经典电动力学

Chapter 1. 狭义相对论

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

hyang@ustc.edu.cn

March 1, 2024

1. 相对论的实验基础
   - 电动力学的参考系问题
   - 狭义相对论的实验基础
2. 狭义相对论的基本原理
   - 间隔不变性
   - 洛伦兹变换
3. 相对论的时空结构
   - 因果律与相互作用的最大传播速度
   - 同时性的相对性
   - 运动时钟的延缓效应
   - 运动尺度的缩短
   - 速度、加速度合成法则
4. 闵氏空间中的张量
   - 欧氏空间中张量的数学定义
   - 四维闵氏空间中的张量
5. 狭义相对论中的加速参考系
6. 物理学规律的惯性参考系选择无关性

参考系问题

电磁现象的基本规律是 Maxwell 方程组和外电磁场之 Lorentz 力作用下带电粒子的牛顿第二定律. 在真空中, 它们分别表为:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\epsilon_0,\qquad \nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0,$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\qquad \nabla\times\boldsymbol{B}-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\mu_0\,\boldsymbol{j}.$$

和

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}.$$

需要回答的物理问题是:

1. 这些方程直接适用于什么参考系?
2. 若观测者从一个惯性参考系变换到另一个惯性参考系, 上述方程组会不会发生改变? 如何改变?
3. 基本电磁场量 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 如何随参考系的不同选择而改变?

光速

Maxwell 方程组的参考系问题可以换一个角度提问. 从真空中远离电荷电流分布区域的 Maxwell 方程组出发, 可以证明电磁场的基本存在形式是电磁波:

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0\,, \qquad \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0\,.$$

式中,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \approx 3\times 10^8\ \text{米/秒}$$

是真空中电磁波的传播速度.

$\mathcal{Q}$:

1. 令人迷惑的是, 为什么 c 是一个常数?
2. 换言之, $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ 是电磁波相对于哪一个参考系的传播速度 ?

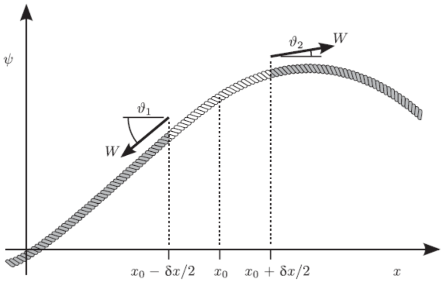
电磁波传播速度的常数性

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ 米/秒}$$

对人类的认知能力提出了挑战，它迫使物理学家们在如下两个可能的选项中做出单项选择：

1. 或者Maxwell 方程组与 Lorentz 力公式在所有的惯性参考系中都成立
   - 电磁波在任一惯性系中的传播速度都是 $c \approx 3 \times 10^8$ 米/秒
   - 不同惯性系彼此之间不能通过伽利略变换相联系
2. 或者Maxwell 方程组与 Lorentz 力公式仅在某一特殊的惯性参考系 S 中才成立
   - 电磁波仅仅在 S 系中的传播速度是 $c \approx 3 \times 10^8$ 米/秒
   - 不同惯性系彼此之间仍通过伽利略变换相联系

回眸机械波



考察绳子里传播的机械波. 设绳子的质量线密度为 M, 张力为 W,

$$\sin\vartheta_1 \approx \tan\vartheta_1 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{x-\delta x/2}$$

则按牛顿第二定律有:

$$M\delta x\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_{x_0} = W\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{x+\delta x/2} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{x-\delta x/2}\right]$$

亦即，

$$M\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=W\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

或者等价地，

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0$$

式中的 c

$$c=\sqrt{\frac{W}{M}}$$

就是此机械波的波速. 显然，这里的 c 也是一个常数.

提醒：

机械波波速的常数性并不造成任何逻辑困难. 机械波的传播离不开介质的存在[1]，上述波速即是与介质质心保持相对静止的观测者测得的波速.

[1]此例情形下介质即为绳子.

旧时代的物理学家普遍坚信惯性参考系必须由伽利略变换相联系、进而普遍认为电磁波的传播也需要媒介，即“以太”(ether). $c \approx 3 \times 10^8\ m/s$ 是电磁波相对于以太的传播速度.

所以，

1. **测量地球相对于以太的运动速度**
2. **测量电磁波相对于地球上观测者的传播速度**

就构成了 Maxwell 方程组物理自洽性的实验基础. 通常称之为狭义相对论的实验基础.

物理专业经典教材

光学（第二版）

母国光　战元龄　编

高等教育出版社
Higher Education Press

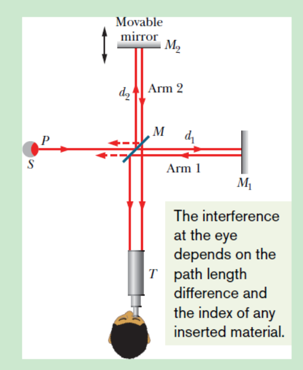
狭义相对论的实验基础

牛顿时空观认为：真空中电磁波的传播速度只有在某个特殊的参考系 (aether) 才等于 c. 若能够测定各个方向上光速的差异，就可以确定地球相对于 aether 的运动.

数量级估计：

地球绕太阳公转的速率约为 30km/s，因此，地球相对于 aether 参考系的运动速度至少应与此具有同一数量级，

$$\frac{v}{c} \sim 10^{-4}$$



Michelson-Morley 实验 (1887) 是测量光速沿不同方向的差异的典型实验.

地球绕太阳的公转速率:

天文学家 Lalande 通过对金星凌日现象的观测, 估算出了地球与太阳之间的距离:

$$R \approx 1.5 \times 10^8 \ \ \text{km}$$

所以, 地球公转的线速度大小可估算如下[2]:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \approx \frac{2 \times 3.14 \times 1.5 \times 10^8}{360 \times 24 \times 60 \times 60} \approx 30 \ \text{km/s}$$

相对于地球而言, 太阳更有资格与绝对惯性系 (aether) 保持相对静止. 所以, 地球相对于以太 (aether) 参考系的速率具有下限:

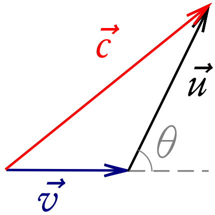
$$v \gtrsim 30 \ \text{km/s}$$

[2]如此, 地球人在地球公转轨道上每天走过的路程大约是:

$$S = vt \approx 30 \times 24 \times 60 \times 60 \approx 2.62 \times 10^6 \ \text{km}$$

经典的速度合成法则

现在用经典速度合成法则计算 Michelson-Morley 实验中电磁波沿两条光路 $M \to M_1 \to M$ 与 $M \to M_2 \to M$ 的传播时间. 如图示,



- $\boldsymbol{v}$ 为观测者相对于 aether 的运动速度;
- $\boldsymbol{u}$ 为观测者参考系所测得的光速, 设其与牵连速度 $\boldsymbol{v}$ 之间的夹角为 θ;
- $\boldsymbol{c}$ 是 aether 参考系中的光速.

按照经典的速度合成法则, 应有: $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. 所以,

$$c^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\theta$$

由此求得观测者所测得的光速的大小为:

$$u = \sqrt{c^2 - v^2\sin^2\theta} - v\cos\theta$$

Michelson-Morley 实验

设观测者相对于 aether 参考系的运动速度沿着光路 $M \to M_1$. 这样, 光线 $M \to M_1 \to M$ 的传播时间为:

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2cl}{c^2 - v^2} \approx \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)$$

而光线 $M \to M_2 \to M$ 的传播时间是:

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} \approx \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

两束光线的光程差为:

$$c(t_1 - t_2) \approx l\frac{v^2}{c^2}$$

把仪器转动 90^o, 使两束光位置互换, 理论上预计应该观测到干涉条纹的移动个数是:

$$\Delta N = \frac{2c(t_1 - t_2)}{\lambda} \approx \frac{2l}{\lambda}\frac{v^2}{c^2}$$

否定的实验结果

Michelson-Morley 实验设定:

1. 利用多次反射技术可以使有效臂长达到 $l \approx 10\text{m}$;
2. 假定地球相对于 aether 的速度大小与地球的公转速率具有同一量级,使得:$(v/c)^2 \approx 10^{-8}$;
3. 取钠黄光做实验,$\lambda \approx 5 \times 10^{-7}\text{m}$.

如此,经典理论预计的干涉条纹移动数目是:

$$\Delta N \approx \frac{2l}{\lambda}(v/c)^2 \approx \frac{20 \times 10^{-8}}{5 \times 10^{-7}} = 0.4$$

但是,实验结果是否定的:$\Delta N \lesssim 0.01$. 因此,Michelson-Morley 实验的否定结果实际上是在暗示 (imply):

光速不服从伽利略 (Galileo) 速度合成法则,光在不同惯性系中的传播速度具有相同的大小.

光速不变假设的实验基础

迄今为止的所有实验，例如：

- Michelson-Morley 实验 (1887).
- Cedarholm 微波激射实验 (1955), $\rightsquigarrow \quad v \lesssim 3 \times 10^{-2}\text{km/s}$
- Isaak 利用穆斯堡尔效应所做的实验 (1970),
$\rightsquigarrow \quad v \lesssim 5 \times 10^{-5}\text{km/s}$

都**暗示**光速的大小与观测者所处的参考系无关，也与光源的运动速度无关.

1. 看起来，**光速的参考系选择无关性(俗称光速不变) 是物理世界中的一条基本规律.**

但实验上能够直接测量的都是双程 (two-way) 光速. 因为涉及异地钟的对钟问题 (synchronization)，单程光速并不能直接测量.
所以，"光速不变"在解决了电磁学理论参考系疑难的狭义相对论中是以基本假设的面貌出现的.

狭义相对论的基本原理

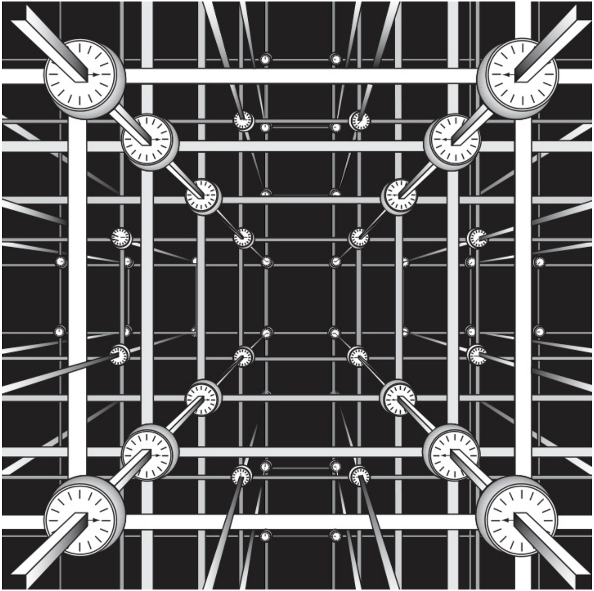
Einstein(1905) 提出了两条相对论的基本假设:

1. 相对性原理. 所有惯性系都是等价的,物理学规律对于所有惯性系都可以表为相同形式.
2. 光速不变原理. 真空中的光速相对于任何惯性系均为 c, 光速与光源的运动无关.

相对论时空观:

光速不变性所导致的时空概念与经典时空观之间存在着深刻的矛盾.

所有最基本的时空概念,如同时性、距离、时间、速度等概念都需要在光速不变性的假设之上重新理解.



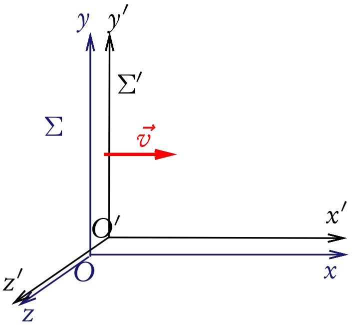
- 异地时钟的对钟、从而参考系 $F(xyzt)$ 的建立, 离不开光速不变原理这条基本假设.

Galileo 变换

牛顿时空观集中反映在惯性参考系的 Galileo 变换中.

设惯性系 Σ' 相对于另一惯性系 Σ 以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动. 建立 Cartesian 直角坐标系,并选 x 和 x' 轴沿运动方向,Galileo 变换可表为:

$$
\begin{aligned}
x' &= x - vt \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= t
\end{aligned}
$$



牛顿时空观的基本特征是时间与空间的分离. 时间在宇宙中均匀流逝着,而空间则好像是一个容器,二者之间没有联系,也不与物质的运动发生关系.

狭义相对论中的惯性参考系

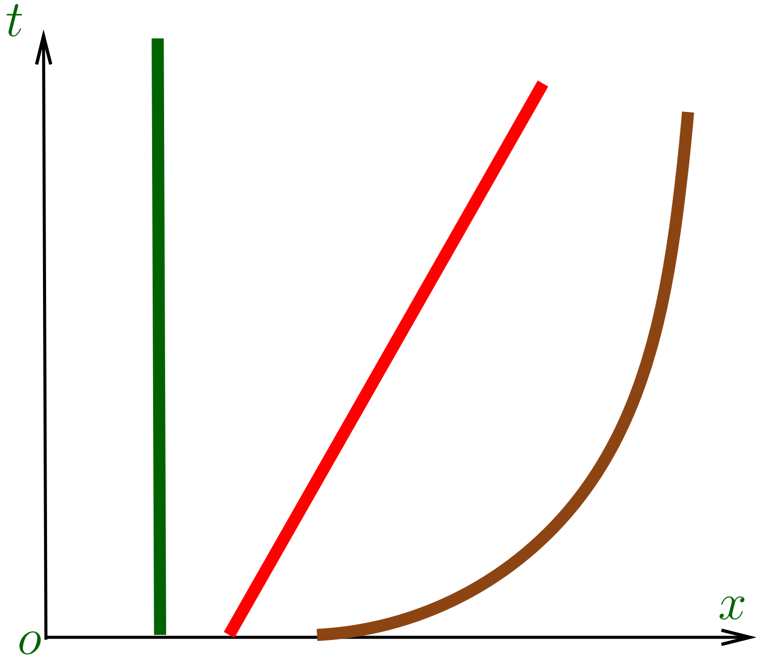
在狭义相对论中,

1. 我们使用光速不变原理对于单程光速的假设校对惯性参考系中不同地点的时钟 (clock synchronization), 并把不同地点时钟的公共时定义为惯性系中的时间坐标 t.

2. 在惯性参考系中, 有质量自由粒子或者保持静止、或者做匀速直线运动

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = 0 \qquad \rightsquigarrow \; r(t) = r_0 + vt$$

所以在惯性系的时空图上, 自由粒子的世界线是直线. 若粒子做加速运动, 则其在时空图上的世界线是曲线.



t
x
O

与牛顿时空观类似，相对论的时空观也集中反映在从一个惯性参考系到另一个惯性参考系的时空坐标变换式里.

这个坐标变换称为 Lorentz 变换.

以下我们将从相对论的基本原理出发建立 Lorentz 变换. 为此，先引入一个新概念：事件 (event). 物质运动可以看作一系列事件的发展过程. 事件可以有各种不同的具体内容，但是它们总是在一定地点于一定时刻发生的.

狭义相对论假定可以用四个 Cartesian 坐标 (t, x^1, x^2, x^3) 表示一个事件[3]. 或者，

$$x = (x^\mu) = (x^0, x^i) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

式中，$x^0 \equiv ct$. x^μ 为 Cartesian 坐标意味着：

$$-\infty < x^\mu < +\infty, \quad \mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

[3]之所以能使用 Cartesian 坐标，是因为狭义相对论默认的物理时空是不存在引力的四维闵氏 (Minkowski) 平坦空间. 时间坐标 $x^0 := ct$，此处 t 是所有地点时钟的公共时.

- 同一个事件 P 在惯性系 Σ 上用 $x_P = (x_P^\mu)$ 表达，但在另一惯性系 Σ' 中就用 $(x_P'^\mu)$ 表达.
- Lorentz 变换就是同一事件在不同惯性系的两组坐标 x^μ 和 x'^μ 之间的联系.

狭义相对论默认的物理时空是内禀曲率为零的四维闵氏平坦空间. 所以，在狭义相对论理论中，

1. 时间是均匀的.
2. 空间既是均匀的，也是各向同性的.

时空的均匀性意味着同一时空点在不同惯性系的两组笛卡尔坐标之间的联系只能是线性变换. 证明如下：

- 考虑两个时空 P 与 Q. 设 P 在惯性系 Σ 与 Σ' 中的笛卡尔坐标分别为 x^μ 和 x'^μ, Q 在 Σ 与 Σ' 中的笛卡尔坐标分别为 y^μ 和 y'^μ. 一般情形下，

$$x'^\mu = f^\mu(x), \qquad y'^\mu = f^\mu(y).$$

- 此二时空点的时间间隔与空间距离在惯性系 Σ 中为 $x^\mu - y^\mu$，在另一惯性系 Σ' 中为：

$$x'^\mu - y'^\mu = f^\mu(x) - f^\mu(y)$$

- 时间与空间的均匀性假设意味着不存在有特权的时空点. 所以，在坐标系 Σ 中重新选取坐标原点，

$$x^\mu \to x^\mu + b^\mu, \qquad y^\mu \to y^\mu + b^\mu$$

既不会改变 P、Q 两点在 Σ 系中的时空坐标差 $x^\mu - y^\mu$，也不会改变它们在 Σ' 系中的时空坐标差：

$$x'^\mu - y'^\mu = f^\mu(x) - f^\mu(y) = f^\mu(x+b) - f^\mu(y+b)$$

求此式对 x^ν 的微商，可得：

$$\frac{\partial f^\mu(x)}{\partial x^\nu} = \frac{\partial f^\mu(x+b)}{\partial x^\nu}$$

- 鉴于平移量 b^μ 的任意性, 上式的成立意味着

$$\frac{\partial f^\mu(x)}{\partial x^\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu$$

是一些独立于时空坐标 x 的常数. 把上式看做一个偏微分方程组, 其通解显然是:

$$f^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu + a^\mu$$

所以, 时间与空间的均匀性意味着同一时空点在闵氏空间两个不同惯性参考系之间的笛卡尔坐标只能通过线性变换相联系:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu + a^\mu$$

- 按照光速不变原理, 真空中的光速在所有惯性参考系中均是同一个常数. 因此, 期望中的 Lorentz 变换必须是上述线性变换的一个特例 (即变换系数 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 必须形成赝正交矩阵, 详情见后述).

事件的间隔：

为了计入光速不变原理对不同惯性系之间时空坐标变换的限制，再引入事件间隔的概念．设两事件 P 与 Q 在惯性系 Σ 中的笛卡尔坐标分别为 x_P^μ 和 x_Q^μ，则二者的间隔定义为：

$$(x_P - x_Q)^2 \equiv -c^2(t_P - t_Q)^2 + (x_P^1 - x_Q^1)^2 + (x_P^2 - x_Q^2)^2 + (x_P^3 - x_Q^3)^2$$

或者，

$$(x_P - x_Q)^2 = \eta_{\mu\nu}(x_P^\mu - x_Q^\mu)(x_P^\nu - x_Q^\nu)$$

$\eta_{\mu\nu}$ 称为闵氏空间度规张量 $\boldsymbol{\eta}$ 的笛卡尔分量：

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

上式常简记为：

$$\mathrm{diag}\,(\eta_{\mu\nu}) = (-1, 1, 1, 1)$$

度规张量 $\eta_{\mu\nu}$ 存在逆张量 $\eta^{\mu\nu}$:

$$\eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho} := \sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho} = \delta_{\mu}^{\rho}$$

式中,

$$\boxed{\eta^{00} = \eta_{00} = -1, \qquad \eta^{ij} = \eta_{ij} = \delta_{i}^{j}, \qquad \eta^{0j} = \eta_{0j} = 0.}$$

1. 若两事件在同一地点相继发生, 则:

$$(x_P - x_Q)^2 = -c^2(t_P - t_Q)^2 < 0$$

2. 若两事件同时发生于不同地点, 则:

$$(x_P - x_Q)^2 = (x_P^1 - x_Q^1)^2 + (x_P^2 - x_Q^2)^2 + (x_P^3 - x_Q^3)^2 > 0$$

3. 设二事件在惯性系 Σ' 上的坐标分别为 $(x_P'^{\mu})$ 和 $(x_Q'^{\mu})$. 如此, Σ' 系中观察者所测得的事件间隔将是:

$$(x_P' - x_Q')^2 = \eta_{\mu\nu}(x_P'^{\mu} - x_Q'^{\mu})(x_P'^{\nu} - x_Q'^{\nu})$$

$\mathcal{Q}$: $(x_P - x_Q)^2$ 与 $(x'_P - x'_Q)^2$ 之间有何关系？

- 惯性系之间的时空坐标变换是线性变换:

$$x'^{\mu}_P = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\boldsymbol{v})x^{\nu}_P + a^{\mu}, \qquad x'^{\mu}_Q = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\boldsymbol{v})x^{\nu}_Q + a^{\mu}$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 是惯性系之间的牵连速度. 因此,

$$(x'_P - x'_Q)^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\boldsymbol{v})(x_P - x_Q)^{\nu}$$

且:

$$\begin{aligned}(x'_P - x'_Q)^2 &= \eta_{\mu\nu}(x'_P - x'_Q)^{\mu}(x'_P - x'_Q)^{\nu} \\ &= \Big[\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}(\boldsymbol{v})\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}(\boldsymbol{v})\Big](x_P - x_Q)^{\rho}(x_P - x_Q)^{\sigma}\end{aligned}$$

- 倘若 P, Q 二事件是通过光讯号相联系，计及光速不变原理，则有:

$$(x_P - x_Q)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x'_P - x'_Q)^2 = 0$$

因此，前式右端应正比于 $(x_P - x_Q)^2$：这就意味着：

$$(x'_P - x'_Q)^2 = \sigma(v)(x_P - x_Q)^2$$

换言之，

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}(v)\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}(v) = \sigma(v)\eta_{\rho\sigma}$$

- 惯性参考系是平权的．倘若让惯性系 Σ 与 Σ' 进行角色交换，我们有：

  $$(x_P - x_Q)^2 = \sigma(-v)(x'_P - x'_Q)^2$$

  从而，

  $$\sigma(-v)\sigma(v) = 1$$

- 空间的各向同性假设意味着空间中不存在特定的方向．因此，比例因子 $\sigma(v)$ 只可能依赖于牵连速度的绝对值，

  $$\sigma(v) = \sigma(-v) = \sigma(v)$$

所以：

$$\sigma(v) = \pm 1$$

注意到 $\sigma(0) = 1$ 并计及变换的连续性，我们有$\sigma(v) = 1$.

1. 两个事件的间隔不因惯性系选择的不同而不同，

$$(x'_P - x'_Q)^2 = (x_P - x_Q)^2$$

这个结论称为**间隔不变性.**

2. 间隔不变性是光速不变原理的数学表达式.

3. 事件的笛卡尔直角时空坐标在不同惯性参考系之间通过一类特殊的线性变换相联系，

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$$

其中变换系数 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 必须满足条件 $\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}$. 这类线性变换称为 Poincare 变换或者非齐次 Lorentz 变换[4].

[4]齐次 Lorentz 变换指的是平移量 $a^{\mu} = 0$ 情形下的 Poincare 变换.