned}\int_0^1 P_n(x) dx &= \frac{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)}{2n+1} \Big|_0^1 \\ &= (-1)^{(n-1)/2} \frac{(n-2)!!}{(n+1)!!}\end{aligned}$$

从而，得到展开系数为：

$$\phi_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ is even}) \\ (2n+1)\varphi_0(-1)^{(n-1)/2} \frac{(n-2)!!}{(n+1)!!} & (n \text{ is odd}) \end{cases}$$

所以我们可以重新取一个求和指标，只对奇数项求和，并考虑到 $r = R_0$ 时应该有连续性条件： $\phi_{in} = \phi_{out} = \phi(\theta)$ ，于是就有：

$$\begin{aligned}\phi_{in} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4n+3) \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} P_{2n+1}(\cos \theta) \left(\frac{r}{R_0}\right)^{2n+1} \varphi_0 \\ \phi_{out} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4n+3) \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} P_{2n+1}(\cos \theta) \left(\frac{R_0}{r}\right)^{2n+2} \varphi_0\end{aligned}$$

即为所求的电势。

□

李雨桥、刘元彻
2024 年 5 月 19 日

