洛伦兹群

1. 闵氏空间中同一个事件在两个不同坐标系中分别表示为笛卡尔坐标 x^μ 和 x'^μ，二者之间通过线性变换 $(\Lambda^\mu{}_\nu, a^\mu)$ 相联系：

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

这样的线性变换倘若保持任意两个事件的间隔，

$$(x'_P - x'_Q)^2 = (x_P - x_Q)^2$$

则称其为 Poincare 变换，或者非齐次的 Lorentz 变换.

2. $a^\mu = 0$ 情形下的 Poincare 变换称为齐次 Lorentz 变换或简称为 Lorentz 变换，记作 $\Lambda^\mu{}_\nu$.

因为，

$$(x_P'^\mu - x_Q'^\mu) = \Lambda^\mu{}_\nu (x_P^\nu - x_Q^\nu), \quad (x_P - x_Q)^2 = \eta_{\mu\nu}(x_P^\mu - x_Q^\mu)(x_P^\nu - x_Q^\nu),$$

$$(x'_P - x'_Q)^2 = \eta_{\mu\nu}(x_P'^\mu - x_Q'^\mu)(x_P'^\nu - x_Q'^\nu)$$

Lorentz 变换矩阵 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 具有性质：

$$\boxed{\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}}$$

或者等价地，

$$\Lambda^\mu{}_\rho\eta_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\sigma\eta^{\sigma\alpha} = \eta_{\rho\sigma}\eta^{\sigma\alpha} = \delta^\alpha_\rho \qquad \rightsquigarrow \quad \boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta}^{-1} = \boldsymbol{I}$$

赝正交矩阵 $\boldsymbol{\Lambda} = (\Lambda^\mu{}_\nu)$ 的全体在矩阵乘法的意义下形成一个群 $O(1,3)$，称为 Lorentz 群：

- Lorentz 变换条件显然存在特解

  $$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu \qquad \rightsquigarrow \quad x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu = \delta^\mu_\nu\, x^\nu = x^\mu$$

  即单位元是存在的.

- 求 Lorentz 变换性质矩阵形式两端的行列式，我们有：

  $$(\det \boldsymbol{\Lambda})^2 = 1, \qquad \rightsquigarrow \quad \det \boldsymbol{\Lambda} = \pm 1 \neq 0$$

  所以逆 Lorentz 变换存在， $\tilde{\boldsymbol{\Lambda}} = (\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta}^{-1})^T = (\boldsymbol{\eta}^{-1})^T\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\eta}^T.$

计及度规矩阵及其逆矩阵均是对称矩阵的事实，我们有：

$$\tilde{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{\eta}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\eta} \qquad \rightsquigarrow \quad \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{I}$$

其矩阵元是：

$$\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mu}{}_{\nu} = \left(\boldsymbol{\eta}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\eta}\right)^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\mu\sigma}\left(\boldsymbol{\Lambda}^T\right)_{\sigma}{}^{\rho}\eta_{\rho\nu} = \eta^{\sigma\mu}\Lambda^{\rho}{}_{\sigma}\eta_{\nu\rho}$$

亦即，

$$\boxed{\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mu}{}_{\nu} = \eta_{\nu\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\sigma}\eta^{\sigma\mu}}$$

- 请大家自行检验 Lorentz 变换满足封闭性和结合律.

现在分析 Lorentz 变换的物理内涵. Lorentz 变换满足的性质可以重新表为：

$$1 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \delta_{ij}\Lambda^i{}_0\Lambda^j{}_0, \qquad \delta_{ij} = -\Lambda^0{}_i\Lambda^0{}_j + \delta_{kl}\Lambda^k{}_i\Lambda^l{}_j,$$
$$0 = -\Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_j + \delta_{ik}\Lambda^i{}_0\Lambda^k{}_j$$

它有如下特解：

$$\Lambda^0{}_0 = 1, \quad \Lambda^0{}_i = \Lambda^i{}_0 = 0, \quad \delta_{kl}\Lambda^k{}_i\Lambda^l{}_j = \delta_{ij}. \qquad \rightsquigarrow \quad O(3)$$

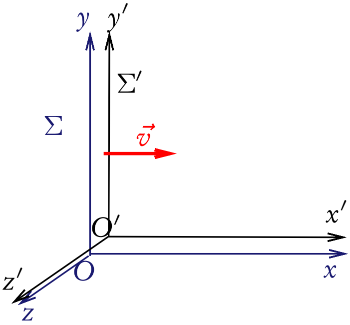
$\mathcal{Q}$: 除了空间转动外，是否还存在非平庸的 Lorentz 变换？

考虑 P、Q 两个事件：Q 在惯性系 Σ 中的笛卡尔坐标为 $(0,0,0,0)$，P 在 Σ 中的笛卡尔坐标为 (ct, x^1, x^2, x^3). 如此，Σ 系中二事件之间的间隔是：

$$s^2 = -(ct)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

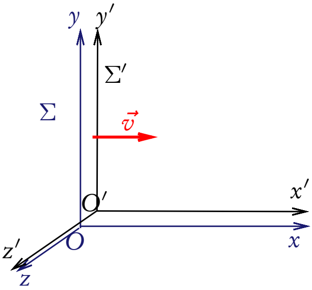
现考虑此二事件在另一惯性系 Σ' 中的间隔. 设 Σ' 相对于 Σ 的运动速度为 $\boldsymbol{v}$，且在初始时刻 $(t = t' = 0)$ 二惯性系重合. 这样，二事件在 Σ' 系中的笛卡尔坐标分别为 $(0,0,0,0)$ 和 (ct', x'^1, x'^2, x'^3)，相应的间隔是：

$$s'^2 = -(ct')^2 + (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2$$



洛伦兹推动变换

为简单计，暂设两坐标系的 $x^1(x'^1)$ 轴都沿 Σ' 相对于 Σ 的运动方向. 此情形下，期待的 Lorentz 变换具有如下特殊线性形式：



$$
\begin{aligned}
ct' &= \Lambda^0{}_0\, ct + \Lambda^0{}_1\, x^1 \\
x'^1 &= \Lambda^1{}_0\, ct + \Lambda^1{}_1\, x^1 \\
x'^2 &= x^2 \\
x'^3 &= x^3
\end{aligned}
$$

1. 习惯上常把同一时空点在两个惯性参考系之间的坐标变换称为洛伦兹推动变换 (Boost).
2. 由于 x^1 轴与 x'^1 轴正向相同，$\rightsquigarrow$ $\Lambda^1{}_1 > 0$.
3. 同理，通常取时间 t 和 t' 的演化箭头方向相同，$\rightsquigarrow$ $\Lambda^0{}_0 > 0$.

将猜测的 Lorentz 推动变换代入到间隔不变性的表式 $s^2 = s'^2$ 中，则有：

$$\begin{aligned}
-(ct)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 &= s^2 \\
&= s'^2 \\
&= -(ct')^2 + (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\
&= -(\Lambda^0{}_0\, ct + \Lambda^0{}_1\, x^1)^2 + (\Lambda^1{}_0\, ct + \Lambda^1{}_1\, x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \\
&= -(ct)^2 \left[(\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^1{}_0)^2\right] + \left[(\Lambda^1{}_1)^2 - (\Lambda^0{}_1)^2\right] (x^1)^2 \\
&\quad - 2ctx^1 (\Lambda^0{}_0\, \Lambda^0{}_1 - \Lambda^1{}_0\, \Lambda^1{}_1) + (x^2)^2 + (x^3)^2
\end{aligned}$$

比较两端得知：

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^1{}_0)^2 = 1, \qquad (\Lambda^1{}_1)^2 - (\Lambda^0{}_1)^2 = 1,$$
$$\Lambda^0{}_0\, \Lambda^0{}_1 - \Lambda^1{}_0\, \Lambda^1{}_1 = 0.$$

由前两个方程得知：

$$\Lambda^0{}_0 = \sqrt{1 + (\Lambda^1{}_0)^2}\,, \quad \Lambda^1{}_1 = \sqrt{1 + (\Lambda^0{}_1)^2}$$

第三个方程改写为：

$$\Lambda^0{}_1\sqrt{1+(\Lambda^1{}_0)^2}=\Lambda^1{}_0\sqrt{1+(\Lambda^0{}_1)^2} \quad \rightsquigarrow \quad \Lambda^0{}_1=\Lambda^1{}_0$$

这些系数可以用牵连速度、即 Σ' 与 Σ 之间的相对速度表出. 考虑惯性系 Σ' 的原点 O'. 在 Σ 上观测，质点 O' 以速度 v 沿 x^1 轴正方向移动，因此其坐标为 $x^1=vt$. 但 O' 在 Σ' 中的坐标始终是 $x'^1=0$. 所以由 Lorentz 推动变换知：

$$0=\Lambda^1{}_1\,vt+\Lambda^1{}_0\,ct, \qquad \rightsquigarrow \quad \frac{\Lambda^1{}_0}{\Lambda^1{}_1}=-v/c=-\beta$$

这里 $\beta\equiv v/c$ 是无量纲的牵连速度. 从而：

$$\Lambda^1{}_1=\Lambda^0{}_0=1/\sqrt{1-\beta^2}, \qquad \Lambda^1{}_0=\Lambda^0{}_1=-\beta/\sqrt{1-\beta^2}$$

所求得的特殊 Lorentz 变换即为：

$$x'^1=\frac{x^1-vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad x'^2=x^2, \quad x'^3=x^3, \quad t'=\frac{t-vx^1/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Lorentz 推动变换常表达为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \; X' = \mathbf{\Lambda} X$$

式中出现的无量纲参数为:

$$\beta = v/c, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

习惯上常把

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

称为沿 x^1 方向的 Lorentz 推动矩阵. 显然, $\det \mathbf{\Lambda} = 1$.

称为沿 x^1 方向 Lorentz 推动矩阵的逆矩阵为：

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \boldsymbol{\eta}^{-1}\mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \quad \det\tilde{\mathbf{\Lambda}} = 1$$

沿 x^1 方向的逆 Lorentz 推动变换即为：

$$X = \tilde{\mathbf{\Lambda}}X' \qquad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}$$

或者等价地，

$$x^1 = \frac{x'^1 + vt'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad x^2 = x'^2, \quad x^3 = x'^3, \quad t = \frac{t' + vx'^1/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

逆变换也可以直接使用相对性原理、从二惯性系的平权性获得.

点评:

- 若两个惯性系之间的相对速度远小于光速, $v \ll c$, 精确到无量纲牵连速度 $\beta = v/c$ 的一次幂, Lorentz 推动变换近似为:

$$\boxed{t' = t - \frac{vx^1}{c^2}, \quad x'^1 = x^1 - vt, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3}$$

  此式称为 Lorentz 推动的低速近似. 也可以称之为无穷小的 Lorentz 推动.

- 若取 $c \to \infty$, 则 Lorentz 推动退化为 Galileo 变换:

$$\boxed{t' = t, \quad x'^1 = x^1 - vt, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3}$$

  所以, Galileo 变换也可以称为是 Lorentz 推动变换的非相对论极限.

- 无穷小的 Lorentz 推动仍是 Lorentz 变换, 它与 Galileo 变换在物理上是有本质差别的.