电动力学第一次习题课

中国科学技术大学
李雨桥 刘元彻

3.31

目 录

第一章　作业答案及解析

1.1 0301

例 1.1.1. 能否选定一个光子相对静止的参考系？解释原因。

解. 从狭义相对论的基本假设出发，光速 c，即光子的运动速度，在任何参考系保持不变。所以直接可以得出结论，使光子静止的参考系不存在。 □

给分规则：写了“不能”，答案合理即可

例 1.1.2. 一根长为 1m 的棒在 $x-y$ 平面上相对于 x 轴倾斜。一个观察者沿着 x 轴正方向以速度 $v=\sqrt{2/3}c$ 接近此棒。观察者测量出的棒长为多少？观察者观测到的棒相对于 x 轴的夹角又是多少？

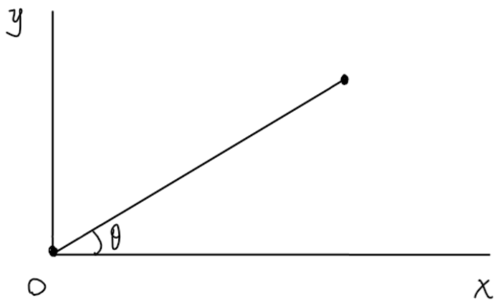

图 1.1.1: 静止参考系中的棒

解. 对于沿 x 方向，$\beta=\dfrac{v}{c}=\sqrt{2/3}$，$\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\sqrt{3}$. 由于 Minkowski 空间的时空仍然是线性的，所以在一个匀速参考系变换中，直棒必然仍是直棒。

$$\Delta l=(c\tau, l\cos\theta, l\sin\theta, 0)$$

这里 τ 是一个任意的时间间隔，因为我们暂不确定在观察者参考系中时间间隔为 0 的观察在棒本征系中。

考虑观者参考系和棒本征系之间的 Lorentz 变换如下：

$$\begin{cases}\Delta l_0'=\gamma(\Delta l_0-\beta\Delta l_1)\\ \Delta l_1'=\gamma(\Delta l_1-\beta\Delta l_0)\\ \Delta l_2'=\Delta l_2\\ \Delta l_3'=\Delta l_3\end{cases}$$

为了满足观测的定义：在观察者系中，测量的时间间隔为 $\Delta l_0' = 0$。将此式带回[1]，可得：

$$\Delta l_1' = \sqrt{1-\beta^2}\Delta l_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta$$
$$\Delta l_2' = \Delta l_2 = \sin\theta$$

所以在观察者眼中，新的杆长度：

$$l' = \sqrt{(\Delta l_1')^2 + (\Delta l_2')^2} = \sqrt{\sin^2\theta + \frac{1}{3}\cos^2\theta}$$

新的杆倾斜角：

$$\theta' = \arctan\frac{\Delta l_2'}{\Delta l_1'} = \arctan(\sqrt{3}\tan\theta)$$

□

给分规则：杆长、角度计算正确即可，部分同学没算杆长但 xy 分量都算对了，也没扣分

部分同学计算错了 γ：注意 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$；或者用错了"动尺缩短"关系：$\Delta l_1$ 为 x 方向固有长度，$\Delta l_1' = \frac{\Delta l_1}{\gamma}$ 为正确关系式

例 1.1.3. *惯性系 Σ 中有一沿 x 轴正方向以速度 v 运动的棒。静止在 Σ 系中的一个观察者 Alice 测量出该棒的长度为 L，另一观察者 Bob 以速度 $-v$ 沿着 x 轴运动。用 L 和 v 表达出 Bob 测量出的棒长度。(测量过程保证对于每一个观察者自己，都是同时测定棒的首尾位置的)*

解. 本题中，记 Σ 为 Alice 系，Σ' 为棒自身参考系，Σ'' 为 Bob 系。

设棒的实际长度为 L_0，对于 Alice 而言，她进行的这次测量，可以用 4-矢量标记为：

$$\Delta l_\Sigma = (0, L, 0, 0)$$

现在我们考虑一个以速度 v 沿 x 轴正向运动的参考系 Σ'，利用 Lorentz 变换得出在这个参考系中，Alice 的这次测量可以用 4-矢量标记为：

$$\Delta l_{\Sigma'} = (-\frac{\beta L}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{L}{\sqrt{1-\beta^2}}, 0, 0)$$

Σ' 即是棒的本征系，在此参考系中棒是静止的，因此棒的实际长度为 $L_0 = \dfrac{L}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

然后，我们考虑，一个以 $-v$ 运动的参考系 Σ''，Σ'' 系相对于 Σ' 系的相对速度为：

$$v_r = \frac{2v}{1+v^2/c^2}$$

[1] 一个显然但有趣的事实是：对长度的"测量"行为必须要在同一时间下进行；但对时间的"测量"行为，在同一参考系中，可以不在同一地点进行，因为所有的钟被对齐后将会一直对齐

于是我们就可以直接利用尺缩关系，记 $\eta = \dfrac{v_r}{c}$：

$$
\begin{aligned}
l' = \sqrt{1-\eta^2}\,l &= \sqrt{\left(1 - \frac{4v^2}{1+2v^2/c^2+v^4/c^2}\right) * \frac{1}{1-v^2/c^2}}L \\
&= \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+v^2/c^2}L
\end{aligned}
$$

这就是 Bob 所测量出的棒的长度。

本题重点在于两运动参考系相对速度需要进行速度合成得到，而不是简单相加

有些同学尝试用两次洛伦兹变换来解。这个做法可以是正确的，但请注意：使用洛伦兹变换时候必须完整地保留一个 4-矢量的 ct 分量和 x 分量，并且打包在一起作洛伦兹变换。不能因为只关心某一个量（比如时间间隔）就在中间过程丢弃掉其他的量（比如空间坐标）。

特别注意：洛伦兹变换中使用的参考系，必须保持手性相同（即，要么是左手参考系，要么是右手参考系。如果混用，可能会导致洛伦兹变换处在 $SO(1,3)$ 的不同分支中，这样洛伦兹变换作为群元素的封闭性就不成立，表现为不能连续使用洛伦兹变换） □

1.2 0315

例 1.2.1. 假设固有长度为 L_0 的火车车厢以速度 v 相对于地面运动。车厢内后壁位置处的乘客以速度 u_0 向前推出一个小球。与铁轨平行的公路上一辆轿车正以速度 v 和火车相向而行。请计算轿车驾驶员观测到的小球从火车车厢后壁运动到前壁的时间 Δt。

解. 本题中记：与火车车厢相对静止的参考系为 Σ 系，与轿车相对静止的参考系为 Σ' 系。我们首先用速度变换给出两参考系之间的相对速度：

$$v_r = -\frac{2v}{1+v^2/c^2}$$

不妨认为对时操作已经完成，这使得我们可以在 Σ 系中将小球推出和小球碰壁两个事件分别用 4-矢量标记为：

$$l_1 = (0,0,0,0),\, l_2 = (\frac{cL_0}{u_0}, L_0, 0, 0)$$

直接 Lorentz 变换到 Σ' 系，定义 $\eta = \frac{v_r}{c} = -\frac{2vc}{c^2+v^2}$，$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow & l_1' = (0,0,0,0)\\ & l_2' = \frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}(\frac{cL_0}{u_0} + \frac{2vc}{c^2+v^2}L_0, L_0 + \frac{2vc}{c^2+v^2}\frac{cL_0}{u_0}, 0, 0)\end{aligned}$$

由于在同一个参考系中，各处的时间标度是一样的，所以我们直接给出：

$$\Delta t = \frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}[\frac{cL_0}{u_0} + \frac{2vc}{c^2+v^2}L_0] = \frac{c^2+v^2+2u_0v}{c^2-v^2}\frac{L_0}{u_0}$$

这就是我们要求的时间差。 □

例 1.2.2. 在折射率为 n 的液体中放置有单色光源和接收器。光源与接收器间的距离为 l_0。在相对于光源和接收器为静止的参考系中观测。试求下列三种情况下光从光源传播到接收器的时间：

1. 液体相对于光源和接收器静止
2. 液体沿着从光源到接收器的方向以速度 v 流动
3. 液体沿着垂直于光源和接收器连线的方向以速度 v 流动

解. 我们首先要确认一个常识：光速 $\frac{c}{n}$ 在介质中不变，只在介质静止的本征系中成立。另外，在地面系看，光线永远是以直线直接传播到接收器中的（这是因为，这个空间具有良好的线性，Lorentz 变换也是线性的，所以不允许存在一个弯曲的轨迹）

1. 液体静止时，地面系和介质本征系同一，故直接得到 $\Delta t_1 = \frac{nl_0}{c}$

2. 液体顺向流动时，我们首先考虑地面系中，发射和接收的事件 4-矢量标记为：

$$l_1 = (0,0,0,0)$$
$$l_2 = (ct, l_0, 0, 0)$$

我们作 Lorentz 变换到液体本征系，在这个参考系中：

$$l'_1 = (0,0,0,0)$$
$$l'_2 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(ct - \frac{vl_0}{c}, l_0 - vt, 0, 0)$$

而在介质本征系中，我们有光速关系：

$$\begin{aligned}\frac{ct'}{n} &= l' \\ \Rightarrow ct - \frac{vl_0}{c} &= n(l_0 - vt) \\ \Rightarrow t &= \frac{n+v/c}{c+nv} l_0 \\ &= \frac{nc+v}{nv+c} c\end{aligned}$$

这正是我们所想求得的时间[2]。当然，此题还有更简单的做法：考虑到光始终在介质中传播，所以对全程我们可以使用速度变换。介质运动速度 v，光相对于介质的运动速度为 $\frac{c}{n}$：

$$\begin{aligned}v_r &= \frac{v+c/n}{1+v/nc} \\ &= \frac{nv+c}{nc+v} c\end{aligned}$$

由于这是地面系中的速度，所以我们可以直接给出时间 $t = \frac{l_0}{v_r} = \frac{nc+v}{nv+c}\frac{l_0}{c}$

3. 地面系中的时空坐标仍然是：

$$l_1 = (0,0,0,0)$$
$$l_2 = (ct, l_0, 0, 0)$$

但现在，参考系变换在 y 方向。所以我们考虑介质本征系中的时空坐标为：

$$l'_1 = (0,0,0,0)$$
$$l'_2 = (\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} ct, l_0, -\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} vt, 0)$$

[2] 如果液体反向流动，只要在我们现在的表达式中作 $v \to -v$ 的变换即可。

同样，在介质本征系中，有光速关系：

$$
\begin{aligned}
\frac{ct'}{n} &= \sqrt{x'^2+y'^2} \\
\Rightarrow \frac{1}{(1-v^2/c^2)}\frac{c^2t^2}{n^2} &= l_0^2+\frac{1}{(1-v^2/c^2)}(v^2t^2) \\
\Rightarrow t &= \frac{\sqrt{c^2-v^2}}{\sqrt{c^2-(nv)^2}}\frac{nL}{c}
\end{aligned}
$$

这个结果还需要进行一些分析[3]：如果 $nv>c$，会给出一个虚数的结果。在这种情况下，我们可以理解为“介质的运动速度超过了光在其中的运动速度，所以不能通过光线”。所以这个结果仅仅允许在 $nv<c$ 时，得到接收时间，否则接收器永远不会接收到光信号。

□

例 1.2.3. 两事件 A、B 坐标分别为 x_A、x_B，在静止参考系 S 的静止观察者 K 眼中同时发生，另一观察者 K' 沿 x 轴以 $-u$ 速度运动，其眼中两事件不同时发生，B 比 A 早发生 $\Delta t'$。若在相对 K' 静止的参考系中 A、B 间距为 L', 那么在静止参考系 S 中 A、B 的间距 L 的表达式是什么？

解. 本题条件给多了，故答案正确即可。下罗列三种：

1. 间隔不变性：

$$S^2=S'^2\Rightarrow -0^2+L^2=-\Delta t'^2+L'^2$$

$$L=\sqrt{\Delta t'^2+L'^2}$$

2. 动尺缩短：

$$
\begin{aligned}
\beta=\frac{-u}{c},\quad \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{c}{\sqrt{c^2-u^2}} \\
L=\gamma L' &= \frac{c}{\sqrt{c^2-u^2}}L'
\end{aligned}
$$

3. 坐标变换：由 Lorentz 变换：

$$\Delta t'=\gamma(0-\beta L/c)$$

$$\Rightarrow L=\frac{-c\Delta t'}{\gamma\beta}$$

□

[3]这里结果表明，只要流速垂直于发射器和接收器连线，不管是正向还是反向流动，不影响结果。

第二章　问题汇总

2.1 问题汇总

大家在使用结论的时候一定要注意推导过程中使用到的条件，否则可能会导致一些疑问或错误。

例 2.1.1. *动尺缩短效应可以由逆 Lorentz 变换推得吗？即：PPT 上推得 $L_0 = \gamma L$，那么由惯性系等价，换成运动参考系视角逆 Lorentz 变换，相当于公式中的 v 变成 $-v$ 而已，正、逆变换中 γ 值一样，带入公式岂不是有：$L' = \gamma L_0$，是不是与原动尺缩短冲突？*

解. 设 L_0 为尺自身参考系 Σ' 中尺本征长度，L 为观察者系 Σ 中尺的测量长度，原推导公式过程为：

$$L_0 = x_2'^1 - x_1'^1 = \gamma(x_2^1 - vt_2) - \gamma(x_1^1 - vt_1) = \gamma[x_2^1 - x_1^1] = \gamma L$$

其中使用到的条件为：

$$t_1 = t_2$$

即在 Σ 系中的测量手段为尺长为同一时刻尺首尾坐标之差。此时 Σ 中的坐标测量是“同时”的，而 Σ' 中的坐标测量是“非同时”（$t_1' \neq t_2'$）的。

当我们按照上述给出的式子使用逆 Lorentz 变换时，相当于使用了隐藏条件：$t_1' = t_2'$，此时 Σ 中的坐标测量是“非同时”（$t_1 \neq t_2$）的。则计算出来的 L' 物理意义不是 Σ 系中测量出来的尺长度，而只能成为：Σ' 系中 (t_1, x_1^1)、(t_2, x_2^1) 两点在 Σ 系中对应坐标的 x^1 坐标差值，不具有尺长相关的意义。

如果非要使用逆 Lorentz 变换，需注意 $t_1' \neq t_2'$，应使用 $t_1 = t_2$ 条件由 Lorentz 变换推导出其关系。其过程为：

由逆 Lorentz 变换：

$$L = x_2^1 - x_1^1 = \gamma(x_1'^1 + vt_1') - \gamma(x_2'^1 + vt_2') = \gamma L_0 + \gamma v(t_2' - t_1')$$

又由 $t_1 = t_2$，$\beta^2 = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}$：

$$\gamma v(t_2' - t_1') = \gamma^2 v[t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2^1 - x_1^1)] = -\gamma^2 \frac{v^2}{c^2} L = -(\gamma^2 - 1)L$$

回带，移项，有：

$$\gamma^2 L = \gamma L_0$$

即可推出：$L_0 = \gamma L$，与正 Lorentz 推导没有矛盾。（但是更复杂了） □

例 2.1.2. 什么是标量？坐标变换的主动观点和被动观点？

解. 我们常说的标量，指的是在洛伦兹变换下不变的量。这个描述正确，但并不精确，因为在我们常用的“被动观点”下，任何一个张量（包括矢量、标量）的本体都是洛伦兹变换不变的，那么我们应该如何描述这个变化呢?

严格的数学表述如下。我们设洛伦兹变换：$\Lambda : x \to x' = \Lambda x, \phi \to \phi' = \Lambda\phi$，那么一个标量场 $\phi(x)$ 是满足如下性质的场：

$$\phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x) \implies \Lambda\phi(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$$

这个定义中的等号，就刻画了标量（场）的不变性。作为一个对照，矢量场 $A^\mu(x)$ 就被定义为：

$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$$

这个多出来的洛伦兹变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$，就是矢量场的“协变性”（逆变性也是类似的）。从被动观点来说，我们要求的一个物理量（被视作张量的本体）在变动的坐标架下，各个分量都保持不变，这才能称为一个标量。

需要注意的是，以上表示都在被动观点下工作，但是在主动观点下，我们可以给出一样的表达式。这可以印证主动观点和被动观点是相同的表达。 □

李雨桥、刘元彻

2024 年 4 月 3 日