中国科学技术大学电动力学期中考试试题卷(2023)

姓名:

学号:

成绩:

提示:

- 闵氏空间$\mathbb{M}_4$中洛伦兹推动变换$x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$的非零矩阵元是:

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma, \quad \Lambda^0{}_j = -\gamma\beta_j, \quad \Lambda^i{}_0 = -\gamma\beta^i, \quad \Lambda^i{}_j = \delta^i_j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j$$

  式中$\boldsymbol{\beta} = \beta^i \boldsymbol{e}_i$为无量纲的牵连速度,$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

- $\mathbb{M}_4$中的洛伦兹变换$x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$也包括空间反射变换:

$$\Lambda^0{}_0 = 1, \quad \Lambda^0{}_j = \Lambda^i{}_0 = 0, \quad \Lambda^i{}_j = -\delta^i_j$$

- 球谐函数$Y_{lm}(\theta,\phi)$定义为:

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \quad l \in \mathbb{N}, \ m = -l, \ -l+1, \ \cdots, l-1, \ l.$$

  几个低阶的球谐函数的显示形式是:

$$Y_{00}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_{1,\pm1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}$$

  球谐函数满足的正交性关系是:

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, Y_{lm}(\theta,\phi) Y^*_{l'm'}(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

- Γ-函数的积分表达式:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} \mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

  倘若s为正整数,则$\Gamma(s) = (s-1)!$.

简答(40分)：

1. 假设$T_{\mu\nu}(x)$是$\mathbb{M}_4$中的二阶张量场.据此可以构造出如下两个新的二阶4-张量场：

$$S_{\mu\nu}(x)=\frac{1}{2}\Big[T_{\mu\nu}(x)+T_{\nu\mu}(x)\Big]-\frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}T^{\alpha}_{\ \alpha}(x),\quad A_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\Big[T_{\mu\nu}(x)-T_{\nu\mu}(x)\Big]$$

式中$\eta_{\mu\nu}$是$\mathbb{M}_4$的度规矩阵，$T^{\alpha}_{\ \alpha}(x)\equiv\eta^{\alpha\beta}T_{\beta\alpha}(x)$是4-张量场$T_{\mu\nu}(x)$的迹.

- 请问$T_{\mu\nu}(x)$、$S_{\mu\nu}(x)$和$A_{\mu\nu}(x)$各自有多少独立分量(3分)？
- 线性变换$x^\mu\rightarrow x'^\mu=\Lambda^\mu_{\ \rho}x^\rho$在什么情形下称为洛伦兹变换？请分别明确写出4-张量场$A_{\mu\nu}(x)$和$T^{\alpha}_{\ \alpha}(x)$在一般洛伦兹变换$x^\mu\rightarrow x'^\mu=\Lambda^\mu_{\ \nu}x^\nu$下的变换法则(5分).
- 请计算$S^{\mu\nu}(x)A_{\mu\nu}(x)$并明确指出计算结果适合的惯性参考系(2分).

2. 某电场的电场强度分布在球坐标系中表达为$\boldsymbol{E}(r,\theta)=\frac{C}{r}\cos\theta\boldsymbol{e}_r$，式中$C$为一有量纲参数. 请问该电场是否是静电场(5分)？请简述理由(5分).

3. 设4-矢量场A_μ是电磁场的规范势，电磁场张量可表为$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. 请问两个4-标量$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$和$A^\mu A_\mu$在规范变换$A_\mu \rightsquigarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x)$下的变换法则(10分).

4. Proca矢量场$A_\mu(x)$的拉氏密度可表为：

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\sigma\, m^2 A^\mu A_\mu$$

式中$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, m可以是源于规范对称破缺机制出现的待定常参数, $\sigma = \pm 1$. 倘若以此拉氏密度出发构建体系的哈密顿表述, 体系中存在约束吗? 若存在, 请找出这些约束方程(10分).

计算(60分):

5. 倘若反对称的4-张量$F^{\mu\nu}$和

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

分别是电磁场张量与对偶电磁场张量.

- 请证明$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \propto G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}$并求出比例系数的精确表达式(5分).
- 请证明4-标量$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$是空间反射变换下的不变量、但$F^{\mu\nu}G_{\mu\nu}$则不然(10分).
- 明确写出电场强度$\boldsymbol{E}$和磁感应强度$\boldsymbol{B}$在空间反射变换下的变换法则(5分).

6. 电磁场的能量动量张量$\Theta^{\mu\nu}$定义为：

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\eta^{\nu\sigma}F^{\mu\rho}F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4\mu_0}\eta^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

- 请证明$\Theta^{\mu\nu}$具有对称、无迹和规范不变的性质(10分).
- 从麦克斯韦方程组可知$\partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = -J_\mu F^{\mu\nu}$，式中$J_\mu$为4-电流密度矢量. 若定义电磁场的角动量张量

  $$M^{\mu\rho\sigma} = \Theta^{\mu\rho}x^\sigma - \Theta^{\mu\sigma}x^\rho$$

  请建立$M^{\mu\rho\sigma}$满足的守恒定律(10分).

7. 当不考虑原子核的运动以及原子核的电荷分布时，氢原子的电荷分布在球坐标系中可表为：

$$\rho(r,\theta) = -\frac{er^2\sin^2\theta}{64\pi}e^{-r}, \quad 0 \le r < \infty,\ 0 \le \theta \le \pi.$$

e是电子电荷量的绝对值. 请计算氢原子所有的非零电多极矩(精确到电四极矩，10分)，计算其在远处的静电势分布(10分).

Hint：建议使用静电势的球多极矩展开.