# 经典电动力学

## Chapter 2. 电动力学的理论基础

**杨焕雄**

中国科学技术大学物理学院近代物理系

*hyang@ustc.edu.cn*

April 1, 2024

1. 分析力学的形式体系 (Formalism) 简述
   - 狭义相对论意义下的作用量泛函
   - 自由粒子
   - 拓展：一般参考系中自由粒子的运动方程
     - 孪生子佯谬的解决方案
   - 自由标量场
2. 电磁相互作用的经典场论
   - 应该用什么经典场描写电磁场？
   - 规范原理
   - 从对称性出发构造电磁相互作用拉氏量
   - 麦克斯韦方程组
   - 两个重要的 4-标量
   - 拓展：电磁场拉氏密度中是否需要加入陈-西蒙斯项？
   - 电磁场强度在洛伦兹推动变换下的变换法则
   - 连续对称性与诺特定理
   - 时空平移对称性与能动量守恒
   - 空间转动对称性与角动量守恒
   - 电磁场的哈密顿形式体系
3. 带电粒子与电磁场的相互作用

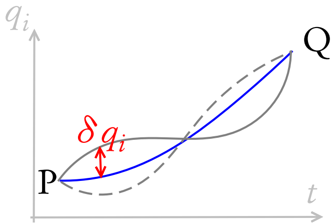
# 作用量泛函

- 我们选择把带电粒子与电磁场纳入到分析力学的形式体系，通过定义洛伦兹不变的作用量泛函建立符合相对性原理的电动力学基本方程组.

## 哈密顿原理 (最小作用量原理):

一个保守力学体系，在相同的时间内的任何真实的动力学过程 $P \to Q$，必定满足作用量泛函

$$S = \int_P^Q L(q_i, \dot{q}_i)\, \mathrm{d}t$$




取极值，即：

$$\delta S = 0$$

作用量泛函 $S$ 的核 $L(q_i, \dot{q}_i)$ 称为体系的拉氏函数，其中 $q_i$ 为广义坐标，$\dot{q}_i$ 为广义速度. 独立 $q_i$ 的数目称为体系的自由度数.

# 拉氏方程

保守力体系经典物理意义下的动力学方程，即 $\delta S = 0$，可以通过拉氏函数表为：

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0}$$

此式称为拉氏 (Lagrangian) 方程.

证明如下.

若广义坐标 $q_i$ 发生了一个变分 $\delta q_i$，它将诱导拉氏函数发生如下变分：

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i$$

交换求时间导数和求变分的次序，即令 $\delta \dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_i)$，可把上式重新写为：

$$\delta L = \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)$$

哈密顿原理 $\delta S = 0$ 表述为:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int_P^Q \delta L \,\mathrm{d}t \\ &= \int_P^Q \mathrm{d}t \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \Bigg|_P^Q \end{aligned}$$

注意到广义坐标在路径的两个端点处的变分均为零, $\delta q_i|_P = 0$, $\delta q_i|_Q = 0$, 上式最后一项为零. 所以:

$$0 = \int_P^Q \mathrm{d}t \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i$$

由于 $\delta q_i$ 的任意性, 上式的成立意味着:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

这正是期待的拉氏方程.

- 在非相对论性的牛顿力学中，保守力体系的拉氏函数常表为体系动能与势能之差：

$$L = \sum_{i=1}^{N} \left[ \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 - V(q_i) \right]$$

代入到拉氏方程中，即得保守力情形下的牛顿第二定律：

$$m \ddot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

- 拉氏函数 $L$ 具有能量的量纲. 因为

$$S = \int_P^Q L(q_i, \dot{q}_i)\, \mathrm{d}t$$

作用量泛函 $S$ 具有能量与时间乘积的量纲：

$$[S] = ML^2T^{-1} \qquad \rightsquigarrow \quad \frac{S}{\hbar} \sim \text{dimensionless}$$

$S$ 的量纲实际上也是角动量的量纲.

- 对经典力学或者经典场体系的描述也可以采取哈密顿正则程式 (Formalism). 假定体系的状态由正则坐标 $q_i$ 和与之共轭的正则动量 $p_i$

$$p_i(t) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

描写. 体系的动力学决定于哈密顿量 (不显含时间参数时, 哈密顿量可诠释为体系的总能量):

$$H(q_i, p_i) \equiv \sum_{i=1}^{N} p_i\dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i)$$

动力学方程是所谓哈密顿正则方程组:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}}$$

它实际上与拉氏方程等价.

- 采取了哈密顿正则程式后，可以定义任意两个物理量 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 之间的泊松括号：

$$\{\mathscr{A},\mathscr{B}\} \equiv \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial q_i}\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial p_i} - \frac{\partial\mathscr{B}}{\partial q_i}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial p_i}\right]$$

特别地，

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = \{q_i, q_j\} = 0$$

泊松括号具有性质：

$$\{\mathscr{A},\mathscr{B}\} = -\{\mathscr{B},\mathscr{A}\}$$
$$\{\mathscr{A},\mathscr{B}\mathscr{C}\} = \mathscr{B}\{\mathscr{A},\mathscr{C}\} + \{\mathscr{A},\mathscr{B}\}\mathscr{C}$$
$$\{\mathscr{A},\{\mathscr{B},\mathscr{C}\}\} + \{\mathscr{B},\{\mathscr{C},\mathscr{A}\}\} + \{\mathscr{C},\{\mathscr{A},\mathscr{B}\}\} = 0$$

- 利用泊松括号可以把哈密顿正则方程组重新表达为：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \{q_i, H\}, \qquad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = \{p_i, H\}}$$

# 相对性原理对作用量泛函的限制

$\mathscr{F}$: 为了满足相对性原理, 必须把体系的作用量泛函构造为闵氏空间 $\mathbb{M}_4$ 中的 4-标量.

- 在相对论性经典力学中, 质点的作用量泛函常表达为:

$$S = \int \mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)\,\mathrm{d}\tau \qquad \hookleftarrow \quad \dot{x}^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

式中 $\tau$ 为质点演化的固有时. 体系拉氏函数 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)$ 的选择有很大的任意性, 相对性原理仅要求它是一个具有能量量纲的 4-标量.

极值条件 $\delta S = 0$ 表达为拉氏方程:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = 0$$

鉴于 $\tau$ 与 $\mathcal{L}$ 均为 4-标量而 $x^\mu$ 和 $\dot{x}^\mu$ 均为 4-矢量, 如此拉氏方程中各项都是相同类型的 4-张量 $\rightsquigarrow$ 此拉氏方程具有明显的洛伦兹变换下的不变性.

- 把 $x^\mu(\tau)$ 看作粒子的正则坐标, 引入与之共轭的正则动量

$$\pi_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}$$

并通过勒让德变换定义体系的哈密顿函数:

$$\mathcal{H} = \pi_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} \qquad \rightsquigarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}(x^\mu,\ \pi_\mu)$$

我们也可以把对粒子的描写纳入到哈密顿程式. 此情形下作用量泛函的极值条件重新表达为哈密顿正则方程组:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\mu}, \qquad \frac{\mathrm{d}\pi_\mu}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu}}$$

哈密顿正则方程组与拉氏方程是等价的.

- 鉴于 $\tau$ 与 $\mathcal{H}$ 均为 4-标量而 $x^\mu$ 和 $\pi_\mu$ 均为 4-矢量, 哈密顿正则方程组也具有明显的洛伦兹变换不变性.

- 考虑到体系拉氏函数与哈密顿量定义的任意性, $\mathcal{L}$ 与 $\mathcal{H}$ 本身并没有直接的物理意义[1]. 体系的物理量(能量、动量等), 必须从对称性与守恒定律的关系出发做出定义.

  现在简述沟通力学体系对称性与守恒定律的诺特 (Noether) 定理. 设 $x^\mu(\tau) \rightsquigarrow x'^\mu(\tau) = x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$ 是力学体系的一种对称性, 即 $\delta x^\mu(\tau)$ 并不导致作用量泛函的改变:

$$\begin{aligned}
0 &= \delta S = \int \mathrm{d}\tau \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}\, \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}\, \delta \dot{x}^\mu \right) \\
&= \int \mathrm{d}\tau \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}\, \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}\, \frac{\mathrm{d}\delta x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \right) \\
&= \int \mathrm{d}\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}\, \delta x^\mu \right) + \int \mathrm{d}\tau \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \delta x^\mu \\
&= \int \mathrm{d}\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}\, \delta x^\mu \right)
\end{aligned}$$

  最后一步使用了拉氏方程(体系沿着真实的经典路径运动).

---

[1] 特别地, 不能沿用非相对论性经典力学的习惯, 把 $\mathcal{L}$ 误解为体系动能与势能之差、把 $\mathcal{H}$ 误解为体系的总能量.

所以,

$$\boxed{\delta x^\mu \ : \ \delta S = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}\,\delta x^\mu\right) = 0}$$

这就是相对论力学体系情形下的诺特定理.

1. $\delta x^\mu = \varepsilon^\mu$ (常 4-矢) 表示无穷小的时空平移变换. 倘若体系具有时空平移变换下的不变性, 那么相应的守恒定律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}\,\varepsilon^\mu\right) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}\right) = 0$$

就诠释为体系的能量、动量守恒定律:

$$\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0 \qquad \hookleftarrow \ p_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}$$

4-矢量 $p^\mu$ 称为力学体系的 4-动量, 其时间分量与空间分量分别诠释为体系的能量与物理动量:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c},\, \boldsymbol{p}\right)$$

- 在相对论性经典场论中，场 $\Psi(x)$ 的作用量泛函常表达为：

$$S = \int \mathscr{L}(\Psi,\ \partial_\mu \Psi)\, \mathrm{d}^4 x$$

$\mathscr{L} = \mathscr{L}(x)$ 称为经典场体系的拉氏函数密度 (Lagrangian)，它必须是一个 4-标量. 拉氏密度的量纲为 $[\mathscr{L}(x)] = M L^{-2} T^{-1}$.

- 极值条件 $\delta S = 0$ 可等价地表达为如下拉氏方程：

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Psi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi)}\right] = 0$$

倘若 $\Psi$ 为 4-张量，则此经典场的拉氏方程明显地是洛伦兹不变的，从而满足了相对性原理对于侯选物理规律的资格审查.

我们现在以标量场为例，讨论一下经典场情形下的诺特定理. 设 $\Psi = \Psi(x)$ 为 $\mathbb{M}_4$ 空间中的一个 4-标量场. 倘若 $\Psi$ 因为某种原因发生了一个无穷小改变：

$$\Psi(x) \quad \rightsquigarrow \quad \Psi'(x) = \Psi(x) + \delta\Psi(x)$$

它引起的场 $\Psi(x)$ 拉氏密度的改变为：

$$\mathscr{L}(x) \quad \rightsquigarrow \; \mathscr{L}\,'(x) = \mathscr{L}(x) + \delta\mathscr{L}(x)$$

其中，

$$\begin{aligned}
\delta\mathscr{L}(x) \quad &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Psi(x)}\,\delta\Psi(x) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi(x))}\,\delta\partial_\mu\Psi(x) \\
&= \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi(x))}\,\delta\Psi(x)\right] + \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Psi(x)} - \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi(x))}\right]\delta\Psi(x) \\
&= \partial_\mu j^\mu(x) + \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Psi(x)} - \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi(x))}\right]\delta\Psi(x)
\end{aligned}$$

右端第一项中出现的

$$j^\mu(x) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi(x))}\,\delta\Psi(x)$$

是一个 4-矢量，而第二项正比于经典场作用量泛函对场量 $\Psi(x)$ 的泛函导数.

最基本的泛函导数是：

$$\frac{\delta \Psi(y)}{\delta \Psi(x)} = \delta^{(4)}(x-y)$$

因为，

$$S = \int \mathscr{L}(y)\, \mathrm{d}^4 y = \int \mathscr{L}(\Psi(y),\, \partial_\mu \Psi(y))\, \mathrm{d}^4 y$$

作用量泛函对场量 $\Psi(x)$ 的泛函导数计算如下：

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta \Psi(x)} &= \int \mathrm{d}^4 y \left[ \frac{\partial \mathscr{L}(y)}{\partial \Psi(y)} \frac{\delta \Psi(y)}{\delta \Psi(x)} + \frac{\partial \mathscr{L}(y)}{\partial(\partial_\mu \Psi(y))} \frac{\delta(\partial_\mu \Psi(y))}{\delta \Psi(x)} \right] \\
&= \int \mathrm{d}^4 y \left[ \frac{\partial \mathscr{L}(y)}{\partial \Psi(y)} \delta^{(4)}(x-y) + \frac{\partial \mathscr{L}(y)}{\partial(\partial_\mu \Psi(y))} \frac{\partial \delta^{(4)}(x-y)}{\partial y^\mu} \right] \\
&= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Psi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi(x))}
\end{aligned}$$

所以，可以把场量的无穷小改变 $\delta\Psi(x)$ 所引起的经典场拉氏密度的改变表达为：

$$\delta\mathscr{L}(x) = \partial_\mu j^\mu(x) + \frac{\delta S}{\delta\Psi(x)}\,\delta\Psi(x)$$

考虑到 $\Psi(x)$ 的真实演化遵从拉氏方程，

$$\frac{\delta S}{\delta\Psi(x)} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Psi(x)} - \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi(x))} = 0$$

我们有：

$$\partial_\mu j^\mu(x) = \delta\mathscr{L}(x)$$

- 倘若 $\delta\Psi(x) \rightsquigarrow \delta\mathscr{L}(x) = 0$，则称 $\delta\Psi(x)$ 为经典场体系的一种对称性．与其相伴的守恒定律为：

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0$$

4-矢量 $j^\mu(x)$ 就称为此经典场相应于这个对称性的守恒流．

- 倘若 $\delta\Psi(x)$ 是由时空坐标的平移变换 $\delta x^\mu = \varepsilon^\mu$ 引起的,

$$\delta\Psi(x) = \frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu}\varepsilon^\mu \quad \rightsquigarrow \quad \delta\mathscr{L}(x) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^\mu}\varepsilon^\mu = \partial_\mu\left(\mathscr{L}\varepsilon^\mu\right)$$

虽然 $\delta\mathscr{L} \neq 0$, 但如此 $\delta\Psi(x)$ 仍为经典场体系的一种对称性(时空平移对称性). 与其相伴的守恒定律

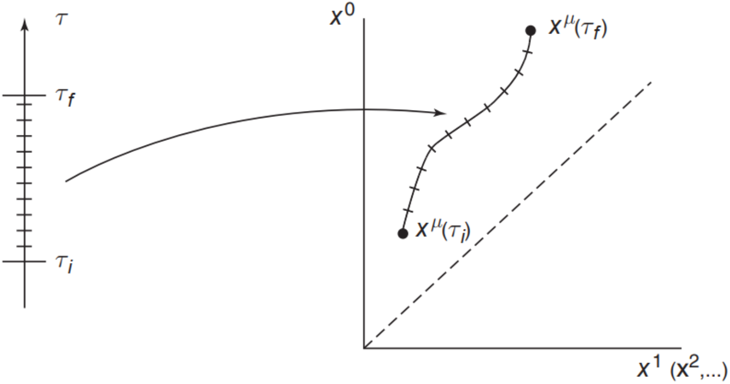
$$\partial^\mu T_{\mu\nu}(x) = 0$$

称为体系的能量、动量守恒定律. 二阶 4-张量 $T_{\mu\nu}(x)$

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial^\mu\Psi(x))}\partial_\nu\Psi(x) - \eta_{\mu\nu}\mathscr{L}(x)$$

诠释为此经典场的能量动量张量[2].

[2] $T_{00}$ 与 $T_{0i}$ 分别诠释为经典场在 $\mathbb{E}_3$ 中的能量体密度与动量体密度, 而 $T_{ij}$ 诠释为场的动量流密度张量.




我们先看看相对论力学对自由粒子的描写. 设粒子质量为 $m$, 其在 $\mathbb{M}_4$ 中的运动轨迹(世界线)可以刻化为:

$$x^\mu = x^\mu(\tau), \qquad \tau_i \le \tau \le \tau_f$$

粒子的世界线(world-line)上,相邻两点之间的间隔可表为:

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = \eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}(\mathrm{d}\tau)^2 = U^\mu U_\mu (\mathrm{d}\tau)^2 = -c^2(\mathrm{d}\tau)^2 < 0$$

- 立足于 $\mathbb{M}_4$ 的几何,可以把 $\sqrt{-\mathrm{d}s^2}$ 理解为粒子世界线上相邻两点之间的微元弧长,它是一个 4-标量.
- 对于连接 $x_i^\mu = x^\mu(\tau_i)$ 与 $x_f^\mu = x^\mu(\tau_f)$ 的其他路径[3],

$$\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} \neq -c^2$$

  这些候选路径上相邻两点之间的微元弧长为:

$$\sqrt{-\mathrm{d}s^2} = \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}}\,\mathrm{d}\tau$$

  $\sqrt{-\mathrm{d}s^2}$ 仍是一个 4-标量,$\left[\sqrt{-\mathrm{d}s^2}\right] = L$.

[3]因此,$U^\mu U_\mu = -c^2$ 常称作是粒子的质壳条件.

自由粒子的拉氏函数可以定义为：

$$\mathcal{L} = -mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}} = -mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} \qquad \hookleftarrow \quad \dot{x}^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

如此定义的 $\mathcal{L}$ 既是一个 4-标量，又具有能量的量纲[4]，是相对论力学意义下自由粒子合格的拉氏函数.

不难看出：

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu} = mc\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}$$

这里约定 $\dot{x}^2 \equiv \eta_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$. 所以，自由粒子情形下的拉氏方程 (亦即自由粒子世界线方程)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu} = 0$$

表达为：

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}\right) \qquad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2x_\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = 0$$

[4]从而保证了作用量泛函具有角动量量纲.

上面的计算中最后一步使用了粒子的质壳条件 $\dot{x}^2 = -c^2$.

- 倘若把对自由粒子的描述纳入到哈密顿程式, 则需要引入与粒子正则坐标 $x^\mu(\tau)$ 共轭的正则动量

$$\pi_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = mc\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \qquad \rightsquigarrow \ \pi^\mu \pi_\mu = -m^2c^2$$

与哈密顿量:

$$\mathcal{H} \equiv \pi_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} = mc\frac{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} + mc\sqrt{-\dot{x}^2}$$

不过很显然,

$$\mathcal{H} = 0$$

所以, 依托 $\mathcal{L} = -mc\sqrt{-\dot{x}^2}$ 的勒让德变换并不能建立起自由粒子有意义的哈密顿表述[5].

[5]当然, 建立在 $\mathcal{L} = -mc\sqrt{-\dot{x}^2}$ 基础上的自由粒子拉氏表述仍是合理的.

我们也可以把自由粒子的拉氏函数重新选择为：

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{m}{2}\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{m}{2}\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

如此 $\tilde{\mathcal{L}}$ 既是一个 4-标量，又具有能量的量纲，从而也是相对论力学意义下自由粒子合格的拉氏函数[6].

不难看出：

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial x^\mu} = 0, \qquad \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{x}^\mu} = m\dot{x}_\mu$$

按照新定义的拉氏函数 $\tilde{\mathcal{L}}$，描写自由粒子动力学演化的拉氏方程

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{x}^\mu} = 0$$

表达为：

$$0 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(m\dot{x}_\mu) = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2x_\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = 0$$

这正是我们期望的结果，也与 $\mathcal{L} = -mc\sqrt{-\dot{x}^2}$ 满足的拉氏方程结论一致.

---

[6]切忌把 $\tilde{\mathcal{L}}$ 曲解为自由粒子的动能. 请愿意动脑筋的同学想想其中的道理.

依托新拉氏函数 $\tilde{\mathcal{L}}$ 的勒让德变换可以建立起自由粒子有意义的哈密顿表述.

- 视 $x^\mu(\tau)$ 为粒子的正则坐标, 共轭的正则动量定义为:

$$\tilde{\pi}_\mu = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}^\mu} = m\dot{x}_\mu = mU_\mu$$

- 按照勒让德变换, 自由粒子的哈密顿量定义为[7]:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\pi}_\mu \dot{x}^\mu - \tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2m}\tilde{\pi}_\mu\tilde{\pi}^\mu = \frac{1}{2m}\tilde{\pi}^2 < 0$$

因此, 自由粒子的哈密顿正则运动方程组为:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{\pi}^\mu} = \tilde{\pi}_\mu, \quad \frac{\mathrm{d}\tilde{\pi}_\mu}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial x^\mu} = 0} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 x_\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = 0$$

[7]也不能把 $\tilde{\mathcal{H}}$ 曲解为自由粒子的动能.

- 因为
$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\pi}_\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0$$
$\tilde{\pi}_\mu = mU_\mu$ 实际上描写了自由粒子的一组守恒量，通常将其标记为 4-动量：
$$\boxed{p_\mu = mU_\mu = m\gamma_u(-c,\ u_i)}$$

- 这个守恒量 4-矢量的时间分量与空间分量分别对应于自由粒子作用量泛函在时间平移与空间平移变换下的不变性，因此可以诠释为粒子的能量 $E$ 与动量 $\boldsymbol{p}$：
$$p^\mu = \left(\frac{E}{c},\ \boldsymbol{p}\right) \quad \rightsquigarrow \quad p_\mu = \left(-\frac{E}{c},\ \boldsymbol{p}\right)$$

- 质壳条件 $\dot{x}^2 = -c^2$ 可用粒子的 4-动量等价地表达为：
$$\boxed{p_\mu p^\mu = -m^2c^2} \quad \rightsquigarrow \quad p^2 = -m^2c^2$$
它实际上就是相对论意义下自由粒子的能量、动量关系式 $E^2 = m^2c^4 + \boldsymbol{p}^2c^2$.

- 根据 4-动量的定义 $p^\mu = mU^\mu$ 以及 4-速度 $U^\mu$ 和粒子物理速度 $\boldsymbol{u}$ 之间的关系，相对论意义下粒子能量、动量表达为：

$$\boxed{E = cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}}, \qquad \boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}}}$$

即使粒子静止不动，它也具有非零的能量：

$$E_0 = mc^2$$

有质量粒子静止能量的揭示是狭义相对论最重要的成果之一，它为原子能的开发与利用奠定了理论基础.

- 粒子因为运动而具有的能量称为动能. 因此，相对论力学中粒子动能的定义是：

$$K = mc^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} - 1 \right]$$

不难证明在 $u \ll c$ 的低速近似下，$K$ 的上述表达式将回归牛顿力学中质点动能的表达式：

$$K \approx \frac{1}{2}mu^2$$

**狭义相对论**不仅允许选取惯性参考系，事实上也允许选取加速参考系.

为了方便地在狭义相对论理论中使用加速参考系，需要在闵氏空间 $\mathbb{M}_4$ 中引入非平庸度规张量 $g_{\mu\nu}(x) \neq \eta_{\mu\nu}$.

- 在某个选定的参考系 $\Sigma$ 中，$\mathbb{M}_4$ 中任一场点 $P$ 的 4-位置坐标记为：

  $$x^\mu = (x^0,\ r) = (ct,\ x^1,\ x^2,\ x^3),$$

  相邻两点之间的间隔定义为：

  $$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$$

  $g_{\mu\nu}(x)$ 称为 $\Sigma$ 系中 $\mathbb{M}_4$ 的度规张量，一般情形下它是时空坐标的函数. 因为 $\mathbb{M}_4$ 是赝欧氏空间，度规矩阵的行列式恒负：

  $$g = \det g_{\mu\nu} < 0$$

- 倘若 $\Sigma$ 是惯性参考系且在其中选择了笛卡尔直角坐标系，度规张量 $g_{\mu\nu}$ 退化为 $\eta_{\mu\nu}$，其非零分量仅有 $\eta_{00} = -1$ 与

$$\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$$

写成矩阵，即为：

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \rightsquigarrow \quad \det \eta_{\mu\nu} = -1 < 0$$

$\mathbb{M}_4$ 中相邻两点之间的间隔正是我们期望的形式：

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &= -(c dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \end{aligned}$$

- 在参考系 $\Sigma$ 中，$\mathbb{M}_4$ 的张量仍区分为逆变张量 $T^{\alpha\beta\cdots}$、协变张量 $T_{\alpha\beta\cdots}$ 和混合张量 $T^{\alpha\cdots}{}_{\beta\cdots}$ 三类. 倘若在 $\Sigma$ 系中 $\mathbb{M}_4$ 的度规是 $g_{\mu\nu}$，则张量指标的升降由 4-张量与 $g_{\mu\nu}$ 或 $g^{\mu\nu}$ 之间的缩并实现，此处 $g^{\mu\nu}$ 是逆度规张量：

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\rho} = \delta^{\mu}_{\rho}$$

例如：

$$g_{\mu\nu}V^{\nu} = V_{\mu}, \quad g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}T^{\alpha\beta} = T_{\mu\nu}$$

或者：

$$g_{\mu\nu}W^{\nu\beta} = W_{\mu}{}^{\beta}, \quad g^{\mu\nu}T_{\nu\rho} = T^{\mu}{}_{\rho}$$

- 引入度规 $g_{\mu\nu}$ 后，粒子 4-速度 $U^{\mu} = \mathrm{d}x^{\mu}/\mathrm{d}\tau$ 满足的恒等式表达为：

$$\boxed{U^{\mu}U_{\mu} = g_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu} = -c^2}$$

换言之，4-动量 $p^{\mu} = mU^{\mu}$ 服从的重要关系式应重新写成：

$$\boxed{p^{\mu}p_{\mu} = -m^2c^2}$$

- 遵循光速不变原理，$M_4$ 空间中相邻两点之间的间隔不受参考系变换 $x^\mu \to x'^\mu(x)$ 的影响：

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu &= \mathrm{d}s^2 \\ &= \mathrm{d}s'^2 \\ &= g'_{\alpha\beta}(x')\mathrm{d}x'^\alpha \mathrm{d}x'^\beta \\ &= g'_{\alpha\beta}(x')\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \end{aligned}$$

所以，

$$g_{\mu\nu}(x) = g'_{\alpha\beta}(x')\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}$$

亦即：

$$\boxed{g'_{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\,g_{\mu\nu}(x)}$$

此乃度规张量在两个参考系 $\Sigma(x)$ 和 $\Sigma'(x')$ 之间的变换关系.

- 倘若两个参考系 $\Sigma(x)$ 和 $\Sigma'(x')$ 均为惯性参考系，则二者之间的变换是 Lorentz 变换[8]：

$$x^\mu \quad \to \quad x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu$$

计及惯性参考系中的度规张量皆为 $\eta_{\mu\nu}$ 的事实，进而有：

$$\boxed{\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \, \eta_{\alpha\beta}}$$

此式正是洛伦兹变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 的赝正交矩阵性质.

[8]这里假设在二惯性系中都采取了笛卡尔直角坐标系.

- 假设观测者 $A$ 相对于实验室参考系 $\Sigma(X)$ 沿 $X$ 轴作加速度为 $a=\sqrt{\mathscr{A}^\mu\mathscr{A}_\mu}$ 的匀加速直线运动. $A$ 的自身系形成了一个加速参考系 $\Sigma'(x)$. $\mathbb{M}_4$ 中的同一时空点 $P$ 在两个参考系中的笛卡尔直角坐标分别为：

$$X^\mu=(cT,\ X,\ Y,\ Z),\quad x^\mu=(ct,\ x,\ y,\ z)$$

约定二参考系在 $T=t=0$ 时刻重合，则时空点 $P$ 在两个参考系中的坐标通过非线性的 Møller 变换相联系：

$$X=\left(x+\frac{c^2}{a}\right)\cosh\frac{at}{c}-\frac{c^2}{a},\quad Y=y,\quad Z=z,$$

$$T=\left(\frac{c}{a}+\frac{x}{c}\right)\sinh\frac{at}{c}$$

$\mathbb{M}_4$ 的度规张量在两个参考系中分别为 $\eta_{\mu\nu}$ 和 $g_{\mu\nu}(x)$：

$$g_{\mu\nu}(x)=\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}$$

不难求出其具体表达式:

$$g_{00}(x)=-\left(1+ax/c^2\right)^2,\quad g_{0j}(x)=g_{i0}(x)=0,\quad g_{ij}(x)=\delta_{ij}$$

所以,在 $A$ 的自身系 $\Sigma'(x)$ 中,相邻二事件之间的间隔表达为:

$$\boxed{\mathrm{d}s^2=-\left(1+ax/c^2\right)^2c^2(\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}$$

- 考虑 $A$ 的自身系 $\Sigma'$ 中与观测者 $A$ 保持相对静止的一个时钟. 因为该时钟在 $\Sigma'$ 系中始终处在位置坐标为 $(x,\ y,\ z)$ 的同一地点,它相继经历的二事件的间隔是:

$$\mathrm{d}s^2=-\left(1+ax/c^2\right)^2c^2(\mathrm{d}t)^2$$

式中 $\mathrm{d}t$ 是该时钟记录的二事件之间的坐标时间. 倘若用 $\mathrm{d}\tau$ 表示二事件之间的固有时, $\mathrm{d}s^2=-c^2(\mathrm{d}\tau)^2$, 我们有:

$$\boxed{\mathrm{d}\tau=\left(1+ax/c^2\right)\ \mathrm{d}t}$$

# 任一参考系中自由粒子的运动方程

相对论力学中,体系的作用量

$$S = \int_P^Q \mathrm{d}t\, L = \int_P^Q \mathrm{d}\tau\, \gamma L = \int_P^Q \mathrm{d}\tau\, \mathscr{L}$$

必须是一个任意坐标变换下的 4-标量. 这是相对性原理的要求.

1. $L$ 称为 Lagrange 函数. $\mathscr{L} = \gamma L$ 必须是一个 4-标量.
2. 事实上,完全可以抛弃 $L$,而把 4-标量 $\mathscr{L}$ 作为体系的拉氏量. 如此行事唯一需要付出的代价,就是在 $\mathscr{L}$ 中不能使用恒等式
$$U^\mu U_\mu = -c^2$$
以及与之等价的 $p^\mu p_\mu = -m^2c^2$. 这些恒等式只能在拉氏方程成立的基础上使用,因此称为质壳 (mass-shell) 条件.

?

最小作用量原理 $\delta S = 0$ 可以表达为如下拉氏方程:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = 0$$

式中 $\dot{x}^\mu := \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau$.

把 $x^\mu$ 看作质点的广义坐标，按下式定义其共轭正则动量：

$$p_\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^\mu}$$

可把拉氏方程改写为：

$$\dot{p}_\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^\mu}$$

式中 $\dot{p}_\mu = \mathrm{d}p_\mu/\mathrm{d}\tau$. 倘若 $x^\mu$ 是循环坐标，即拉氏量 $\mathscr{L}$ 不依赖于 $x^\mu$，则 $p_\mu$ 是体系的一个守恒量.

质量为 $m$ 的自由粒子的拉氏量可取为：

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} m\, U^\mu U_\mu = \frac{1}{2} m\, g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu, \qquad U^\mu := \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \dot{x}^\mu$$

在惯性参考系中，

$$p_\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = m\, \eta_{\mu\nu} U^\nu, \qquad \dot{p}_\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^\mu} = 0$$

即自由粒子的正则动量就是其物理的机械动量，它的 4 个分量皆是守恒量 (能量、动量均守恒).

下面从匀加速参考系的角度考察一下自由质点的运动. 在观测者 $A$ 的自身系中, 自由粒子 $m$ 的拉氏量表达为:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{1}{2} m\, g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} \\
&= \frac{1}{2} mc^2\, g_{00}(x) \dot{t}^2 + \frac{1}{2} m\, \delta_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \\
&= -\frac{1}{2} mc^2 \left(1 + ax/c^2\right)^2 \dot{t}^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)
\end{aligned}
$$

显然, $t$, $y$, $z$ 均为体系的循环坐标, 相应的正则动量

$$
p_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{t}} = -mc\left(1 + ax/c^2\right)^2 \dot{t}, \quad p_2 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y},
$$

$$
p_3 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}
$$

皆为守恒量. 但因为

$$
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = -ma\left(1 + ax/c^2\right) \dot{t}^2 \neq 0
$$

$p_1 = m\dot{x}$ 不是守恒量. 这些论断与惯性系不尽相同.

拉氏方程求得为:

$$\ddot{x} + a\left(1 + ax/c^2\right)\dot{t}^2 = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = 0,$$

$$\frac{2a}{c^2}\dot{x}\,\dot{t} + \left(1 + ax/c^2\right)\ddot{t} = 0$$

积分之,有:

$$-\left(1 + ax/c^2\right)^2 c^2\dot{t}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = -c^2$$

或者等价地,

$$\boxed{-\frac{(p_0)^2}{(1 + ax/c^2)^2} + m^2\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = -m^2c^2}$$

它可改写为 $g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu = -m^2c^2$,正是我们所期望的加速系中自由粒子的能量、动量关系式.

# 再论孪生子佯谬

现在我们有条件讨论著名的孪生子佯谬的解决方案了.

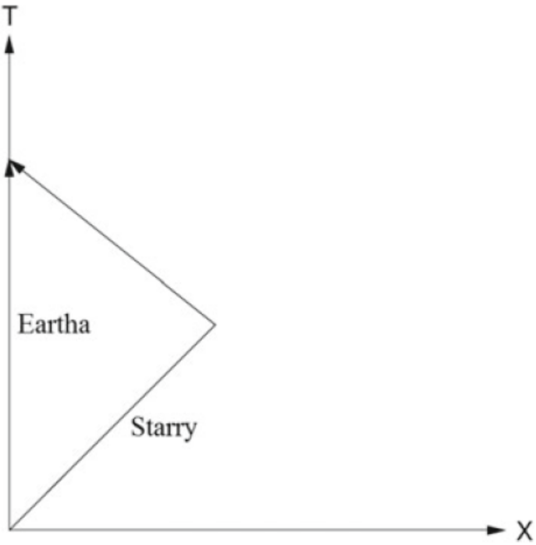
- 假设存在一对孪生子, Eartha 与 Starry.
- Eartha 始终站在地球上某固定地点 $O$. Starry 乘飞船进入太空向半人马座 $\alpha$ (Alpha Centauri) 航行.
- 倘若 Starry 到达半人马座 $\alpha$ 后立刻以原速率折返, 则当她与 Eartha 重逢时, Eartha 认为二人的年龄增量之间存在关系:

$$\Delta T_{\text{Eartha}} = \frac{\Delta T_{\text{Starry}}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

  此处 $u$ 为 Starry 所乘飞船相对于地球的速率.
- 太阳系到半人马座 $\alpha$ 的空间距离 $L_0 \approx 4$ 光年. 倘若 $u = 0.8c$, 我们看到:

$$\Delta T_{\text{Eartha}} = \frac{2L_0}{u} = 10 \text{ year}, \qquad \Delta T_{\text{Starry}} = 6 \text{ year}$$

  即当孪生子重逢时, Eartha 认为自己比 Starry 年长了 4 岁.


T
Eartha
Starry
X

Starry 的观点如何呢?

- 首先, Starry 认定自己始终处于静止状态, 但 Eartha、地球以及半人马座 $\alpha$ 等以速率 $u$ 运动.
- 以 Starry 的视角, 地球与半人马座 $\alpha$ 之间的空间距离形成了一把运动的直尺, 其长度为:

$$L = L_0\sqrt{1 - u^2/c^2} = 2.4 \text{ 光年}$$

因此, 孪生子重逢时, Starry 认为自己的年龄增量是:

$$\Delta t_{\text{Starry}} = \frac{2L}{u} = \frac{2 \times 2.4}{0.8} = 6 \text{ year}$$

即 $\Delta t_{\text{Starry}} = \Delta T_{\text{Starry}}$, 孪生子二人对 Starry 的年龄增量结论一致.

- 但 Starry 认为 Eartha 相当于是一个运动的时钟. 按照相对论的运动时钟延缓效应, Starry 认为 Eartha 的年龄增量应该是:

$$\Delta t_{\text{Eartha}} = \Delta t_{\text{Starry}}\sqrt{1 - u^2/c^2} = 3.6 \text{ year}$$

1. 孪生子关于 Eartha 年龄增量的分歧称为孪生子佯谬.

## 那么，哪里分析错了？

事实上，因为涉及从半人马座 $\alpha$ 折返这一动作，Starry 所处的飞船参考系不是惯性参考系. 囿于惯性系的讨论和分析不可能逻辑自洽地走出孪生子佯谬的困惑.

我们现在把 Starry 所处的飞船看作是一个加速度为 $a$ 的加速参考系 $\Sigma'$.

1. 站在 $\Sigma'$ 中观测，Eartha 的运动也不是匀速直线运动. Eartha 的速度在 $x_1 = L = 2.4$ 光年时开始下降，降为零后开始折返，此时地球与半人马座 $\alpha$ 之间的空间距离又变回为 $x_2 = L_0 = 4$ 光年.

按照加速参考系中自由粒子的运动方程，Starry 认为 Eartha 的运动服从如下方程：

$$p_t^2 - c^2\left(1 + ax/c^2\right)^2 = \left(1 + ax/c^2\right)^2 \dot{x}^2$$

$p_t = p_0/m$ 本质上是 Eartha 的能量，它是一个守恒量. 因为 $x = x_2$ 时 $\dot{x} = 0$(折返点)，我们有：

$$p_t = c\left(1 + ax_2/c^2\right)$$

按照 Eartha 的运动方程,

$$\mathrm{d}\tau = \frac{1 + ax/c^2}{\sqrt{p_t^2 - c^2\left(1 + ax/c^2\right)^2}}\,\mathrm{d}x$$

积分之,可知 Eartha 的固有时在速度从 $u$ 降为零过程中的增量为:

$$\tau_{1\to 2} = \frac{c}{a}\sqrt{\left(1 + ax_2/c^2\right)^2 - \left(1 + ax_1/c^2\right)^2}$$

倘若取 $a \to \infty$ 的极限,

$$\tau_{1\to 2} = \frac{1}{c}\sqrt{x_2^2 - x_1^2} = \frac{1}{c}\sqrt{L_0^2 - L^2} = 3.2\ \text{year}$$

所以,Starry 对于 Eartha 年龄增量的正确结论应该是:

$$\Delta\tilde{t}_{\text{Earth}} = \Delta t_{\text{Eartha}} + 2\tau_{1\to 2} = 3.6 + 2 \times 3.2 = 10\ \text{year}$$

如此,二人对于 Eartha 年龄增量的见解没有分歧. 孪生子佯谬得以完美消除.