自由标量场

设 $\Phi(x)$ 为 $\mathbb{M}_4$ 中的标量场，其拉氏密度可定义为：

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Phi^2 \qquad \rightsquigarrow \quad [\Phi] = M^{\frac{1}{2}}T^{-\frac{1}{2}}$$

式中 m 称为标量场 $\Phi(x)$ 的质量参数，$[m] = M$. 我们默认 m 为 4-标量，如此 $\mathscr{L}$ 明显是 4-标量，从而从源头上保证了此标量场理论的参考系选择无关性.

因为 $\mathscr{L}$ 中未包含相互作用项，此拉氏密度描写的实际上是一个自由标量场的演化. 拉氏方程为：

$$\partial_\mu\partial^\mu\Phi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Phi = 0$$

这是一个洛伦兹不变的波动方程. $m \neq 0$ 意味着此标量场波动的传播速度小于光速 c.

现在把标量场的描写纳入到哈密顿程式. 以 $\Phi(x)$ 作为相空间中场的正则坐标, 与之共轭的正则动量定义为:

$$\pi(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial^0\Phi(x))}=-\partial_0\Phi(x)=\partial^0\Phi(x)$$

决定经典场动力学演化的哈密顿密度根据拉氏密度 $\mathscr{L}$ 的勒让德变换定义:

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(x)&=\pi(x)\partial^0\Phi(x)-\mathscr{L}(x)\\&=-\frac{1}{2}\partial_0\Phi(x)\partial^0\Phi(x)+\frac{1}{2}\partial_i\Phi(x)\partial^i\Phi(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Phi^2\\&=\frac{1}{2}\pi^2(x)+\frac{1}{2}\nabla\Phi(x)\cdot\nabla\Phi(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Phi^2\end{aligned}$$

上式右端的表达式没有明晰的洛伦兹变换性质. 不过, 回忆标量场能量动量张量的定义式,

$$T_{\mu\nu}(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial^\mu\Phi(x))}\partial_\nu\Phi(x)-\eta_{\mu\nu}\mathscr{L}(x)$$

我们辨认出 $\boxed{\mathscr{H}(x)=-T_{00}(x)}$.

1. 标量场的哈密顿密度 $\mathscr{H}$ 构成二阶 4-张量的 00 分量，它在洛伦兹变换下遵从二阶张量的变换法则.
2. $\mathscr{H}(x) = -T_{00}(x)$ 意味着可以在物理上把 $\mathscr{H}$ 诠释为标量场 $\Phi(x)$ 在 $\mathbb{E}_3$ 中的能量体密度. 换言之，可以把 $\Phi(x)$ 场的总能量定义为：

$$\begin{aligned} H &= \int_\Omega \mathscr{H}(t,\ r)\,\mathrm{d}^3x \\ &= \int_\Omega \mathrm{d}^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi + \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Phi^2\right] \end{aligned}$$

最后让我们补上自由标量场 $\Phi(x)$ 的哈密顿正则方程组：

$$\boxed{\partial^0\Phi(t,\ r) = \frac{\delta H}{\delta\pi(t,\ r)}} = \pi(t,\ r),$$

$$\boxed{\partial^0\pi(t,\ r) = -\frac{\delta H}{\delta\Phi(t,\ r)}} = \nabla^2\Phi(t,\ r) - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Phi(t,\ r)$$

$\mathcal{Q}$: 应该用什么经典场描写电磁场 ?

首先看看静电学的启迪.

静电势 $\varphi(r)$ 是满足泊松方程的静态分布:

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$$

做代换 $\nabla^2 \rightsquigarrow \partial_\mu\partial^\mu$, 并要求源与势同时依赖于时间参数 t 和空间位矢 r, 我们可以把这个方程提升为:

$$\boxed{\sigma\, \partial_\mu\partial^\mu \phi(x) = -\lambda\, J(x)}$$

以初步满足相对性原理的要求, 式中约定 $\sigma = \pm 1$ 与 $\lambda = \pm 1$ 是独立取值的无量纲实参数. 欲真正通过相对性原理对候选物理规律的资格审查, 还须对势 $\phi(x)$ 和源 $J(x)$ 在洛伦兹变换下的性质做出明确规定.

- 最简单的选择是假定势 $\phi(x)$ 与源 $J(x)$ 均是 4-标量场.

假设某物理场可以用势分布 $\phi(x)$ 描写，其动力学演化方程是：

$$\sigma\, \partial_\mu \partial^\mu \phi(x) = -\lambda\, J(x)$$

其中 $J(x)$ 是 $\phi(x)$ 的源. 为符合相对性原理的要求，我们假设 $\phi(x)$ 和 $J(x)$ 均为 $\mathbb{M}_4$ 中的标量场，即 4-标量场. 不难看出，上述动力学方程可以看做是拉氏函数密度

$\phi(x)$ 与 $\partial_\mu\phi(x)$ 是广义坐标

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{\sigma}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \lambda\, J(x)\phi(x)$$

决定的拉氏方程.

1. 拉氏密度中未引入标量场 $\phi(x)$ 的质量项，相当于假设此标量场描写的波动其相速度等于光速.
2. 源 $J(x)$ 可以是另一个标量场或者几个标量场的耦合. 我们这里不关心 $J(x)$ 本身的动力学，仅把它看作是一个激发了 $\phi(x)$ 的 4-标量场.
3. $\phi(x)$ 的动力学方程在静态近似下退化为泊松方程：

$$\sigma\, \nabla^2 \phi(r) = -\lambda\, J(r) \qquad \boxed{\rightsquigarrow \quad \phi(r) = \frac{\lambda}{4\pi\sigma}\int \mathrm{d}^3 x'\, \frac{J(r')}{|r - r'|}}$$

标量场 $\phi(x)$ 的总能量是:

$$\boxed{H = \int_\Omega \mathrm{d}^3x \left(\frac{\sigma}{2}\pi^2 + \frac{\sigma}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi - \lambda J\phi\right)} \qquad \hookleftarrow \ \pi = \sigma\partial^0\phi$$

- H 积分核中的 π^2 项称为 $\phi(x)$ 场的动能项 (kinetic term). 为了保证无源的自由标量场能量有下界, 动能项必须非负.

  $\rightsquigarrow \sigma = 1.$

- 使用矢量分析恒等式

$$\nabla\phi\cdot\nabla\phi = \nabla\cdot(\phi\nabla\phi) - \phi\,\nabla^2\phi$$

代入后做分部积分,第一项扔掉

与场方程, 并假定

$$\phi(x)\Big|_{|r|\to\infty} \to 0$$

我们可以把场 $\phi(x)$ 的能量改写为:

$$H = \frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{d}^3x \left[\sigma\left(\partial_0\phi\right)^2 - \sigma\phi\partial_0^2\phi - 2\lambda J\phi\right]$$

此处暂时保留了参数 σ 取值的不确定.

- 对于静止的源所激发的静场，

$$J(x) = J(\boldsymbol{r}), \quad \phi(x) = \phi(\boldsymbol{r}) \qquad \rightsquigarrow \quad \partial_0\phi = \partial_0^2\phi = 0$$

场的能量表达为：

$$H = -\frac{\lambda}{2}\int_\Omega \mathrm{d}^3x\, J(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})$$

亦即：

$$\boxed{H = -\frac{\lambda^2}{8\pi\sigma}\int \mathrm{d}^3x \int \mathrm{d}^3x\,' \frac{J(\boldsymbol{r}\,')J(\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}\,'|}}$$

- 倘若激发静场分布 $\phi(\boldsymbol{r})$ 的源是两个点状荷，

$$J(\boldsymbol{r}) = Q_1\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1) + Q_2\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)$$

它们以标量场 $\phi(\boldsymbol{r})$ 为媒介发生相互作用的相互作用能量为：

$$\mathcal{W}_{12} = -\frac{\lambda^2}{4\pi\sigma}\frac{Q_1Q_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}$$

审视

$$\mathcal{W}_{12} = -\frac{\lambda^2}{4\pi\sigma}\frac{Q_1 Q_2}{|r_1 - r_2|}$$

我们看到:

1. 两个同号的点场源之间的相互作用究竟是斥力还是引力与参数 λ 的取值无关,但强烈地依赖于参数 σ 的取值.
2. 倘若可以取 $\sigma = -1$,则 Q_1 和 Q_2 同号时 $\mathcal{W}_{12} > 0$,表明二点场源之间存在的是斥力. 不幸的是,这是一个虚假的可能性.
3. 标量场 $\phi(x)$ 的相对论性理论要求 $\sigma = 1$. Q_1 和 Q_2 同号时 $\mathcal{W}_{12} < 0$. 换言之,二个同号的点场源之间通过标量场作为媒介传递的相互作用力是引力.
4. 所以,在狭义相对论意义下,电磁场的势不能用标量场描写[9].

既然标量场不能胜任,我们只好探索用矢量场描写电磁场的可能性.

---

[9]那么,相对论意义下万有引力的势可否用标量场描写呢?

回到静电势泊松方程的相对论性提升方程：

$$\sigma\, \partial_\mu \partial^\mu \phi(x) = -\lambda\, J(x)$$

既然不能把势 $\phi(x)$ 和源 $J(x)$ 看做 4-标量场，那么接下来最简单的能满足相对性原理要求的方案是假设它们形成 4-矢量场的时间分量：

$$A^\mu(x) = (\phi(x),\, \mathbf{A}(x))\,, \quad J^\mu(x) = (J(x),\, \mathbf{J}(x))$$

从而把静电势泊松方程在相对论意义下重新提升为：

$$\boxed{\sigma\, \partial_\mu \partial^\mu A_\nu(x) = -\lambda\, J_\nu(x)}$$

容易验证，$A_\nu(x)$ 服从的这个波动方程恰好是洛伦兹不变的拉氏密度

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{\sigma}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \lambda\, J^\mu A_\mu$$

所决定的拉氏方程.

1. 为叙事方便起见，我们暂时把 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 称为侯选电磁势.
2. 拉氏密度中未出现 $A_\mu(x)$ 的质量项，

$$-\frac{1}{2}\mu^2 A^\mu A_\mu$$

相当于承认侯选电磁势描写的波动其相速度等于光速.
3. 我们知道电磁场的源是电荷电流分布. 因此，可以把 $J^\mu(x)$ 称为电流密度 4-矢量. 这里不关心 $J^\mu(x)$ 本身的动力学，仅把它看作是一个激发了 $A_\mu(x)$ 的 4-矢量场.
4. 矢量场 $A_\mu(x)$ 的动力学方程在静态近似下退化为“泊松”方程：

$$\sigma\,\nabla^2 A_\mu(\boldsymbol{r}) = -\lambda\, J_\mu(\boldsymbol{r})$$

其在无界空间的解为：

$$\boxed{A_\mu(\boldsymbol{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\sigma}\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{J_\mu(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}$$

矢量场 $A_\mu(x)$ 的能量动量张量是:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial^\mu A^\rho)}\partial_\nu A^\rho - \eta_{\mu\nu}\mathscr{L} \qquad \boxed{\rightsquigarrow\ \partial^\mu T_{\mu\nu} = 0} \\ &= -\sigma\partial_\mu A_\rho\, \partial_\nu A^\rho + \eta_{\mu\nu}\left(\frac{\sigma}{2}\partial_\alpha A_\beta \partial^\alpha A^\beta - \lambda J^\rho A_\rho\right) \end{aligned}$$

由此知其在 $\mathbb{E}_3$ 中的能量体密度为:

$$\begin{aligned} \mathscr{H} &= -T_{00} \\ &= \sigma\partial_0 A_\rho\, \partial_0 A^\rho + \frac{\sigma}{2}\partial_\alpha A_\beta \partial^\alpha A^\beta - \lambda J^\rho A_\rho \\ &= \frac{\sigma}{2}\eta^{\mu\nu}\left(\pi_\mu \pi_\nu + \nabla A_\mu \cdot \nabla A_\nu\right) - \lambda J^\rho A_\rho \end{aligned}$$

式中

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial^0 A^\mu)} = -\sigma\partial_0 A_\mu$$

是相空间中与正则坐标 $A_\mu(x)$ 共轭的正则动量.

矢量场 $A_\mu(x)$ 的总能量为：

$$H=\int \mathrm{d}^3x\,\mathscr{H}=\int \mathrm{d}^3x\left(\frac{\sigma}{2}\eta^{\mu\nu}\pi_\mu\pi_\nu+\frac{\sigma}{2}\eta^{\mu\nu}\nabla A_\mu\cdot\nabla A_\nu-\lambda J^\rho A_\rho\right)$$

假定

$$A_\mu(x)\Big|_{|r|\to\infty}\to 0$$

我们可以把场的总能量改写为：

$$H=\int \mathrm{d}^3x\left[\frac{\sigma}{2}\eta^{\mu\nu}\left(\partial_0A_\mu\right)\left(\partial_0A_\nu\right)-\frac{\sigma}{2}A^\mu\left(\partial_0^2A_\mu\right)-\lambda J^\mu A_\mu\right]$$

对于静止的源 $J^\mu(r)$ 所激发的静场 $A_\mu(r)$，

$$H=-\frac{\lambda}{2}\int \mathrm{d}^3x\,J^\mu(r)A_\mu(r)=-\frac{\lambda}{8\pi\sigma}\iint \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3x'\,\frac{J^\mu(r)\,J_\mu(r')}{|r-r'|}$$

倘若激发静场分布 $A_\mu(r)$ 的源是两个点“电荷”,

$$J^\mu(r) = \delta_0^\mu \left[Q_1\delta^{(3)}(r - r_1) + Q_2\delta^{(3)}(r - r_2)\right]$$

它们以矢量场 $A_\mu(r)$ 为媒介发生相互作用的相互作用能量为[10]:

$$\mathcal{W}_{12} = \frac{\lambda^2}{4\pi\sigma}\frac{Q_1 Q_2}{|r_1 - r_2|}$$

1. 与标量场情形类似,两个同号的点场源之间的相互作用究竟是斥力还是引力与参数 λ 的取值无关,但强烈地依赖于参数 σ 的取值.
2. 倘若可以取 $\sigma = 1$,则 Q_1 和 Q_2 同号时 $\mathcal{W}_{12} > 0$,表明二点“电荷”之间存在的是斥力.这正是我们所需要的结果.
3. 不幸的是我们并无过硬的理由能强取 $\sigma = 1$. 这是因为矢量场 $A_\mu(x)$ 能量密度表达式中的动能项是:

$$\frac{1}{2}\sigma\eta^{\mu\nu}\pi_\mu\pi_\nu = \frac{1}{2}\sigma\left[-(\pi_0)^2 + \Sigma_{i=1}^3(\pi_i)^2\right] \quad \rightsquigarrow \quad \text{Failure !}$$

[10] 勿忘记 $J_0(r) = -J^0(r)$.

疑点重重的参考书

基础物理述评教程 （2011年科学出版社出版的图书）

播报 编辑 讨论 2 上传视频

《基础物理述评教程》是2011年科学出版社出版的图书，作者是潘根。本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，其前一版是教育部“面向21世纪”系列教材，被全国高等院校教学研究中心列入“优秀教材”行列。

书　名	基础物理述评教程	出版时间	2011-07
作　者	潘根	定　价	74 元
出版社	科学出版社	开　本	16 开
		ISBN	9787030317940

Let There be Light

Hermann Weyl (1855–1955)

- 前面的分析使我们悟到:倘若电磁势可以形成一个 4-矢量场 $A_\mu(x)$, 则其时间分量 $A_0(x)$ 与空间分量 $A_i(x)$ 不能彼此独立.
- 具体实现了这个设想的方案是外尔 (H. Weyl) 提出的**规范原理**.
- 规范原理之所以能名扬天下、最后发展成为物理学中决定基本相互作用力的一条铁律, 归功于 1954 年 Yang-Mills 非阿贝尔规范理论的诞生.

杨振宁与米尔斯(Mills):

获诺奖时的杨帅哥 (1957):

华人物理学家的双子星:

我们也不能忘记和杨振宁先生一起为华人争光的李政道先生. 李杨因正确地预言了弱作用过程中宇称不守恒而分享了 1957 年度的诺贝尔物理学奖金.

感动中国人物之百岁物理学家杨振宁 (2021):

颁奖词:

站在科学和传统的交叉点上, 惊人艳艳. 你贡献给世界的如此深奥, 懂的人不多; 你奉献给祖国的如此纯真, 我们都明白. 曾经, 你站在世界前排; 现在, 你与国家一起向未来.

外尔提出规范原理最初的目的是想构造引力与电磁相互作用的统一理论 (1918). 随着广义相对论 (GR) 的诞生 (1916), 我们有了一个描写引力的相对论性理论. GR 中存在着两个描写时空性质的动力学变量

$$g_{\mu\nu}(x), \quad \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}(x)$$

$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}(x)$ 称为仿射联络, 它用于定义 4-张量场的协变微商.例如:

$$\nabla_\mu A^\nu = \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\rho} A^\rho, \quad \nabla_\mu B_{\nu\rho} = \frac{\partial B_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} B_{\sigma\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} B_{\nu\rho}$$

- GR 通过假设 $\nabla_\mu g_{\rho\sigma} = 0$, 使得 $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}(x)$ 与 $g_{\mu\nu}(x)$ 不独立. 这是一个纯粹的引力理论.
- 外尔试图通过把条件 $\nabla_\mu g_{\rho\sigma} = 0$ 替换为

$$\boxed{(\nabla_\mu + A_\mu)\, g_{\rho\sigma} = 0}$$

使得 $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}(x), g_{\mu\nu}(x)$ 和新引入的 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 三者之间彼此依赖. 如此构建的理论实际上在引力之外还涉及到了其他的相互作用力.

外尔理论的作用量泛函存在着一种新的对称性:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &\rightsquigarrow g'_{\mu\nu}(x) = \omega^2(x) g_{\mu\nu}(x), \\ A_\mu(x) &\rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \left[\ln \omega^2(x)\right] \end{aligned}$$

- 这个对称变换与时空坐标 x^μ 的变换无关, 纯粹是场的变换. 对于 $g_{\mu\nu}(x)$ 而言, 它实际上是尺度伸缩变换 (Conformal).
- 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 的变换方式恰好是电磁势的规范变换, 因此外尔把 $A_\mu(x)$ 诠释成了电磁势.
- 爱因斯坦对外尔的电磁引力统一理论持反对态度. 如果外尔的理论是正确的, 那么引力场中原子发光的频率不仅依赖于原子目前的位置、也依赖于它的演化历史. 这个推论与实验相悖. 外尔早期关于规范变换的努力是一次失败的尝试.

量子力学(1925)、特别是波动力学(1926)问世后, 沉寂了大约十年的外尔重新研究了规范变换. 这一次他取得了重大成功!

20 世纪初叶，伴随着原子光谱学的发展，物理学家们逐渐认识到光与实物粒子都具有波动、粒子二重性. 正确地描写了电子等实物粒子波粒二象性的理论是所谓非相对论性量子力学：

- 实物粒子的状态由波函数 $\Psi(x)$ 描写. $\Psi(x)$ 本身不是可观测量、没有物理意义，但 $|\Psi(x)|^2$ 是发现粒子的概率体密度.

- 波函数 $\Psi(x)$ 随时间的演化遵从薛定谔方程. 自由粒子的薛定谔方程为：

  $$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi$$

  倘若不计粒子的自旋，则自由粒子薛定谔方程的相对论性对应是所谓的 Klein-Gordon 方程：

  $$\partial_\mu\partial^\mu\Psi(x) - \mu^2\Psi(x) = 0$$

  此处“波函数” $\Psi(x)$ 是一个 4-标量场，其有效的质量参数为 $\mu = mc/\hbar$.

- 根据波函数的概率诠释(见上页), $\Psi(x)$ 与 $\Psi(x)\exp(i\theta)$ 在描写实物粒子量子态方面是完全等价的:

$$\Psi(x) \sim \Psi'(x) = \Psi(x)\exp(i\theta), \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}$$

的确, $|\Psi(x)|^2 = |\Psi'(x)|^2$, 且当 θ 取实常数时 $\Psi(x)$ 与 $\Psi'(x)$ 服从同一个波动方程.

$\mathscr{Q}$: 倘若 $\theta = \theta(x)$, 等价性 $\Psi(x) \sim \Psi'(x) = \Psi(x)\exp(i\theta)$ 是否还存在?

朴素地看, 虽然 $\Psi(x)$ 与 $\Psi'(x) = \Psi(x)e^{i\theta(x)}$ 仍具有相同的绝对值[11],

$$|\Psi(x)|^2 = |\Psi'(x)|^2$$

但因为

$$\partial_\mu \Psi'(x) = \partial_\mu \left[\Psi(x)e^{i\theta(x)}\right] = e^{i\theta(x)}\left[\partial_\mu \Psi(x) + i\Psi(x)\partial_\mu\theta(x)\right]$$

$\Psi(x)$ 与 $\Psi'(x) = \Psi(x)e^{i\theta(x)}$ 不满足相同的波动方程 $\rightsquigarrow$ 不再等价.

[11] 默认 $\theta(x) \in \mathbb{R}$.

外尔的规范原理

外尔的想法 (1929) 与众不同，他认为：

- 波函数的概率诠释是量子力学中必须坚守的基本原则. 换言之，$\Psi(x)$ 与 $\Psi'(x) = \Psi(x)e^{i\theta}$ 在 $\theta = \theta(x)$ 情形下也是等价的.
- $\Psi(x)$ 与 $\Psi'(x) = \Psi(x)e^{i\theta(x)}$ 不能满足自由粒子波函数的波动方程，说明自然界不存在真正的自由粒子. 实物粒子都要参与某种由 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 传递的相互作用.
- 为了标记实物粒子参与的相互作用，外尔假设实物粒子携带某种荷 q. 为了让 $\Psi(x)$ 与 $\Psi'(x)$ 满足相同的波动方程，外尔假设必须在波动方程中把 ∂_μ 替换为协变导数算符

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu(x)$$

如此应摒弃 Klein-Gordon 方程，而改用如下波动方程

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \Psi(x) - \mu^2 \Psi(x) = 0$$

描写实物粒子波动性.

- 当实物粒子波函数发生位相变换

$$\Psi(x) \quad \rightsquigarrow \Psi'(x) = \Psi(x)e^{iq\theta(x)}$$

时, 作为相互作用媒介的 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 要发生一个伴随的规范变换:

$$A_\mu(x) \quad \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x)$$

如此,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu\Psi(x) \rightsquigarrow \mathcal{D}'_\mu\Psi'(x) &= \left[\partial_\mu - iqA'_\mu(x)\right]\left[\Psi(x)e^{iq\theta(x)}\right] \\
&= e^{iq\theta(x)}\left[\partial_\mu + iq\partial_\mu\theta(x) - iqA'_\mu(x)\right]\Psi(x) \\
&= e^{iq\theta(x)}\left[\partial_\mu - iqA_\mu(x)\right]\Psi(x) \\
&= e^{iq\theta(x)}\mathcal{D}_\mu\Psi(x)
\end{aligned}$$

同理有:

$$\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu\Psi(x) \rightsquigarrow \mathcal{D}'_\mu\mathcal{D}'^\mu\Psi'(x) = e^{iq\theta(x)}\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu\Psi(x)$$

这样，实物粒子波函数满足的波动方程

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \Psi(x) - \mu^2 \Psi(x) = 0$$

在联合变换

$$\boxed{\Psi(x) \rightsquigarrow \Psi'(x) = \Psi(x) e^{iq\theta(x)}, \quad A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)}$$

下实际上是不变的：

$$\mathcal{D}'_\mu \mathcal{D}'^\mu \Psi'(x) - \mu^2 \Psi'(x) = e^{i\theta(x)} \Big[\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \Psi(x) - \mu^2 \Psi(x) \Big] = 0$$

- 变换因子 $e^{i\theta(x)}$ 的全体按普通乘法形成 $U(1)$ 群. 因此，上述联合变换称为局域的 $U(1)$ 规范变换. 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 称为 $U(1)$ 规范势，其描写的相互作用传递媒介称为 $U(1)$ 规范场.
- 规范变换的存在意味着规范势 $A_\mu(x)$ 与

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x), \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

在描写 $U(1)$ 规范场方面完全等价. 因此，规范势 $A_\mu(x)$ 的分量并不都是独立的动力学变量. 例如可以按 $A'_0(x) = \partial_0 \theta(x)$ 选择规范变换函数 $\theta(x) \rightsquigarrow A_0(x) = 0$.

- 规范变换函数 $\theta(x)$ 从物理上讲是完全任意的．如果有需要，$\theta(x)$ 可以人为地随意指定．指定 $\theta(x)$ 这件事通常称为选择“规范”． 例如可以通过求解微分方程

$$\partial^\mu A'_\mu(x) = \partial^\mu \partial_\mu \theta(x)$$

指定 $\theta(x)$，它相当于是要求：

$$\partial^\mu A_\mu(x) = 0$$

这样确定的规范称为洛伦茨 (Lorenz) 规范．洛伦茨规范最突出的优点是它具有参考系选择无关性，因此是电动力学中最常用的规范选择．电动力学中另一个使用频率较高的规范选择是库仑规范：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(x) = \partial^i A_i(x) = 0$$

它没有参考系选择无关性． 前页提到的

$$A_0(x) = 0$$

也是一个合理的 (非洛伦兹协变的) 规范选择．

外尔规范原理小结:

1. 波函数 $\Psi(x)$ 与 $\Psi(x)e^{iq\theta(x)}$ 的等价性要求实物粒子必须携带某种荷 q,参与由规范势 $A_\mu(x)$ 传递的 $U(1)$ 规范相互作用,使得 $\Psi(x)$ 满足波动方程[12]:

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \Psi(x) - \mu^2 \Psi(x) = 0$$

式中 $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu(x)$.

2. 物质场 $\Psi(x)$ 与规范势 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 的变换

$$\Psi(x) \rightsquigarrow \Psi'(x) = \Psi(x)e^{iq\theta(x)}, \quad A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$$

统称为 (局域的)$U(1)$ 规范变换.

3. 物质场 $\Psi(x)$ 的波动方程

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \Psi(x) - \mu^2 \Psi(x) = 0$$

在局域规范变换下具有不变性. 这就是俗称的局域规范对称性.

[12]此处假定 $\Psi(x)$ 是 4-标量场,描写无自旋标量粒子的波动性.

$\mathscr{C}$: $U(1)$ 规范场就是电磁场.

1. 通过之前的讨论我们知道一个不受约束的 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 并不能逻辑自洽地描写电磁势. 但如果进一步要求 $A_\mu(x)$ 是 $U(1)$ 规范势, 即要求 $A_\mu(x)$ 的拉氏密度具有局域规范变换

$$A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x)$$

下的不变性, 则 $A_\mu(x)$ 正是电磁场的势.

现在给出详细解释.

倘若电磁势可以用一个 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 描写, 那么用于构造电磁场拉氏密度的“元器件”只能如下五种 4-张量:

$$A_\mu(x), \quad \partial_\mu A_\nu(x), \quad J^\mu(x), \quad \eta_{\mu\nu}, \quad \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

此处 $J^\mu(x)$ 是电流密度 4-矢量. 在电磁场拉氏密度中使用 $J^\mu(x)$ 是为了反映电荷电流是电磁场场源的基本实验事实.

- 类比于标量场 $\Phi(x)$ 拉氏密度中的动能项，

$$\frac{1}{2}\partial_\mu \Phi(x)\, \partial^\mu \Phi(x)$$

我们朴素地猜测电磁场 $A_\mu(x)$ 拉氏密度中的动能项是用“广义速度”$\partial_\mu A_\nu(x)$ 构造出的如下 4-标量：

$$\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu(x)\, \partial^\mu A^\nu(x)$$

引入“广义速度”的对称与反对称组合

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$$
$$G_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) + \partial_\nu A_\mu(x)$$

我们看到：

$$\partial_\mu A_\nu(x) = \frac{1}{2}\left[F_{\mu\nu}(x) + G_{\mu\nu}(x)\right]$$

猜测的电磁势动能项可以改写为:

$$\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu(x)\,\partial^\mu A^\nu(x) = \frac{1}{8}\Big[F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + G_{\mu\nu}(x)G^{\mu\nu}(x)\Big]$$

然而只有 $F_{\mu\nu}(x)$ 才是规范不变的场强, $G_{\mu\nu}(x)$ 并不具有规范变换下的不变性.

1. 电磁场拉氏密度的动能项只能考虑规范不变的 4-标量:

$$F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)$$

   而 $G_{\mu\nu}(x)G^{\mu\nu}(x)$ 项必须舍弃.

2. 倘若采取国际单位制并计及电磁相互作用过程中的时间反演对称性和宇称守恒定律, 一般把电磁场拉氏密度中的动能项取为:

$$\mathscr{L}_{\rm K}(x) = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)$$

   式中 μ_0 为真空的磁导率.

- $F_{\mu\nu}(x)$ 称为法拉第张量，或称为电磁场张量. 当电磁势做规范变换 $A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x)$，电磁场张量

$$\boxed{F_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)}$$

的变换法则是：

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) \rightsquigarrow F'_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu A'_\nu(x) - \partial_\nu A'_\mu(x) \\ &= \partial_\mu\Big[A_\nu(x) + \partial_\nu\theta(x)\Big] - \partial_\nu\Big[A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x)\Big] \\ &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \\ &= F_{\mu\nu}(x) \end{aligned}$$

即 $F_{\mu\nu}(x)$ 是规范变换下的不变量.

- 通过求 $F_{\rho\sigma}$ 与 $\mathbb{M}_4$ 中全反对称不变张量 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 的缩并，可以定义所谓对偶电磁场张量：

$$\boxed{\mathscr{F}^{\mu\nu}(x) \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}(x)}$$

它显然也是规范变换下的不变量.

- $\mathscr{F}^{\mu\nu}(x)$ 与 $F_{\mu\nu}(x)$ 的缩并可以形成如下规范不变的 4-标量：

$$\mathscr{F}^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)$$

这个 4-标量是 $\partial_\mu A_\nu(x)$ 的二次型. 或许我们可以考虑把它作为电磁场拉氏密度动能项的一个候选者. 然而由于 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 不是时间反演变换和空间反射变换下的不变张量[13], 这个 4 标量出现在拉氏密度中会破坏电磁相互作用过程中的宇称守恒. 计及这一点, 电磁场的拉氏密度中一般并不包括这个规范不变的 4-标量.

- 普通的 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 的拉氏密度中可以包含一个质量项

$$\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A_\mu(x)A^\mu(x)$$

但此质量项也不具备规范变换下的不变性, 因此不能出现在电磁场的拉氏密度中.

[13] $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 在时间反演变换和空间反射变换下会改变符号.

答疑:

课后 (20220324) 有同学问: 电磁场拉氏密度动能项中是否可以包含如下“广义速度”的二次型

$$(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) = (\partial_\mu A^\mu)^2$$

答案是不可以.

$\partial_\mu A^\mu(x)$ 没有规范变换 $A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x)$ 下的不变性:

$$\partial_\mu A^\mu(x) \rightsquigarrow \partial_\mu A'^\mu(x) = \partial_\mu A^\mu(x) + \partial_\mu\partial^\mu\theta(x)$$

问题中的二次型在规范变换下变成了:

$$(\partial_\mu A'^\mu)^2 = (\partial_\mu A^\mu)^2 + 2(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu\partial^\nu\theta) + (\partial_\nu\partial^\nu\theta)^2$$

即使分离出一些全导数项(丢掉), 也无法按照某个合理的理由把上式中涉及规范变换函数 $\theta(x)$ 的项全丢弃. 二次型 $(\partial_\mu A^\mu)^2$ 虽然是 4-标量, 但因其不具备规范变换下的不变性, 它没有资格出现在电磁场的拉氏密度中.

或许有同学读到某些参考书[14]上把电磁场拉氏密度的动能项写成了

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\, \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2$$

上式的结果与本讲义前页的答疑并无内在矛盾. 上式右端两项均无规范变换下的对称性, 但二者之和是规范不变的. 以我之见, 上式的做法不是从第一原理出发构造拉氏密度, 它只不过是在知道了拉氏密度的正确形式后凑答案而已. 不难看出:

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) \\
&= 2\partial_\mu A_\nu\, \partial^\mu A^\nu - 2\partial_\mu A_\nu\, \partial^\nu A^\mu \\
&= 2\partial_\mu A_\nu\, \partial^\mu A^\nu - 2\partial_\mu\left(A_\nu\, \partial^\nu A^\mu\right) + 2A_\nu \partial^\nu\left(\partial_\mu A^\mu\right) \\
&= 2\partial_\mu A_\nu\, \partial^\mu A^\nu - 2\partial_\mu\left(A_\nu\, \partial^\nu A^\mu\right) + 2\partial^\nu\left(A_\nu\, \partial_\mu A^\mu\right) - 2\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2
\end{aligned}$$

丢弃了无关紧要的全导数项后, 我们有:

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\, \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2$$

[14]例如网红讲义: David Tong, Quantum Field Theory, Eq.(1.18), Page 16.

- 根据 $A_\mu(x)$ 与 $F_{\mu\nu}(x)$ 还可以构造出两个 4-标量:

$$A_\mu(x)A_\nu(x)\left\{\begin{array}{l} F^{\mu\nu}(x) \\ \mathscr{F}^{\mu\nu}(x) \end{array}\right. \qquad \hookleftarrow \quad \mathscr{F}^{\mu\nu}(x) \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}(x)$$

姑且不论此二 4-标量在规范变换下是否不变, 因为它们恒等于零, 它们自然不会出现在电磁场的拉氏密度中.

- 电磁场拉氏密度的相互作用项有如下候选 4-标量:

$$J^\mu(x)A_\mu(x)$$

在规范变换下, $J^\mu(x)A_\mu(x)$ 的变换性质是:

$$\begin{aligned} J^\mu(x)A'_\mu(x) &= J^\mu(x)A_\mu(x) + J^\mu(x)\partial_\mu\theta(x) \\ &= J^\mu(x)A_\mu(x) + \partial_\mu\Big[J^\mu(x)\theta(x)\Big] - \Big[\partial_\mu J^\mu(x)\Big]\theta(x) \end{aligned}$$

上式右端第二项 $\partial_\mu\left(J^\mu\theta\right)$ 是全导数项, 它的存在与否不影响作用量泛函, 可以视而不见. 欲使 $J^\mu(x)A_\mu(x)$ 具有规范变换下的不变性, 必要条件是存在电荷守恒定律, $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$.

- 通常把电流密度 4-矢量 $J^{\mu}(x)$ 的分量形式表为：

$$J^{\mu} = (c\rho, \boldsymbol{j})$$

式中 $\rho(x)$ 与 $\boldsymbol{j}(x)$ 分别诠释为电荷电流体系的电荷体密度与电流密度矢量. 如此, 洛伦兹不变的连续性方程

$$\partial_{\mu} J^{\mu} = 0$$

可以用分量形式重新表达为：

$$\frac{\partial \rho(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = 0$$

其积分形式是：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \rho(\boldsymbol{r}, t)\, \mathrm{d}^3 x = -\oint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}}$$

这正是我们期望的电荷守恒定律. 之所以存在电荷守恒定律, 是因为电磁相互作用具有 $U(1)$ 规范变换下的对称性.