

# 电动力学作业题

20240412

答题不要求用英语，但应尽量做到逻辑缜密、清晰可读。提交作业不必通过BB网，截止时间请助教决定。

1. 证明数学恒等式：

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1)$$

2. 某标量场 $\phi(x)$ 满足的场方程是 $\sigma\partial^\mu\partial_\mu\phi(x) = -\lambda J(x)$ ，式中 $\sigma$ 和 $\lambda$ 是两个实参数，4-标量 $J(x)$ 是场 $\phi(x)$ 的源。请验证体系的一个合格的拉氏密度是：

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{\sigma}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi + \lambda J(x)\phi(x) \quad (2)$$

3. 设 $\psi$ 和 $\phi$ 是 $\mathbb{E}_3$ 中的两个标量场，请验证如下矢量分析恒等式：

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi \quad (3)$$

$$\nabla \times (\phi \nabla \psi) = \nabla \phi \times \nabla \psi \quad (4)$$

4. A particle has 4-momentum  $p^\mu = (E/c, \mathbf{p})$  in an inertial frame  $S$ . The observer  $\mathcal{B}$  is moving by with velocity  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_1$  in the  $x^1$ -direction. Compute the total energy the observer  $\mathcal{B}$  will measure for the particle and the velocity of the particle in the  $x'^1$ -direction of  $\mathcal{B}$ 's rest frame.

⑤ 电磁场张量 $F^{\alpha\beta}$ 的物理内涵规定为： $F^{0i} = E^i/c$ ,  $F^{ij} = \epsilon^{ijk}B_k$ . 这里的 $E^i$ 与 $B_k$ 分别是电磁场电场强度与磁感应强度的笛卡尔分量。请证明：

↓ 如何数学点写

$$E^i = cF^{0i}, \quad B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk} \quad (5)$$

6. 请证明对偶电磁场张量 $\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ 的物理内涵是：

$$\mathcal{F}^{0i} = B^i, \quad \mathcal{F}^{ij} = -\frac{1}{c}\epsilon^{ijk}E_k \quad (6)$$