电动力学第二次习题课

中国科学技术大学 李雨桥 刘元彻

PART ONE

期中考试须知

考试须知

1.考试范围：前三章：狭义相对论、电动力学的理论基础、静电学。加速系和CS term不考

2.试卷题型，难度与去年一致

PART TWO

习题串讲

一、矢量运算：常见于推导证明题中

例 2.1.1. 在以下练习题中，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是矢量场：

1. 化简：

$$\nabla \times \vec{a}(\nabla \cdot \vec{a}) + \vec{a} \times [\nabla \times (\nabla \times \vec{a})] + \vec{a} \times \nabla^2 \vec{a}$$

2. 通过明确地写出笛卡尔坐标系中的分量，证明：

$$[\vec{c} \cdot (\vec{b} \cdot \nabla) - \vec{b} \cdot (\vec{c} \cdot \nabla)]\vec{a} = (\nabla \times \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

3. 证明：

$$\vec{a} \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\frac{1}{2}a^2) - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{a}$$

解. 1. 为方便起见，先研究 i 分量，再推广。

$$\begin{aligned}
&\nabla \times \vec{a}(\nabla \cdot \vec{a}) + \vec{a} \times [\nabla \times (\nabla \times \vec{a})] + \vec{a} \times \nabla^2 \vec{a}_i \\
&= \epsilon_{ijk}\partial_j[a_k \partial_m a_m] + \epsilon_{ijk} a_j \epsilon_{kmn} \partial_m [\epsilon_{nst} \partial_s a_t] + \epsilon_{ijk} a_j \partial_m \partial_m a_k \\
&= \epsilon_{ijk}\partial_j[a_k \partial_m a_m] + \epsilon_{ijk} a_j (\delta_{ks}\delta_{mt} - \delta_{kt}\delta_{ms}) \partial_m \partial_s a_t + \epsilon_{ijk} a_j \partial_m \partial_m a_k \\
&= \epsilon_{ijk}\partial_j[a_k \partial_m a_m] + \epsilon_{ijk} a_j \partial_k \partial_m a_m - \epsilon_{ijk} a_j \partial_m \partial_m a_k + \epsilon_{ijk} a_j \partial_m \partial_m a_k \\
&= \epsilon_{ijk}\partial_j[a_k \partial_m a_m] + \epsilon_{ijk} a_j \partial_k \partial_m a_m \\
&= \epsilon_{ijk}(\partial_j a_k)\partial_m a_m + \epsilon_{ijk}(a_k \partial_j + a_j \partial_k)\partial_m a_m \\
&= \epsilon_{ijk}(\partial_j a_k)\partial_m a_m
\end{aligned}$$

倒数第二行由 $\epsilon_{ijk}(a_k \partial_j + a_j \partial_k) = 0$ 可化简得结果。

2. 研究 i 分量：

$$\begin{aligned}
&[\vec{c} \cdot (\vec{b} \cdot \nabla) - \vec{b} \cdot (\vec{c} \cdot \nabla)]\vec{a}]_i \\
&= c_i b_j \partial_j a_i - b_i c_j \partial_j a_i \\
&= (\delta_{ik}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jk}) b_m c_k \partial_j a_i \\
&= \epsilon_{nij}\epsilon_{nkm} b_m c_k \partial_j a_i \\
&= (\epsilon_{nkm} b_m c_k)(\epsilon_{nij}\partial_j a_i) \\
&= (\nabla \times \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c})
\end{aligned}$$

一、矢量运算：常见于推导证明题中

例 1.4.3. 设 ϕ 和 ψ 是 $\mathbb{E}$ 中的两个标量场，请验证如下矢量分析恒等式：

1.

$$\nabla\cdot(\phi\nabla\psi)=\nabla\phi\cdot\nabla\psi+\phi\nabla^2\psi$$

2.

$$\nabla\times(\phi\nabla\psi)=\nabla\phi\times\nabla\psi$$

解. 这里我们全部都用指标来计算，默认爱因斯坦求和定理，并记直角坐标下的矢量基为 $e_i\}(i=1,2,3)$：

1.

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\phi\cdot\psi)&=\partial_i(\phi\nabla\psi)_i\\&=\partial_i(\phi\partial_i\psi)\\&=\partial_i\phi\partial_i\psi+\phi\partial_i\partial_i\psi\\&=(\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi)+\phi\nabla^2\psi\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\nabla\times(\phi\nabla\psi)&=\varepsilon_{ijk}e_i\partial_j(\phi\nabla\psi)_k\\&=\varepsilon_{ijk}e_i\partial_j(\phi\partial_k\psi)\\&=\varepsilon_{ijk}e_i(\partial_j\phi)(\partial_k\psi)+\varepsilon_{ijk}e_i\phi\partial_j\partial_k\psi\\&=\varepsilon_{ijk}e_i(\partial_j\phi)(\partial_k\psi)\\&=\nabla\phi\times\nabla\psi\end{aligned}$$

其中红色部分的消失是因为 j,k 两个指标在 ε_{ijk} 中反对称，在 $\partial_j\partial_k$ 中对称，求和为 0.

这就证明了上面的恒等式。 □

常见：爱因斯坦求和里出现对称和反对称求和则 =0

0412 T3

一、矢量运算：delta函数

例 1.4.1. 证明数学恒等式：

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')$$

解. 我们首先利用散度对其展开，在 $\vec{r}-\vec{r}' \neq 0$ 时：

$$\begin{aligned}\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= -\nabla \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \\ &= -3\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + 3\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \\ &= 0\end{aligned}$$

而在 $\vec{r}-\vec{r}'=0$ 处，我们在一个球 $|\vec{r}-\vec{r}'| \leq R$ 上面积分：（使用奥高散度定理）

$$\begin{aligned}\int_{|\vec{r}-\vec{r}'|\leq R} -\nabla\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\mathrm{d}V &= \oint_{|\vec{r}-\vec{r}'|=R} -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\mathrm{d}S \\ &= -\frac{1}{r^2}r^2\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \\ &= -4\pi\end{aligned}$$

因为对 R 没有限制，所以取 $R\to 0$ 可在局部上有 $\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')$

又，其他部分均为 0（已经证明），所以可以在全局上证明命题成立。 □

二、事件间隔：间隔类型判断

例 1.1.3. 确定下面三个 4-矢量（其分量用直角坐标分量写出）是类时、类空还是类光的。

$$A^\mu = (1, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$B^\mu = (1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$C^\mu = (3, 12\lambda, 0, 0)$$

其中 λ 是参数。

解. 直接计算内积:

1. $A_\mu A^\mu = -1 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$，从而 A^μ 是类光矢量;
2. $B_\mu B^\mu = -1 + 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} < 0$，从而 B_μ 是类时矢量;
3. $C_\mu C^\mu = -9 + 144\lambda^2 + 0 + 0 = 144\lambda^2 - 9$，当 $|\lambda| < \frac{1}{4}$ 时，$C_\mu C^\mu < 0$，为类时；当 $|\lambda| = \frac{1}{4}$ 时，$C_\mu C^\mu = 0$，为类光；当 $|\lambda| > \frac{1}{4}$ 时，$C_\mu C^\mu > 0$，为类空。

□

例 1.1.4. 如果一个 4-矢量 v^μ 是类时的，而另一个 4-矢量 s^μ 是类空的，他们的标量积 $_\mu s^\mu = 0$ 成立吗？

解. 不一定。比如我们可以给出如下例子:

$$v^\mu = (3, 1, 1, 1),\ v_\mu v^\mu = -9 + 1 + 1 + 1 = -6 < 0$$

这 v^μ 就是类时的，现在我们来讨论 S^μ 的取值。

1. 取 $s^\mu = (0, 2, 2, 2), s_\mu s^\mu = 0 + 4 + 4 + 4 = 12 > 0$，可知 $v_\mu s^\mu = 0 + 2 + 2 + 2 = 6 > 0$
2. 取 $s^\mu = (1, 1, 1, 1), s_\mu s^\mu = -1 + 1 + 1 + 1 = 3 > 0$，可知 $v_\mu s^\mu = -3 + 1 + 1 + 1 = 0$
3. 取 $s^\mu = (0, -1, -1, -1), s_\mu s^\mu = 0 + 1 + 1 + 1 = 3 > 0$，可知 $v_\mu s^\mu = 0 - 1 - 1 - 1 = -3 < 0$

所以我们完全无法确定标量积的符号，只能说他们的标量积可能为 0。 □

二、事件间隔：间隔不变性

例 2.1.2. 在静止参考系 S 中的观测者 K 观测两个事件 A 和 B。事件 A 发生在原点，2 年后事件 B 发生在沿 x^1 轴正向 10 光年处。另一个参考系 S' 以速度 v 沿着的 S 的 x^1 轴移动，其中的静止的观测者 K' 在原点处经过 K。而此时观察者 K' 观测到事件 B 发生的时间比事件 A 晚一年。

1. 观察着 K' 观测到事件 B 在多远处？

2. K 和 K' 之间的相对速度是多少？

解. 方法 1：由 Lorentz Boost：

$$\begin{cases} t'_B - t'_A = \dfrac{(t_B - t_A) - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x'_B - x'_A = \dfrac{(x_B - x_A) - v(t_B - t_A)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t_B - t_A = 2y \\ t'_B - t'_A = 1y \\ x_B - x_A = 10ly \end{cases}$$

$\Rightarrow \beta = \frac{20 \pm \sqrt{97}}{101}$，其中 $\beta = \frac{20+\sqrt{97}}{101}$ 对应 $t'_B - t'_A = -1y$，违反因果律，为增根；
故：$v = \frac{20+\sqrt{97}}{101}c, x'_B - x'_A = \sqrt{97}ly$
方法 2：由间隔不变性：

$$(-c^2\Delta t^2) + L^2 = (-c^2\Delta t'^2) + L'^2 \Rightarrow L' = \sqrt{97}ly$$

由 $\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}L)$，计算得 $v = \frac{20-\sqrt{97}}{101}c$(去掉增根) □

二、事

解. 由 $\frac{dt}{d\tau}=\gamma$（本质为间隔不变），积分可得本征时间:

$$\tau=\int_0^\tau d\tau=\int_0^t\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}dt=\int_0^t\sqrt{1-\frac{u_0^2/c^2}{(1+t/t_0)^2}}dt$$
$$=-\frac{t_0u_0}{c}\int\frac{\sqrt{1-a^2}}{a^2}da$$
$$=\frac{t_0u_0}{c}\int[(-\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}+\frac{\sqrt{1-a^2}}{a^2})+\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}]da$$
$$=\frac{t_0u_0}{c}(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}+\arcsin a)+C_0$$
$$=(t+t_0)\sqrt{1-\frac{t_0^2u_0^2}{c^2(t+t_0)^2}}+\frac{t_0u_0\arcsin\frac{t_0u_0}{c(t+t_0)}}{c}+C_0$$
$$(C_0=-t_0\sqrt{1-\frac{u_0^2}{c^2}}+\frac{t_0u_0\arcsin\frac{u_0}{c}}{c})$$

由 $U^\mu=\gamma(c,\vec{u})$，可计算得 4-速度:

$$U^\mu=\frac{1+t/t_0}{\sqrt{(1+t/t_0)^2-u_0^2/c^2}}(c,\frac{u_0}{1+(t/t_0)},0,0)$$

□

给分规则：太难积了，所以写对积分关系式，4-速度即可

“动钟变慢”例子中 $\tau=\frac{t}{\gamma}$ 是在匀速 lorentz boost 下积分的结果，此时速度与时间无关，γ 可作常数提出；而速度与时间有关时 γ 表达式含 t，则应老老实实使用 $d\tau=\frac{dt}{\gamma}$ 积分计算。故此题不能简单的套用“动钟变慢”关系式 $\tau=\frac{t}{\gamma}$，大家在使用结论时要注意其先决条件或使用场景！

0403 T3

二、事件间隔：间隔不变性推固有时

2. 本题需要计算的是本征时。所谓（无穷小）本征时，就是世界线微元投在任意时刻的瞬时 Minkowski 惯性系的时间分量中。而世界线长在不同的度规、不同的参考系下都是不变的，所以，我们可以直接对世界线长度积分：注意到在运动中，$\mathrm{d}X=0$, $\mathrm{d}Y=v\mathrm{d}T$, $\mathrm{d}Z=0$

$$
\begin{aligned}
-c^2 d\tau^2 &= -a^2X^2dT^2+\mathrm{d}X^2+\mathrm{d}Y^2+\mathrm{d}Z^2 \\
\Rightarrow d\tau &= \sqrt{\frac{a^2X^2}{c^2}\mathrm{d}T^2-\frac{1}{c^2}(\mathrm{d}X^2+\mathrm{d}Y^2+\mathrm{d}Z^2)} \\
\Rightarrow \tau &= \int_0^{T_0}\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^{T_0}\sqrt{\frac{a^2X_0^2}{c^2}\mathrm{d}T^2-\frac{v^2}{c^2}\mathrm{d}T^2} \\
&= \int_0^{T_0}\sqrt{\frac{a^2X_0^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}}\mathrm{d}T \\
&= \frac{\sqrt{a^2X_0^2-v^2}}{c}T_0
\end{aligned}
$$

这就是我们要求的本征时。

□

0322 optional

三、：4-标量、矢量、张量

例 1.2.1. 设 A、B 和 C 是 3 个 4-矢量。

1. 倘若在惯性系 Σ 中，这些 4-矢量表达为：

$$A=4e_0+3e_1+2e_2+e_3,\ B=5e_0+4e_1+3e_2,\ C=e_0+2e_1+3e_2+4e_3$$

式中 $e_\mu(\mu=0,1,2,3)$ 是 Σ 系的基矢。请证明 A 是类时矢量、B 是类光矢量和 C 是类空矢量。

2. 倘若进行惯性系的变换使得新的惯性系 Σ' 中的基矢定义为：

$$e_0'=\cosh\theta e_0+\sinh\theta e_1,\ e_1'=\sinh\theta e_0+\cosh\theta e_1,\ e_2'=e_2, e_3'=e_3$$

请求出 Σ' 相对于 Σ 的物理 3-速度 $\vec{v}$，并把 A、B 和 C 这三个 4-矢量在 Σ' 系中重新表达出来。

2. 对于一个矢量而言，其坐标分量是所谓逆变分量，而基矢是协变的。我们先给出矩阵形式的变换：

$$\begin{pmatrix} e_0' & e_1' & e_2' & e_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & 0 & 0 \\ \sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

我们考虑到：

$$\begin{pmatrix} e_0' & e_1' & e_2' & e_3' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \{x'\}=g^{-1}Mg\{x\} \Leftrightarrow \{x\}=g^{-1}M^{-1}g\{x'\}$$

这便是我们求出的两组基下的矢量分量变换法则。

经过计算，我们可以显式地写出：

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & 0 & 0 \\ \sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta & 0 & 0 \\ -\sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

这就对应了一个沿 e_1 方向 Boost 的 Lorentz 变换。我们可以利用定义，直接写出：$\vec{v}=c\tanh\theta e_1$，就是 Σ' 相对于 Σ 的相对运动速度。利用上面的坐标变换公式，我们也可以给出：

$$A=(4\cosh\theta-3\sinh\theta)e'_0+(-4\sinh\theta+3\cosh\theta)e'_1+2e_2'+e_3'$$

$$B=(5\cosh\theta-4\sinh\theta)e'_0+(-5\sinh\theta+4\cosh\theta)e'_1+3e_2'$$

$$C=(\cosh\theta-2\sinh\theta)e'_0+(-\sinh\theta+2\cosh\theta)e'_1+3e_2'+4e_3'$$

0329 T1

三、4-速度，4-加速度：

例 1.2.3. 一个粒子的 4-速度 U^μ 与 4-矢 $A^\mu=(3,0,0,1)$ 平行，请求出 U^μ 在此惯性系中的笛卡尔分量。

解. 我们知道 4-速度的模方为 $-c^2$。由平行的定义，可以知道 $U^\mu=(3k,0,0,k)$，k 是一个待定常数。

然后，我们来计算模方：

$$\begin{aligned}-c^2&=U^\mu U_\mu\\&=-9k^2+k^2\\&=-8k^2\\\Rightarrow k&=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}c\end{aligned}$$

又 $x^0=3\lambda=\gamma c>0$，故 λ 只能取大于 0 的值，另一解为增根

所以 U^μ 的笛卡尔分量只能是 $U^i=(0,0,\frac{\sqrt{2}}{4}c)$。 □

PS. 助教们在改一部分作业的时候改错了，不应该加上 $\pm$ 的，大家请以习题课给的答案为准

例 1.2.4. 设粒子的 4-速度在某惯性系 S 中可表为 $U^\mu=(2c,U^1,U^2,U^3)$，此处 $U^i(i=1,2,3)$ 是 3 个待定常数. 倘若存在另外两个 4-矢 $A^\mu=(0,1,1,1)$ 和 $B^\mu=(0,0,0,3)$ 使得 $U^\mu A_\mu=0$ 和 $U^\mu B_\mu=3c$，请设法确定粒子 4-速度在 S 系中的表达式并求出其物理 3-速度 $\vec{u}$.

解. 根据 4-速度模方的约束、内积条件，给出等式：

$$\begin{cases}U^\mu U_\mu=-4c^2+U^{1 2}+U^{2 2}+U^{3 2}=-c^2\\U^\mu A_\mu=0\Rightarrow U^1+U^2+U^3=0\\U^\mu B_\mu=3c\Rightarrow 3U^3=3c\end{cases}$$

从以上 3 个式子可以解出：

$$\begin{cases}U^1=\dfrac{\pm\sqrt{3}-1}{2}c\\U^2=\dfrac{\mp\sqrt{3}-1}{2}c\\U^3=c\end{cases}$$

另一方面，4-速度的时间分量为：$2c=U^0=\gamma c$，则 $\gamma=2$，又 $\vec{U}=\gamma(c,\vec{u})$，则：4-速度 $(2c,\frac{\pm\sqrt{3}-1}{2}c,\frac{\mp\sqrt{3}-1}{2}c,c)$ 对应的 3-速度为 $(\frac{\pm\sqrt{3}-1}{4}c,\frac{\mp\sqrt{3}-1}{4}c,\frac{c}{2})$ □

0329 T3,4

三、4-速度，4-加速度：

例 1.1.2. 利用粒子的 4-加速度 $\mathscr{A}^\mu = \frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau}$ 可以定义一个 4-标量 $a=\sqrt{\mathscr{A}^\mu\mathscr{A}_\mu}$. 请证明 a 恰为粒子瞬时自身系中物理加速度 $\hat{\omega}$ 的大小

解. 我们已经知道 4-速度 $U^\mu=\gamma_u c(1,\vec{\beta}_u)$，现在我们求导，可以给出：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \\
\Rightarrow \mathscr{A}^0 &= \frac{\mathrm{d}U^0}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}U^0}{\mathrm{d}t}\gamma_u \\
&= \gamma_u^4\vec{\beta}_u\cdot\vec{\omega} \\
\mathscr{A}^i &= \frac{\mathrm{d}U^i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}U^i}{\mathrm{d}t}\gamma_u \\
&= \gamma_u(\gamma_u\omega^i + \gamma_u^3(\vec{\beta}_u\cdot\vec{\omega})\beta_u^i) \\
&= \gamma_u^2\omega^i + \gamma_u^4(\vec{\beta}_u\cdot\vec{\omega})\beta_u^i
\end{aligned}
$$

这样我们就可以计算标量：

$$
\begin{aligned}
a &= \sqrt{\mathscr{A}^\mu\mathscr{A}_\mu} \\
&= \sqrt{-\mathscr{A}^0\mathscr{A}^0+\mathscr{A}^i\mathscr{A}^i} \\
&= \sqrt{-\gamma_u^8(\vec{\beta}_u\cdot\vec{\omega})^2+\gamma_u^4\vec{\omega}^2+\gamma_u^8(\vec{\beta}_u\cdot\vec{\omega})^2\vec{\beta}_u^2+2\gamma_u^6(\vec{\beta}_u\cdot\vec{\omega})^2} \\
&= \sqrt{\gamma_u^4\vec{\omega}^2-\gamma_u^6(\vec{\beta}_u\cdot\vec{\omega})+2\gamma_u^6(\vec{\beta}_u\cdot\vec{\omega})^2}\ (\text{with }\ -1+\vec{\beta}_u^2=-\gamma_u^{-2}) \\
&= \sqrt{\gamma_u^4\vec{\omega}^2+\gamma_u^6(\vec{\beta}_u\cdot\vec{\omega})^2}
\end{aligned}
$$

在粒子的瞬时自身系中，其速度自然是 $\vec{\beta}_u=0$，从而 Lorentz 因子 $\gamma_u=1$，加速度即为 $\vec{\omega}=\hat{\omega}$。于是：

$$
a=\sqrt{\gamma_u^4\vec{\omega}^2+\gamma_u^6(\vec{\beta}_u\cdot\vec{\omega})^2}=\|\hat{\omega}\|
$$

这就证明了，4-加速度的 Minkowski 模长就是粒子在瞬时自身系下的加速度的大小。 □

0322 T2

四、相对论自由粒子：

例 1.4.4. 在惯性系 S 中，一个粒子具有 4-动量 $p^\mu=(E/c,\vec{p})$。观察者 B 以速度 $\vec{v}=ve_1$ 沿着 x^1 方向运动。计算观察者 B 计算出的粒子总能量，和在 B 的静止参考系中粒子沿着 $x^{1'}$ 方向的速度

解. 我们考虑量纲统一的 4-动量：$p^\mu=(E/c,\gamma mv_x,\gamma mv_y,\gamma mv_z)$。其中，质量 m 可以通过 4-矢量的模方给出：$m=\frac{1}{c^2}\sqrt{E^2-|\vec{p}|^2c^2}$。对观察者 B 而言，4-矢量 p^μ 经一个 Lorentz 变换，其能量分量为：

$$E'/c=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(E/c-vp_x/c)$$
$$\Rightarrow E'=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(E-vp_x)$$

这给出了观察者 B 计算出的粒子总能量。

又，我们计算出粒子的动能：应当有 $E=\gamma mc^2=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，所以可以给出 $\gamma=E/mc^2=\frac{E}{\sqrt{E^2-|\vec{p}|^2c^2}}$。这就允许我们给出：

$$v_x=\frac{p_x}{\gamma m}=\frac{p_xc^2}{E}$$

这就允许我们用速度变换法则：

$$v'_x=\frac{v_x-v}{1-\frac{vv_x}{c^2}}=\frac{\frac{p_xc^2}{E}-v}{1-\frac{vp_x}{E}}=\frac{p_xc^2-vE}{E-vp_x}$$

这就是在 B 的静止参考系中观测到的粒子沿 x^1（同样也是 $x^{1'}$）方向的速度。 □

0412 T4

五、电磁场张量：

例 1.4.5. 电磁场张量 $F^{\alpha\beta}$ 的物理内涵规定为:$F^{0i}=E^i/c, F^{ij}=\varepsilon^{ijk}B_k$. 这里的 E^i 与 B_k 分别是电磁场电场强度与磁感应强度的笛卡尔分量. 请证明:

$$E^i=cF^{0i},\ B_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk}$$

解. 对于电场 E^i，由于光速 c 是常数，成立是显然的；

对于磁场 B_i，有：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk}&=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{jkl}B_l\\&=\frac{1}{2}\varepsilon_{jki}\varepsilon^{jkl}B_l\\&=\frac{1}{2}(\delta_k^k\delta_i^l-\delta_k^l\delta_i^k)B_l\\&=\frac{1}{2}(3B_i-\delta_i^kB_k)\\&=B_i\end{aligned}$$

这就证明了磁场的式子也成立。 □

例 1.4.6. 请证明对偶电磁场张量 $\mathscr{F}^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ 的物理内涵是：

$$\mathscr{F}^{0i}=B^i,\ \mathscr{F}^{ij}=-\frac{1}{c}\varepsilon^{ijk}E_k$$

解. 如果取 $\mu,\nu=0,i$，4 阶反对称张量因 0 恰好处在恰当位置，会退化为 3 阶反对称张量（后两个指标也不能取 0）：

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{0i}&=\frac{1}{2}\varepsilon^{0ijk}F_{jk}\\&=\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F_{jk}\\&=\frac{1}{2}g^{il}\varepsilon_{ljk}F^{jk}\\&=B^i\end{aligned}$$

如果取 $\mu,\nu=i,j$，容易知道后面两个指标必有一为 0。我们可以将其合并：

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{ij}&=\frac{1}{2}\varepsilon^{ij0k}F_{0k}-\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk0}F_{k0}\\&=-\frac{1}{2}\varepsilon^{0kij}F_{0k}+\frac{1}{2}\varepsilon^{0ijk}F_{k0}\\&=-\varepsilon^{0ijk}F_{0k}\\&=-\varepsilon^{ijk}F_{0k}\\&=-\frac{1}{c}\varepsilon^{ijk}E_k\end{aligned}$$

0412 T5,6

六、电磁场洛伦兹变换：

例 1.5.1. 对于一个孤立的电荷体系，电荷的宗量是一个 4-标量. 由于沿着速度方向存在洛伦兹收缩，试根据电流密度 4-矢量的洛伦兹变换，证明实验室参考系中测量到的电荷体密度 ρ 与电荷分布自身系中的电荷体密度 ρ_0 之间存在联系 $\rho = \gamma\rho_0$

解. 在电荷自身系中，我们以某一部分电荷整体运动的速度方向为 x 轴方向。在自身系中，电荷的 4-电流密度写为：

$$j_0 = (c\rho_0, 0, 0, 0)$$

在这个参考系中，我们可以用 Lorentz 变换回到地面系：

$$\begin{aligned}
j &= (c\rho, j_x, j_y, j_z) \\
c\rho &= \gamma(c\rho_0 + \beta j_{0x}) = \gamma c\rho_0 \\
j_x &= \gamma(j_{0x} + \beta c\rho_0) = \gamma v\rho_0 \\
j_y &= j_{0y} = 0 \\
j_z &= j_{0z} = 0
\end{aligned}$$

所以我们可以给出 $\rho = \gamma\rho_0$。 □

六、电磁场洛伦兹变换：

例 1.5.2. 设在惯性系 Σ 内电场与磁场相互垂直，$\vec{E}\perp\vec{B}$．另一惯性系 Σ' 沿 $\vec{E}\times\vec{B}$ 方向相对于 Σ 运动．试问 Σ' 系以什么速度运动才能使其中的观测者只观测到纯电场或者纯磁场？

解. 我们首先写出电磁场的 Lorentz 变换规律：

$$\vec{E}' = \gamma\vec{E} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})\vec{\beta} + \gamma c\vec{\beta}\times\vec{B}$$
$$\vec{B}' = \gamma\vec{B} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{B})\vec{\beta} - \frac{\gamma}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}$$

我们注意到 $\vec{\beta},\vec{E},\vec{B}$ 两两垂直，所以中间项消去，给出：

$$\vec{E}' = \gamma\vec{E} + \gamma c\vec{\beta}\times\vec{B}$$
$$\vec{B}' = \gamma\vec{B} - \frac{\gamma}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}$$
$$\Rightarrow E' = \gamma E + \gamma c\beta B$$
$$B' = \gamma B - \frac{\gamma}{c}\beta E$$

令 $E'=0$，可得 $\beta = -\dfrac{E}{cB}$，此时在 Σ' 系中没有电场；令 $B'=0$，可得 $\beta=\dfrac{cB}{E}$，此时在 Σ' 系中没有磁场。需要注意的是，这两个 β 中有且只有一个绝对值小于 1，所以一旦 E,B 大小给定，则电场消失和磁场消失只有一个可以达成。

综上：$\frac{E}{B}<c$ 时，$v=\frac{E}{B}$ 时为纯磁场，无纯电场情况；

$\frac{E}{B}>c$ 时，$v=\frac{c^2B}{E}$ 时为纯电场，无纯磁场情况；

$\frac{E}{B}=c$ 时，无纯电场、纯磁场情况； □

写成矢量形式也应该是对的，如果助教改错了记得来找助教加分

0419 T2

六、电磁场洛伦兹变换：

例 1.5.3. 点电偶极子 $\vec{p}$ 以速度 $\vec{v}$ 相对于实验室系 Σ 运动. 设 $t=0$ 时刻 $\vec{p}$ 刚好经过 Σ 系的原点. 试根据电磁势 A_μ 和电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 的洛伦兹变换，求出此点电偶极子在 Σ 系中产生的电磁势和场强分布。

解. 我们已经知道，静止的电偶极子在本征系中产生的电势分布为：

$$\varphi'(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_xx+p_yy+p_zz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}$$

考虑到静止的电偶极子不产生电场，我们可以给出：我们可以写出：$A'_\mu=(-\varphi,0,0,0)$ 计及 $F'_{\mu\nu}=\partial_\mu A'_\nu-\partial_\nu A'_\mu$，我们可以给出：

$$F'_{10}=-F'_{01}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{p_x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}-\frac{3}{2}\frac{2x^2p_x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_x(-2x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}$$

类似地，我们可以写出另外两个分量：

$$F'_{20}=-F'_{02}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_y(x^2-2y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}$$

$$F'_{30}=-F'_{03}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_z(x^2+y^2-2z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}$$

这就在电偶极子本征系中算出了物理量。更紧凑地，我们写成：

$$\varphi'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$
$$\vec{E}'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2\vec{p}-3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^5}$$
$$\vec{B}'=0$$

现在我们 Lorentz 变换回 Σ 系：

$$\varphi=\gamma\varphi'=\frac{1}{4\pi\varepsilon\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

但是 $\vec{r}$ 是本征系中的量，在 Σ 系中，我们要使用下面的这个式子：

$$\vec{r}=\vec{R}+\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{R}\cdot\vec{\beta})$$

将所有的 $\vec{r}$ 代换为 $\vec{R}$，就变成了 Σ 系中观测到的电势 φ 的表达式。如果需要的话，对 $\vec{R}$ 求散度，即可得到 $\vec{E}$。不再赘述。

而电磁张量的 Lorentz 变换实际上就给出了下面两式：

$$\vec{E}'=\gamma\vec{E}-\frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})\vec{\beta}+\gamma c\vec{\beta}\times\vec{B}$$
$$\vec{B}'=\gamma\vec{B}-\frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{B})\vec{\beta}-\frac{\gamma}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}$$
$$\Rightarrow\vec{E}=\gamma\vec{E}'-\frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{E}')\vec{\beta}-\gamma c\vec{\beta}\times\vec{B}'$$
$$\vec{B}=\gamma\vec{B}'-\frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{B}')\vec{\beta}+\frac{\gamma}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}'$$

注意到 $\vec{B}'=0$，给出：

$$\vec{E}=\gamma\vec{E}'-\frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{E}')\vec{\beta}$$
$$\vec{B}=\frac{\gamma}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}',\ \vec{E}'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2\vec{p}-3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^5}$$

然后利用 $\vec{R}$ 和 $\vec{r}$ 的变换规律带入即可。 □

给分规则：电偶极子系中 ϕ、E、B 都写对，R 与 r 换算关系写对，场 lorentz 变换关系写对即可

0419 T3

六、电磁场洛伦兹变换：

例 2.1.4. 已知点电荷 Q 在自身参考系 Σ' 中激发的静电场强度分布为：

$$\vec{E}'(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r'^3}\vec{r}'$$

现设 Q 以速度 $\vec{v}$ 相对于实验室系 Σ 做匀速直线运动. 试求 Q 在 Σ 系中激发的磁感应强度分布 $\vec{B}(\vec{r})$ 并检验磁高斯定律 $\nabla\cdot\vec{B}=0$.

解. 我们已经计算出，地面系的磁场应该表为：

$$\vec{B} = \frac{\gamma}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}' = \frac{\gamma Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{\beta}\times\vec{r}'}{r'^3}$$

考虑到 $\vec{r}' = \vec{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{r}\cdot\vec{\beta})$，其模方为：$r'^2 = r^2+\gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{r})^2$ 我们带入可得：

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\gamma Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{\beta}\times\vec{r}}{\sqrt{r^2+\gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{r})^2}^{\,3}}$$

这就是我们所要的 Σ 系磁场分布。现在我们来验证高斯定律：

$$\begin{aligned}
&\vec{\beta}\times\vec{r} = \varepsilon_{ijk}e_i\beta_j r_k \\
\Rightarrow&\nabla\cdot(\vec{\beta}) = \partial_i(\varepsilon_{ijk}\beta_j r_k) = \varepsilon_{ijk}\beta_j\delta_{ik} = 0 \\
&(r^2+\gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{r})^2)^{-3/2} = (r_ir_i+\gamma^2\beta_ir_i\beta_jr_j)^{-3/2}(2r+\gamma^2) \\
\Rightarrow&\nabla(r^2+\gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{r})^2)^{-3/2} = -\frac{3}{2}(2\vec{r}+2\gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{r})\vec{\beta})(r^2+\gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{r})^2)^{-5/2}
\end{aligned}$$

特别地，我们注意到：

$$(\vec{r}+\gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{r})\vec{\beta})\cdot(\vec{\beta}\times\vec{r}) = 0$$

这可以用三重积的几何意义轻松看出。所以，考虑到 $\nabla\cdot(\psi\vec{\phi}) = \psi\nabla\cdot\vec{\phi}+\nabla\psi\cdot\vec{\phi}$，我们用这个形式来处理 $\vec{B}(\vec{r})$ 就知道对应的两项都是 0，所以我们给出 $\nabla\cdot\vec{B}=0$，即高斯定律在 Σ 系成立。 $\square$

PART FOUR

复习参考

复习参考

狭义相对论：

证明题：

间隔不变性：$-c^2t^2+x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}=-c^2t'^2+x'^{1^2}+x'^{2^2}+x'^{3^2}$

判定Lorentz变换：$\Lambda^T\eta\Lambda\eta^{-1}=I$

事件间隔判断因果 $s^2=-c^2t^2+r^2=\begin{cases}=0 & \text{类光，可同时+同地} \\ <0 & \text{类时，可同时，不可同地} \\ >0 & \text{类空，无因果}\end{cases}$ $(v<c)$

利用4-标量的Lorentz不变性

$U^\mu U_\mu=-c^2$

计算题：

换系 + 钟慢，迟缩，速度合成。

Lorentz变换：$x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$

4-矢量变换法则 $A'_\mu(x')=A_\nu(x)\bar{\Lambda}^\nu{}_\mu$

算度规 $(s^2=\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu)$ 非平直：$\left(g_{\rho\sigma}=g'_{\mu\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma}\right)$

分析力学+电磁场：

证明题：

量纲：$[\_]=M\cdot L\cdot T$ 　·判定拉氏密度 $\begin{cases}\text{满足拉氏方程} \\ \text{能量量纲 } [L]=ML^2T^{-1} \\ \text{为4-标量（Lorentz不变）}\end{cases}$

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu}=0$ （拉氏方程）

（若为电磁场L，则还有规范不变）

Bianchi恒等式，Maxwell方程组。

2个重要4-标量（Lorentz不变）：$\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=B^2-\frac{E^2}{c^2}$

$\frac{c}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}=\vec{E}\cdot\vec{B}$

推守恒律：$\partial_\mu M^{\mu\rho\sigma}=\cdots\cdots$

$\nabla\times\nabla\vec{A}=0$. 　$\nabla\cdot\nabla\times\vec{A}=0$.

静电场：

证明：

矢量分析恒等式。

计算题：

规范变换：$A'_\mu=A_\mu+\partial_\mu\theta$ 　，规范不变量

$\boxed{\text{电磁场Lorentz变换}}$ （记得 r' 也要变换成 r）

看上去应该是0的积分，拿到无穷远曲面操作一下，应该是0
（用高斯散度Th）

初级，次级约束。

$\vec{A}=\vec{A}'+\frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{A}'\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}+\gamma\vec{\beta}\frac{\varphi}{c}$

$\vec{A}'=\vec{A}+\frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{A}'\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}-\gamma\vec{\beta}\cdot\frac{\varphi}{c}$

计算：

Green函数求电场、电势。
（评价为不如数理方程）

球谐多极展开。

电介质边界条件。

轴对称Laplace：

$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nR^n+b_nR^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)$ 　球谐

THANKS