

经典电动力学

Chapter 5. 时变电磁场

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

hyang@ustc.edu.cn

June 5, 2024

规范势的演化方程

电磁场是规范场，其动力学由电磁势 4-矢 $A_\mu(x) = (-\phi/c, \mathbf{A})$ 描写。 $A_\mu(x)$ 的选择具有不唯一性¹，

$$A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$$

但涉及电磁场的可观测量则是具有上述规范变换下不变性的 4-张量，例如：

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}, \quad \oint_C dx^\mu A_\mu$$

电磁场的基本规律，即麦克斯韦方程组，可以通过规范不变的电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 表达为：

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 J^\nu$$

式中 $J^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ 为电荷电流分布的电流密度 4-矢。

¹这正是“规范场”一词的物理内涵。

电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 具有指标交换下的反对称性， $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ ，因此它的独立分量数目为 6。我们规定这 6 个独立分量的物理内涵为电磁场的电场强度与磁感应强度：

$$F^{0i} = \frac{E^i}{c}, \quad F^{ij} = \epsilon^{ijk} B_k$$

换言之，

$$E_i = -c F_{0i} = -\frac{\partial A_i}{\partial t} + c \frac{\partial A_0}{\partial x^i} = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial t}$$
$$B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^{jk} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial A^k}{\partial x_j}$$

亦即：

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

鉴于梯度场无旋、旋度场无散，此二式自动地保证了磁高斯定律 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 与法拉第电磁感应定律 $\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$ 。

- ① 电磁势波动方程组
 - 推迟势
- ② 电磁波的产生机制
 - 计算辐射场的一般公式
 - 电磁学恒等式
 - 电多极辐射场
- ③ 任意运动带电粒子的辐射电磁场
 - 李纳-维谢尔势
 - 加速带电粒子的辐射电磁场
- ④ 无界空间中电磁波的传播
 - 平面电磁波
 - 平面电磁波的能量和能流
- ⑤ 电磁波在绝缘介质分界面上的反射和折射
 - 菲涅耳公式
- ⑥ 电磁波在导体中的传播
 - 良导体条件
 - 导体内部时谐电磁波的波动方程
- ⑦ 有界空间的电磁波，谐振腔与波导管

讨论：

- 电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 的定义式等价于毕安恒等式，

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$$

所以，倘若强调电磁场的规范场属性，可以使用 $F_{\mu\nu}$ 的定义取代毕安恒等式在麦克斯韦方程组中的地位²。

- 麦克斯韦方程组 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 J^\nu$ 的成立要求存在自洽性条件：

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

它正是电荷守恒定律。

- 规范不变量

$$\oint_C dx^\mu A_\mu$$

虽然在经典电动力学中地位不显，但它对带电粒子的量子力学描写举足轻重。

²R. Wald, Advanced Classical Electromagnetism, 2022, PUP, Page 70.

因此，混合使用规范势与场强 \mathbf{E} 与 \mathbf{B} ，我们可以把麦克斯韦方程组表达为：

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}$$

或者，我们可以使用前两个方程消除场强，把麦克斯韦方程组表达为规范势服从的演化方程：

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A}$$

与

$$\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$
$$= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$
$$= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

使用常识 $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$, 以上二方程可重新表达为:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi &= \mu_0 \mathbf{j} \end{aligned}$$

借助于规范势选择的不唯一性, 我们可以人为地规定 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 的取值、从而简化上述方程组. 例如可以取 **库仑规范**:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

在库仑规范中麦克斯韦方程组通过规范势表达为:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi &= \mu_0 \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\square \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

或者:

$$\square A_\mu = -\mu_0 j_\mu$$

这个波动方程明显符合相对性原理的要求, 它是狭义相对论承认的一条物理学规律.

例:

- ① 在库仑规范中, 电磁场矢势所满足的运动方程可以写为如下非齐次的波动方程

$$\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}_T$$

式中 \mathbf{j}_T 为电流密度矢量的横分量 (无散分量). 试证明之.

可以把上式改写为:

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \left[\nabla \cdot \int d^3x' \frac{\mathbf{j}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \left[\nabla \times \int d^3x' \frac{\mathbf{j}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right]$$

上式右端第一项是梯度场 (无旋), 第二项是旋度场 (无散). 所以它们分别是电流密度矢量的纵分量和横分量:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_L + \mathbf{j}_T$$

式中,

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_L &= -\frac{1}{4\pi} \nabla \left[\nabla \cdot \int d^3x' \frac{\mathbf{j}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \\ \mathbf{j}_T &= \frac{1}{4\pi} \nabla \times \left[\nabla \times \int d^3x' \frac{\mathbf{j}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \end{aligned}$$

它们分别具有性质:

$$\nabla \times \mathbf{j}_L = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{j}_T = 0$$

这个结论在矢量分析理论中称为亥姆赫兹定理. 上面的推导相当于给亥姆赫兹定理提供了一个构造性的证明.

库仑规范是物理学家喜欢选择的规范之一. 物理学家喜欢选择的另一个规范是 **Lorenz 规范**:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0}$$

在 Lorenz 规范中麦克斯韦方程组通过规范势表达为:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

上式中,

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \partial_\mu \partial^\mu$$

称为达朗贝尔算符, 简记为 \square :

$$\square = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$$

它实际上是一个 4-标量算符. 所以, 麦克斯韦方程组在 Lorenz 规范中表现为规范势服从的线性波动方程:

解:

借助于数学恒等式

$$-4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

我们有:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) &= \int d^3x' \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{j}(t, \mathbf{x}') \\ &= \int d^3x' \left[-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \mathbf{j}(t, \mathbf{x}') \\ &= \nabla^2 \left[-\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\mathbf{j}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \end{aligned}$$

灵活使用矢量分析恒等式:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}$$

下面对 \mathbf{j}_L 的表达式作进一步的简化:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_L(t, \mathbf{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \nabla \left[\nabla \cdot \int d^3x' \frac{\mathbf{j}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi} \nabla \left[\int d^3x' \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{x}') \right] \\ &= +\frac{1}{4\pi} \nabla \left[\int d^3x' \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{x}') \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \nabla \left[\int d^3x' \nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \int d^3x' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \end{aligned}$$

右端第一项体积分可以通过奥高定理化为无穷远边界上的面积分, 结果为零:

$$\int d^3x' \nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \oint_\infty d\mathbf{s} \cdot \frac{\mathbf{j}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rightsquigarrow 0$$

所以，

$$j_L(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \left[\int d^3x' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right]$$

另一方面，我们注意到在库仑规范中，规范势满足的运动方程组如下：

$$\begin{aligned} \nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi &= -\mu_0 \mathbf{j} \\ \nabla^2 \phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

利用标势运动方程的解

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

以及电荷守恒定律，即 $\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial_t \rho = 0$ ，我们有：

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \left[\int d^3x' \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left[\int d^3x' \frac{\partial_t \rho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left[\int d^3x' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \\ &= -\mu_0 \mathbf{j}_L(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

代回到矢势的运动方程中，并注意到 $\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{j}_L(t, \mathbf{x}) + \mathbf{j}_T(t, \mathbf{x})$ ，即得：

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}_T$$

或者，

$$\square A = -\mu_0 \mathbf{j}_T$$

此式表明库仑规范中矢势的波动完全是由横向电流密度矢量激发的。事实上，考虑到库仑规范条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ，矢势 \mathbf{A} 在库仑规范中只有横分量。

推迟势

现在求无界空间中规范势 (ϕ, \mathbf{A}) 的一般解。在 Lorentz 规范中，标势、矢势满足的场方程形式相同，故以下我们专注于求解标势的达朗贝尔方程

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho/\epsilon_0$$

定义无界空间中的含时格林函数 $\mathcal{G}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}')$ ：

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathcal{G}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{G}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}')}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(t - t') \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \mathcal{G}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') \Big|_{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow \infty} &= 0 \end{aligned}$$

此格林函数在物理上可诠释为处于时空点 (t', \mathbf{x}') 处的单位点电荷在另一时空点 (t, \mathbf{x}) 处激发的电磁标势。上述方程具有空间坐标平移变换下的不变性。所以，

$$\mathcal{G}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = \mathcal{G}(t, t'; \mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

不难证明，在 $r \neq 0$ 的场点， $u(t, t'; r)$ 满足的方程在形式上可看做一维空间的波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

其通解为³：

$$u(t, t'; r) = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

这里的解函数 f, g (暂时) 是完全任意的。因此，当 $r \neq 0$ 时，

$$\mathcal{G}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = \frac{f(t - r/c)}{r} + \frac{g(t + r/c)}{r}$$

通解的第一项描写向外发散的球面波，第二项描写向内汇聚的球面波。研究辐射问题时，电磁场是由原点处的电荷产生并向外发散的。所以应取 $g = 0$ ，

$$\mathcal{G}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = \frac{f(t - r/c)}{r}$$

设 $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ，其量值为 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ 。以 \mathbf{x}' 点为坐标原点建立球坐标系。注意到无界空间中点电荷的规范势分布具有球对称性，我们有：

$$\mathcal{G}(t, t'; \mathbf{x} - \mathbf{x}') = \mathcal{G}(t, t'; r)$$

所以，格林函数满足的方程可简化为：

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(t - t') \delta^{(3)}(r)$$

- 在除却坐标原点之外的任何场点处， $r \neq 0$ ， $\mathcal{G}(t, t'; r)$ 满足齐次波动方程：

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t^2} = 0$$

考虑到标势随源点、场点之间距离的增加而减弱，令：

$$\mathcal{G}(t, t'; r) = \frac{u(t, t'; r)}{r}$$

- 我们假设：若 f 采取某个特殊的函数形式，上述齐次波动方程的解

$$\mathcal{G}(t, t'; r) = \frac{f(t - r/c)}{r}$$

也是非齐次方程

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(t - t') \delta^{(3)}(r)$$

的解。为了验证满足上述要求的函数 f 的存在性和确定它的具体形式，现计算上述非齐次方程在以原点为球心、半径为 $R \rightarrow 0^+$ 的球面所包围的区域 V 中的体积分。显然，

$$\begin{aligned} -\delta(t - t')/\epsilon_0 &= \int_V d^3x \left[-\frac{1}{\epsilon_0} \delta(t - t') \delta^{(3)}(r) \right] \\ &= 4\pi \int_0^R r^2 dr \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t^2} \right] \\ &= 4\pi \int_0^R r^2 dr \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \frac{f(t - r/c)}{r} \end{aligned}$$

³若电磁场由运动电荷激发，则解可以通过距离 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t')|$ 依赖于 t' 。切记！

$$= 4\pi \int_0^R r^2 dr \left[f(t-r/c) \nabla^2 \frac{1}{r} - 2 \nabla f(t-r/c) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{r} \nabla^2 f(t-r/c) - \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial^2 f(t-r/c)}{\partial t^2} \right]$$

显然, 除第一项外, 其余各项的积分在 $R \rightarrow 0^+$ 极限下均趋于零. 而第一项在 $R \rightarrow 0^+$ 下的积分计算如下:

$$\begin{aligned} 4\pi \int_0^R r^2 dr f(t-r/c) \nabla^2 \frac{1}{r} \Big|_{R \rightarrow 0} &= \int_V d^3x f(t) \nabla^2 \frac{1}{r} \\ &= f(t) \int_V d^3x [-4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{r})] \\ &= -4\pi f(t) \end{aligned}$$

所以,

$$f(t) = \frac{\delta(t-t')}{4\pi\epsilon_0}, \quad \rightsquigarrow \quad f(t-r/c) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \delta(t-t'-r/c)$$

有了推迟格林函数 $\mathcal{G}_R(t, t'; \mathbf{r})$ 之后, 任意电荷分布 $\rho(t, \mathbf{x})$ 在空间中所激发的规范标势可由下式计算:

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{x}) &= \int d^3x' dt' \mathcal{G}_R(t, t'; \mathbf{r}) \rho(t', \mathbf{x}') \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' dt' \frac{\rho(t', \mathbf{x}')}{r} \delta(t-t'-r/c) \end{aligned}$$

亦即,

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho(t-r/c, \mathbf{x}')}{r}$$

• Lorenz 规范中矢势与标势满足相同形式的波动方程. 所以,

$$A(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{j(t-r/c, \mathbf{x}')}{r}$$

规范势的上述表达式称为 Lorenz 规范中的“推迟势”公式.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\frac{j(t', \mathbf{x}')}{r} \right] &= \nabla \cdot \frac{1}{r} \cdot j(t', \mathbf{x}') + \frac{1}{r} \nabla \cdot j(t', \mathbf{x}') \\ &= \nabla \cdot \frac{1}{r} \cdot j(t', \mathbf{x}') + \frac{1}{r} \nabla' \cdot \frac{\partial j(t', \mathbf{x}')}{\partial t'} \\ &= -\nabla' \cdot \frac{1}{r} \cdot j(t', \mathbf{x}') - \frac{1}{r} \nabla' \cdot \frac{\partial j(t', \mathbf{x}')}{\partial t'} \end{aligned}$$

另一方面, 我们有:

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot \left[\frac{j(t', \mathbf{x}')}{r} \right] &= \nabla' \cdot \frac{1}{r} \cdot j(t', \mathbf{x}') + \frac{1}{r} \nabla' \cdot j(t', \mathbf{x}') \\ &= \nabla' \cdot \frac{1}{r} \cdot j(t', \mathbf{x}') + \frac{1}{r} \nabla' \cdot \frac{\partial j(t', \mathbf{x}')}{\partial t'} + \frac{1}{r} \nabla' \cdot j(t', \mathbf{x}') \Big|_{t' \text{ 不变}} \end{aligned}$$

比较知:

$$\nabla \cdot \left[\frac{j(t', \mathbf{x}')}{r} \right] = -\nabla' \cdot \left[\frac{j(t', \mathbf{x}')}{r} \right] + \frac{1}{r} \nabla' \cdot j(t', \mathbf{x}') \Big|_{t' \text{ 不变}}$$

于是, 无界空间中的含时格林函数求得为:

$$\mathcal{G}(t, t'; \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \delta(t-t'-r/c)$$

① 除过 $\delta(t-t'-r/c)$ 因子之外, 此格林函数在形式上恰为单位点电荷的静电标势.

② 对于 $r \neq 0$ 的场点而言, $\delta(t-t'-r/c)$ 因子取非零值的条件不是 $t' = t$, 而是:

$$t' = t - r/c < t$$

这表明 t 时刻场点 \mathbf{x} 处的规范标势是由较早时刻 t' 位于 \mathbf{x}' 的单位点电荷激发的.

③ 上述含时格林函数称为 **无界空间中的推迟 (Retarded) 格林函数**, 可改记为 $\mathcal{G}_R(t, t'; \mathbf{r})$.

④ 推迟格林函数的发现表明电磁相互作用的传递需要一定的时间, 不是超距作用.

例:

• 验证上述推迟势公式满足 Lorenz 规范条件.

解:

设 $t' = t - r/c$, 这里 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. 如此可以将上述 Lorenz 规范中的推迟势公式写作:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho(t', \mathbf{x}')}{r}, \quad A(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{j(t', \mathbf{x}')}{r}$$

切记此二式所涉及的被积函数的两个自变量, 即 t' 和 \mathbf{x}' , 并不是相互独立的.

检验 Lorenz 规范条件需要求矢势的散度 $\nabla \cdot \mathbf{A}$, 为方便起见我们先求

$$\nabla \cdot \left[\frac{j(t', \mathbf{x}')}{r} \right]$$

$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ 的任意函数均有等价关系 $\nabla = -\nabla'$. 所以:

于是, 无界空间中推迟矢势的散度计算如下:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot A(t, \mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \nabla \cdot \left[\frac{j(t', \mathbf{x}')}{r} \right] \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \nabla' \cdot \left[\frac{j(t', \mathbf{x}')}{r} \right] \\ &\quad + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{1}{r} \nabla' \cdot j(t', \mathbf{x}') \Big|_{t' \text{ 不变}} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_\infty d\mathbf{s}' \cdot \left[\frac{j(t', \mathbf{x}')}{r} \right] \\ &\quad + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{1}{r} \nabla' \cdot j(t', \mathbf{x}') \Big|_{t' \text{ 不变}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{1}{r} \nabla' \cdot j(t', \mathbf{x}') \Big|_{t' \text{ 不变}} \end{aligned}$$

利用电荷守恒定律，

$$\left. \nabla' \cdot \mathbf{j}(t', \mathbf{x}') \right|_{t' \text{ 不变}} + \frac{\partial}{\partial t'} \rho(t', \mathbf{x}') = 0$$

并回忆 t' 的定义式 $t' = t - r/c$ ，可以进一步把上式改写为：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{1}{r} \frac{\partial \rho(t', \mathbf{x}')}{\partial t'} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{1}{r} \frac{\partial \rho(t', \mathbf{x}')}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho(t', \mathbf{x}')}{r} \right] \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(t, \mathbf{x})}{\partial t} \end{aligned}$$

亦即：

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = 0$$

这正是 Lorenz 规范条件。

2: 库仑规范中有无推迟势？

库仑规范中规范势满足的运动方程组为：

$$\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0, \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}_T$$

在无界空间，其解可表为：

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{r}, \\ \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{j}_T(t - r/c, \mathbf{x}')}{r} \end{aligned}$$

这里 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ 。所以，尽管库仑规范中的标势具有超距传播的特点，**矢势仍是推迟势**。

电磁波的产生机制

电磁波是电磁场存在的基本形式。麦克斯韦方程组告诉我们：

- 时变的电场、磁场相互激发，在空间中就形成了电磁波。

于是，产生电磁波的关键是产生随时间变化的电场和磁场。

- ① 从微观角度讲，产生电磁波的前提条件是荷电粒子做加速运动。做加速运动的荷电粒子所产生的电场与磁场均是随时间变化的。
- ② 从宏观角度讲，产生电磁波的前提条件是存在随时间变化的电流分布，例如频率为 ω 的交变电流密度矢量：

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cos(\omega t)$$

电磁波由载有交变电流的天线发射出来。

以下讨论宏观电荷体系在其线度远小于电磁波波长情形下的辐射电磁场的性质。

计算辐射场的一般公式

当交变电流分布给定时，通常采用 Lorenz 规范中矢势的推迟势公式作为计算辐射电磁场的物理基础：

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t - r/c)}{r}$$

此处 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ 。

- ① 如果你愿意，你也可以选择库仑规范中矢势的推迟势公式

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{j}_T(\mathbf{x}', t - r/c)}{r}$$

作为计算辐射电磁场的出发点。

- ② 从库仑规范中电磁势表达式可知，辐射电磁场独立的动力学自由度仅有两个（可以选择为 \mathbf{A} 的两个横分量）。

设交变电流分布随时间的周期性变化具有确定的频率 ω ，

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{j}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$$

则：

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') \exp[-i\omega(t - r/c)]}{r} \\ &= \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') e^{i\omega r/c}}{r} \right\} e^{-i\omega t} \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

即电磁波的频率也将是 ω ，这里，

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{r} e^{ikr}$$

式中，

$$k = \omega/c$$

e^{ikr} 是“推迟作用因子”，表示电磁波从交变电流所在地传播至场点的过程中有位相滞后 kr 。

对于频率确定的交变电流而言，由矢势 \mathbf{A} 的上述表达式出发可以完全确定电磁场：

- ① 电磁场的磁感应强度 \mathbf{B} 可通过直接计算矢势的旋度求得：

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

- ② 求出 \mathbf{B} 后，电场强度 \mathbf{E} 可由麦克斯韦方程求得。在电流分布区域之外， $\mathbf{j} = 0$ ，麦克斯韦方程写为：

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c^2} \mathbf{E} = -\frac{ik}{c} \mathbf{E}$$

所以，

$$\mathbf{E} = \frac{ic}{k} \nabla \times \mathbf{B}$$

式中 $k = \omega/c$ 。

矢势的展开式

Lorenz 规范中, 具有确定频率 ω 的交变电流所激发的电磁场由推迟矢势

$$A(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{r} e^{ikr}$$

描写. 这里有三个线度值得注意:

- ① 电流分布区域 V 的线度: $l \sim \sqrt[3]{V}$.
- ② 电磁波的波长 $\lambda = 2\pi/k = 2\pi c/\omega$.
- ③ 场点到电流分布区域的距离 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$.

为简单起见, 我们仅研究分布于一个“小区域”内的交变电流所产生的辐射电磁场.

所谓“小区域”, 指的就是其线度远小于电磁波的波长以及观测距离 r :

$$l \ll \lambda, \quad l \ll r.$$

建立坐标系, 把坐标原点选择在电流的分布区域 V 内. 如此, $|\mathbf{x}'|$ 的数量级为 $l \sim \sqrt[3]{V}$. 设远处场点 P 相对于原点的位置矢量为:

$$\mathbf{x} = R\mathbf{e}_R, \quad R \gg l,$$

则 P 点与电流元 $\mathbf{j}(\mathbf{x}')d^3x'$ 之间的距离可表为:

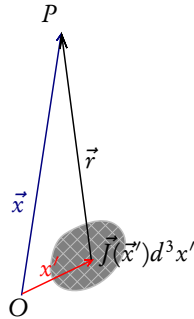
$$\begin{aligned} r &= |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = |R\mathbf{e}_R - \mathbf{x}'| \\ &= \sqrt{R^2 - 2R\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{x}' + \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'} \\ &\approx R \left[1 - \frac{1}{R} \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{x}' \right] \end{aligned}$$

即:

$$r \approx R - \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{x}'$$

从而,

$$A(\mathbf{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') \exp[ik(R - \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{x}')] }{R - \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{x}'}$$



至于 r 与 λ 的关系, 又可以区别三种情况:

- ① 近场区: $r \ll \lambda$
- ② 感应区: $r \sim \lambda$
- ③ 辐射区: $r \gg \lambda$

三个区域中电磁场的特点是不同的:

- 在近场区, $r \ll \lambda \rightsquigarrow kr \ll 1$, 从而推迟因子 $e^{ikr} \approx 1$,

$$A(\mathbf{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{r}$$

这是静磁场的矢势. 即电磁场近似表现为静磁场.

- 在远场区, $r \gg \lambda \rightsquigarrow kr \gg 1$, 从而推迟因子 e^{ikr} 的贡献不可忽略. 通常是在远场区接收电磁波, 需要计算远场才能确定辐射功率和角分布. 这是我们的主要研究对象.

- 感应区是一个过渡区, 是数值计算的用武之地.

或者,

$$A(\mathbf{x}) \approx \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') \exp[-i2\pi \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{x}'/\lambda]}{1 - \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{x}'/R}$$

式中出现了两个小参数, 即 \mathbf{x}'/λ 和 \mathbf{x}'/R . 可以把推迟势对于这两个小参数做 Taylor 展开. 在计算远场区的矢势时, 只需保留 $1/R$ 的最低次项, 但需保留对位相因子中小参数 \mathbf{x}'/λ 展开的各级项. 所以,

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}) &\approx \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_V d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') \exp(-i2\pi \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{x}'/\lambda) \\ &\approx \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i2\pi/\lambda)^n}{n!} \int_V d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') (\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{x}')^n \\ &\approx \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_V d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') \left(1 - \frac{i2\pi}{\lambda} \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{x}' + \dots \right) \end{aligned}$$

最后一式中的各项对应于各级电磁多极辐射.

电磁学恒等式

为了看清推迟矢势多极展开各项的物理意义, 类似于静磁学情形, 现在构造一个电磁学恒等式. 我们已经约定电流分布于小区域 V 中, 没有电流溢出 V 的边界面 S . 所以, 若以 f, g 表示源点坐标的两个任意的标量函数, 则有:

$$\oint_S d\mathbf{s}' \cdot [f(\mathbf{x}') g(\mathbf{x}') \mathbf{j}(\mathbf{x}')] = 0$$

可以利用奥高定理将此式左端改写为区域 V 上的体积分:

$$\int_V d^3x' \nabla' \cdot [f(\mathbf{x}') g(\mathbf{x}') \mathbf{j}(\mathbf{x}')] = 0$$

注意到

$$\nabla' \cdot (fg\mathbf{j}) = (f\nabla'g + g\nabla'f) \cdot \mathbf{j} + fg\nabla' \cdot \mathbf{j}$$

以及交变电流情形下的电荷守恒定律: $\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}') = i\omega \rho(\mathbf{x}')$, 我们有:

$$\int_V d^3x' [f(\mathbf{x}') \cdot \nabla'g + g(\mathbf{x}') \cdot \nabla'f] = -i\omega \int_V d^3x' fg\rho(\mathbf{x}')$$

- 取 $f=1, g=x'^i$. 在直角坐标系中,

$$\nabla'f=0, \quad \nabla'g = \mathbf{e}^i \frac{\partial x'^i}{\partial x'^j} = \mathbf{e}^i \delta_j^i = \mathbf{e}^j$$

上述恒等式退化为:

$$-i\omega \int_V d^3x' x'^i \rho(\mathbf{x}') = \int_V d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{e}^i = \int_V d^3x' j^i(\mathbf{x}')$$

鉴于直角坐标系基矢是常矢量, 上式的成立意味着:

$$\int_V d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') = -i\omega \mathbf{p} = \dot{\mathbf{p}}$$

式中的 \mathbf{p} 代表电流分布的电偶极矩: $\mathbf{p} = \int_V d^3x' \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}'$.

所以, 推迟矢势多极展开的首项描写电偶极辐射:

$$A^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \int_V d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \dot{\mathbf{p}}$$

- 取 $f = x'_i, g = x'_k$. 在直角坐标系中,

$$\nabla' f = \mathbf{e}_j \frac{\partial x'_i}{\partial x'_j} = \mathbf{e}_j \delta^j_i = \mathbf{e}_i, \quad \nabla' g = \mathbf{e}_k$$

电磁学恒等式退化为:

$$-i\omega \int_V d^3x' x'_i x'_k \rho(\mathbf{x}') = \int_V d^3x' [x'_i j_k(\mathbf{x}') + x'_k j_i(\mathbf{x}')]]$$

回忆电荷体系的电四极矩定义,

$$\tilde{\mathcal{Q}}_{ij} = 3 \int_V d^3x' x'_i x'_j \rho(\mathbf{x}')$$

上述电磁学恒等式又可以写为:

$$\int_V d^3x' [x'_i j_k(\mathbf{x}') + x'_k j_i(\mathbf{x}')] = -\frac{i\omega}{3} \tilde{\mathcal{Q}}_{ik} = \frac{1}{3} \dot{\tilde{\mathcal{Q}}}_{ik}$$

式中出现的

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V d^3x' \mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}')$$

恰为电流分布的磁偶极矩矢量.

所以, 推迟矢势展开式的第二项描写“磁偶极矩”与“电四极矩”所产生的辐射:

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{x}) = -i \frac{\mu_0 k e^{ikR}}{4\pi R^2} \left(\mathbf{m} \times \mathbf{x} + \frac{1}{6} x_i \mathbf{e}_k \dot{\tilde{\mathcal{Q}}}^{ik} \right)$$

它们各自对应的推迟矢势如下:

$$\mathbf{A}_m^{(1)}(\mathbf{x}) = -i \frac{\mu_0 k e^{ikR}}{4\pi R^2} \mathbf{m} \times \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}_{\mathcal{Q}}^{(1)}(\mathbf{x}) = -i \frac{\mu_0 k e^{ikR}}{24\pi R^2} x_i \mathbf{e}_k \dot{\tilde{\mathcal{Q}}}^{ik}$$

请注意这些矢势对于场点与源点之间的距离的依赖均是 $1/R$.

所以, 电偶极辐射场的磁感应强度可按如下方式计算:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = ik \mathbf{e}_R \times \left[\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \dot{\mathbf{p}} \right] \\ &= i\omega \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c R} \mathbf{e}_R \times \dot{\mathbf{p}} \\ &= -\frac{e^{ikR}}{4\pi \epsilon_0 c^3 R} \mathbf{e}_R \times \ddot{\mathbf{p}} \\ &= \frac{e^{ikR}}{4\pi \epsilon_0 c^3 R} \ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{e}_R \end{aligned}$$

同理 (记住 $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \omega/c$),

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{ic^2}{\omega} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{ic}{k} ik \mathbf{e}_R \times \mathbf{B} \\ &= c \mathbf{B} \times \mathbf{e}_R \\ &= \frac{e^{ikR}}{4\pi \epsilon_0 c^2 R} (\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{e}_R) \times \mathbf{e}_R \end{aligned}$$

采用直角坐标系, 可以把推迟矢势展开式的第二项表为:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{x}) &= -i \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} (2\pi/\lambda) \int_V d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') (\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{x}') \\ &= -i \frac{\mu_0 k e^{ikR}}{4\pi R^2} \int_V d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') \\ &= -i \frac{\mu_0 k e^{ikR}}{4\pi R^2} x^j e^k \int_V d^3x' x'_i j_k(\mathbf{x}') \end{aligned}$$

上式中的积分还可进一步简化. 由上页求得的电磁学恒等式知:

$$\begin{aligned} x^j e^k \int_V d^3x' x'_i j_k(\mathbf{x}') &= \frac{1}{2} x^j e^k \int_V d^3x' [x'_i j_k(\mathbf{x}') - x'_k j_i(\mathbf{x}')] + \frac{1}{6} x^j e^k \dot{\tilde{\mathcal{Q}}}_{ik} \\ &= \frac{1}{2} x^j e^k \int_V d^3x' \epsilon_{ikl} [\mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}')]^l + \frac{1}{6} x^j e^k \dot{\tilde{\mathcal{Q}}}_{ik} \\ &= -\mathbf{x} \times \left[\frac{1}{2} \int_V d^3x' \mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}') \right] + \frac{1}{6} x^j e^k \dot{\tilde{\mathcal{Q}}}_{ik} \\ &= -\mathbf{x} \times \mathbf{m} + \frac{1}{6} x^j e^k \dot{\tilde{\mathcal{Q}}}_{ik} \end{aligned}$$

电偶极辐射场

如前所述, 频率为 ω 的振荡电偶极矩产生的辐射电磁场具有如下推迟矢势:

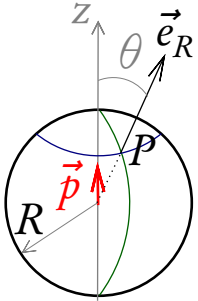
$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \dot{\mathbf{p}}$$

在计算电磁场强时, 需要对 \mathbf{A} 作用梯度算符 ∇ . 我们只需将计算精度保持在 $1/R$ 即可, 所以只需把 ∇ 仅需作用到推迟因子 e^{ikR} 上, 而无需将其作用于矢势的分母. 因为

$$\nabla e^{ikR} = \mathbf{e}_R \partial_R e^{ikR} = ik \mathbf{e}_R e^{ikR}$$

以及 $\partial_t e^{-i\omega t} = -i\omega e^{-i\omega t}$, 对辐射场的矢势或者场强求时间导数或旋度、散度相当于作代换:

$$\nabla \rightsquigarrow ik \mathbf{e}_R, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightsquigarrow -i\omega$$



选择振荡电偶极矩的方向沿极轴, 则:

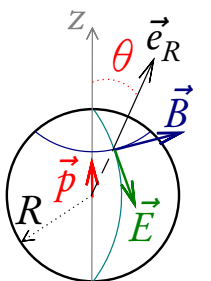
$$\ddot{\mathbf{p}} = |\ddot{p}| \mathbf{e}_3$$

于是,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{e}_R &= |\ddot{p}| \mathbf{e}_3 \times (\mathbf{e}_3 \cos \theta + \mathbf{e}_1 \sin \theta \cos \phi + \mathbf{e}_2 \sin \theta \sin \phi) \\ &= |\ddot{p}| \sin \theta (e_2 \cos \phi - e_1 \sin \phi) \\ &= |\ddot{p}| \sin \theta \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi \mathbf{e}_R \right) \\ &= |\ddot{p}| \sin \theta \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

进而,

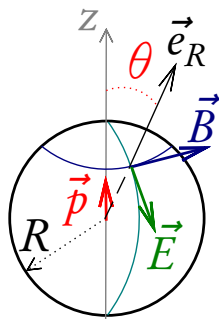
$$\begin{aligned} (\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{e}_R) \times \mathbf{e}_R &= |\ddot{p}| \sin \theta \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_R \\ &= |\ddot{p}| \sin \theta \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$



于是, 电偶极辐射场的场强矢量具有如下分布形式:

$$\vec{B} = \frac{|\dot{\vec{p}}| e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} \sin\theta \vec{e}_\phi$$

$$\vec{E} = \frac{|\dot{\vec{p}}| e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \sin\theta \vec{e}_\theta$$

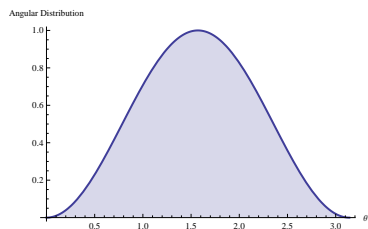


显见:

- ① 电偶极辐射场的 \vec{E} 和 \vec{B} 均是横场 (TEM 波).
- ② 磁力线是围绕极轴的闭合圆周, 电力线是经面上的闭合曲线,

$$\nabla \cdot \vec{B} = ik \vec{e}_R \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{E} = ik \vec{e}_R \cdot \vec{E} = 0.$$

电偶极辐射场的角分布的全貌如右图示:



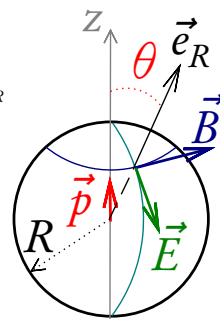
求 $\langle S \rangle$ 在半径为 R 的球面上的面积分, 就得到了电偶极辐射场的总辐射功率:

$$\begin{aligned} P &= \oint \langle S \rangle \cdot \vec{e}_R R^2 d\Omega \\ &= \frac{|\dot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \sin^2\theta \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\dot{\vec{p}}|^2}{3c^3} \end{aligned}$$

辐射场的实际应用涉及计算其“辐射功率”和“角分布”. 这两个量均可通过计算辐射场的平均能流密度矢量求得.

电偶极辐射场的平均能流密度计算如下:

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} (\vec{E}^* \times \vec{B}) = \frac{|\dot{\vec{p}}|^2 \sin^2\theta}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} \vec{e}_R \end{aligned}$$



- 正如所料, \vec{e}_R 是能流密度矢量的方向, 亦即电偶极辐射场的波矢 \vec{k} 的方向.
- $\langle S \rangle$ 的表式中, 因子 $\sin^2\theta$ 描写电偶极辐射场能流分布的方向性, 称为电偶极辐射的角分布. 显然, 在 $\theta = \pi/2$ 的赤道面上辐射最强, 但沿电偶极轴线方向 ($\theta = 0, \pi$) 没有辐射.

电偶极辐射场的总辐射功率:

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\dot{\vec{p}}|^2}{3c^3}$$

- ① 注意到对于频率为 ω 的交变电流分布, $\partial_t \sim -i\omega$. 所以, 若振荡电偶极矩随时间的演化由下式描写: $\vec{p} = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}$, 且电偶极矩振幅 \vec{p}_0 不随时间变化, 则电偶极辐射总功率正比于偶极子振荡频率的四次幂 $P \propto \omega^4$.
- ② 实际应用中, 振荡电偶极子总是通过交变的电流分布实现的,

$$\dot{\vec{p}} = \int_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') e^{-i\omega t} \propto I_0 e^{-i\omega t}$$

所以,

$$\ddot{\vec{p}} \propto -i\omega I_0 e^{-i\omega t}$$

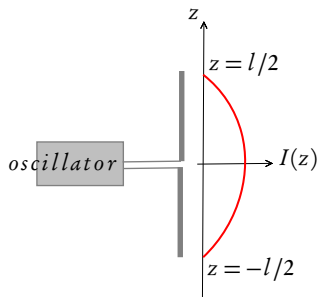
技术上只能保证交变电流的振幅 I_0 不随时间变化. 电偶极辐射场的总发射功率实际上正比于偶极子振荡频率的二次幂:

$$P \propto \omega^2$$

短天线的辐射场

作为振荡电偶极子的一个具体实例, 现在考虑一个长度为 l 的直线型天线, 如右图.

- 此天线为中心馈电型.
- 天线上下两半段上电流方向相同, 均沿 \vec{e}_3 方向.
- 馈电点处电流强度有最大值 I_0 , 但在天线两端电流强度为零.



若为短天线, $l \ll \lambda = cT = 2\pi c/\omega$, 则天线上的电流分布近似为线性形式:

$$I(z) = I_0 \left[1 - 2 \frac{|z|}{l} \right], \quad |z| \leq l/2$$

当然,

$$I(t, z) = I(z) e^{-i\omega t}$$

短天线的电偶极矩时间变换率计算如下:

$$\dot{\vec{p}} = \int_V d^3x' \vec{j}(t, \vec{x}') = \vec{e}_3 \int_{-l/2}^{+l/2} dz I(t, z) = \frac{1}{2} \vec{e}_3 I_0 l e^{-i\omega t}$$

从而,

$$\ddot{\vec{p}} = -i\omega \dot{\vec{p}} = -\frac{i}{2} \vec{e}_3 I_0 l \omega e^{-i\omega t} = -i\pi c I_0 (l/\lambda) \vec{e}_3 e^{-i\omega t}$$

短天线的电偶极辐射总功率为:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{3c^3} \\ &= \frac{\pi}{12\epsilon_0 c} I_0^2 (l/\lambda)^2 = \frac{\pi}{12} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} I_0^2 (l/\lambda)^2 \end{aligned}$$

若保持天线上电流的峰值 I_0 不随时间变化, 则短天线的电偶极辐射功率正比于 $(l/\lambda)^2$.

短天线的辐射电阻

短天线的电偶极辐射功率正比于 I_0^2 ,

$$P = \frac{\pi}{12} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} I_0^2 (l/\lambda)^2 \propto I_0^2$$

因此,短天线在向外发射电磁波的过程中相当于一个电阻器,其电偶极辐射功率相当于一个等效电阻上的损耗功率.这个等效电阻称为短天线的“辐射电阻”,记为 R_r ,

$$P = \frac{1}{2} R_r I_0^2$$

显然:

$$R_r = \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (l/\lambda)^2$$

查表知: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$. 由此算得:

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx \sqrt{\frac{4\pi}{8.85} \times 10^5} \approx 376.8 \text{ } \Omega$$

磁偶极辐射场

磁偶极辐射场的推迟矢势为:

$$A(\mathbf{x}) = -i \frac{\mu_0 k e^{ikR}}{4\pi R} \mathbf{m} \times \mathbf{e}_R$$

相应的电磁场强度计算如下⁴:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = ik \mathbf{e}_R \times \mathbf{A} \\ &= \frac{\mu_0 k^2 e^{ikR}}{4\pi R} \mathbf{e}_R \times (\mathbf{m} \times \mathbf{e}_R) \\ &= -\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c^2 R} \mathbf{e}_R \times (\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{e}_R) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c^2 R} (\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{e}_R) \times \mathbf{e}_R \\ \mathbf{E} &= i \frac{c^2}{\omega} \nabla \times \mathbf{B} = i \frac{c^2}{\omega} ik \mathbf{e}_R \times \mathbf{B} \\ &= -c \mathbf{e}_R \times \mathbf{B} \\ &= -\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c R} \mathbf{e}_R \times [(\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{e}_R) \times \mathbf{e}_R] = -\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c R} (\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{e}_R) \end{aligned}$$

⁴注意: $k = \omega/c$.

所以,

$$R_r \approx 197 (l/\lambda)^2 \text{ } \Omega$$

- 辐射电阻是表征天线辐射电磁波能力的一个参数. 天线的辐射电阻愈大,表示在输入电流强度给定的前提下,辐射功率愈大.
- 短天线的辐射电阻正比于 $(l/\lambda)^2$. 对于短天线而言, $l \ll \lambda$, 因此,短天线的辐射能力是弱的.
- 要提高天线的辐射能力,需要增大天线的长度以致 $l \sim \lambda$, 此时天线的辐射已不能用电偶极辐射来近似描写.

磁偶极辐射场的平均能流密度矢量计算如下. 注意到 $\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{B} = 0$, 我们有⁵:

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} (\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} [(c \mathbf{B}^* \times \mathbf{e}_R) \times \mathbf{B}] = \frac{c}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \mathbf{e}_R \\ &= \frac{\mu_0}{32\pi^2 c^3 R^2} |(\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{e}_R) \times \mathbf{e}_R|^2 \\ &= \frac{\mu_0}{32\pi^2 c^3 R^2} [\ddot{\mathbf{m}} \cdot \ddot{\mathbf{m}}^* - (\mathbf{e}_R \cdot \ddot{\mathbf{m}})(\mathbf{e}_R \cdot \ddot{\mathbf{m}}^*)] \mathbf{e}_R \end{aligned}$$

建立球坐标系,把磁偶极子置于坐标原点且以 \mathbf{m} 的方向为极轴. 如此, $\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{m} = |\mathbf{m}| \cos \theta$, θ 为场点对应的极角. 可以把磁偶极辐射场的平均能流密度矢量改写为:

$$\langle S \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 |\mathbf{m}|^2}{32\pi^2 c^3 R^2} \sin^2 \theta \mathbf{e}_R$$

⁵事实上,磁偶极辐射场是 TEM 波: $\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{E} = \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{B} = 0$.

磁偶极辐射场的总辐射功率为:

$$P = \frac{\mu_0 \omega^4 |\mathbf{m}|^2}{12\pi c^3}$$

例: 一载流线圈半径为 a , 激发的交变电流的振幅为 I_0 , 角频率为 ω . 求辐射功率.

解: 载流线圈的磁偶极矩的大小为,

$$m = \pi a^2 I = \pi a^2 I_0 e^{-i\omega t}$$

其峰值是:

$$|\mathbf{m}| = \pi a^2 I_0$$

所以,载流线圈的辐射功率为:

$$P = \frac{\mu_0 \omega^4 I_0^2 (\pi a^2)^2}{12\pi c^3} = \frac{4\pi^5}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 I_0^2$$

当电流峰值 I_0 不随时间变化时,磁偶极辐射的功率 $\propto (a/\lambda)^4$, 因此磁偶极辐射比电偶极辐射小 $(a/\lambda)^2$ 数量级. 小线圈的辐射能力比短天线更低.

电四极辐射场

电四极辐射场的推迟矢势是:

$$A(\mathbf{x}) = -i \frac{\mu_0 k e^{ikR}}{24\pi R^2} x_i e_k \ddot{\mathcal{D}}^{ik} = \frac{e^{ikR} x_i \ddot{\mathcal{D}}^{ik}}{24\pi \epsilon_0 c^3 R^2} e_k$$

式中,

$$\ddot{\mathcal{D}}_{ij} = 3 \int_V d^3x' x'_i x'_j \rho(\mathbf{x}')$$

由于 A 表达式中存在因子 x_i , 这是场点直角坐标的 i -分量, 电四极辐射场的推迟矢势对场点的依赖仍是 $1/R$.

下面求电四极辐射场的场强. 磁感应强度计算如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ &= ik \mathbf{e}_R \times \mathbf{A} = \frac{e^{ikR} x_i \ddot{\mathcal{D}}^{ik}}{24\pi \epsilon_0 c^4 R^2} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_R) \end{aligned}$$

注意到数学恒等式,

$$x_i \delta^{ik} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_R) = x^i \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_R = \mathbf{x} \times \mathbf{e}_R = R(\mathbf{e}_R \times \mathbf{e}_R) = 0$$

我们可以在 \mathbf{B} 的表达式中把有迹的电四极矩 $\tilde{\mathcal{D}}_{ik}$ 更换为无迹的电四极矩 \mathcal{D}_{ik} :

$$\mathcal{D}_{ij} = \int_V d^3x' (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\mathbf{x}')$$

显然,

$$\tilde{\mathcal{D}}_{ij} = \mathcal{D}_{ij} + \delta_{ij} \left[\int_V d^3x' r'^2 \rho(\mathbf{x}') \right]$$

所以, 电四极辐射场的磁感应强度分布为:

$$\mathbf{B} = \frac{e^{ikR} x_i \ddot{\mathcal{D}}^{ik}}{24\pi\epsilon_0 c^4 R^2} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_R)$$

其电场强度分布为:

$$\mathbf{E} = c \mathbf{B} \times \mathbf{e}_R = \frac{e^{ikR} x_i \ddot{\mathcal{D}}^{ik}}{24\pi\epsilon_0 c^3 R^2} [(\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_R) \times \mathbf{e}_R]$$

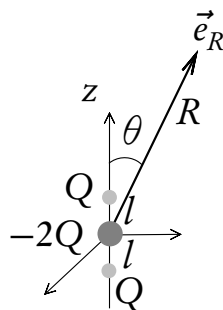
不难看出, 电四极辐射场仍是 TEM 波: $\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{B} = \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{E} = 0$.

电四极辐射场的平均能流密度矢量计算如下:

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}) \\ &= \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \text{Re}[(c \mathbf{B}^* \times \mathbf{e}_R) \times \mathbf{B}] \\ &= \frac{\epsilon_0 c^2}{2} |\mathbf{B}|^2 \mathbf{e}_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_i x_j \ddot{\mathcal{D}}^{*ik} \ddot{\mathcal{D}}^{jl}}{288\pi c^5 R^4} [\delta_{kl} - (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_R)(\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_R)] \mathbf{e}_R \end{aligned}$$

- ① 电四极辐射场的平均能流密度分布对于场点距离的依赖仍是所期望的 $1/R^2$ 衰减律.
- ② 电四极辐射场的角分布由因子 $[\delta_{kl} - (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_R)(\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_R)]$ 确定.
- ③ 设电荷分布区域线度为 l , 则 $\mathcal{D}_{ij} \sim \mathcal{O}(l^2)$, 于是电四极辐射场的辐射功率正比于 $(l/\lambda)^4$, 它与磁偶极辐射同数量级, 但比电偶极辐射小 $(l/\lambda)^2$ 数量级.

例: 求右图所示的电四极子以频率 ω 振荡时的辐射功率和角分布.



解: 此电四极子的电荷体密度为:

$$\rho(\mathbf{x}') = Q \delta(x') \delta(y') [\delta(z' - l) - 2\delta(z') + \delta(z' + l)]$$

所以, 电四极矩张量 $\tilde{\mathcal{D}}_{ij}$ 只有 33 分量非零:

$$\tilde{\mathcal{D}}_{33} = 3 \int_V d^3x' z'^2 \rho(\mathbf{x}') = 6Ql^2 \rightsquigarrow \ddot{\tilde{\mathcal{D}}}_{33} = 6Ql^2 (-i\omega)^3 = i6Ql^2 \omega^3$$

振荡电四极子也是通过交变电流实现的, 相应的电流强度为:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -i\omega Q e^{-i\omega t}$$

技术上所能控制的是保证电流强度的峰值 $I_0 = \omega Q$ 不随时间变化. 利用 I_0 , 我们有:

$$\ddot{\tilde{\mathcal{D}}}_{33} = i6I_0 (\omega l)^2 = i24\pi^2 c^2 I_0 (l/\lambda)^2$$

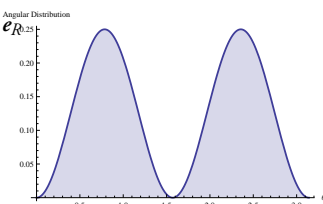
所以,

$$\begin{aligned} &x_i x_j \ddot{\mathcal{D}}^{*ik} \ddot{\mathcal{D}}^{jl} [\delta_{kl} - (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_R)(\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_R)] \\ &= z^2 |\ddot{\tilde{\mathcal{D}}}_{33}|^2 [1 - (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_R)^2] \\ &= (R \cos \theta)^2 576\pi^4 c^4 I_0^2 (l/\lambda)^4 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= 576\pi^4 c^4 I_0^2 R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta (l/\lambda)^4 \end{aligned}$$

此电四极辐射场的平均能流密度因此写为:

$$\langle S \rangle = \frac{\pi^2 I_0^2}{2\epsilon_0 c R^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta (l/\lambda)^4 \mathbf{e}_R$$

电四极辐射的角分布由因子 $\sin^2 \theta \cos^2 \theta$ 确定, 全貌如右图所示.



电四极辐射总功率为:

$$\begin{aligned} P &= \oint \langle S \rangle \cdot \mathbf{e}_R R^2 d\Omega \\ &= \frac{\pi^2 I_0^2}{2\epsilon_0 c} (l/\lambda)^4 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta \cos^2 \theta = \frac{4\pi^3}{15} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^4 I_0^2 \end{aligned}$$

即电四极辐射场的辐射功率与磁偶极辐射具有相同的数量级.

任意运动带电粒子的电磁势

按照经典力学原理, 若质点受到了外力的作用, 则其将沿某个确定的轨道作加速运动.

现在把某带电粒子看成质点, 设其沿某特定轨道运动, 其位置矢量为 $\mathbf{x}_q(t')$.

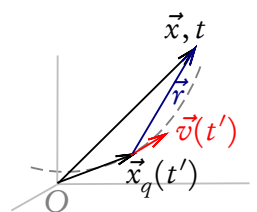
这个运动电荷将在周围空间激发电磁场.

由于电磁相互作用传播速度的有限性, 位于场点 \mathbf{x} 处的观测者在时刻 t 的电磁势应该是带电粒子在较早时刻 t' 激发的, 该时刻粒子处于 $\mathbf{x}_q(t')$ 点, 其速度为 $\mathbf{v}(t')$.

t' 时刻带电粒子与给定场点之间的距离为:

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(t')| = c(t - t')$$

当下的任务是计算带电粒子在场点处所激发的电磁场的推迟势.



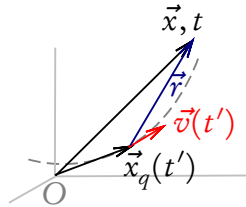
采取 Lorenz 规范. 惯性参考系中任意电荷电流分布在无界空间激发的电磁势是如下推迟势:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3y ds \frac{\delta(t-s-r/c)}{r} \rho(\mathbf{y}, s) \\ A(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y ds \frac{\delta(t-s-r/c)}{r} \mathbf{j}(\mathbf{y}, s)\end{aligned}$$

式中的 $r = |\mathbf{r}|$ 表示场点与源点之间的距离, $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ 是相应的位矢.

对于电荷量为 q 的运动电荷而言, 其电荷密度和电流密度分别为:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{y}, s) &= q\delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_q(s)) \\ \mathbf{j}(\mathbf{y}, s) &= \rho(\mathbf{y}, s)\mathbf{v}(s) = q\mathbf{v}(s)\delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_q(s))\end{aligned}$$



$$F(s) = t - s - \frac{r(s)}{c} = t - s - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(s)|}{c}$$

幸好数学上对计算这类积分早有准备. 若函数 $F(x)$ 有一系列零点 x_i , 即 $F(x)|_{x=x_i} = 0$, 则:

$$\delta[F(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|F'(x_i)|}$$

注意到:

$$r(s) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(s)| = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(s)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(s))} = \sqrt{(x_i - x_{qi}(s))(x^i - x_q^i(s))}$$

$$\frac{dr(s)}{ds} = -\frac{(x_i - x_{qi}(s))}{r(s)} \frac{dx_q^i(s)}{ds} = -\frac{(x_i - x_{qi}(s))}{r(s)} v^i(s) = -\frac{\mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{v}(s)}{r(s)}$$

对于本问题而言, $F(s) = t - s - r(s)/c$,

$$F'(s) = -1 - \frac{1}{c} \frac{dr(s)}{ds} = -1 + \frac{\mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{v}(s)}{cr(s)} = -1 + \mathbf{n}(s) \cdot \boldsymbol{\beta}(s)$$

这里 $\mathbf{n}(s) = \mathbf{r}(s)/r(s)$ 且 $\boldsymbol{\beta}(s) = \mathbf{v}(s)/c$.

亦即:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 [r(t') - \mathbf{r}(t') \cdot \mathbf{v}(t')/c]}$$

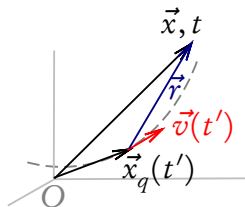
式中 $\mathbf{r}(t') = \mathbf{x} - \mathbf{x}_q(t')$, $r(t')$ 是其大小, 而 t' 由 $t' = t - r(t')/c$ 的解确定.

同理有:

$$A(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}(t')}{[r(t') - \mathbf{r}(t') \cdot \mathbf{v}(t')/c]}$$

推迟势的上述结果称为李纳-维谢尔 (Lienard-Wiechert) 势.

- 惯性参考系中, 李纳-维谢尔势只依赖于带电粒子的速度矢量, 而不依赖于其加速度.



将其代入到推迟势公式中, 完成对空间坐标 d^3y 的积分, 即得:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3y ds \frac{\delta(t-s-r/c)}{r} q\delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_q(s)) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int ds \frac{\delta[t-s-r(s)/c]}{r(s)}\end{aligned}$$

式中 $r(s) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(s)|$. 同理有:

$$A(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int ds \frac{\mathbf{v}(s) \delta[t-s-r(s)/c]}{r(s)}$$

接下来需要完成对时间变量 s 的积分, 然而这是有难度的. 我们知道

$$\int ds G(s) \delta(s - s^*) = G(s^*)$$

但现在遭遇的不是这样的积分, 而是

$$\int ds G(s) \delta[F(s)]$$

此处 $F(s)$ 不是自变量 s 的线性函数.

$F(s)$ 的零点满足代数方程:

$$F(s) = t - s - r(s)/c = 0 \quad \rightsquigarrow t = s + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(s)|/c$$

从物理角度看, 这个方程的解是唯一的:

$$s = t'$$

t' 是带电粒子发射电磁波的时刻. 所以,

$$\delta[F(s)] = \frac{\delta(s - t')}{1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')}$$

因此, 以速度 $\mathbf{v}(t')$ 运动的带电粒子所激发的电磁场在 Lorenz 规范中具有推迟标势:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int ds \frac{\delta[F(s)]}{r(s)} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int ds \frac{\delta(s - t')}{r(s)[1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')]} \end{aligned}$$

李纳-维谢尔势的四维形式

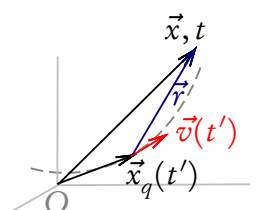
所以,

- 李纳-维谢尔势可以从带电粒子瞬时自身参考系中的静电库仑势出发、通过惯性系之间的洛伦兹推动变换求得.
- 构造一族惯性参考系 $\{\tilde{\Sigma}\}$, 其成员的数目原则上可以是无穷大. 在每一时刻, 总有一个 $\tilde{\Sigma}$ 与带电粒子保持相对静止. 称 $\tilde{\Sigma}$ 为粒子的瞬时自身系.
- 加速运动粒子的瞬时自身系与自身系是不同的概念. 自身系唯一但非惯性系, 而瞬时自身系是惯性系却不唯一.

在瞬时自身系 $\tilde{\Sigma}$ 中, 带电粒子激发的电磁势是静电库仑势:

$$\tilde{A} = 0, \quad \tilde{\phi} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \tilde{r}}$$

\tilde{r} 为在 $\tilde{\Sigma}$ 上测量到的粒子与场点之间的距离.



Q: 那么, 实验室参考系中测得的李纳-维谢尔势如何由上面的静电库仑势导出呢?

一种选择是直接使用电磁势的洛伦兹推动变换,

$$A_\mu = \tilde{A}_\nu \Lambda^\nu_\mu$$

此处 $A_\mu = (-\phi/c, \mathbf{A})$ 与 $\tilde{A}_\mu = (-\tilde{\phi}/c, \tilde{\mathbf{A}})$ 分别是实验室系和粒子瞬时自身系中的四维电磁势. 洛伦兹推动变换的非零矩阵元分别为:

$$\Lambda^0_0 = \gamma_v, \quad \Lambda^0_j = -\gamma_v \beta_j, \quad \Lambda^i_0 = -\gamma_v \beta^i, \quad \Lambda^i_j = \delta^i_j + \frac{\gamma_v^2}{\gamma_v + 1} \beta^i \beta_j$$

式中 $\beta = \mathbf{v}(t')/c$, $\gamma_v = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

① 这个做法详见教材或者参考书, 例如郭硕鸿等教授的著作《电动力学》(第三版) 第七章第一节. 此处略.

从物理直观上看, 存在着一个与 \mathbf{r} 相关四维矢量, 它是观测者所在的时空点 (t, \mathbf{x}) 相对于带电粒子激发电磁波时所占据的时空点 $(t', \mathbf{x}_q(t'))$ 的位置 4-矢量:

$$R^\mu = (c(t-t'), \mathbf{x} - \mathbf{x}_q(t'))$$

由于这两个时空点是通过电磁波讯号相联系的, 故 R^μ 是一个类光 4-矢. **无法通过 R^μ 与其自身的缩并构造出一个非零的 4-标量:**

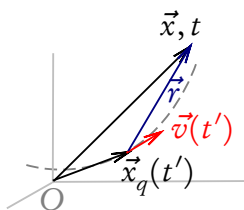
$$R^\mu R_\mu = -c^2(t-t')^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(t'))^2 = 0$$

所以,

$$R^\mu = (r, \mathbf{r})$$

式中 $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_q(t')$ 而

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(t')| = c(t-t')$$



带电粒子李纳-维谢尔势的四维形式最终写为:

$$A_\mu = \left(-\frac{\phi}{c}, \mathbf{A} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{q U_\mu}{R^\nu U_\nu}$$

Q: 它正确吗?

在实验室参考系中,

$$U_\mu = \gamma_v(-c, \mathbf{v}(t'))$$

$$R^\mu U_\mu = R^i U_i + R^0 U_0 = -c\gamma_v [\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}(t') \cdot \mathbf{v}(t')/c]$$

代回到 A_μ 的四维表述, 即得:

$$A(x, t) = \frac{\mu_0 q v(t')}{4\pi [\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}(t') \cdot \mathbf{v}(t')/c]}, \quad \phi(x, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 [\mathbf{r}(t') - \mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{r}(t')/c]}$$

这个结论正是李纳-维谢尔势的标准表达式.

我们以下的方案是通过一些物理考虑, 直接将李纳-维谢尔电磁场的四维势矢量构造出来.

- 李纳-维谢尔势的特点是势只依赖于带电粒子的速度、而不依赖于它的加速度. 与粒子速度相关的基础 4-矢量是其 4-速度 U_μ ,

$$U_\mu = \gamma_v(-c, \mathbf{v}(t'))$$

所以:

$$A_\mu \propto U_\mu$$

- 上式右端的系数显然应该是一个 4-标量, 且正比于粒子的电荷 q .
- 李纳-维谢尔势在粒子的瞬时自身系中应退化为静电库仑势. 因此, 此系数 4-标量还应反比于距离 \tilde{r} 的一次幂.

幸运的是, 可以通过 R^μ 与粒子 4-速度 U_μ 的缩并构造出一个非零的 4-标量:

$$R^\mu U_\mu \neq 0$$

这样, 李纳-维谢尔势显示的四维形式就可以写为:

$$A_\mu = \zeta \frac{q U_\mu}{R^\nu U_\nu}$$

因子 ζ 的引入是为了平衡量纲. 为了确定 ζ , 我们按上式计算一下粒子瞬时自身系中的标势 \tilde{A}_0 :

$$\tilde{A}_0 = \zeta \frac{q \tilde{U}_0}{\tilde{R}^0 \tilde{U}_0} = \zeta \frac{qc}{\tilde{r}c} = \zeta \frac{q}{\tilde{r}}$$

因为 \tilde{A}_0 本质上是静电库仑势,

$$\tilde{A}_0 = -\tilde{\phi}/c = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{q}{\tilde{r}}$$

比较知:

$$\zeta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c}$$

Q: 可否从静电库仑定律出发通过洛伦兹推动变换求得加速带电粒子的电磁场场强?

- 结论是不行.
- 这是因为对于加速运动带电粒子而言, 其瞬时自身系中的电磁场并不是静电库仑定律描写的静电场.
- 有了李纳-维谢尔势后, 计算运动带电粒子所激发电磁场场强的最经济方法是使用场强的定义式:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

两个辅助公式

t' 是场点时空坐标 (t, \mathbf{x}) 的隐函数，

$$t' = t - \frac{r(t')}{c}, \quad r(t') = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(t')|.$$

欲求场强，须先求 $\partial t' / \partial t$ 和 $\nabla t'$ 。首先注意到：

$$\frac{\partial r(t')}{\partial t'} = -\frac{\mathbf{r}(t') \cdot \mathbf{v}(t')}{r(t')}$$

式中 $\mathbf{r}(t') = \mathbf{x} - \mathbf{x}_q(t')$, $\mathbf{v}(t') = \frac{d\mathbf{x}_q(t')}{dt'}$ 是粒子在 t' 时刻的速度。所以，

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial r(t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = 1 + \frac{\mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{r}(t')}{cr(t')} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

由此得：

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \left[1 - \frac{\mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{r}(t')}{cr(t')} \right]^{-1}$$

为简化表达式，我们引入 $\mathbf{r}(t')$ 方向的单位矢量 $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}(t')/r(t')$ 和粒子的无量纲速度 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}(t')/c$ 。因此，

$$\frac{\partial r(t')}{\partial t'} = -c\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r$$

且：

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r}$$

接着计算 t' 对场点空间坐标的梯度：

$$\begin{aligned} \nabla t' &= -\frac{1}{c} \nabla r(t') \\ &= -\frac{1}{c} \nabla r(t') \Big|_{t'=\text{常数}} - \frac{1}{c} \frac{\partial r(t')}{\partial t'} \nabla t' = -\frac{\mathbf{e}_r}{c} + (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r) \nabla t' \end{aligned}$$

从而，

$$\nabla t' = -\frac{\mathbf{e}_r/c}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r}$$

低速带电粒子的电磁场

现在计算运动带电粒子所激发的电磁场场强。先考虑低速情形， $v(t') \ll c$ 。此情形下前述辅助公式退化为：

$$\frac{\partial t'}{\partial t} \approx 1, \quad \nabla t' \approx -\mathbf{e}_r/c$$

而李纳-维谢尔势近似表为：

$$\phi(\mathbf{x}, t) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r(t')} [1 + \boldsymbol{\beta}(t') \cdot \mathbf{e}_r], \quad A(\mathbf{x}, t) \approx \frac{q\boldsymbol{\beta}(t')}{4\pi\epsilon_0 c r(t')}$$

式中忽略了 β^2 以及 $\boldsymbol{\beta}$ 的更高幂次项的贡献。下同。场点 (\mathbf{x}, t) 处电磁场的电场强度计算如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \partial_t A \\ &= -\nabla\phi \Big|_{t'=\text{常数}} - \frac{\partial\phi}{\partial t'} \nabla t' - \partial_t A \end{aligned}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \partial_{t'} [\boldsymbol{\beta} / r(t')] \partial_{t'} t' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{r} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{r^2} (-c\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r) \right] = \frac{q\dot{\boldsymbol{\beta}}}{4\pi\epsilon_0 c r}$$

把这几个式子代回到电场强度的计算公式，即得：

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{q[\boldsymbol{\beta} - 3(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r]}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{q\mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{4\pi\epsilon_0 c r}$$

接下来计算场点处的磁感应强度：

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} \Big|_{t'=\text{常数}} + \nabla t' \times \frac{\partial A}{\partial t'}$$

不难证明 (本周作业题)：

$$\nabla(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r) \Big|_{t'=\text{常数}} = \frac{[\boldsymbol{\beta} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r]}{r}, \quad \dot{\mathbf{e}}_r = -\frac{c[\boldsymbol{\beta} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r]}{r}$$

式中的 $\dot{\mathbf{e}}_r$ 代表 \mathbf{e}_r 对 t' 的微商。

于是，

$$\begin{aligned} \nabla\phi \Big|_{t'=\text{常数}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left[\frac{1 + \boldsymbol{\beta}(t') \cdot \mathbf{e}_r}{r(t')} \right] \Big|_{t'=\text{常数}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} [-\mathbf{e}_r + \boldsymbol{\beta} - 2(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial t'} \nabla t' &= (-\mathbf{e}_r/c) \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \partial_{t'} \left[\frac{1 + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r}{r(t')} \right] \\ &= -\frac{qe_r}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{(1 + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r)}{r^2} c(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r) + \frac{(\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{e}_r) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\mathbf{e}}_r)}{r} \right] \\ &= -\frac{qe_r(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{qe_r(\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{e}_r)}{4\pi\epsilon_0 c r} \end{aligned}$$

其中第一项简化为：

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} \Big|_{t'=\text{常数}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \nabla \times [\boldsymbol{\beta}(t')/r(t')] \Big|_{t'=\text{常数}} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \boldsymbol{\beta}(t') \times \nabla [1/r(t')] \Big|_{t'=\text{常数}} = \frac{q(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{e}_r)}{4\pi\epsilon_0 c r^2} \end{aligned}$$

这正是运动电荷激发的静磁感应强度。第二项简化为：

$$\nabla t' \times \frac{\partial A}{\partial t'} = (-\mathbf{e}_r/c) \times \frac{q\dot{\boldsymbol{\beta}}}{4\pi\epsilon_0 c r} = \frac{q(\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \mathbf{e}_r)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}$$

综合起来，即有：

$$\mathbf{B} = \frac{q(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{e}_r)}{4\pi\epsilon_0 c r^2} + \frac{q(\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \mathbf{e}_r)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}$$

顿悟:

运动带电粒子激发的电磁场的场强矢量均可以分类为两部分:

- ① 一部分不依赖粒子的加速度, 场强的大小与场点到源点的距离的平方成反比. 这样的电磁场称为**似稳场**, 它还可以进一步区分为与粒子速度无关的静电库仑场和粒子速度引起的修正. 似稳场衰减的很快, 它总是与粒子不可分割地联系在一起且仅存在于带电粒子附近, 故亦称为粒子的**自场**.
- ② 另一部分场强依赖于粒子的加速度, 场强的大小仅与场点、源点距离的一次方成反比. 这样的场称为**辐射场**.

略去似稳场后, 得低速运动带电粒子当其有加速度 $c\dot{\beta}$ 时激发的辐射场场强如下:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c r} e_r \times (e_r \times \dot{\beta}), \quad B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} (\dot{\beta} \times e_r)$$

使用数学恒等式

$$e_r \times [e_r \times (e_r \times A)] = A \times e_r$$

又可把辐射场的磁感应强度表为:

$$B = \frac{e_r}{c} \times E$$

- 若将 $p = qx_q$ 看作带电粒子的电偶极矩, 则 $\dot{p} = qc\dot{\beta}$. 如此, 低速带电粒子的辐射场场强公式与电偶极辐射公式重合. **低速带电粒子做加速运动时将激发电偶极辐射场.**
- 辐射能流密度矢量是:

$$S = \frac{1}{\mu_0} E \times B = \frac{q^2 \dot{\beta}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c r^2} \sin^2 \Theta e_r$$

此处 Θ 为 r 与 $\dot{\beta}$ 之间的夹角, 它描写了辐射能流的方向性. 显然, 在与粒子加速度垂直的方向上辐射场能流最强.

- 总辐射功率为:

$$P = \oint S \cdot e_r r^2 d\Omega = \frac{q^2 \dot{\beta}^2}{6\pi\epsilon_0 c}$$

电磁波波动方程

现在考虑在没有电荷、电流分布的自由空间中电磁波的传播特性.

首先考虑真空情形. 此情形下 $D = \epsilon_0 E$ 且 $B = \mu_0 H$, 电磁波的传播遵循齐次麦克斯韦方程组:

$$\begin{aligned} \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times B &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \\ \nabla \cdot E &= 0 \\ \nabla \cdot B &= 0 \end{aligned}$$

取第一个方程的旋度、并利用第二个方程化简, 得:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla \times (-\partial_t B) = -\partial_t (\nabla \times B) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

可以把 E 和 B 的波动方程进一步写为:

$$\begin{aligned} \nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 B - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

亦即:

$$\square E = \square B = 0$$

参数 c 诠释为电磁波在真空中的传播速度.

电磁学实验测定的 μ_0 和 ϵ_0 分别是: $\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ 和 $\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$. 简单的计算表明:

$$c \approx 3 \times 10^8 \text{ 米/秒}$$

- ① 麦克斯韦曾据此大胆预言“(可见)光是一定波长范围内的电磁波”. 这一预言经受住了无数实验事实的检验.

上式左端进一步化简如下:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times E) &= e_i \epsilon^{ijk} \partial_j (\epsilon_{kmn} \partial^m E^n) = e_i [\delta_m^i \delta_n^j - \delta_n^i \delta_m^j] \partial_j \partial^m E^n \\ &= e_i \partial^i (\partial_j E^j) - e_i \partial_j \partial^j E^i \\ &= \nabla (\nabla \cdot E) - \nabla^2 E \\ &= -\nabla^2 E \end{aligned}$$

中间计算使用了直角坐标系. 最后一步使用了自由空间中电场的高斯定律 $\nabla \cdot E = 0$. 结合以上两式即得:

$$\nabla^2 E - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

同理有:

$$\nabla^2 B - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$$

引入具有“速度”量纲的参数:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

电磁波在介质中的传播

现在讨论“针对介质中传播的电磁波”建立其波动方程的可能性.

- ① 研究介质中的电磁波传播时, 须首先通过实验建立 E 与 D 、 B 与 H 之间的本构关系.
- ② 电磁波的电场强度一般可以看做许多不同频率的模式电磁波场强的叠加:

$$E(x, t) \sim \int d\omega E(x, \omega) \cos(\omega t), \quad B(x, t) \sim \int d\omega B(x, \omega) \cos(\omega t).$$

当角频率为 ω 的余弦模式振荡的电磁波进入到介质内部后, 介质内的束缚电荷受到电磁场洛伦兹力的作用,

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = q_i [E(x, \omega) + v_i \times B(x, \omega)] \cos(\omega t)$$

亦将以相同的角频率 ω 做余弦振动. 从而介质的极化率、磁化率都将与模式电磁波的角频率 ω 有关. 进而:

$$D(x, \omega) = \epsilon(\omega) E(x, \omega), \quad B(x, \omega) = \mu(\omega) H(x, \omega).$$

介质的色散:

对于不同频率的电磁波,即使是同一种介质,它的电容率和磁导率也是不同的.换言之,介质的 ϵ 和 μ 将随入射电磁波的频率改变而变化,

$$\epsilon = \epsilon(\omega), \quad \mu = \mu(\omega).$$

这个现象称为“介质的色散”.

由于色散,对于一般的电磁波而言:

$$\begin{aligned} D(\mathbf{x}, t) &\sim \int d\omega D(\mathbf{x}, \omega) \cos(\omega t) \\ &= \int d\omega \epsilon(\omega) E(\mathbf{x}, \omega) \cos(\omega t) \\ &\neq \epsilon \int d\omega E(\mathbf{x}, \omega) \cos(\omega t) \sim \epsilon E(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

现在推导“传播于没有自由的电荷电流分布的绝缘介质中的时谐电磁波”所需要满足的波动方程. 对于时谐电磁波而言,法拉第电磁感应定律写为:

$$\begin{aligned} \nabla \times E(\mathbf{x})e^{-i\omega t} &= \nabla \times E(\mathbf{x}, t) \\ &= -\partial_t B(\mathbf{x}, t) \\ &= -\partial_t [B(\mathbf{x})e^{-i\omega t}] = i\omega \mu H(\mathbf{x})e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

两端抽出时间因子 $e^{-i\omega t}$ 后,我们得:

$$\nabla \times E(\mathbf{x}) = i\omega \mu H(\mathbf{x})$$

同理,无自由电流分布时的 Maxwell 方程

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}$$

在时谐电磁波情形下可写为:

$$\nabla \times H(\mathbf{x}) = -i\omega \epsilon E(\mathbf{x})$$

计及电场的高斯定律, $\nabla \cdot E = 0$, 我们把上式左端化简为:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times E) &= e_i \epsilon^{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} \partial^l E^m) \\ &= e_i \epsilon^{ijk} \epsilon_{lmk} \partial_j \partial^l E^m \\ &= e_i (\delta_l^j \delta_m^i - \delta_m^j \delta_l^i) (\partial_j \partial^l E^m) \\ &= e_i \partial^i (\partial_j E^j) - e_i \partial_j \partial^j E^i \\ &= \nabla (\nabla \cdot E) - \nabla^2 E \\ &= -\nabla^2 E \end{aligned}$$

于是,时谐波电场强度满足的波动方程是:

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0, \quad k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}, \quad \nabla \cdot E = 0.$$

通过求解上述波动方程解出 E 后,磁场 B 可通过法拉第定律求得:

$$B = -\frac{i}{\omega} \nabla \times E$$

同理,

$$B(\mathbf{x}, t) \neq \mu H(\mathbf{x}, t)$$

鉴于此,对于介质中传播的一般电磁波,不能够写出简单形式的 E, B 的波动方程.

以下我们只讨论具有确定频率 ω 的“时谐电磁波”在介质中的传播.时谐电磁波的场强对时间的依赖关系是 $\cos(\omega t)$:

$$E(\mathbf{x}, t) = E(\mathbf{x}) \cos(\omega t), \quad B(\mathbf{x}, t) = B(\mathbf{x}) \cos(\omega t).$$

为方便计,我们常常将上式改写为复数形式:

$$E(\mathbf{x}, t) = E(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad B(\mathbf{x}, t) = B(\mathbf{x})e^{-i\omega t}.$$

对于线性均匀介质, $D = \epsilon E, B = \mu H$, 这里的电容率和磁导率都是频率 ω 依赖的.

计入高斯定律,时谐电磁波所满足的完整的 Maxwell 方程组是:

$$\begin{aligned} \nabla \times E &= i\omega \mu H \\ \nabla \times H &= -i\omega \epsilon E \\ \nabla \cdot E &= 0 \\ \nabla \cdot H &= 0 \end{aligned}$$

- ① 在 $\omega \neq 0$ 情形下,只有前两个方程是独立的.注意到旋度场无散,后两个方程可以通过求前两个方程的散度得到.

现在开始推导时谐电磁波的波动方程.取上述 Maxwell 方程组中第一个方程的旋度、并使用第二个方程,可得:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times E) &= i\omega \mu \nabla \times H \\ &= i\omega \mu (-i\omega \epsilon E) \\ &= \omega^2 \mu \epsilon E \end{aligned}$$

① 方程

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0$$

在数学上被称为 Helmholtz 方程.它只有在高斯约束

$$\nabla \cdot E = 0$$

成立的条件下才等价于 Maxwell 方程.所以,

Helmholtz 方程的解必须进一步满足高斯约束条件 $\nabla \cdot E = 0$ 才能描写真实的电磁波模式.

时谐电磁波情形下, Maxwell 方程组简化为:

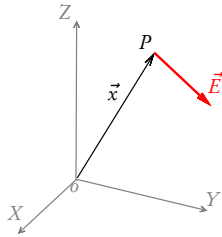
$$\begin{aligned} \nabla^2 E + k^2 E &= 0, \\ [k &= \omega \sqrt{\mu \epsilon}] \\ \nabla \cdot E &= 0, \\ B &= -\frac{i}{\omega} \nabla \times E. \end{aligned}$$

平面电磁波

从现在起我们讨论“角频率为 ω 的时谐电磁波的波动方程”的求解。

采用笛卡尔直角坐标系，可以把场强和 Laplace 算符分别写为 $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = E_i(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$ 和 $\nabla^2 = \partial_i \partial^i$ ，或者写为显式，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}) &= E_x(x, y, z)\mathbf{e}_1 + E_y(x, y, z)\mathbf{e}_2 \\ &\quad + E_z(x, y, z)\mathbf{e}_3, \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.\end{aligned}$$



注意到直角坐标系基矢是常矢量，Helmholtz 方程 $\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$ 可以等价地改写为：

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] E_i(x, y, z) + k^2 E_i(x, y, z) = 0, \quad (i = x, y, z.)$$

这个方程可以用分离变量法求解。

计及时间因子，角频率为 ω 的平面电磁波电场强度的完整表达式为：

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

或者更物理地，

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$$

E_0 称为平面电磁波的波幅矢量。根据高斯约束施加的条件，

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{E} = \partial_i E^i = E_i^{(0)} \partial^i e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t} = i k_i E^i = i \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}$$

我们看到：

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$$

平面电磁波的磁感应强度计算如下：

$$\mathbf{B} = -\frac{i}{\omega} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{i}{\omega} \nabla e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \times E_0 = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

首先分析矢量 \mathbf{k} 的物理意义。为此我们计算一下平面电磁波的能量密度矢量：

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu\omega} [\mathbf{E}_0 \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0)] \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$$

所以，

$$\mathbf{S} \propto \mathbf{k}$$

即 \mathbf{k} 的方向就是平面电磁波能流密度矢量的方向。我们称 \mathbf{k} 为平面电磁波的波矢。

平面电磁波的特性概括如下：

- ① 平面电磁波为横波，其 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 都与波的传播方向垂直；
- ② \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 相互垂直， $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ 沿波矢 \mathbf{k} 的方向；
- ③ \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 同位相，波幅比为 $1/\sqrt{\mu\epsilon}$ 。

严格的分离变量法将延迟到后续章节。今天我们考虑如下试探解：

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = E_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

这里约定 E_0 和 \mathbf{k} 是两个与场点位置坐标无关的常矢量。

下面验证此试探解满足 Helmholtz 方程的条件。试探解在直角坐标系中的分量是：

$$E_i = E_i^{(0)} e^{i k_j x^j}$$

所以，

$$\nabla E_i = E_i^{(0)} \nabla e^{i k_j x^j} = i E_i^{(0)} e^{i k_j x^j} \nabla (k_j x^j) = i k E_i$$

进一步，

$$\nabla^2 E_i = \nabla \cdot \nabla E_i = i \nabla \cdot (k E_i) = i \nabla E_i \cdot \mathbf{k} = -E_i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})$$

代入到 Helmholtz 方程中知，要使 Helmholtz 方程成立，必须有：

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

这一试探解描写的电磁波称为“平面电磁波”。

所以，

$$\mathbf{B} = B_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad B_0 = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0.$$

此式表明：平面电磁波的电场强度 \mathbf{E} 和磁感应强度 \mathbf{B} 同位相。注意到 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$ 和三个矢量的混合积恒等式，我们有：

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$$

进而平面电磁波电场强度、磁感应强度也是相互正交的：

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{B}_0 = \frac{1}{\omega} \mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0) = 0$$

其波幅的比值求得为：

$$\frac{E_0}{B_0} = \omega / k = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

两个问题：

- ① \mathbf{k} 的物理意义是什么？
- ② $\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ 的物理意义又是什么？

为了看清

$$1/\sqrt{\mu\epsilon}$$

的物理意义，我们考察一下平面电磁波场强表达式中的位相因子 $\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$ 或者 $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ 。显见，在任一给定时刻 t ，在平面波传播的路径上，所有的位相都等于 ϕ 的场点均处于一个平面上，平面方程是：

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = \phi$$

注意到对于由 ϕ 所标志的等位相面而言， ϕ 不随时间的演化而改变。所以，

$$\mathbf{k} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} - \omega = 0$$

- ① 此式中， $\frac{d\mathbf{x}}{dt} := v_p$ 描写平面电磁波等位相面的传播速度，称为“相速度”。
- ② 在线性均匀介质中的传播的平面电磁波而言，其相速度的大小为：

$$v_p = \frac{\omega}{k} = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$$

回忆真空中电磁波的传播速度的表达式，

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

以及线性均匀介质的本构关系 $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ 和 $\mu = \mu_r \mu_0$ ，我们有：

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

式中的 $n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$ 称为介质的“折射率”。由于介质的相对介电常数和相对磁导率均是频率 ω 的函数，在介质中不同频率的平面电磁波传播时有不同的相速度和折射率，这就是介质的色散现象。最后研究平面电磁波的能量和能流。线性均匀介质中电磁场的能量密度为：

$$w = \frac{1}{2} \left(\epsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu} \right)$$

于是，平面电磁波中电场能量与磁场能量相等：

$$\begin{aligned} w &= \epsilon E^2 \\ &= \frac{B^2}{\mu} \\ &= \epsilon E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) = \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 [1 + \cos 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \end{aligned}$$

由于能量密度 w 是场强的二次式，**计算 w 的瞬时值时不能使用场强的复数形式**。一个周期中能量密度的平均值是：

$$\begin{aligned} \langle w \rangle &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt w \\ &= \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt [1 + \cos 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \\ &= \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 \end{aligned}$$

平面电磁波的能流密度计算如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E} \times (\mathbf{e}_k \times \mathbf{E}) \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 \mathbf{e}_k \end{aligned}$$

注意到 $w = \epsilon E^2$ ，上式又可写为：

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} w \mathbf{e}_k = v_p w \mathbf{e}_k$$

一个周期内的平均能流密度矢量为：

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu} \text{Re} [\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \mathbf{e}_k$$

平面电磁波的能量和能流：

对于平面电磁波而言，

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \sqrt{\mu \epsilon} \mathbf{e}_k \times \mathbf{E}$$

这里用 \mathbf{e}_k 表示波矢方向的单位基矢，

$$\mathbf{k} = k \mathbf{e}_k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \mathbf{e}_k$$

所以：

$$\begin{aligned} B^2 &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \\ &= \sqrt{\mu \epsilon} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B} \\ &= \sqrt{\mu \epsilon} (\mathbf{B} \times \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{E} \\ &= \mu \epsilon [(\mathbf{e}_k \times \mathbf{E}) \times \mathbf{e}_k] \cdot \mathbf{E} \\ &= \mu \epsilon [(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k) \mathbf{E} - (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{E}) \mathbf{e}_k] \cdot \mathbf{E} = \mu \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \end{aligned}$$

即，

$$\frac{B^2}{\mu} = \epsilon E^2$$

二次式求平均值的普遍公式：

设周期函数 $F(t)$ 和 $G(t)$ 有复数表示：

$$F(t) = F_0 e^{-i\omega t}, \quad G(t) = G_0 e^{-i\omega t + i\phi}.$$

ϕ 是二者的位相差。乘积函数 FG 在一个周期 $T = 2\pi/\omega$ 中的平均值计算如下：

$$\begin{aligned} \langle FG \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T dt F_0 \cos(\omega t) \cdot G_0 \cos(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2} F_0 G_0 \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt [\cos \phi + \cos(2\omega t + \phi)] \\ &= \frac{1}{2} F_0 G_0 \cos \phi \end{aligned}$$

显然，最后的结果可以利用复数表示写成：

$$\langle FG \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [F^*(t) G(t)]$$

电磁波在介质分界面上的反射和折射

电磁波入射于两种介质的分界面上时将发生反射、折射现象。对于电磁波反射和折射现象的描述包括两个方面：

- ① 入射角、反射角和折射角之间的关系；
- ② 入射波、反射波和折射波的波幅比及相对位相。

电磁波在两种介质分界面上的反射、折射现象属于电磁波传播的边值问题，是由电磁场量的边值关系确定的。前面已经看到，对于传播于线性均匀绝缘介质中的频率为 ω 的时谐电磁波而言，Maxwell 方程组中独立的方程只有如下两个：

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D} = 0$$

将它们应用于两者绝缘介质的分界面上，即得如下边值关系：

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0$$

边值关系就是讨论电磁波在介质分界面上反射、折射现象的出发点。

反射、折射定律

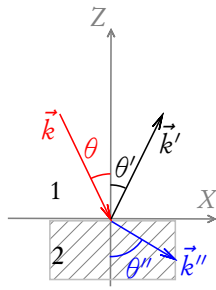
下面研究频率为 ω 的单色平面电磁波入射到两种绝缘介质分界面上时，入射角、反射角和折射角的关系。

我们做如下假设：

- ① 介质 1 和介质 2 的分界面是无穷大平面 $z = 0$ 。
- ② 入射波的波矢 \vec{k} 位于 $y = 0$ 平面。
- ③ 反射波和折射波也是频率与入射波频率相同的平面电磁波。

按照这些假设，入射波、反射波和折射波的电场强度矢量可以分别表示为：

$$\begin{aligned} E(x, t) &= E_0 e^{i(kx - \omega t)}, \\ E'(x, t) &= E'_0 e^{i(k'x - \omega t)}, \\ E''(x, t) &= E''_0 e^{i(k''x - \omega t)}. \end{aligned}$$



现将入射波、反射波和折射波的波矢都在直角坐标系中写出。例如对入射波， $\vec{k} = k_x \vec{e}_1 + k_y \vec{e}_2 + k_z \vec{e}_3$ ，上列条件可表为：

$$k_x x + k_y y = k'_x x + k'_y y = k''_x x + k''_y y$$

此式应该对任意的 x 和 y 都成立。

所以：

$$k_x = k'_x = k''_x, \quad k_y = k'_y = k''_y.$$

我们事先约定入射面为 $y = 0$ 的 xz 平面，即 $k_y = 0$ 。此外由示意图知 $k_x = k \sin \theta$ ， $k'_x = k' \sin \theta'$ 以及 $k''_x = k'' \sin \theta''$ 。综合这些因素，我们有：

$$k'_y = k''_y = 0, \quad k \sin \theta = k' \sin \theta' = k'' \sin \theta''$$

注意到入射波与反射波均位于介质 1、但折射波位于介质 2，我们有：

$$k = k' = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}, \quad k'' = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}.$$

介质 1 中同时存在入射波和反射波，而介质 2 中仅存在折射波。在介质分界面 $z = 0$ 上，边界条件

$$n_{12} \times (E_2 - E_1) = 0$$

具体化为：

$$\vec{e}_3 \times [E_0 e^{i(kx - \omega t)} + E'_0 e^{i(k'x - \omega t)}] = \vec{e}_3 \times E''_0 e^{i(k''x - \omega t)}$$

抽出公因子 $e^{-i\omega t}$ 后，得：

$$\vec{e}_3 \times [E_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + E'_0 e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}}] = \vec{e}_3 \times E''_0 e^{i\vec{k}'' \cdot \vec{x}}$$

此式对分界面上所有的场点 $\vec{x} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ 成立 (这里 x 和 y 完全任意)。注意到坐标 x 和 y 取值的不确定性，上述边界条件的成立意味着：

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = \vec{k}' \cdot \vec{x} = \vec{k}'' \cdot \vec{x}, \quad (z = 0)$$

把这个结果代入到上一式，则得：

$$\theta = \theta', \quad \frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}} = n_{21}$$

这个结果称为电磁波在两种介质分界面上的反射、折射定律。

$$n_{21} \equiv \frac{n_2}{n_1}$$

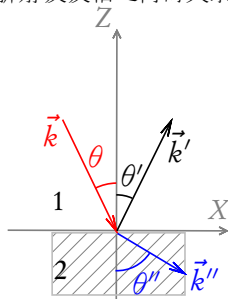
称为介质 2 相对于介质 1 的折射率。

菲涅耳公式

接着研究介质分界面上入射波、反射波和折射波波幅之间的关系。

计入反射和折射定律的贡献，电磁场量在“绝缘介质”分界面上的边值关系可通过其波幅矢量重新表达为：

$$\begin{aligned} \vec{e}_3 \times (\vec{E}_0 + \vec{E}'_0) &= \vec{e}_3 \times \vec{E}''_0, \\ \vec{e}_3 \times (\vec{H}_0 + \vec{H}'_0) &= \vec{e}_3 \times \vec{H}''_0. \end{aligned}$$



由示意图知：

$$\begin{aligned} k &= \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} [\sin \theta \vec{e}_1 - \cos \theta \vec{e}_3] \\ k' &= \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} [\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_3] \\ k'' &= \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} [\sin \theta'' \vec{e}_1 - \cos \theta'' \vec{e}_3] \end{aligned}$$

所以，“平面电磁波中 \vec{k} , \vec{E} 和 \vec{B} 两两正交”的事实允许我们将电场强度和磁场强度的波幅在直角坐标系中展开。分两种情况讨论：

• \vec{E} 在入射面内。

对于这样的极化入射波，入射波、反射波和折射波中的电场强度波幅矢量可表为：

$$\begin{aligned} E_0 &= E_0 (\cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_3) \\ E'_0 &= E'_0 (\cos \theta \vec{e}_1 - \sin \theta \vec{e}_3) \\ E''_0 &= E''_0 (\cos \theta'' \vec{e}_1 + \sin \theta'' \vec{e}_3) \end{aligned}$$

相应的磁场强度波幅表达式是：

$$\vec{H}_0 = -H_0 \vec{e}_2, \quad \vec{H}'_0 = H'_0 \vec{e}_2, \quad \vec{H}''_0 = -H''_0 \vec{e}_2.$$

这里的正负号选择需要保证 $\vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \propto \vec{k}$, $\vec{E}'_0 \times \vec{H}'_0 \propto \vec{k}'$ 等正交性关系。此式相当于事先约定 H'' 与 H 同位相、但 H' 与 H 的位相相反。

利用场强矢量的上述表达式, 介质分界面 $z = 0$ 上的边值关系简化为:

$$E_0 \cos \theta + E_0' \cos \theta = E_0'' \cos \theta''$$
$$H_0 - H_0' = H_0''$$

我们已事先假设入射波、反射波和折射波均为同频率平面电磁波. 所以:

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \mathbf{e}_k \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{H}' = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \mathbf{e}_{k'} \times \mathbf{E}', \quad \mathbf{H}'' = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \mathbf{e}_{k''} \times \mathbf{E}''.$$

波幅之间的关系式是:

$$H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_0, \quad H_0' = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_0', \quad H_0'' = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E_0''.$$

于是, 边值关系中的第二个方程可以改写为:

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (E_0 - E_0') = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E_0''$$

进而,

$$E_0''/E_0 = \frac{2 \cos \theta \sin \theta''}{\sin(\theta + \theta'') \cos(\theta - \theta')}$$

● 若 E 垂直于入射面.

此情形下, 入射波、反射波和折射波的电场强度波幅矢量可写为:

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{E}_0' = E_0' \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{E}_0'' = E_0'' \mathbf{e}_2.$$

这里我们暂且假设 \mathbf{E} , \mathbf{E}' 和 \mathbf{E}'' 三者位相相同. 根据

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{E} \times \mathbf{H} \propto \mathbf{k}$$

以及反射波、折射波中的相应关系, 可以写出磁场强度波幅矢量的如下表达式:

$$\mathbf{H} = H_0 (\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_3)$$
$$\mathbf{H}' = H_0' (-\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_3)$$
$$\mathbf{H}'' = H_0'' (\cos \theta'' \mathbf{e}_1 + \sin \theta'' \mathbf{e}_3)$$

解之, 得:

$$E_0'/E_0 = -\frac{\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')}, \quad E_0''/E_0 = \frac{2 \cos \theta \sin \theta''}{\sin(\theta + \theta'')}.$$

上述结果称为 Fresnel 公式. 从这些公式可见:

- 垂直于入射面偏振的波与平行于入射面偏振的波入射到两种绝缘介质分界面上, 其反射、折射的行为不同. 倘若入射波为自然光, 则反射波和折射波都是部分偏振光.
- 若 $\theta + \theta'' = \pi/2$, 则 \mathbf{E} 平行于入射面的入射波分量没有反射波:

$$E_0'/E_0 = -\frac{\tan(\theta - \theta'')}{\tan(\theta + \theta'')} \Big|_{\theta + \theta'' = \pi/2} \rightarrow 0.$$

自然光入射时, 反射光变为垂直于入射面偏振的完全偏振光. 此情形中的入射角 θ 称为 Brewster 角.

进一步假设所涉及的介质均为非铁磁性的线性介质, 满足条件 $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$. 上式又可写为:

$$E_0 - E_0' \approx \frac{\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1}} E_0''$$
$$\approx \frac{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}} E_0'' = \frac{\sin \theta}{\sin \theta''} E_0''$$

这里的最后一步使用了折射定律. 边值关系最终写为:

$$(E_0 + E_0') \cos \theta = E_0'' \cos \theta'', \quad (E_0 - E_0') \sin \theta'' = E_0'' \sin \theta.$$

解之, 得:

$$E_0'/E_0 = -\frac{\left[\cos \theta \sin \theta - \cos \theta'' \sin \theta'' \right]}{\left[\cos \theta \sin \theta + \cos \theta'' \sin \theta'' \right]}$$
$$= -\frac{\sin 2\theta - \sin 2\theta''}{\sin 2\theta + \sin 2\theta''}$$
$$= -\frac{\sin(\theta - \theta'') \cos(\theta + \theta'')}{\sin(\theta + \theta'') \cos(\theta - \theta'')} = -\frac{\tan(\theta - \theta'')}{\tan(\theta + \theta'')}$$

于是, 介质分界面 $z = 0$ 上电场强度、磁场强度切向分量的连续性表达为:

$$E_0 + E_0' = E_0''$$
$$H_0 \cos \theta - H_0' \cos \theta = H_0'' \cos \theta''$$

回忆:

- ① 对于平面电磁波,

$$H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_0, \quad H_0' = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_0', \quad H_0'' = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E_0''.$$

- ② 对于非铁磁性的线性介质, $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$.
- ③ 折射定律:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} \approx \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

可以把上述边值关系用电场强度的波幅重新表达为:

$$E_0 + E_0' = E_0'', \quad (E_0 - E_0') \cos \theta \sin \theta'' = E_0'' \sin \theta \cos \theta''.$$

- 在 \mathbf{E} 垂直于入射面情形下,

$$E_0'/E_0 = -\frac{\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')},$$

若 $\epsilon_2 > \epsilon_1$, 即自然光从光疏介质入射到光密介质, 由折射定律可知:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} \approx \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1} > 1, \quad \rightsquigarrow \theta > \theta''$$

因此, E_0'/E_0 为负值, 表明反射波电场强度与入射波电场强度位相相反. 这个现象称为反射过程中的“半波损失”.

全反射

若平面电磁波从光密介质射向光疏介质， $\epsilon_1 > \epsilon_2$ ，则由折射定律知：

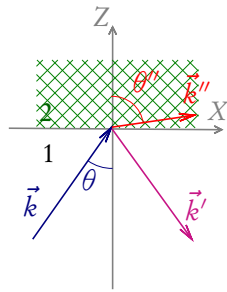
$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} \approx \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1} < 1$$

从而折射角 θ'' 大于入射角 θ 。

- 持续增大入射角使得 $\sin \theta \approx \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}$ ，则 $\theta'' = \pi/2$ ，折射波将沿界面掠过。这一现象称为全反射。
- 若进一步增大入射角使得 $\sin \theta > \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}$ ，则：

$$\sin \theta'' > 1,$$

此时不能定义实数意义下的“折射角”（所以仍属于全反射），将出现不同于一般反射、折射的物理现象。



要求：

$$k \cdot x|_{z=0} = k' \cdot x|_{z=0} = k'' \cdot x|_{z=0}$$

成立。取入射面为 $y=0$ 的 xz 平面，则上式的成立意味着入射波矢 k 、反射波矢 k' 和折射波矢 k'' 均在此 xz 平面内，

$$k = k(\sin \theta e_1 + \cos \theta e_3), \quad k' = k(\sin \theta e_1 - \cos \theta e_3),$$

$$k'' = k_x'' e_1 + k_z'' e_3,$$

且：

$$k_x'' = k \sin \theta.$$

介质 2 中折射波矢 k'' 的 z 分量计算如下：

$$k_z'' = \sqrt{k''^2 - k_x''^2} = k \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta}$$

注意到在全反射情形 $\sin \theta \geq n_{21}$ ，我们有：

- 折射波磁场强度计算公式是：

$$H'' = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \frac{k''}{k''} \times E'' = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \frac{1}{kn_{21}} (k \sin \theta e_1 + i \kappa e_3) \times E''$$

倘若假设折射波电场强度在垂直于入射面的方向上偏振， $E'' = E'' e_2$ ，我们有：

$$H_x'' = -i \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n_{21}^2} - 1} E''$$

$$H_z'' = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \frac{\sin \theta}{n_{21}} E''$$

上式表明： H_z'' 与 E'' 同位相，但 H_x'' 与 E'' 有 $\pi/2$ 的位相差。

全反射现象发生于电磁波从光密介质向光疏介质入射、且入射角 θ 满足条件，

$$\sin \theta \geq n_{21}, \quad n_{21} \approx \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1} < 1$$

之时。此情形中介质 1 中的入射波和反射波显然仍可以表示为同频率的平面电磁波：

$$E = E_0 e^{i(k \cdot x - \omega t)}, \quad E' = E_0' e^{i(k' \cdot x - \omega t)}$$

此处，

$$k = k' = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_1}$$

介质 2 中虽然没有可观测的折射波，但“物理上”仍可假设其存在。倘若假设介质 2 中的折射波也是与入射波频率相同的平面电磁波：

$$E'' = E_0'' e^{i(k'' \cdot x - \omega t)}, \quad k'' = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_2} = kn_{21}$$

则两种介质分界面 ($z=0$) 上电场强度切向分量的连续性

$$e_3 \times (E + E') = e_3 \times E''$$

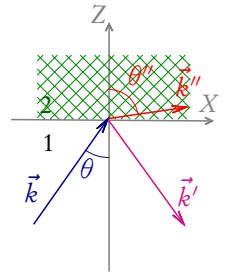
$$k_z'' = i \kappa, \quad \kappa = k \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2} \geq 0.$$

于是，折射波电场强度表达为：

$$E''(x, t) = E_0'' e^{-\kappa z} e^{i(k \sin \theta x - \omega t)}, \quad (z \geq 0)$$

- 全反射情形下，折射波是沿 x 方向传播的电磁波，其场强沿 z 轴方向按 $e^{-\kappa z}$ 的方式衰减。因此，折射波仅存在于界面附近薄层内，其厚度可以用 κ^{-1} 估计：

$$\kappa^{-1} = \frac{1}{k \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}}$$



- 在电场强度偏振方向垂直于入射面情形下，若发生了全反射现象，则折射波平均能流密度矢量的直角分量求得为：

$$\langle S \rangle_x'' = \frac{1}{2} \text{Re} (E_y'' H_z'') = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} |E_0''|^2 e^{-2\kappa z} \frac{\sin \theta}{n_{21}}$$

$$\langle S \rangle_z'' = -\frac{1}{2} \text{Re} (E_y'' H_x'') = 0$$

因此，折射波平均能流密度只有 x 分量，但是，沿 z 轴方向进入到第二种介质的平均能流密度为零。需要注意的是： S_z'' 的瞬时值并不恒为零。

- 全反射现象中第二介质的作用：**在第一个半周期内，电磁能量透入第二介质，在界面附近薄层内储存起来，在第二个半周期内，该能量释放出来转变为反射波的能量。

- 根据边界条件不难证明, 反射波与入射波具有相同振幅、但有一定的位相差:

$$E'/E = e^{-2i\alpha}, \quad \tan \alpha = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}}{\cos \theta}$$

反射波平均能流密度数值上与入射波平均能流密度相等, 因此电磁能量被全部反射回第一介质. 这就是全反射.

电磁波在真空或者理想绝缘介质内部传播时, 没有能量损耗, 电磁波的波幅可以无衰减地传播.

然而, 当电磁波在有导体存在的空间中传播时,

- 导体的特点是其体内存在有“自由电子”. 在电磁波电场作用下, 自由电子定向运动在导体体内形成传导电流.
- 电流产生的焦耳热将使得电磁波能量不断损耗.

因此, **在导体内部传播的电磁波是一种衰减波**. 电磁波在传播过程中, 部分电磁能量会转化为热量.

导体内部的自由电荷分布

在静电平衡状态下, 导体内部不带电、自由电荷只能分布于导体表面上.

2: 在时变电磁场情形下, 导体上的电荷分布是否仍然具有上述特性呢?

设导体内部某区域内有自由电荷分布, 其密度为 ρ , 则由电高斯定律知导体体内电场强度矢量 E 的散度为:

$$\nabla \cdot E = \rho / \epsilon_0$$

电场的存在将在导体中产生传导电流 j . 设导体的电导率为 σ , 则由欧姆定律知:

$$j = \sigma E$$

结合以上二式知:

$$\nabla \cdot j = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho$$

所以,

- 当导体内部有净余的自由电荷积聚时, 同种电荷之间的相互排斥会导致向外发散的电流.
- 电流向外发散将使得导体内部每一体元 d^3x 中的电荷密度随时间减小. 按照电荷守恒定律知:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot j = -\frac{\sigma \rho}{\epsilon_0}$$

解此方程, 得:

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon_0} t}$$

式中 ρ_0 是 $t=0$ 时刻的电荷体密度. 所以, 导体内部的电荷密度随时间指数衰减, 衰减的特征时间是:

$$\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$$

良导体条件

当频率为 ω 的电磁波在导体中传播时, 只要电磁波的周期 $2\pi/\omega$ 远大于电荷密度的特征衰减时间 τ , 即:

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \gg 1$$

或者等价地,

$$\omega \tau \ll 1$$

就可以认为导体内部无净余自由电荷分布, $\rho(t) \approx 0$. 这个不等式常称为**良导体条件**.

- 一般的金属导体的 $\tau \approx 10^{-17}$ 秒. 所以, 只要入射电磁波的频率不太高, 良导体条件都可以满足.
- 良导体内部没有净余的自由电荷分布, 电荷只能分布于导体表面上.

导体内的电磁波

导体内部 $\rho \approx 0, j = \sigma E$. Maxwell 方程组简化为:

$$\begin{aligned} \nabla \times E &= -\partial_t B \\ \nabla \times H &= \partial_t D + \sigma E \\ \nabla \cdot D &= 0 \\ \nabla \cdot B &= 0 \end{aligned}$$

对于一定频率 ω 的时谐电磁波, 电磁场量 $\propto e^{-i\omega t}$. 这时常令 $D = \epsilon E, B = \mu H$, Maxwell 方程组进一步简化为:

$$\begin{aligned} \nabla \times E &= i\omega \mu H \\ \nabla \times H &= -i\omega \epsilon E + \sigma E \\ \nabla \cdot E &= 0 \\ \nabla \cdot H &= 0 \end{aligned}$$

导体的“复电容率”:

定义:

$$\epsilon' = \epsilon + i\sigma/\omega$$

则:

$$\nabla \times H = -i\omega \epsilon' E$$

此式与介质中的 Maxwell 方程在“形式上”完全一致.

导体内的时谐电磁波动方程

在一定频率 ω 情形下, 导体内电磁场的电场强度矢量满足方程:

$$\begin{aligned}\omega^2 \mu \epsilon' E &= i\omega \mu (-i\omega \epsilon' E) \\ &= i\omega \mu (\nabla \times H) \\ &= \nabla \times (i\omega \mu H) \\ &= \nabla \times (\nabla \times E) \\ &= \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E \\ &= -\nabla^2 E\end{aligned}$$

最后一步使用了导体中的高斯定律: $\nabla \cdot E = 0$. 令:

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon'}$$

则:

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0$$

解出 E 后, 导体内部的磁场强度矢量由法拉第定律给出:

$$H = -\frac{i}{\omega \mu} \nabla \times E$$

于是, 导体内部传播的平面电磁波可以重新表达为:

$$E(x, t) = E_0 e^{-\alpha x} \exp[i(\beta \cdot x - \omega t)]$$

- 波矢 k 的实部 β 描写平面波传播的位相关系, 其大小称为“位相常数”.
- 波矢 k 的虚部 α 描写平面波传播过程中波幅的衰减, 其大小称为“衰减常数”.
- 由于衰减因子的存在, 电磁波只能透入到导体表面薄层内, 通过传导电流把这部分能量耗散为焦耳热.

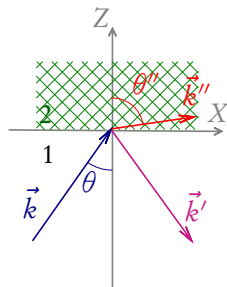
因此, 有导体存在时, 电磁波主要是在导体以外的空间或介质中传播.

为简单计, 以下我们只研究垂直入射情形, $\theta = 0$. 于是: $\beta = \beta_z e_3, \alpha = \alpha_z e_3$. 确定 α_z, β_z 的方程组退化为:

$$\begin{aligned}\beta_z^2 - \alpha_z^2 &= \omega^2 \mu \epsilon \\ \alpha_z \beta_z &= \frac{1}{2} \omega \mu \sigma\end{aligned}$$

其解为:

$$\begin{aligned}\alpha_z &= \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} - 1 \right]} \\ \beta_z &= \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} + 1 \right]}\end{aligned}$$



导体内的平面电磁波

导体内部传播的电磁波也有平面波解:

$$E(x) = E_0 e^{i k \cdot x}$$

注意到 $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon'}$ 是复数, 波矢 k 应该是一个复矢量

$$k = \beta + i\alpha$$

以保证:

$$\begin{aligned}\omega^2 \mu \left[\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right] &= \omega^2 \mu \epsilon' = k^2 \\ &= k \cdot k \\ &= (\beta + i\alpha) \cdot (\beta + i\alpha) \\ &= \beta^2 - \alpha^2 + i2\alpha \cdot \beta\end{aligned}$$

所以, 实矢量 α 和 β 应满足如下约束条件:

$$\begin{aligned}\beta^2 - \alpha^2 &= \omega^2 \mu \epsilon \\ \alpha \cdot \beta &= \frac{1}{2} \omega \mu \sigma\end{aligned}$$

平面电磁波在导体表面的反射和透射

考虑一束平面电磁波从真空 (介质 1) 入射到导体 (介质 2) 的表面 ($z = 0$) 上. 真空中存在有入射波和反射波, 导体中存在有透射波, 波矢分别为 k, k' 和

$$k'' = \beta + i\alpha.$$

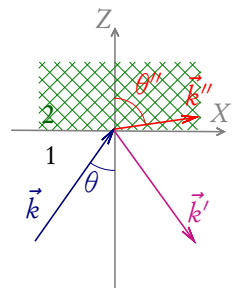
真空与导体分界面上电磁场量需要满足的边界条件, 例如电场强度切分量的连续性, 要求对于任意的 (x, y) 坐标, 均有:

$$k \cdot x \Big|_{z=0} = k' \cdot x \Big|_{z=0} = (\beta + i\alpha) \cdot x \Big|_{z=0}$$

设入射面为 $y = 0$ 的 xz 平面,

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} [\sin \theta e_1 + \cos \theta e_3]$$

则 $\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sin \theta e_1 + \beta_z e_3$, 且 $\alpha = \alpha_z e_3$.



趋肤效应与穿透深度

对于良导体, $\sigma / \epsilon \omega \gg 1$, 上式可进一步简化为:

$$\alpha_z \approx \beta_z \approx \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$$

- 场强波幅降至导体表面原值 $1/e$ 倍的传播距离称为电磁波的“穿透深度” δ :

$$\delta = \frac{1}{\alpha_z} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

- 穿透深度与导体电导率及电磁波频率乘积的平方根成反比. 所以, 对高频电磁波而言, 电磁场以及和它相互作用的高频电流仅集中于导体表面穿透深度很小的薄层内. 这种现象称为“趋肤效应”.

导体中电磁波的磁场强度

现在讨论,当平面电磁波从真空中垂直入射到导体表面上时,导体内部电磁波的磁场强度:

$$\begin{aligned} H'' &= -\frac{i}{\omega\mu} \nabla \times E'' \\ &= \frac{1}{\omega\mu} k'' \times E'' = \frac{1}{\omega\mu} (\beta_z + i\alpha_z) e_3 \times E'' \end{aligned}$$

在良导体情形下,

$$\alpha_z \approx \beta_z \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

于是:

$$H'' \approx \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} e^{i\frac{\pi}{4}} e_3 \times E''$$

- 磁场强度的位相比电场强度滞后 $\pi/4$.
- 在良导体中,电磁波的能量主要是磁场能量:

$$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{H''}{E''} = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \gg 1$$

在真空与导体的分界面 $z=0$ 上,电场强度、磁场强度的切分量均连续. 所以,

$$E + E' = E'', \quad E - E' \approx \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon_0}} (1+i) E''$$

联立此二式消去 E' , 可得:

$$\frac{E'}{E} \approx -\frac{1+i-\sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}}{1+i+\sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}}$$

导体对电磁波的“反射系数” R 定义为反射能流与入射能流之比. 利用上式求得:

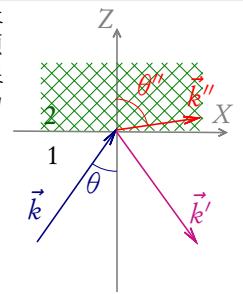
$$R = \left| \frac{E'}{E} \right|^2 \approx 1 - 2\sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}$$

所以,导体的电导率愈高,其反射系数愈接近于其饱和值 (1).

电磁波在导体表面上的反射

应用电磁场量的边值关系可以揭示导体表面上电磁波的反射、透射的波幅关系. 设频率为 ω 的单色平面电磁波从真空入射到某良导体表面. 为简单计,仅考虑垂直入射的情形. 这时,

$$\begin{aligned} k &= \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} e_3, \quad k' = -\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} e_3, \\ k'' &= \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} (1+i) e_3. \end{aligned}$$



若进一步假设电场强度的偏振方向垂直于入射面,

$$E = E e_2, \quad E' = E' e_2, \quad E'' = E'' e_2$$

则相应的磁场强度表达为:

$$H = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E e_1, \quad H' = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E' e_1, \quad H'' \approx -\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu_0}} (1+i) E'' e_1$$

有界空间的电磁波

电磁波在真空中、或者绝缘介质中传播时,其最基本的存在形式是平面电磁波:

- 这种波的电场强度和磁场强度都做横向振荡. 常称之为横电磁波 (TEM).

当空间中存在导体时,电磁波主要是在导体以外的空间或者绝缘介质中传播的,只有很小一部分电磁波透入到导体表层内:

- ① 对于理想导体模型, $\sigma \rightarrow \infty$, 电磁波将全部被导体反射、进入导体的穿透深度趋于零.
- ② 导体表面自然构成了电磁波存在的边界.

所以,有导体存在时电磁波的传播属于边值问题. 这类问题中导体表面上电磁波所满足的边界条件起重要作用.

理想导体边界条件

如前述,若时谐电磁波入射到两种介质的分界面 S 上,则电磁场量须满足如下边值关系:

$$n \times (E_2 - E_1) \Big|_S = 0, \quad n \times (H_2 - H_1) \Big|_S = \alpha$$

现在考虑理想导体边界条件. 设第一种介质代表理想导体,第二种介质代表真空或者普通绝缘体.

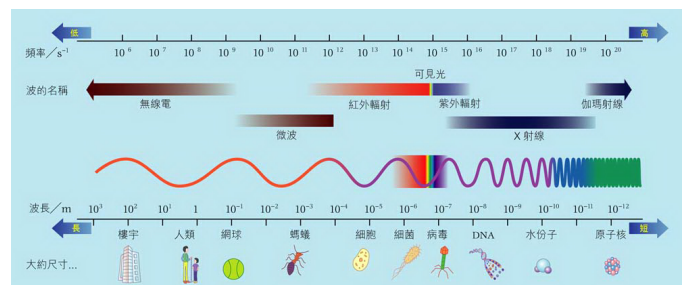
理想导体的特点是体内无电磁场. 因此 $E_1 = H_1 = 0$. 略去角标 2, 以 E 和 H 表示介质一侧处的场强,则理想导体边界条件为:

$$n \times E \Big|_S = 0, \quad n \times H \Big|_S = \alpha$$

此外,高斯定律 $\nabla \cdot E = 0$ 在边界面上化为:

$$\frac{\partial E_n}{\partial n} \Big|_S = 0$$

电磁波谱



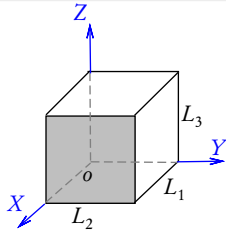
微波 (Microwaves):

波长范围约为 1 毫米 - 1 米, 对应频率 300MHz - 300GHz.

- 雷达, 航空、航天及手机通讯
- 微波宇宙背景辐射
- 微波炉

实践上,电磁波使用具有特定谐振频率的元器件产生的:

- 低频无线电波通常采用 LC 回路产生电磁振荡, $\nu = 1/\sqrt{LC}$.
- 在微波范围,通常采用具有金属壁面的“谐振腔”产生高频电磁振荡.



下面讨论矩形谐振腔内可能产生的电磁振荡模式. 取金属内壁分别为 $x = 0, L_1, y = 0, L_2$ 和 $z = 0, L_3$ 的平面. 腔内电磁波的电场强度和磁场强度都满足 Helmholtz 方程. 设 $u(x, y, z)e^{-i\omega t}$ 为 E 或 H 的任一直角分量, 则:

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0$$

式中,

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

而 ω 表示腔内电磁波的角频率.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= k_x^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 &= k_x^2 \end{aligned}$$

第一个方程是常微分方程, 可等价地写为:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0$$

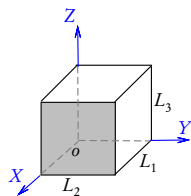
通过适当移项, 第二个方程可以重新表为:

$$-\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 - k_x^2$$

其左端只依赖于坐标 y , 而右端只依赖于坐标 z . 注意到 y, z 坐标的相互独立性, 上式两端必须等于同一个常数 k_y^2 :

$$-\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k_y^2, \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 - k_x^2 = k_y^2$$

例如取 $E_x = u(x, y, z)$. 对于谐振腔内部空间而言, 其边界面分别是 $x = 0, L_1; y = 0, L_2$ 和 $z = 0, L_3$ 这六个内壁.



- ① E_x 对于边界面 $x = 0$ 和 $x = L_1$ 来说是电场强度的法向分量. 所以,

$$\partial_x E_x|_{x=0} = \partial_x E_x|_{x=L_1} = 0 \rightsquigarrow D_1 = 0, k_x = \frac{m\pi}{L_1}, m = 0, 1, 2, \dots$$

- ② E_x 对于其余四个边界面来说均是电场强度的切向分量. 所以,

$$E_x|_{y=0} = E_x|_{y=L_2} = E_x|_{z=0} = E_x|_{z=L_3} = 0$$

这些约束方程的解是:

$$C_2 = C_3 = 0, k_y = \frac{n\pi}{L_2}, k_z = \frac{p\pi}{L_3}, n, p = 0, 1, 2, \dots$$

现使用分离变量法求解此 Helmholtz 方程, 即取 $u(x, y, z)$ 的试探解具有如下因子化形式:

$$u(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$$

把此试探解代入到 Helmholtz 方程, 并注意在直角坐标系中,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

我们得:

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + ZX \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 XYZ = 0$$

两端同除以 XYZ 后, 再适当移项, 方程变为:

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2$$

此方程左端是 x 的函数, 右端是 (y, z) 的函数. 由于 (x, y, z) 是相互独立的坐标, 所以两端只能等于同一个常数, 标记其为 k_x^2 :

所以,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y &= 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z &= 0 \end{aligned}$$

式中,

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

显见, $X(x)$, $Y(y)$ 和 $Z(z)$ 的方程都是简谐振子满足的常微分方程. 因此, $u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ 有如下驻波试探解:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= [C_1 \cos(k_x x) + D_1 \sin(k_x x)] \\ &\quad \cdot [C_2 \cos(k_y y) + D_2 \sin(k_y y)] \\ &\quad \cdot [C_3 \cos(k_z z) + D_3 \sin(k_z z)] \end{aligned}$$

当把 $u(x, y, z)$ 具体取为电场强度的各个直角分量时, 理想导体边界条件将会对积分常数 C_i, D_i 做出限制.

由此可得:

$$E_x = A_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z)$$

模式参数 m, n, p 的可能取值是:

同理有:

$$m, n, p = 0, 1, 2, \dots$$

$$E_y = A_2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z)$$

和

$$E_z = A_3 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z)$$

m, n 和 p 分别代表沿内壁三条边所含的半波数目. 三个积分常数 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 中只有两个是独立的. 由高斯约束条件 $\nabla \cdot E = 0$ 可知:

式中,

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{m\pi}{L_1}, \\ k_y &= \frac{n\pi}{L_2}, \\ k_z &= \frac{p\pi}{L_3} \end{aligned}$$

$$k_x A_1 + k_y A_2 + k_z A_3 = 0$$

显见: m, n, p 三参数中不能有两个同时取零. 否则场强 $E = 0$, 腔内无电磁波.

Helmholtz 方程的上述试探解称为谐振腔内电磁场的“本征振荡”：

$$\begin{aligned} E_x &= A_1 \cos \left[\frac{m\pi x}{L_1} \right] \sin \left[\frac{n\pi y}{L_2} \right] \sin \left[\frac{p\pi z}{L_3} \right] \\ E_y &= A_2 \sin \left[\frac{m\pi x}{L_1} \right] \cos \left[\frac{n\pi y}{L_2} \right] \sin \left[\frac{p\pi z}{L_3} \right] \\ E_z &= A_3 \sin \left[\frac{m\pi x}{L_1} \right] \sin \left[\frac{n\pi y}{L_2} \right] \cos \left[\frac{p\pi z}{L_3} \right] \end{aligned}$$

式中 $m, n, p = 0, 1, 2, \dots$.

- ① 鉴于 Gauss 约束条件: $k_x A_1 + k_y A_2 + k_z A_3 = 0$, 对于每一组 (m, n, p) 值, 有两个独立的偏振模式.
- ② 本征振荡的角频率称为谐振腔的本征角频率:

$$\omega_{mnp} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{p}{L_3}\right)^2}$$

若 $L_1 \geq L_2 \geq L_3$, 则谐振腔内具有最低频率的本征振荡模式是 $(m, n, p) = (1, 1, 0)$. 最低本征频率为:

$$f_{110} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2}}$$

相应的电磁波波长为:

$$\lambda_{110} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2}}}$$

此波长与谐振腔的线度属同一数量级. 于是, 在微波技术中通常使用谐振腔的最低模式产生特定频率的电磁振荡.

波导

矩形波导中的电磁波

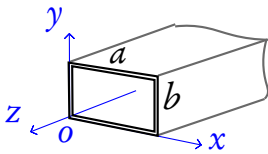
近代无线电技术, 例如雷达、电视和定向通信等, 都广泛地利用到了高频电磁波的传输.

- 低频电力系统常使用双导线传输电磁波. 在低频情况下, 电磁场在电路中的作用常常可以通过电压、电流、电阻、电容和电感等参数有效地表示. 因此不必直接研究场的分布和传播, 可以通过解电路方程解决实际问题.
- 电磁波频率变高时, 为了避免电磁波向外辐射的损耗和避免周围环境的干扰, 常改用“同轴传输线”传递电磁波能量.
- 电磁波频率进一步升高后 (微波范围), 需要用“波导管”传递其能量.

波导管:

波导管是一根空心金属管, 横截面通常为矩形或圆形. 波导管适合于传输微波波段 (波长为厘米量级) 的电磁波.

现在求矩形波导内的电磁波解. 取波导内壁面为 $x = 0$ 和 $x = a, y = 0$ 和 $y = b$. 电磁波沿 z 轴传播.



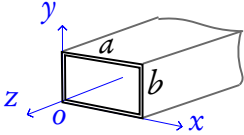
频率为 ω 的平面电磁波在此波导管内传播时, 其电场强度矢量须满足 Helmholtz 方程和高斯定律:

$$\begin{aligned} \nabla^2 E + k^2 E &= 0 \\ \nabla \cdot E &= 0 \end{aligned}$$

式中,

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

此外在波导内壁面上还需满足理想导体边界条件, 即电场强度在管壁上的切分量必须为零.



由于电磁波沿 z 轴传播, 电场强度的试探解应含传播因子 $e^{i(k_z z - \omega t)}$:

$$E = E(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

所以,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] E(x, y) + [k^2 - k_z^2] E(x, y) = 0$$

场强矢量 $E(x, y)$ 的任一直角坐标系分量均服从上述 Helmholtz 方程. 现用 $u(x, y)$ 表示之. 按分离变量法令:

$$u(x, y) = X(x) Y(y)$$

则 $u(x, y)$ 的 Helmholtz 方程可以分解为如下两个常微分方程:



$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X &= 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y &= 0 \end{aligned}$$

式中:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu\epsilon$$

所以, $u(x, y)$ 的试探解表为:

$$u(x, y) = [C_1 \cos k_x x + D_1 \sin k_x x] \cdot [C_2 \cos k_y y + D_2 \sin k_y y]$$

理想导体边界条件如下. 在 $x = 0$ 和 $x = a$ 的内壁面上:

$$E_y = E_z = 0, \quad \partial_x E_x = 0$$

而在 $y = 0$ 和 $y = b$ 的内壁面上:

$$E_x = E_z = 0, \quad \partial_y E_y = 0$$

计入 $x=0$ 与 $y=0$ 内壁面上的理想导体边界条件, 则由上述 Helmholtz 方程的试探解可得:

$$\begin{aligned} E_x(x, y) &= A_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \\ E_y(x, y) &= A_2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \\ E_z(x, y) &= A_3 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \end{aligned}$$

再考虑 $x=a$ 与 $y=b$ 内壁面上的边界条件, 知:

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}; \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

参数 m 和 n 分别表示沿波导管横截面两条边的半波数目.

- m 和 n 不能同时取零. 否则 $E=0$, 波导管内无电磁波传播.
- 根据高斯定律 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 知:

$$k_x A_1 + k_y A_2 - ik_z A_3 = 0$$

因此, 在 A_1, A_2 和 A_3 这三个波幅中只有两个是独立的. 换言之, 对于每一组 (m, n) 值, 波导管中只能传播两种独立模式的电磁波.

则其各个直角分量可表为:

$$\begin{aligned} H_x(x, y) &= -\frac{i}{\omega\mu} (k_y A_3 - ik_z A_2) \sin(k_x x) \cos(k_y y) \\ H_y(x, y) &= -\frac{i}{\omega\mu} (ik_z A_1 - k_x A_3) \cos(k_x x) \sin(k_y y) \\ H_z(x, y) &= -\frac{i}{\omega\mu} (k_x A_2 - k_y A_1) \cos(k_x x) \cos(k_y y) \end{aligned}$$

显然, 在 (m, n) 给定的前提下⁶, 对于 $E_z = 0$ 的横电波 (TE), $A_1 = -(an/bm)A_2$, 我们有:

$$H_z(x, y) = -A_2 \frac{ia\pi}{\omega\mu m} \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right] \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \neq 0$$

因此, 在波导管中传播的电磁波有如下特点: 电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{H} 不能同时为横波.

⁶且设 $m \neq 0$.

- 对于一定的 (m, n) 值, 波导管内电磁波的两种独立模式不能都是横电波. 理由如下. 若一种模式是横电波, $E_z = 0$, $\leadsto A_3 = 0$, 则对该模式而言, 高斯约束变为:

$$bmA_1 + anA_2 = 0$$

这是关于波幅 A_1 或者 A_2 的一元一次代数方程, 其解是唯一的: $A_1 = -(an/bm)A_2$. 所以, 另一独立模式必然有 $A_3 \neq 0$, $\leadsto E_z \neq 0$, 它不做横向偏振.

- 波导管中电磁波的磁场强度由下式计算:

$$\mathbf{H} = -\frac{i}{\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{i}{\omega\mu} \mathbf{e}_a \epsilon_{abc} \partial_b E_c$$

若将其写为:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

矩形波导中电磁波的独立模式:

通常把矩形波导管中电磁波的两种独立模式分别取为,

- ① 横电波 TE_{mn} ;
- ② 横磁波 TM_{mn} .

一般情形下, 波导管中可以传播横电波与横磁波的叠加波.

波导管中电磁波的波矢为 $k_z \mathbf{e}_3$, 在 (m, n) 给定的情形下:

$$k_z = \sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

显见, 若电磁波的振荡频率 ω 降低至

$$\omega < \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

则 k_z 变为纯虚数, 传播因子 $e^{ik_z z}$ 变为衰减因子.

截止频率

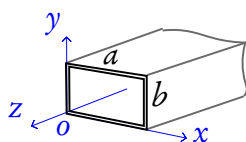
这种情形下电磁波的波幅将随着传播距离 z 的增加很快衰减至零, 从而无法有效的传输电磁波能量.

能够在波导管中无衰减地传播的电磁波的最低频率 ω_c 称为该模式的截止频率. 若 $a > b$, 则 TE_{10} 波有最低截止频率:

$$\omega_{c,10} = \frac{\pi}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$$

或者,

$$f_{c,10} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}}$$



若管内为真空, 此最低截止频率为 $f_{c,10} = c/2a$, 相应的截止波长为: $\lambda_{c,10} = 2a$. 这是波导管内能够传输的电磁波的最大波长. 波导管的几何尺寸不能做的过大, 用波导传输无线电波不合适. 在厘米波段, 波导管应用较普遍.