中国科学技术大学电动力学期中考试试题卷（2024）

姓名：Reference Solutions

学号：

成绩：

提示：

- 闵氏空间$\mathbb{M}_4$中洛伦兹推动变换$x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$的非零矩阵元是：

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma, \quad \Lambda^0{}_j = -\gamma\beta_j, \quad \Lambda^i{}_0 = -\gamma\beta^i, \quad \Lambda^i{}_j = \delta^i_j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j$$

  式中$\boldsymbol{\beta} = \beta^i \boldsymbol{e}_i$为无量纲的牵连速度，$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

- 电磁场强度在洛伦兹变换$x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$下的变换法则是：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}' &= \gamma \boldsymbol{E} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{\beta} + \gamma c\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}' &= \gamma \boldsymbol{B} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{\beta} - \frac{\gamma}{c}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E} \end{aligned}$$

- 球谐函数$Y_{lm}(\theta,\phi)$定义为：

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = (-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}, \quad l\in\mathbb{N}, \;\; m=-l, \;\; -l+1, \;\; \cdots, l-1, \; l.$$

  几个低阶的球谐函数的显示形式是：

$$\begin{aligned} &Y_{00}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_{1,\pm1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi} \\ &Y_{20}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\theta - 1), \quad Y_{2,\pm1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\,\cos\theta\sin\theta e^{\pm i\phi} \\ &Y_{2,\pm2}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi} \end{aligned}$$

  球谐函数满足的正交性关系是：

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\; Y_{lm}(\theta,\phi)Y^*_{l'm'}(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

- Heaviside阶梯函数$\Theta(s)$定义为：

$$\Theta(s) = \begin{cases} 0, & s\le 0 \\ 1, & s>0 \end{cases}$$

  其满足的一个重要性质是$\frac{\mathrm{d}\Theta(s)}{\mathrm{d}s} = \delta(s)$，此处$\delta(s)$是Dirac戴尔塔函数.

简答（40分）：

1. 设4-矢量场$A_\mu(x)$是电磁场的规范势，电磁场张量及其对偶分别定义为

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \qquad G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

   - 请问$F_{\mu\nu}$和$G^{\mu\nu}$各自有多少独立分量(3分)?
   - 倘若把$F_{\mu\nu}$的物理内涵规定为$F_{0j} = -E_j/c$和$F_{ij} = \epsilon_{ijk}B^k$，这里$E_j$和$B^k$分别表示电磁场电场强度与磁感应强度的笛卡尔直角分量，即$\boldsymbol{E} = E_j\boldsymbol{e}^j$和$\boldsymbol{B} = B^k\boldsymbol{e}_k$，请问$G^{\mu\nu}$的物理内涵是什么(5分)?
   - 4-张量$F_{\mu\nu}$和$G^{\mu\nu}$在规范变换$A_\mu \rightsquigarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha(x)$下的如何变换(2分)?

     解：

     - $F_{\mu\nu}$与$G^{\mu\nu}$各有6个独立分量.
     - $G^{\mu\nu}$的物理内涵是：$G^{0i} = B^i, \quad G^{ij} = -\frac{1}{c}\epsilon^{ijk}E_k$.
     - $F_{\mu\nu}$和$G^{\mu\nu}$均是规范变换下的不变量.

2. 某静电场的电场强度分布在球坐标系中表达为$\boldsymbol{E}(r) = \frac{q\,\boldsymbol{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}\Theta(r)$，式中$\Theta(r)$是Heaviside阶梯函数. 请问激发该电场强度分布的电荷体密度$\rho(r)$是什么(5分)? 空间中的总电荷量是多少(5分)?

   解：

   电场强度分布的散度是：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(r) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\frac{\boldsymbol{e}_r\,\Theta(r)}{r^2}\right] \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left\{\left[\Theta(r)\sin\theta\right]\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2\sin\theta}\right\} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\boldsymbol{\nabla}\left[\Theta(r)\sin\theta\right]\cdot\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2\sin\theta} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\delta(r)
\end{aligned}$$

   将此式与电高斯定律$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$比较，可知激发该场强分布的电荷体密度是$\rho(r) = q\delta(r)/4\pi r^2$. 空间中的总电荷量是$\int \rho \mathrm{d}^3x = q$，它表达的是一个占据坐标原点的点电荷.

3. 某4-矢量场$A_\mu(x)$的拉氏密度可表为：

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2}\mu^2 A^\mu A_\mu$$

   式中$\mu = mc/\hbar$，m是一个具有质量量纲的常参数(4-标量)，$\hbar$是约化普朗克常数. 由此拉氏密度确定的拉氏方程是否具有洛伦兹变换下的协变性(5分)? 此4-矢量场能否在物理上被诠释为电磁场(5分)?

解：

以4-矢量场$A_\mu(x)$作为广义坐标建立的拉氏方程是：

$$0=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_\mu(x)}-\partial_\nu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\nu A_\mu(x)}\right]=\mu^2A^\mu(x)+\partial_\nu\partial^\nu A^\mu(x)$$

它明显地具有洛伦兹变换下的协变性. 但此拉氏方程不具有规范变换$A_\mu(x)\to A'_\mu(x)=A_\mu(x)+\partial_\mu\theta(x)$下的不变性，此4-矢量场不是规范场，不能诠释为电磁场.

4. 设$U^\mu=\gamma(c,\ \boldsymbol{u})$是点电荷$q$的4-速度，$\boldsymbol{u}$是其物理3-速度，$\gamma=1/\sqrt{1-(\boldsymbol{u}/c)^2}$. 电磁场$F_{\mu\nu}$施加在点电荷$q$上的电磁力4-矢量$K_\mu$定义为

$$K_\mu=qF_{\mu\nu}U^\nu$$

   - 请写出K_μ在洛伦兹推动变换$x^\mu\rightsquigarrow x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$下的变换法则(5分).
   - 请写出K_μ诸分量的物理内涵(3分).
   - 请计算4-标量$K_\mu U^\mu$的值并指出此值成立的惯性参考系(2分).

   解：

     - K_μ是4-矢量，它在洛伦兹推动变换下的变换法则是：$K_\mu\rightsquigarrow K'_\mu=K_\nu\,\widetilde{\Lambda}^\nu{}_\mu$. 这里$\widetilde{\Lambda}^\nu{}_\mu$是逆洛伦兹变换，$\widetilde{\Lambda}^\nu{}_\mu=\eta_{\mu\rho}\Lambda^\rho{}_\sigma\eta^{\sigma\nu}$. 对于逆洛伦兹推动变换，

$$\widetilde{\Lambda}^0{}_0=\gamma,\quad \widetilde{\Lambda}^0{}_j=\gamma\beta_j,\quad \widetilde{\Lambda}^i{}_0=\gamma\beta^i,\quad \widetilde{\Lambda}^i{}_j=\delta^i_j+\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j$$

     - K_μ诸分量的物理内涵是：

$$K_\mu=(K_0,\ \boldsymbol{K}),\qquad K_0=-\frac{\gamma}{c}q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{u},\ \ \boldsymbol{K}=\gamma q\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}\right)$$

     - $K_\mu U^\mu=0$. 这个结论成立于任意惯性参考系.

计算（60分）：

5. 电磁势4-矢量A_μ的物理内涵是$A_\mu = (-\phi/c,\ \boldsymbol{A})$，这里$\phi$与$\boldsymbol{A}$分别表示电磁场的标势和矢势. 现有一点磁偶极子(其固有的磁偶极矩矢量为$\boldsymbol{m}$)在实验室参考系Σ中以速度$\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{\beta}$做匀速直线运动. 已知此磁偶极子在自身系$\Sigma'$中所激发电磁场的电磁势为：

$$\phi'(\boldsymbol{r}', t') = 0, \qquad \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}', t') = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}'}{r'^3}$$

请通过洛伦兹推动变换求出实验室参考系中电磁场的标量势分布$\phi(\boldsymbol{r}, t)$(20分).

解：

实验室里电磁势$A_\mu(x)$与磁偶极子自身参考系里的电磁势$A'_\mu(x')$的关系是：

$$A_\mu(x) = A'_\nu(x')\ \Lambda^\nu{}_\mu$$

所以，实验室系中电磁场的标量势分布是：

$$\phi(x) = -cA_0(x) = -cA'_\nu(x')\ \Lambda^\nu{}_0 = -cA'_i(x')\ \Lambda^i{}_0 = \gamma c\beta^i A'_i(x') = \gamma c\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}', t')$$

式中$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. 注意到同一时空点的位置坐标在实验室系和磁偶极子自身系中的联系是$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$，即：

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}) - \gamma\boldsymbol{\beta}ct$$

由此知：

$$r'^2 = (r+ct)(r-ct) + \gamma^2(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r} - ct)^2$$

实验室里电磁场的标量势最终求得为：

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) = \gamma c\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}', t') = \frac{\gamma c\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{\beta}\cdot(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r})}{[(r+ct)(r-ct) + \gamma^2(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r} - ct)^2]^{3/2}}$$

6. 某电磁场在惯性参考系Σ中表现为匀强的静场，电场强度与磁感应强度分别$\boldsymbol{E}=c\,\alpha\boldsymbol{e}_1$和$\boldsymbol{B}=\alpha(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_3)$，式中$c$为真空中的光速，$\alpha$为一非零的、有量纲的常数，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$与$\boldsymbol{e}_3$分别表示笛卡尔直角坐标系三个坐标轴方向的单位基矢. 现在另外一个惯性参考系Σ'，电磁场的场强在其中的不完整表达式是：

$$\boldsymbol{E}'=E_1'\boldsymbol{e}_1+c\,\alpha\boldsymbol{e}_2,\qquad \boldsymbol{B}'=\alpha(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3)+B_2'\boldsymbol{e}_2$$

请设法确定出Σ'系中电磁场强度的完整表达式(20分).

解：

由电磁场强可以构造两个4-标量，即$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\propto\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{E}^2/c^2$和$F_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\propto\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$. 可以在惯性系$\Sigma$中计算出这两个4-标量的取值：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{B}^2-\frac{\boldsymbol{E}^2}{c^2}=5\alpha^2-\alpha^2=4\alpha^2\\&\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}=c\alpha^2\end{aligned}$$

若在Σ'系中计算，则为：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{B}'^2-\frac{\boldsymbol{E}'^2}{c^2}=\alpha^2+(B_2')^2-\left(\frac{E_1'}{c}\right)^2\\&\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{B}'=\alpha E_1'+c\alpha B_2'\end{aligned}$$

所以，

$$B_2'+\frac{E_1'}{c}=\alpha,\quad B_2'-\frac{E_1'}{c}=3\alpha$$

由此解得$B_2'=2\alpha$，$E_1'=-c\alpha$. 电磁场强在Σ'系中的完整表达式是：

$$\boldsymbol{E}'=-c\alpha\boldsymbol{e}_1+c\alpha\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{B}'=\alpha\boldsymbol{e}_1+2\alpha\boldsymbol{e}_2+\alpha\boldsymbol{e}_3$$

7. 某氢原子的电子电荷分布在球坐标系中可表为：

$$\rho(r,\theta) = -\frac{er^2\cos^2\theta}{32\pi}e^{-r}, \quad 0 \le r < \infty, \ 0 \le \theta \le \pi.$$

e是电子电荷量的绝对值. 请计算氢原子电子电荷分布所有的非零电多极矩（精确到电四极矩，10分），计算其在远处的静电势分布（10分）.

Hint：建议使用静电势的球多极矩展开.

解：

精确到电四极矩，体系的电多极矩可表为：

$$q_{lm} = \int \mathrm{d}^3x\rho(\boldsymbol{x})r^lY_{lm}(\theta,\phi), \quad (l=0,1,2)$$

因为题设$\rho(\boldsymbol{x})$在球坐标系中的表达式与方位角ϕ无关，故非零的电多极矩只有q_{l0}：

$$q_{l0} = \int_0^\infty \mathrm{d}rr^{l+2}\int \mathrm{d}\Omega\rho(r,\theta)Y_{l0}(\theta,\phi)$$

计及“提示”中枚举的球谐函数表达式

$$Y_{00}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_{20}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

体系的电荷体密度可表为：

$$\rho(r,\theta) = -\frac{e}{32\pi}r^2\exp(-r)\ \cos^2\theta = -\frac{e}{48\sqrt{5\pi}}\ r^2\exp(-r)\left[\sqrt{5}Y_{00}(\theta,\phi) + 2Y_{20}(\theta,\phi)\right]$$

所以，

$$\begin{aligned}
q_{l0} &= -\frac{e}{48\sqrt{5\pi}}\int_0^\infty \mathrm{d}rr^{l+4}\exp(-r)\int \mathrm{d}\Omega\left[\sqrt{5}Y_{00}(\theta,\phi) + 2Y_{20}(\theta,\phi)\right]Y_{l0}(\theta,\phi) \\
&= -\frac{e}{48\sqrt{5\pi}}\Gamma(l+5)\left[\sqrt{5}\delta_{l0} + 2\delta_{l2}\right] \\
&= -\frac{e}{48\sqrt{5\pi}}\left(\sqrt{5}\ \cdot 4!\delta_{l0} + 2\cdot 6!\delta_{l2}\right)
\end{aligned}$$

换言之，此氢原子中电子电荷分布非零的电多极矩为：

$$q_{00} = -\frac{e}{\sqrt{4\pi}}, \quad q_{20} = -6e\sqrt{\frac{5}{\pi}}$$

它们激发的静电势分布是：

$$\begin{aligned}
\varphi(r,\theta) &= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{lm}\frac{1}{2l+1}\frac{q_{lm}}{r^{l+1}}Y_{lm}(\theta,\phi) = \frac{1}{\epsilon_0}\left[\frac{q_{00}}{r}Y_{00}(\theta,\phi) + \frac{q_{20}}{5r^3}Y_{20}(\theta,\phi)\right] \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{r}\left[1 + \frac{6}{r^2}(3\cos^2\theta - 1)\right]
\end{aligned}$$

若不使用球多极展开，则计算过程略繁. 计算结果应是：体系的总电荷量为$Q=-e$，电偶极矩为零$(\boldsymbol{p}=0)$，电四极矩张量非零的笛卡尔分量是$D_{11}=D_{22}=12e$，$D_{33}=-24e$. 静电势的表达式同上.