

电动力学作业题

20240426

答题不要求用英语，但应尽量做到逻辑缜密、清晰可读。提交作业不必通过BB网，截止时间请助教决定。

Optional:

1. 设 $\phi(x)$ 是一个4-标量场，请求出其在无穷小Lorentz变换 $\delta x^\mu = \eta^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\beta}x^\beta$ (式中 $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$)下的改变量 $\delta\phi(x)$ 。

2. 设 \mathbf{r} 是场点 P 在 \mathbb{E}_3 中的 $_3$ -位置矢量， r 是其大小，定义域为 $r \geq 0$ 。已知

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r}) \quad (1)$$

请证明如下数学恒等式：

$$\nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) = \frac{4\pi\mathbf{r}}{r^2}\delta^{(3)}(\mathbf{r}) - \frac{3\mathbf{r}}{r^5} \quad (2)$$

3. 承上题。若引入笛卡尔直角坐标系使得 $\mathbf{r} = x^i\mathbf{e}_i = x_i\mathbf{e}^i$ ，式中 $x_i = \delta_{ij}x^j$ 或者 $x^i = \delta^{ij}x_j$ ，请证明：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} - \frac{4\pi x_i x_j}{r^2} \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \quad (3)$$