电动力学第二次习题课

中国科学技术大学
李雨桥 刘元彻

5.12

目 录

第一章　作业答案及解析

1.1 0322

例 1.1.1. 设粒子在惯性系 S 中以速度 $\vec{u}=c\vec{\beta}_u$ 运动，其 4-速度表为 $U^\mu=\gamma_u c(1,\vec{\beta}_u)$，请证明：$U^\mu U_\mu=-c^2$

解. $U^\mu=\gamma c(1,\vec{\beta}_u)$，其中 $\vec{\beta}_u=\dfrac{\vec{u}}{c}$ 是一个 3-矢量，所以我们可以直接去计算内积：

$$
\begin{aligned}
U^\mu U_\mu &= \eta_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \\
&= \gamma^2c^2(-1\times 1+\vec{\beta}_u\cdot\vec{\beta}_u) \\
&= \frac{1}{1-u^2/c^2}(-c^2+u^2) \\
&= \frac{c^2}{c^2-u^2}(u^2-c^2) \\
&= -c^2
\end{aligned}
$$

即证明。 □

例 1.1.2. 利用粒子的 4-加速度 $\mathscr{A}^\mu=\dfrac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau}$ 可以定义一个 4-标量 $a=\sqrt{\mathscr{A}^\mu\mathscr{A}_\mu}$. 请证明 a 恰为粒子瞬时自身系中物理加速度 $\hat{\omega}$ 的大小

解. 我们已经知道 4-速度 $U^\mu=\gamma_u c(1,\vec{\beta}_u)$，现在我们求导，可以给出：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \\
\Rightarrow \mathscr{A}^0 &= \frac{\mathrm{d}U^0}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}U^0}{\mathrm{d}t}\gamma_u \\
&= \gamma_u^4\vec{\beta}_u\cdot\vec{\omega} \\
\mathscr{A}^i &= \frac{\mathrm{d}U^i}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}U^i}{\mathrm{d}t}\gamma_u \\
&= \gamma_u(\gamma_u\omega^i+\gamma_u^3(\vec{\beta}_u\cdot\vec{\omega})\beta_u^i) \\
&= \gamma_u^2\omega^i+\gamma_u^4(\vec{\beta}_u\cdot\vec{\omega})\beta_u^i
\end{aligned}
$$

这样我们就可以计算标量：

$$
\begin{aligned}
a &= \sqrt{\mathscr{A}^\mu\mathscr{A}_\mu} \\
&= \sqrt{-\mathscr{A}^0\mathscr{A}^0+\mathscr{A}^i\mathscr{A}^i} \\
&= \sqrt{-\gamma_u^8(\vec{\beta}_u\cdot\vec{\omega})^2+\gamma_u^4\vec{\omega}^2+\gamma_u^8(\vec{\beta}_u\cdot\vec{\omega})^2\vec{\beta}_u^2+2\gamma_u^6(\vec{\beta}_u\cdot\vec{\omega})^2} \\
&= \sqrt{\gamma_u^4\vec{\omega}^2-\gamma_u^6(\vec{\beta}_u\cdot\vec{\omega})+2\gamma_u^6(\vec{\beta}_u\cdot\vec{\omega})^2}\ (\text{with }\ -1+\vec{\beta}_u^2=-\gamma_u^{-2}) \\
&= \sqrt{\gamma_u^4\vec{\omega}^2+\gamma_u^6(\vec{\beta}_u\cdot\vec{\omega})^2}
\end{aligned}
$$

在粒子的瞬时自身系中，其速度自然是 $\vec{\beta}_u=0$，从而 Lorentz 因子 $\gamma_u=1$，加速度即为 $\vec{\omega}=\hat{\omega}$。于是：

$$a=\sqrt{\gamma_u^4\vec{\omega}^2+\gamma_u^6(\vec{\beta}_u\cdot\vec{\omega})^2}=\|\hat{\omega}\|$$

这就证明了，4-加速度的 Minkowski 模长就是粒子在瞬时自身系下的加速度的大小。 □

例 1.1.3. *确定下面三个 4-矢量（其分量用直角坐标分量写出）是类时、类空还是类光的。*

$$\begin{aligned}A^\mu&=(1,0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\\B^\mu&=(1,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})\\C^\mu&=(3,12\lambda,0,0)\end{aligned}$$

其中 λ 是参数。

解. 直接计算内积：

1. $A_\mu A^\mu=-1+0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$，从而 A^μ 是类光矢量；
2. $B_\mu B^\mu=-1+0+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}<0$，从而 B_μ 是类时矢量；
3. $C_\mu C^\mu=-9+144\lambda^2+0+0=144\lambda^2-9$，当 $|\lambda|<\frac{1}{4}$ 时，$C_\mu C^\mu<0$，为类时；当 $|\lambda|=\frac{1}{4}$ 时，$C_\mu C^\mu=0$，为类光；当 $|\lambda|>\frac{1}{4}$ 时，$C_\mu C^\mu>0$，为类空。

□

例 1.1.4. *如果一个 4-矢量 v^μ 是类时的，而另一个 4-矢量 s^μ 是类空的，他们的标量积 $v_\mu s^\mu=0$ 成立吗？*

解. 不一定。比如我们可以给出如下例子：

$$v^\mu=(3,1,1,1),\, v_\mu v^\mu=-9+1+1+1=-6<0$$

这 v^μ 就是类时的，现在我们来讨论 S^μ 的取值。

1. 取 $s^\mu=(0,2,2,2), s_\mu s^\mu=0+4+4+4=12>0$，可知 $v_\mu s^\mu=0+2+2+2=6>0$
2. 取 $s^\mu=(1,1,1,1), s_\mu s^\mu=-1+1+1+1=3>0$，可知 $v_\mu s^\mu=-3+1+1+1=0$
3. 取 $s^\mu=(0,-1,-1,-1), s_\mu s^\mu=0+1+1+1=3>0$，可知 $v_\mu s^\mu=0-1-1-1=-3<0$

所以我们完全无法确定标量积的符号，只能说他们的标量积可能为 0。 □

1.2 0329

例 1.2.1. 设 A、B 和 C 是 3 个 4-矢量。

1. 倘若在惯性系 Σ 中，这些 4-矢量表达为：

$$A = 4e_0 + 3e_1 + 2e_2 + e_3,\ B = 5e_0 + 4e_1 + 3e_2,\ C = e_0 + 2e_1 + 3e_2 + 4e_3$$

式中 $e_\mu(\mu = 0,1,2,3)$ 是 Σ 系的基矢。请证明 A 是类时矢量、B 是类光矢量和 C 是类空矢量。

2. 倘若进行惯性系的变换使得新的惯性系 Σ' 中的基矢定义为：

$$e'_0 = \cosh\theta e_0 + \sinh\theta e_1,\ e'_1 = \sinh\theta e_0 + \cosh\theta e_1,\ e'_2 = e_2, e'_3 = e_3$$

请求出 Σ' 相对于 Σ 的物理 3-速度 $\vec{v}$，并把 A、B 和 C 这三个 4-矢量在 Σ' 系中重新表达出来。

解. 在以下计算中，我们都默认 $\{e_i\}$ 是 Minkowski 空间中的一组正交基矢。

1. Minkowski 空间中的正交基矢总是可以定义相同的内积结构，这可以从保度规变换的形式看出。于是，我们知道：

$$\begin{aligned}
A^\mu A_\mu &= -4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = -2 > 0 \\
B^\mu B_\mu &= -5^2 + 4^2 + 3^2 + 0^2 = 0 \\
C^\mu C_\mu &= -1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 28 < 0
\end{aligned}$$

根据定义可知，A 是类时矢量，B 是类光矢量，C 是类空矢量。

2. 对于一个矢量而言，其坐标分量是所谓逆变分量，而基矢是协变的。我们先给出矩阵形式的变换：

$$\begin{pmatrix} e'_0 & e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & 0 & 0 \\ \sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

我们考虑到：

$$\begin{pmatrix} e'_0 & e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \{x'\} = g^{-1}Mg\{x\} \Leftrightarrow \{x\} = g^{-1}M^{-1}g\{x'\}$$

这便是我们求出的两组基下的矢量分量变换法则。

经过计算，我们可以显式地写出：

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & 0 & 0 \\ \sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta & 0 & 0 \\ -\sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

这就对应了一个沿 e_1 方向 Boost 的 Lorentz 变换。我们可以利用定义，直接写出：$\vec{v} = c\tanh\theta e_1$，就是 Σ' 相对于 Σ 的相对运动速度。利用上面的坐标变换公式，我们也可以给出：

$$A = (4\cosh\theta - 3\sinh\theta){e'}_0 + (-4\sinh\theta + 3\cosh\theta){e'}_1 + 2e'_2 + e'_3$$

$$B = (5\cosh\theta - 4\sinh\theta){e'}_0 + (-5\sinh\theta + 4\cosh\theta){e'}_1 + 3e'_2$$

$$C = (\cosh\theta - 2\sinh\theta){e'}_0 + (-\sinh\theta + 2\cosh\theta){e'}_1 + 3e'_2 + 4e'_3$$

□

例 1.2.2. *设 A 与 B 是两个非零的、彼此正交的 4-矢量，$A\cdot B = A^\mu B_\mu = 0$。请判断以下几种观点的正确性：*

1. *若 A 是类光 4-矢，则 B 或者是类光 4-矢，或者是类空 4-矢。*

2. *若 A 与 B 均为类光 4-矢，则他们必然成正比。*

3. *若 A 是类空 4-矢，则 B 可以是类光 4-矢，可以是类时 4-矢，也可以是类空 4-矢。*

4. *若 A 是类时 4-矢，则 B 只能是类空 4-矢。*

解. 1. 这是正确的。下面我们证明：

证明. 首先证明一个类光矢量确实与自己正交：这是显然的，因为类光矢量 l 的定义即为 $l\cdot l = 0$，所以有 $l\cdot kl = 0, \forall k = constant$；

其次来证明一个类空矢量能与类光矢量正交。考虑类光矢量 $l = (l_0, \vec{l})$ 和类空矢量 $s = (s_0, \vec{s})$，我们只要让 $l\cdot s = -s_0 l_0 + \vec{s}\cdot\vec{l} = 0$ 即可。而最简单的取法是让 $s_0 = 0$，同时在

3 维欧氏空间中把 $\vec{s}$ 取为与 $\vec{l}$ 垂直，容易证明 s 确实是一个类空矢量；这就证明了类空矢量确乎是

下面来证明类时矢量不能与之正交。我们不妨记类光矢量：$l=(l_0,\vec{l})$，类时矢量 $t=(t_0,\vec{t})$。根据定义，应该有：

$$l\cdot l=-l_0^2+\vec{l}\cdot\vec{l}=0$$
$$t\cdot t=-t_0^2+\vec{t}\cdot\vec{t}<0$$

倘如假定确实有类时矢量 t 与类光矢量 l 与之正交，则必然有：

$$l\cdot t=-l_0t_0+\vec{l}\cdot\vec{t}=0$$

移项平方处理，联立上面三个式子，应该得到：

$$l_0^2t_0^2=(\vec{l}\cdot\vec{t})(\vec{l}\cdot\vec{t})>(\vec{l}\cdot\vec{l})(\vec{t}\cdot\vec{t})$$

但这是不可能的，因为：

$$(\vec{l}\cdot\vec{t})^2=\|\vec{l}\|^2\|\vec{t}\|^2\cos^2\langle\vec{l},\vec{t}\rangle\le(\vec{l}\cdot\vec{l})(\vec{t}\cdot\vec{t})$$

所以假设不成立。即：不可能有类时矢量与类光矢量正交。

特别地，在以上式中，如果 t 是类光矢量，则上面所有的大于号和小于号均可以带等于；但若要允许这个正交矢量的存在，必须让各个不等式同时取等号，此时就有 $l=kt$，于是我们可以证明与一个类光矢量垂直的类光矢量必然是它自身的倍数。 □

2. 这是正确的，可以由上一问最后的讨论证明。

3. 这是正确的，可以通过构造方法来证明：

对于类空矢量 $A=(A_0,\vec{A})$，构造 $B=(\dfrac{\|\vec{A}\|^2}{A_0},\vec{A})$。由 $-A_0^2+\|\vec{A}\|^2>0$ 可以证明 $B\cdot B<0$，从而构造出了正交的类空矢量。

类似地，我们不妨给类光矢量取为 $B=(1,\vec{B})$，容易知道 $\|\vec{B}\|=1$。此时我们只要让 $\vec{B}\cdot\vec{A}=\|\vec{A}\|\cos\langle\vec{A},\vec{B}\rangle=A_0$ 即可。由于类空矢量满足 $\|\vec{A}|^2>A_0^2$，可以知道这个类光矢量 B 存在。

最后我们需要找一个类空矢量。这里我们可以用更加抽象的手法。我们知道一定存在一个 Lorentz 变换 Λ，使得 ΛA 的时间分量为 0。这时我们可以轻松地找出一个时间分量同样为 0 的类空矢量 B' 与之正交。由于 Lorentz 变换保内积不变，我们现在取 $B=\Lambda^{-1}B'$，自然有 A 与 B 垂直（同时，也保证 B 的内积不变，从而 Lorentz 变换后类空矢量仍然是类空矢量）。

4. 这是正确的。不妨设两个类时矢量为：$p=(p_0,\vec{p}),q=(q_0,\vec{q})$。我们计算点积：

$$p\cdot q=-p_0q_0+\vec{p}\cdot\vec{q}<-p_0q_0+\|\vec{p}\|\|\vec{q}\|<-p_0q_0+p_0q_0=0$$

其中最后一个等号利用了类空矢量 4-模方小于 0 的性质。这就证明了 B 不可能是类时矢量。同时，第一问中证明了 B 也不能是类光矢量，从而 B 只能是类空矢量。

□

给分规则：要写原因，不能只写对错判断！

例 1.2.3. *一个粒子的 4-速度 U^μ 与 4-矢 $A^\mu=(3,0,0,1)$ 平行，请求出 U^μ 在此惯性系中的笛卡尔分量。*

解. 我们知道 4-速度的模方为 $-c^2$。由平行的定义，可以知道 $U^\mu=(3k,0,0,k)$，k 是一个待定常数。

然后，我们来计算模方：

$$\begin{aligned}-c^2&=U^\mu U_\mu\\&=-9k^2+k^2\\&=-8k^2\\ \Rightarrow k&=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}c\end{aligned}$$

又 $x^0=3\lambda=\gamma c>0$，故 λ 只能取大于 0 的值，另一解为增根

所以 U^μ 的笛卡尔分量只能是 $U^i=(0,0,\frac{\sqrt{2}}{4}c)$。 □

PS. 助教们在改一部分作业的时候改错了，不应该加上 ± 的，大家请以习题课给的答案为准

例 1.2.4. *设粒子的 4-速度在某惯性系 S 中可表为 $U^\mu=(2c,U^1,U^2,U^3)$，此处 $U^i(i=1,2,3)$ 是 3 个待定常数. 倘若存在另外两个 4-矢 $A^\mu=(0,1,1,1)$ 和 $B^\mu=(0,0,0,3)$ 使得 $U^\mu A_\mu=0$ 和 $U^\mu B_\mu=3c$，请设法确定粒子 4-速度在 S 系中的表达式并求出其物理 3-速度 $\vec{u}$.*

解. 根据 4-速度模方的约束、内积条件，给出等式：

$$\begin{cases}U^\mu U_\mu=-4c^2+{U^1}^2+{U^2}^2+{U^3}^2=-c^2\\ U^\mu A_\mu=0\Rightarrow U^1+U^2+U^3=0\\ U^\mu B_\mu=3c\Rightarrow 3U^3=3c\end{cases}$$

从以上 3 个式子可以解出：

$$\begin{cases}U^1=\dfrac{\pm\sqrt{3}-1}{2}c\\ U^2=\dfrac{\mp\sqrt{3}-1}{2}c\\ U^3=c\end{cases}$$

另一方面，4-速度的时间分量为：$2c = U^0 = \gamma c$，则 $\gamma = 2$，又 $\vec{U} = \gamma(c, \vec{u})$，则：
4-速度 $(2c, \frac{\pm\sqrt{3}-1}{2}c, \frac{\mp\sqrt{3}-1}{2}c, c)$ 对应的 3-速度为 $(\frac{\pm\sqrt{3}-1}{4}c, \frac{\mp\sqrt{3}-1}{4}c, \frac{c}{2})$ □

1.3 0403

例 1.3.1. *在笛卡尔坐标系中，粒子在矢量 $A^\mu = (3, 0, 0, 1)$ 方向上的 4-速度为 U^μ。它是有质量粒子还是无质量粒子？在该坐标系中写出 U^μ 的各分量。*

解. 由题意得 $U^\mu = \alpha A^\mu, \alpha \neq 0$，则:

$$U^\mu U_\mu = -c^2 \Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}c$$

$$\Rightarrow U^\mu = (\frac{3\sqrt{2}}{4}c, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}c)$$

$\gamma = \frac{3\sqrt{2}}{4} \neq 0$，故为有质量粒子 □

给分规则：要判定粒子是否有质量，不然扣分

事实上无质量粒子一般写 4-动量不写 4-速度。

例 1.3.2. *一个有质量粒子在单位制 $c = 1$ 下有 4-速度 $U^\mu = (2, A, B, C)$，其中 A, B, C 是未知常数。通过条件（1）U^μ 与 4-向量 $A^\mu = (0, 1, 1, 1)$ 正交和（2）$U^\mu B_\mu = 3$，其中 4-矢量 $B^\mu = (0, 0, 0, 3)$，确定其空间分量的可能值。*

解. 由题目两条件和 4-速度性质可以写出（需注意单位制）:

$$\begin{cases} U^\mu A_\mu = A + B + C = 0 \\ U^\mu B_\mu = 3C = 3 \\ U^\mu U_\mu = -4 + A^2 + B^2 + C^2 = -1 \end{cases}$$

解得:

$$\begin{cases} A = \dfrac{\pm\sqrt{3} - 1}{2} \\ B = \dfrac{\mp\sqrt{3} - 1}{2} \\ C = 1 \end{cases}$$

即 4-速度 $U^\mu = (2, \frac{\pm\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\mp\sqrt{3}-1}{2}, 1)$ □

例 1.3.3. *一个有质量粒子的 3-速度为:*

$$\vec{u} = \frac{u_0}{1 + (t/t_0)}\vec{e_1}$$

在惯性参考系 Σ 中，u_0 和 t_0 是两个正的常数，$\vec{e_1}$ 是笛卡尔坐标沿 x 轴的基向量。这个粒子的本征时间 τ 是多少（写成 t 的函数形式）？它的 4-速度是多少？

解. 由 $\frac{dt}{d\tau}=\gamma$（本质为间隔不变），积分可得本征时间:

$$
\begin{aligned}
\tau &= \int_0^\tau d\tau = \int_0^t \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}dt = \int_0^t \sqrt{1-\frac{u_0^2/c^2}{(1+t/t_0)^2}}dt \\
&= -\frac{t_0u_0}{c}\int \frac{\sqrt{1-a^2}}{a^2}da \\
&= \frac{t_0u_0}{c}\int[(-\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}+\frac{\sqrt{1-a^2}}{a^2})+\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}]da \\
&= \frac{t_0u_0}{c}(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}+\arcsin a)+C_0 \\
&= (t+t_0)\sqrt{1-\frac{t_0^2u_0^2}{c^2(t+t_0)^2}}+\frac{t_0u_0\arcsin\frac{t_0u_0}{c(t+t_0)}}{c}+C_0 \\
&(C_0 = -t_0\sqrt{1-\frac{u_0^2}{c^2}}+\frac{t_0u_0\arcsin\frac{u_0}{c}}{c})
\end{aligned}
$$

由 $U^\mu=\gamma(c,\vec{u})$，可计算得 4-速度:

$$
U^\mu = \frac{1+t/t_0}{\sqrt{(1+t/t_0)^2-u_0^2/c^2}}(c,\frac{u_0}{1+(t/t_0)},0,0)
$$

□

给分规则：太难积了，所以写对积分关系式，4-速度即可

“动钟变慢”例子中 $\tau=\frac{t}{\gamma}$ 是在匀速 lorentz boost 下积分的结果，此时速度与时间无关，γ 可作常数提出；而速度与时间有关时 γ 表达式含 t，则应老老实实使用 $d\tau=\frac{dt}{\gamma}$ 积分计算。故此题不能简单的套用“动钟变慢”关系式 $\tau=\frac{t}{\gamma}$，大家在使用结论时要注意其先决条件或使用场景！

1.4 0412

例 1.4.1. 证明数学恒等式：

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r'})$$

解. 我们首先利用散度对其展开，在 $\vec{r}-\vec{r'} \neq 0$ 时：

$$\begin{aligned}\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} &= -\nabla \frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3} \\ &= -3\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3} + 3\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3} \\ &= 0\end{aligned}$$

而在 $\vec{r}-\vec{r'}=0$ 处，我们在一个球 $|\vec{r}-\vec{r'}| \leq R$ 上面积分：(使用奥高散度定理)

$$\begin{aligned}\int_{|\vec{r}-\vec{r'}|\leq R} -\nabla \cdot \frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}\mathrm{d}V &= \oint_{|\vec{r}-\vec{r'}|=R} -\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}\mathrm{d}S \\ &= -\frac{1}{r^2}r^2\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \\ &= -4\pi\end{aligned}$$

因为对 R 没有限制，所以取 $R \to 0$ 可在局部上有 $\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r'})$

又，其他部分均为 0（已经证明），所以可以在全局上证明命题成立。 □

例 1.4.2. 某标量场 $\phi(x)$ 满足的场方程是 $\sigma\partial^\mu\partial_\mu\phi(x) = -\lambda J(x)$，式中 σ 和 λ 是两个实参数，4-标量 $J(x)$ 是场 $\phi(x)$ 的源. 请验证体系的一个合格的拉氏密度是：

$$\mathcal{L} = -\frac{\sigma}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi + \lambda J(x)\phi(x)$$

解. 首先，我们从形式上可以看出这个拉氏量是 Lorentz 协变的。现在，我们只需要检验他能够给出正确的运动方程：

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \lambda J(x)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = -\sigma\partial^\mu\phi(x)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0 &\Rightarrow \lambda J(x) + \sigma\partial_\mu\partial^\mu\phi(x) = 0 \\ &\Rightarrow \sigma\partial^\mu\partial_\mu\phi(x) = -\lambda J(x)\end{aligned}$$

这就可以证明这是一个合理的拉氏密度。 □

例 1.4.3. 设 ϕ 和 ψ 是 $\mathbb{E}$ 中的两个标量场，请验证如下矢量分析恒等式：

1.

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi$$

2.

$$\nabla \times (\phi \nabla \psi) = \nabla \phi \times \nabla \psi$$

解. 这里我们全部都用指标来计算，默认爱因斯坦求和定理，并记直角坐标下的矢量基为 $\{e_i\}(i = 1, 2, 3)$：

1.

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\phi \cdot \psi) &= \partial_i (\phi \nabla \psi)_i \\
&= \partial_i (\phi \partial_i \psi) \\
&= \partial_i \phi \partial_i \psi + \phi \partial_i \partial_i \psi \\
&= (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) + \phi \nabla^2 \psi
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\phi \nabla \psi) &= \varepsilon_{ijk} e_i \partial_j (\phi \nabla \psi)_k \\
&= \varepsilon_{ijk} e_i \partial_j (\phi \partial_k \psi) \\
&= \varepsilon_{ijk} e_i (\partial_j \phi)(\partial_k \psi) + \varepsilon_{ijk} e_i \phi \partial_j \partial_k \psi \\
&= \varepsilon_{ijk} e_i (\partial_j \phi)(\partial_k \psi) \\
&= \nabla \phi \times \nabla \psi
\end{aligned}$$

其中红色部分的消失是因为 j, k 两个指标在 ε_{ijk} 中反对称，在 $\partial_j \partial_k$ 中对称，求和为 0. 这就证明了上面的恒等式。 □

常见：爱因斯坦求和里出现对称和反对称求和则 =0

例 1.4.4. *在惯性系 S 中，一个粒子具有 4-动量 $p^\mu = (E/c, \vec{p})$。观察者 B 以速度 $\vec{v} = ve_1$ 沿着 x^1 方向运动。计算观察者 B 计算出的粒子总能量，和在 B 的静止参考系中粒子沿着 $x^{1'}$ 方向的速度*

解. 我们考虑量纲统一的 4-动量：$p^\mu = (E/c, \gamma m v_x, \gamma m v_y, \gamma m v_z)$。其中，质量 m 可以通过 4-矢量的模方给出：$m = \dfrac{1}{c^2}\sqrt{E^2 - |\vec{p}|^2 c^2}$。对观察者 B 而言，4-矢量 p^μ 经一个 Lorentz 变换，其能量分量为：

$$\begin{aligned}
E'/c &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(E/c - v p_x/c) \\
\Rightarrow E' &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(E - v p_x)
\end{aligned}$$

这给出了观察者 B 计算出的粒子总能量。

又，我们计算出粒子的动能：应当有 $E=\gamma mc^2=\dfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，所以可以给出 $\gamma=E/mc^2=\dfrac{E}{\sqrt{E^2-|\vec{p}|^2c^2}}$ 。这就允许我们给出：

$$v_x=\frac{p_x}{\gamma m}=\frac{p_xc^2}{E}$$

这就允许我们用速度变换法则：

$$\begin{aligned}
v'_x&=\frac{v_x-v}{1-\dfrac{vv_x}{c^2}}\\
&=\frac{\dfrac{p_xc^2}{E}-v}{1-\dfrac{vp_x}{E}}\\
&=\frac{p_xc^2-vE}{E-vp_x}
\end{aligned}$$

这就是在 B 的静止参考系中观测到的粒子沿 x^1（同样也是 $x^{1'}$）方向的速度。 □

例 1.4.5. 电磁场张量 $F^{\alpha\beta}$ 的物理内涵规定为:$F^{0i}=E^i/c, F^{ij}=\varepsilon^{ijk}B_k$. 这里的 E^i 与 B_k 分别是电磁场电场强度与磁感应强度的笛卡尔分量. 请证明:

$$E^i=cF^{0i},\ B_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk}$$

解. 对于电场 E^i，由于光速 c 是常数，成立是显然的；

对于磁场 B_i，有：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk}&=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{jkl}B_l\\
&=\frac{1}{2}\varepsilon_{jki}\varepsilon^{jkl}B_l\\
&=\frac{1}{2}(\delta^k_k\delta^l_i-\delta^l_k\delta^k_i)B_l\\
&=\frac{1}{2}(3B_i-\delta^k_iB_k)\\
&=B_i
\end{aligned}$$

这就证明了磁场的式子也成立。 □

值与 ε^{ijk} 类似，偶排列为1
奇排列为-1

例 1.4.6. 请证明对偶电磁场张量 $\mathscr{F}^{\mu\nu}=\dfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ 的物理内涵是：

$$\mathscr{F}^{0i}=B^i,\ \mathscr{F}^{ij}=-\frac{1}{c}\varepsilon^{ijk}E_k$$

解. 如果取 $\mu,\nu=0,i$，4 阶反对称张量因 0 恰好处在恰当位置，会退化为 3 阶反对称张量（后两个指标也不能取 0）：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}^{0i} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{0ijk}F_{jk} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F_{jk} \\
&= \frac{1}{2}g^{il}\varepsilon_{ljk}F^{jk} \\
&= B^i
\end{aligned}
$$

如果取 $\mu,\nu=i,j$，容易知道后面两个指标必有一为 0。我们可以将其合并：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}^{ij} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ij0k}F_{0k} - \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk0}F_{k0} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{0kij}F_{0k} + \frac{1}{2}\varepsilon^{0ijk}F_{k0} \\
&= \varepsilon^{0ijk}F_{0k} \\
&= \varepsilon^{ijk}F_{0k} \\
&= -\frac{1}{c}\varepsilon^{ijk}E_k
\end{aligned}
$$

$\epsilon^{0ijk}=1$
$\epsilon^{ij0k}=1$
$\epsilon^{ijk0}=-1$

这就证明了我们想要的对偶电磁张量。

事实上，如果我们取场强 $A=A_\mu \mathrm{d}x^\mu$（联络 1-形式），把 $F=F_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\mu$ 看作四维空间中的一个 2-形式（曲率 2-形式），那么其 Hodge 对偶 $G=*F$ 也是一个 2-形式。并且我们可以通过 Hodge 对偶的运算规则给出 $G=*F\Rightarrow G_{\mu\nu}=\dfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$，这就解释了上面这个公式的来源。 □

1.5 0419

例 1.5.1. 对于一个孤立的电荷体系，电荷的宗量是一个 4-标量. 由于沿着速度方向存在洛伦兹收缩，试根据电流密度 4-矢量的洛伦兹变换，证明实验室参考系中测量到的电荷体密度 ρ 与电荷分布自身系中的电荷体密度 ρ_0 之间存在联系 $\rho = \gamma\rho_0$

解. 在电荷自身系中，我们以某一部分电荷整体运动的速度方向为 x 轴方向。在自身系中，电荷的 4-电流密度写为:

$$j_0 = (c\rho_0, 0, 0, 0)$$

在这个参考系中，我们可以用 Lorentz 变换回到地面系:

$$\begin{aligned}
j &= (c\rho, j_x, j_y, j_z) \\
c\rho &= \gamma(c\rho_0 + \beta j_{0x}) = \gamma c\rho_0 \\
j_x &= \gamma(j_{0x} + \beta c\rho_0) = \gamma v\rho_0 \\
j_y &= j_{0y} = 0 \\
j_z &= j_{0z} = 0
\end{aligned}$$

所以我们可以给出 $\rho = \gamma\rho_0$。 □

例 1.5.2. 设在惯性系 Σ 内电场与磁场相互垂直，$\vec{E}\perp\vec{B}$. 另一惯性系 Σ' 沿 $\vec{E}\times\vec{B}$ 方向相对于 Σ 运动. 试问 Σ' 系以什么速度运动才能使其中的观测者只观测到纯电场或者纯磁场？

解. 我们首先写出电磁场的 Lorentz 变换规律:

$$\begin{aligned}
\vec{E}' &= \gamma\vec{E} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})\vec{\beta} + \gamma c\vec{\beta}\times\vec{B} \\
\vec{B}' &= \gamma\vec{B} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{B})\vec{\beta} - \frac{\gamma}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}
\end{aligned}$$

我们注意到 $\vec{\beta}, \vec{E}, \vec{B}$ 两两垂直，所以中间项消去，给出:

$$\begin{aligned}
\vec{E}' &= \gamma\vec{E} + \gamma c\vec{\beta}\times\vec{B} \\
\vec{B}' &= \gamma\vec{B} - \frac{\gamma}{c}\vec{\beta}\times\vec{E} \\
\Rightarrow E' &= \gamma E + \gamma c\beta B \\
B' &= \gamma B - \frac{\gamma}{c}\beta E
\end{aligned}$$

令 $E' = 0$，可得 $\beta = -\dfrac{E}{cB}$，此时在 Σ' 系中没有电场；令 $B' = 0$，可得 $\beta = \dfrac{cB}{E}$，此时在 Σ' 系中没有磁场。需要注意的是，这两个 β 中有且只有一个绝对值小于 1，所以一旦 E, B 大小给定，则电场消失和磁场消失只有一个可以达成。

综上：$\frac{E}{B} < c$ 时，$v = \frac{E}{B}$ 时为纯磁场，无纯电场情况；

$\frac{E}{B} > c$ 时，$v = \frac{c^2 B}{E}$ 时为纯电场，无纯磁场情况；

$\frac{E}{B} = c$ 时，无纯电场、纯磁场情况； □

写成矢量形式也应该是对的，如果助教改错了记得来找助教加分

例 1.5.3. 点电偶极子 $\vec{p}$ 以速度 $\vec{v}$ 相对于实验室系 Σ 运动. 设 $t=0$ 时刻 $\vec{p}$ 刚好经过 Σ 系的原点. 试根据电磁势 A_μ 和电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 的洛伦兹变换，求出此点电偶极子在 Σ 系中产生的电磁势和场强分布。

解. 我们已经知道，静止的电偶极子在本征系中产生的电势分布为：

$$\begin{aligned}\varphi'(x,y,z) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_x x + p_y y + p_z z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\end{aligned}$$

考虑到静止的电偶极子不产生电场，我们可以给出：我们可以写出：$A'_\mu = (-\varphi, 0, 0, 0)$ 计及 $F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu$，我们可以给出：

$$\begin{aligned}F'_{10} = -F'_{01} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{p_x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} - \frac{3}{2}\frac{2x^2 p_x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}\right] \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_x(-2x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}\end{aligned}$$

类似地，我们可以写出另外两个分量：

$$\begin{aligned}F'_{20} = -F'_{02} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_y(x^2-2y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5} \\ F'_{30} = -F'_{03} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_z(x^2+y^2-2z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}\end{aligned}$$

这就在电偶极子本征系中算出了物理量。更紧凑地，我们写成：

$$\begin{aligned}\varphi' &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \\ \vec{E}' &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2\vec{p} - 3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^5} \\ \vec{B}' &= 0\end{aligned}$$

现在我们 Lorentz 变换回 Σ 系：

$$\varphi = \gamma\varphi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

但是 $\vec{r}$ 是本征系中的量，在 Σ 系中，我们要使用下面的这个式子：

$$\vec{r} = \vec{R} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{R}\cdot\vec{\beta})$$

将所有的 $\vec{r}$ 代换为 $\vec{R}$，就变成了 Σ 系中观测到的电势 φ 的表达式。如果需要的话，对 $\vec{R}$ 求散度，即可得到 $\vec{E}$。不再赘述。

而电磁张量的 Lorentz 变换实际上就给出了下面两式：

$$\begin{aligned}
\vec{E}' &= \gamma\vec{E} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})\vec{\beta} + \gamma c\vec{\beta}\times\vec{B} \\
\vec{B}' &= \gamma\vec{B} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{B})\vec{\beta} - \frac{\gamma}{c}\vec{\beta}\times\vec{E} \\
\Rightarrow \vec{E} &= \gamma\vec{E}' - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{E}')\vec{\beta} - \gamma c\vec{\beta}\times\vec{B}' \\
\vec{B} &= \gamma\vec{B}' - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{B}')\vec{\beta} + \frac{\gamma}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}'
\end{aligned}$$

注意到 $\vec{B}'=0$，给出：

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \gamma\vec{E}' - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{E}')\vec{\beta} \\
\vec{B} &= \frac{\gamma}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}',\ \vec{E}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2\vec{p} - 3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^5}
\end{aligned}$$

然后利用 $\vec{R}$ 和 $\vec{r}$ 的变换规律带入即可。 □

给分规则：电偶极子系中 ϕ、E、B 都写对，R 与 r 换算关系写对，场 lorentz 变换关系写对即可

第二章　作业选做题答案

2.1 optional

例 2.1.1. *在以下练习题中，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 是矢量场：*

1. 化简：

$$\nabla \times \vec{a}(\nabla \cdot \vec{a}) + \vec{a} \times [\nabla \times (\nabla \times \vec{a})] + \vec{a} \times \nabla^2 \vec{a}$$

2. 通过明确地写出笛卡尔坐标系中的分量，证明：

$$[\vec{c} \cdot (\vec{b} \cdot \nabla) - \vec{b} \cdot (\vec{c} \cdot \nabla)]\vec{a} = (\nabla \times \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

3. 证明：

$$\vec{a} \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\frac{1}{2}a^2) - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{a}$$

解. 1. 为方便起见，先研究 i 分量，再推广。

$$\begin{aligned}
&\nabla \times \vec{a}(\nabla \cdot \vec{a}) + \vec{a} \times [\nabla \times (\nabla \times \vec{a})] + \vec{a} \times \nabla^2 \vec{a}_i \\
&= \epsilon_{ijk}\partial_j[a_k\partial_m a_m] + \epsilon_{ijk}a_j\epsilon_{kmn}\partial_m[\epsilon_{nst}\partial_s a_t] + \epsilon_{ijk}a_j\partial_m\partial_m a_k \\
&= \epsilon_{ijk}\partial_j[a_k\partial_m a_m] + \epsilon_{ijk}a_j(\delta_{ks}\delta_{mt} - \delta_{kt}\delta_{ms})\partial_m\partial_s a_t + \epsilon_{ijk}a_j\partial_m\partial_m a_k \\
&= \epsilon_{ijk}\partial_j[a_k\partial_m a_m] + \epsilon_{ijk}a_j\partial_k\partial_m a_m - \epsilon_{ijk}a_j\partial_m\partial_m a_k + \epsilon_{ijk}a_j\partial_m\partial_m a_k \\
&= \epsilon_{ijk}\partial_j[a_k\partial_m a_m] + \epsilon_{ijk}a_j\partial_k\partial_m a_m \\
&= \epsilon_{ijk}(\partial_j a_k)\partial_m a_m + \epsilon_{ijk}(a_k\partial_j + a_j\partial_k)\partial_m a_m \\
&= \epsilon_{ijk}(\partial_j a_k)\partial_m a_m
\end{aligned}$$

倒数第二行由 $\epsilon_{ijk}(a_k\partial_j + a_j\partial_k) = 0$ 可化简得结果。

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{a}(\nabla \cdot \vec{a}) + \vec{a} \times [\nabla \times (\nabla \times \vec{a})] + \vec{a} \times \nabla^2 \vec{a} = (\nabla \times \vec{a})(\nabla \cdot \vec{a})$$

2. 研究 i 分量：

$$\begin{aligned}
&[\vec{c} \cdot (\vec{b} \cdot \nabla) - \vec{b} \cdot (\vec{c} \cdot \nabla)]\vec{a}]_i \\
&= c_i b_j \partial_j a_i - b_i c_j \partial_j a_i \\
&= (\delta_{ik}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jk})b_m c_k \partial_j a_i \\
&= \epsilon_{nij}\epsilon_{nkm}b_m c_k \partial_j a_i \\
&= (\epsilon_{nkm}b_m c_k)(\epsilon_{nij}\partial_j a_i) \\
&= (\nabla \times \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c})
\end{aligned}$$

3. 研究 i 分量：

$$\begin{aligned}[\vec{a}\times(\nabla\times\vec{a})]_i &= \epsilon_{ijk}a_j\epsilon_{kmn}\partial_m a_n \\ &= (\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})a_j\partial_m a_n \\ &= a_j\partial_i a_j - a_j\partial_j a_i \\ &= \partial_i(\frac{1}{2}a_j a_j) - a_j\partial_j a_i\end{aligned}$$

故有：

$$\vec{a}\times(\nabla\times\vec{a}) = \nabla(\frac{1}{2}a^2) - (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{a}$$

□

例 2.1.2. *在静止参考系 S 中的观测者 K 观测两个事件 A 和 B。事件 A 发生在原点，2 年后事件 B 发生在沿 x^1 轴正向 10 光年处。另一个参考系 S' 以速度 v 沿着的 S 的 x^1 轴移动，其中的静止的观测者 K' 在原点处经过 K。而此时观察者 K' 观测到事件 B 发生的时间比事件 A 晚一年。*

1. 观察着 K' 观测到事件 B 在多远处？

2. K 和 K' 之间的相对速度是多少？

解. 方法 1：由 Lorentz Boost：

$$\begin{cases} t'_B - t'_A = \dfrac{(t_B-t_A)-\frac{v}{c^2}(x_B-x_A)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ x'_B - x'_A = \dfrac{(x_B-x_A)-v(t_B-t_A)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ t_B - t_A = 2y \\ t'_B - t'_A = 1y \\ x_B - x_A = 10ly \end{cases}$$

$\Rightarrow \beta = \frac{20\pm\sqrt{97}}{101}$，其中 $\beta = \frac{20+\sqrt{97}}{101}$ 对应 $t'_B - t'_A = -1y$，违反因果律，为增根；
故：$v = \frac{20+\sqrt{97}}{101}c, x'_B - x'_A = \sqrt{97}ly$
方法 2：由间隔不变性：

$$(-c^2\Delta t^2) + L^2 = (-c^2\Delta t'^2) + L'^2 \Rightarrow L' = \sqrt{97}ly$$

由 $\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}L)$，计算得 $v = \frac{20-\sqrt{97}}{101}c$(去掉增根) □

例 2.1.3. 一个已经经过加速的飞船上的宇航员使用一个坐标系 (T, X, Y, Z)。相对于惯性系 (t, x, y, z)，有如下关系（取 $c = 1$）：

$$t = X\sinh(aT),\ x = X\cosh(aT),\ y = Y, z = Z$$

1. 计算宇航员坐标系中的度规。度规可以通过线元给出，而惯性系的度规自然来自 *Minkowski* 线元：$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$

2. 宇宙飞船在宇航员参考系中，作如下轨迹的运动：

$$X(T) = X_0 = constant,\ Y(T) = vT,\ for\, v > 0,\ Z(T) = 0,\ and\, 0 \le T \le T_0$$

求在宇航员的钟看来，这段旅程经历了多久。

解. 1. 我们直接作换元：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}t &= \frac{\partial t}{\partial X}\mathrm{d}X + \frac{\partial t}{\partial T}\mathrm{d}T \\
&= \sinh(aT)\mathrm{d}X + aX\cosh(aT)\mathrm{d}T \\
\mathrm{d}x &= \frac{\partial x}{\partial X}\mathrm{d}X + \frac{\partial x}{\partial T}\mathrm{d}T \\
&= \cosh(aT)\mathrm{d}X + aX\sinh(aT)\mathrm{d}T \\
\mathrm{d}y &= \mathrm{d}Y \\
\mathrm{d}z &= \mathrm{d}Z
\end{aligned}$$

于是，我们就可以计算出新的线元：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \\
&= [-\sinh^2(aT) + \cosh^2(aT)]\mathrm{d}X^2 \\
&+ 2aX[\cosh(aT)\sinh(aT) - \sinh(aT)\cosh(aT)]\mathrm{d}X\mathrm{d}T \\
&+ a^2X^2(\sinh^2(aT) - \cosh^2(aT))\mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}Y^2 + \mathrm{d}Z^2 \\
&= -a^2X^2\,\mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}X^2 + \mathrm{d}Y^2 + \mathrm{d}Z^2
\end{aligned}$$

所以，我们可以直接读出度规：

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -a^2X^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

这被称为 Rindler 度规。

2. 本题需要计算的是本征时。所谓（无穷小）本征时，就是世界线微元投在任意时刻的瞬时 Minkowski 惯性系的时间分量中。而世界线长在不同的度规、不同的参考系下都是不变的，所以，我们可以直接对世界线长度积分：注意到在运动中，$\mathrm{d}X=0, \mathrm{d}Y=v\mathrm{d}T, \mathrm{d}Z=0$

$$\begin{aligned}
-c^2d\tau^2 &= -a^2X^2dT^2+\mathrm{d}X^2+\mathrm{d}Y^2+\mathrm{d}Z^2\\
\Rightarrow d\tau &= \sqrt{\frac{a^2X^2}{c^2}\mathrm{d}T^2-\frac{1}{c^2}(\mathrm{d}X^2+\mathrm{d}Y^2+\mathrm{d}Z^2)}\\
\Rightarrow \tau &= \int_0^{T_0}\mathrm{d}\tau\\
&= \int_0^{T_0}\sqrt{\frac{a^2X_0^2}{c^2}\mathrm{d}T^2-\frac{v^2}{c^2}\mathrm{d}T^2}\\
&= \int_0^{T_0}\sqrt{\frac{a^2X_0^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}}\mathrm{d}T\\
&= \frac{\sqrt{a^2X_0^2-v^2}}{c}T_0
\end{aligned}$$

这就是我们要求的本征时。

□

例 2.1.4. 已知点电荷 Q 在自身参考系 Σ' 中激发的静电场强度分布为:

$$\vec{E}'(\vec{r'})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r'^3}\vec{r'}$$

现设 Q 以速度 $\vec{v}$ 相对于实验室系 Σ 做匀速直线运动. 试求 Q 在 Σ 系中激发的磁感应强度分布 $\vec{B}(\vec{r})$ 并检验磁高斯定律 $\nabla\cdot\vec{B}=0$.

解. 我们已经计算出，地面系的磁场应该表为:

$$\vec{B}=\frac{\gamma}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}'=\frac{\gamma Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{\beta}\times\vec{r'}}{r'^3}$$

考虑到 $\vec{r'}=\vec{r}+\dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{r}\cdot\vec{\beta})$，其模方为：${r'}^2=r^2+\gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{r})^2$ 我们带入可得:

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\gamma Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{\beta}\times\vec{r}}{\sqrt{r^2+\gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{r})^2}^3}$$

这就是我们所要的 Σ 系磁场分布。现在我们来验证高斯定律:

$$\begin{aligned}
&\vec{\beta}\times\vec{r}=\varepsilon_{ijk}e_i\beta_jr_k\\
\Rightarrow&\nabla\cdot(\vec{\beta})=\partial_i(\varepsilon_{ijk}\beta_jr_k)=\varepsilon_{ijk}\beta_j\delta_{ik}=0\\
&(r^2+\gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{r})^2)^{-3/2}=(r_ir_i+\gamma^2\beta_ir_i\beta_jr_j)^{-3/2}(2r+\gamma^2)\\
\Rightarrow&\nabla(r^2+\gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{r})^2)^{-3/2}=-\frac{3}{2}(2\vec{r}+2\gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{r})\vec{\beta})(r^2+\gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{r})^2)^{-5/2}
\end{aligned}$$

特别地，我们注意到：

$$(\vec{r}+\gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{r})\vec{\beta})\cdot(\vec{\beta}\times\vec{r})=0$$

这可以用三重积的几何意义轻松看出。所以，考虑到 $\nabla\cdot(\psi\vec{\phi})=\psi\nabla\cdot\vec{\phi}+\nabla\psi\cdot\vec{\phi}$，我们用这个形式来处理 $\vec{B}(\vec{r})$ 就知道对应的两项都是 0，所以我们给出 $\nabla\cdot\vec{B}=0$，即高斯定律在 Σ 系成立。 □

例 2.1.5. *设 $\phi(x)$ 是一个 4-标量场，请求出其在无穷小 Lorentz 变换 $\delta x^\mu=\eta^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\beta}x^\beta$ (式中 $\omega_{\mu\nu}=-\omega_{\nu\mu}$) 下的改变量 $\delta\phi(x)$ 和 $\delta_0\phi(x)$*

解. 4-标量场性质有：$\phi'(x')=\phi(x)$，则：

$$\delta\phi(x)=\phi'(x')-\phi(x)=0$$

$$\begin{aligned}\delta_0\phi(x)&=\phi'(x)-\phi(x)=\phi'(x'-\delta x)-\phi(x)\\&=-\delta x^\mu\partial_\mu\phi(x)=-\partial_\mu\phi(x)\eta^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\beta}x^\beta\\&=-\partial^\alpha\phi(x)\omega_{\alpha\beta}x^\beta=x^\beta\omega_{\beta\alpha}\partial^\alpha\phi(x)\end{aligned}$$

□

例 2.1.6. *设 $\vec{r}$ 是场点 P 在 $\mathbb{E}$ 中的 3-位置矢量，r 是其大小，定义域为 $r\geq 0$。已知：*

$$\nabla\cdot(\frac{\vec{r}}{r^3})=4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})$$

请证明如下数学恒等式：

$$\nabla\cdot(\frac{1}{r^3})=\frac{4\pi\vec{r}}{r^2}\delta^{(3)}(\vec{r})-\frac{3\vec{r}}{r^5}$$

解. 由导数乘法法则：

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot(\frac{\vec{r}}{r^3})=\vec{r}\nabla\cdot(\frac{1}{r^3})+\frac{1}{r^3}\nabla\cdot\vec{r}=4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})\\&\Rightarrow\nabla\cdot(\frac{1}{r^3})=\frac{\vec{r}}{r^2}[4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})-3\frac{1}{r^3}]=\frac{4\pi\vec{r}}{r^2}\delta^{(3)}(\vec{r})-\frac{3\vec{r}}{r^5}\end{aligned}$$

□

例 2.1.7. *承上题。若引入笛卡尔直角坐标系使得 $\vec{r}=x^i\vec{e}_i=x_i\vec{e}^i$，式中 $x_i=\delta_{ij}x^j$ 或者 $x^i=\delta^{ij}x_j$，请证明：*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}(\frac{1}{r})=\frac{3x_ix_j-r^2\delta_{ij}}{r^5}-\frac{4\pi x_ix_j}{r^2}\delta^{(3)}(\vec{r})$$

解. 由：$\frac{\partial}{\partial x^i}(\frac{1}{r}) = -\frac{x_i}{r^3}$(利用 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 带入计算可得)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}(\frac{1}{r}) &= \frac{\partial}{\partial x^j}(-\frac{x_i}{r^3}) = -\frac{\partial x_i}{\partial x^j}\frac{1}{r^3} - x_i\frac{\partial}{\partial x^j}(\frac{1}{r^3}) \\
&= -\frac{\delta_{ij}}{r^3} + x_i[\frac{3x_j}{r^5} - \frac{4\pi x_j}{r^2}\delta^{(3)}(\vec{r})] \\
&= \frac{3x_i x_j - r^2\delta_{ij}}{r^5} - \frac{4\pi x_i x_j}{r^2}\delta^{(3)}(\vec{r})
\end{aligned}$$

□

李雨桥、刘元彻
2024 年 5 月 12 日