运动时钟的延缓

现在聚焦狭义相对论所预言的典型运动学效应. 第一个要考虑的问题是:

$\mathcal{Q}$: 若在不同惯性系中观测同一物理过程, 观测者测得的过程持续时间之间有何联系?

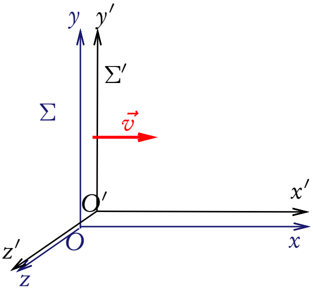
设某物理体系内部相继发生两事件. 惯性系 Σ' 是此体系的自身参考系, 即体系相对于 Σ' 始终保持静止状态:

1. 在 Σ' 中, 两事件发生在同一地点, 即 $\boldsymbol{r}'_1 = \boldsymbol{r}'_2$.
2. 在 Σ' 中观测到两事件发生的时刻分别为 t'_1 和 t'_2, 相应的时间为 $\Delta\tau = t'_2 - t'_1$.
3. 体系的自身参考系只有一个, 对任一物理过程而言, $\Delta\tau$ 是唯一的. 通常称 $\Delta\tau$ 为该物理过程的固有时.

所以, 两事件的间隔是:

$$s^2 = -c^2(\Delta\tau)^2$$

现在实验室参考系 Σ 中观测. 设体系以速度 $\boldsymbol{v}$ 相对于 Σ 做匀速直线运动，则在 Σ 看来，上述二事件既发生于不同时刻 t_1 和 t_2，也发生于不同的地点.



按照逆 Lorentz 推动 $ct = \gamma(ct' + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{r}')$：

$$\Delta t := (t_2 - t_1) = \gamma \left[(t_2' - t_1') + \frac{\boldsymbol{\beta}}{c} \cdot (\boldsymbol{r}_2' - \boldsymbol{r}_1') \right] = \gamma \Delta \tau$$

即：

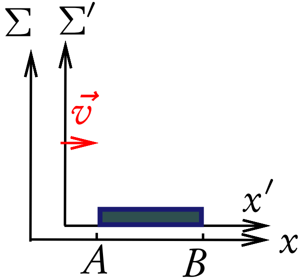
$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}}$$

显然，$\Delta t > \Delta \tau$. 运动物体上发生的物理过程比起静止物体的同一过程而言，时间延缓了. 这就是相对论的时间延缓效应.

运动尺度的缩短

狭义相对论的另一典型运动学效应涉及比较不同惯性系中对同一物体长度的测量.

如图示, 设一把直尺相对于惯性系 Σ 以速度 $\boldsymbol{v}$ 沿 x^1 轴正向运动. 在 Σ 系中,若直尺后端经过 A 点 (第一事件) 与其前端经过 B 点 (第二事件) 同时发生, 则 A, B 两点在 x^1 轴上坐标差的绝对值就定义为 Σ 系中测得的直尺长度: $L = x_2^1(t) - x_1^1(t)$.



以 Σ' 表示直尺自身参考系. 直尺前后两端在 x'^1 轴上坐标差的绝对值对这把直尺而言是唯一的,

$$L_0 := x_2'^1 - x_1'^1$$

L_0 称为直尺的固有长度.

由 Lorentz 推动变换知：

$$L_0 = x_2'^1 - x_1'^1 = \gamma\left(x_2^1 - vt_2\right) - \gamma\left(x_1^1 - vt_1\right) = \gamma\left[x_2^1(t) - x_1^1(t)\right] = \gamma L$$

即运动直尺的长度与其固有长度相比缩短了：

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1-(v/c)^2}$$

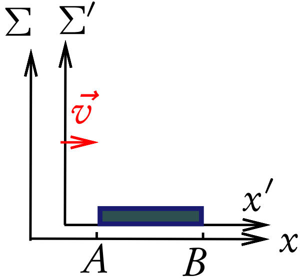
提醒：

1. 时间延迟效应与尺度缩短效应是相关的.
2. 二者都是运动着的物体相互之间时空关系的客观反映，并不是观测者的主观臆测.

作为时间延缓与尺度缩短效应相关性的一个验证，以下我们尝试从前者出发导出后者.

如前述，在实验室参考系 Σ 中，直尺以速度 $\boldsymbol{v}$ 沿 x^1 轴正向运动. 考虑如下两个事件：

1. 直尺右端在 t_1 时刻到达坐标为 x_1^1 的 A 点.
2. 直尺左端在 $t_1+\Delta t$ 时刻到达 A 点.



从 Σ 系观测，直尺左端到达 A 点的同时，其右端到达坐标为 x_2^1 的 B 点. 于是，Σ 系观测者测得的直尺长度为：

$$L = x_2^1(t_1+\Delta t) - x_1^1(t_1+\Delta t) = v\Delta t, \quad \rightsquigarrow \quad \Delta t = \frac{L}{v}$$

$\mathcal{Q}$: 怎样理解 Δt？

上述二事件发生于同一个空间点 (A 点). 所以，Δt 是联系它们的物理过程的固有时.

Σ' 系观点：

对于直尺自身系 Σ' 中的观测者而言，固定在 Σ 系上的质点 A 沿 x' 轴负方向以速度 v 做匀速直线运动. 前述二事件应该重新表达为：

1. 第一事件是质点 A 在 t_1' 时刻到达直尺右端.
2. 第二事件是质点 A 在 $t_1' + \Delta t'$ 时刻到达直尺左端.

所以，

$$\Delta t' = \frac{L_0}{v}$$

根据运动时钟的延迟效应，$\Delta t' = \gamma \Delta t$. 即：

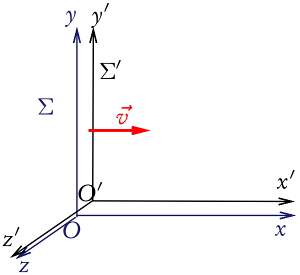
$$L_0/v = \frac{L/v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{L = L_0\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

相对论的速度合成法则

设某质点在两惯性系 Σ 和 Σ' 中的时空坐标分别为 $(t, \boldsymbol{r})$ 和 $(t', \boldsymbol{r}')$，则其相对于 Σ 与 Σ' 的速度分别是：

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \quad \boldsymbol{u}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t'}.$$



Q: $\boldsymbol{u}'$ 与 $\boldsymbol{u}$ 如何联系？

回忆普适的 Lorentz 推动变换：

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}ct$$

$$t' = \gamma\left(t - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}/c\right)$$

求此二式对 t 的导数，并注意到牵连速度 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}/c$ 是常矢量，得：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{u} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}c$$

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \gamma\left(1 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}/c\right)$$

Σ' 系中观测者测得的质点速度是:

$$\vec{u}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t'}$$

显然, 它可以通过以上二式相除获得:

$$\boxed{\boldsymbol{u}' = \frac{\boldsymbol{u} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}c}{\gamma\left(1 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}/c\right)}}$$

这就是相对论的速度合成法则.

注意到:

$$\boldsymbol{u}_{\parallel}=\frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}\quad\rightsquigarrow\quad(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}=\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}\boldsymbol{u}_{\parallel},\qquad\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_{\parallel}+\boldsymbol{u}_{\perp}$$

速度合成法则还可以更直观地写为:

$$\boxed{\boldsymbol{u}_{\parallel}'=\frac{\boldsymbol{u}_{\parallel}-\boldsymbol{\beta}c}{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}/c},\quad\boldsymbol{u}_{\perp}'=\frac{\boldsymbol{u}_{\perp}}{\gamma\left(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}/c\right)}}$$

其逆变换式如下:

$$\boldsymbol{u}_{\parallel}=\frac{\boldsymbol{u}_{\parallel}'+\boldsymbol{\beta}c}{1+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}'/c},\quad\boldsymbol{u}_{\perp}=\frac{\boldsymbol{u}_{\perp}'}{\gamma\left(1+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}'/c\right)}$$

1. 倘若 $\beta\ll 1$ 且 $|\boldsymbol{u}|\ll c$, 精确到 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{v}/c$ 的一次幂, 速度合成公式近似为:

$$\boldsymbol{u}_{\parallel}'\approx\boldsymbol{u}_{\parallel}-\boldsymbol{v},\quad\boldsymbol{u}_{\perp}'\approx\vec{u}_{\perp}.$$

这正是经典力学中的 Galileo 速度合成法则.

$\mathcal{Q}$: 验证真空中的光速不因惯性系的不同选择而改变其大小.

设在 Σ 系中测得的光波传播方向的单位矢量是 $\boldsymbol{n}$, 使得: $\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{n}$. 这样, 按照相对论的速度合成法则, 另一惯性系 Σ' 中测得的光速应为 $\boldsymbol{u}' = c\boldsymbol{n}'$,

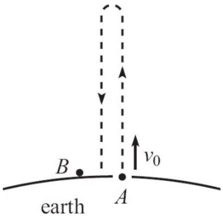
$$\boldsymbol{n}' = \frac{1}{\gamma(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})}\left[\boldsymbol{n} - \gamma\boldsymbol{\beta} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{\beta}\right].$$

现计算 $\boldsymbol{n}'$ 的大小:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{n}' &= \frac{1}{\gamma^2(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})^2}\left[1+\gamma^2\beta^2+\frac{\gamma^4\beta^2}{(\gamma+1)^2}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})^2 - 2\gamma(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})\right.\\ &\left.\qquad + \frac{2\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})^2 - 2\frac{\gamma^3\beta^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})\right]\end{aligned}$$

注意到 $\beta^2\gamma^2 = \gamma^2 - 1$, 化简上式知 $\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{n}' = 1$, 即 $\boldsymbol{n}'$ 也是一个单位矢量. 故惯性系 Σ' 测得的光速仍为 c.

孪生子悖论:



考虑一对孪生子, Alice 与 Bob. 如图示, Bob 留在地球上, 但 Alice 乘宇宙飞船到 4 光年外的半人马座 (Alpha Centauri) 做了一次星际旅行. 现在的问题是: 当 Alice 重返地球后二者重逢时, 谁的年龄更小些?

倘若马虎地应用运动时钟延缓效应, 或许你会得出悖论(Paradox):

- Bob 认为 Alice 在运动. 因此, Alice 的钟走的慢, Alice 年轻.
- Alice 认为 Bob 在运动. 因此, Bob 的钟走的慢, Bob 年轻.

很明显, 二人重逢时上述彼此冲突的观点不可能都正确. 这就是著名的孪生子悖论 (Twin Paradox). 解决此悖论的关键是要认识到Alice 在旅行过程中至少要经历 4 段加速运动过程, 因此 Alice 所乘坐的宇宙飞船不是惯性参考系.

1. 欲解决孪生子悖论, 须在狭义相对论中研究质点的加速度.

相对论的加速度合成法则

与牛顿力学相同，相对论力学中质点的加速度仍然定义为其速度的时间导数。所以，质点相对于惯性系 Σ 和 Σ' 的加速度分别是:

$$\boxed{\boldsymbol{w} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}, \qquad \boldsymbol{w}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}'}{\mathrm{d}t'}.}$$

通过计算速度合成法则求 $\boldsymbol{u}'$

$$\boldsymbol{u}' = \frac{\boldsymbol{u} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}c}{\gamma(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}/c)}$$

对 Σ 系中时间参数 t 的导数，可得:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{w} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{\gamma(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}/c)} - \left[\frac{\boldsymbol{u} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}c}{\gamma(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}/c)^2}\right](-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{w}/c)$$

$$= \frac{1}{\gamma^2(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}/c)^2}\left[\boldsymbol{w} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{w}) + \frac{\gamma}{c}\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w})\right]$$

注意到

$$\boldsymbol{u}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}}, \qquad \frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}/c\right)$$

我们有:

$$\boldsymbol{w}' = \frac{1}{\gamma^3(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}/c)^3}\left[\boldsymbol{w} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{w}) + \frac{\gamma}{c}\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w})\right]$$

这就是相对论的加速度合成法则. 它的反变换式如下:

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{\gamma^3(1+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}'/c)^3}\left[\boldsymbol{w}' - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{w}') - \frac{\gamma}{c}\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{w}')\right]$$

1. 低速近似下, $\beta \ll 1$, $|\boldsymbol{u}| \ll c$, 质点的加速度将不依赖于惯性系的选择:

   $$\boldsymbol{w}' \approx \boldsymbol{w}$$

   这正是牛顿力学中的情形.

瞬时自身系(MCRF):

1. 倘若取 Σ' 为粒子的瞬时自身参考系[6], 则有 $\boldsymbol{u}'=0$, 但 $\boldsymbol{w}'\neq 0$.

倘若粒子以速度 $\boldsymbol{u}$ 相对于实验室参考系 Σ 运动, $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{u}/c$. 如此, 实验室系中测得的粒子加速度 $\boldsymbol{w}$ 与粒子瞬时自身系中的加速度 $\boldsymbol{w}'$ 之间的关系为:

$$\boldsymbol{w}=\frac{1}{\gamma^3}\left[\boldsymbol{w}'-\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{w}')\right]$$

- 若 $\boldsymbol{w}'\parallel\boldsymbol{\beta}$,

$$\boldsymbol{w}=\frac{\boldsymbol{w}'}{\gamma^3}=\left[1-(u/c)^2\right]^{\frac{3}{2}}\boldsymbol{w}' \quad \rightsquigarrow \quad \boldsymbol{w}\parallel\boldsymbol{u}$$

即粒子相对于 Σ 系做加速直线运动.

[6] Momentarily Comoving Reference Frame, 简称 MCRF.

- 若 $\boldsymbol{w}' \perp \boldsymbol{\beta}$,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w} &= \frac{1}{\gamma^3}\left[\boldsymbol{w}' - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{w}')\right] \\
&= \frac{1}{\gamma^3}\left[\boldsymbol{w}' - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{w}') + \frac{\gamma^2\beta^2}{\gamma+1}\boldsymbol{w}'\right] \\
&= \frac{1}{\gamma^3}\left[\boldsymbol{w}' + \frac{\gamma^2\beta^2}{\gamma+1}\boldsymbol{w}'\right] = \frac{\boldsymbol{w}'}{\gamma^2}
\end{aligned}$$

亦即:

$$\boldsymbol{w} = \left[1 - (u/c)^2\right]\boldsymbol{w}' \qquad \rightsquigarrow\ \boldsymbol{w}\perp\boldsymbol{u}$$

若设 $\boldsymbol{u} = u\hat{\boldsymbol{u}}$, 此处用单位矢量 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 表示速度 $\boldsymbol{u}$ 的方向, 我们有:

$$\boldsymbol{w} = \dot{u}\hat{\boldsymbol{u}} + u\dot{\hat{\boldsymbol{u}}}$$

$\boldsymbol{w}\perp\boldsymbol{u}$ 意味着 $\dot{u} = 0$, 即 Σ 系中的观测者认识到粒子的速率不随时间改变, 粒子作匀速曲线运动.