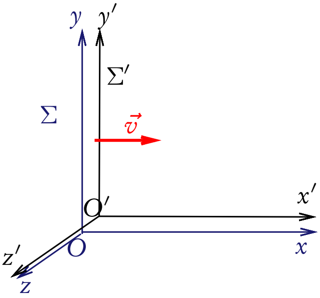
普适的 Lorentz 推动变换

现在讨论与坐标系[5]选择无关的 Lorentz 变换.

如图示, 事件 (t, x^1, x^2, x^3) 的位置矢量可以在 Cartesian 直角坐标系里表达为:

$$\boldsymbol{r} = x^1\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + x^3\boldsymbol{k}$$



以二参考系相对运动速度 $\boldsymbol{v}$ 为参考, 可以将 $\boldsymbol{r}$ 改写为: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\parallel} + \boldsymbol{r}_{\perp}$, 这里 $\boldsymbol{r}_{\parallel} = x^1\boldsymbol{i}$ 而 $\boldsymbol{r}_{\perp} = x^2\boldsymbol{j} + x^3\boldsymbol{k}$. 前面求得的 Lorentz 推动可重新表为:

$$\begin{aligned}
ct' &= \gamma(ct - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}) \\
\boldsymbol{r}'_{\parallel} &= \gamma(\boldsymbol{r}_{\parallel} - \boldsymbol{\beta}ct) \\
\boldsymbol{r}'_{\perp} &= \boldsymbol{r}_{\perp}
\end{aligned}$$

式中 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}/c$, 且 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. $\rightsquigarrow$ $\beta^2 = (\gamma^2 - 1)/\gamma^2$.

[5]而非参考系.

因为,

$$r_{\parallel} = \frac{(r \cdot \beta)}{\beta^2}\beta = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}(r \cdot \beta)\vec{\beta}, \qquad r_{\perp} = r - r_{\parallel}$$

我们有:

$$\begin{aligned} r' &= r'_{\parallel} + r'_{\perp} = \gamma(r_{\parallel} - \beta ct) + r_{\perp} \\ &= r + (\gamma - 1)\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}(r \cdot \beta)\beta - \gamma\beta ct \\ &= r + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}(r \cdot \beta)\beta - \gamma\beta ct \end{aligned}$$

从而,普适的、与坐标系选择无关的 Lorentz 推动变换是:

$$\boxed{ct' = \gamma(ct - \beta \cdot r), \quad r' = r + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}(r \cdot \beta)\beta - \gamma\beta ct}$$

逆 Lorentz 推动变换的普适形式为：

$$\boxed{ct = \gamma(ct' + \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}'), \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} + \gamma\boldsymbol{\beta}ct'}$$

有了上述与坐标系选择无关的 Lorentz 推动变换及其逆变换，我们可以随意选择两个坐标系将其分量化. 例如在二惯性系 Σ、Σ' 上均选择 Cartesian 直角坐标系， 则可把正反 Lorentz 推动分别表达为：

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}, \quad x^{\mu} = \tilde{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}x'^{\nu} \quad \rightsquigarrow \tilde{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu} = \eta_{\nu\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\sigma}\eta^{\sigma\mu}$$

- Lorentz 推动中的变换系数为：

$$\boxed{\Lambda^{0}{}_{0} = \gamma, \quad \Lambda^{0}{}_{j} = -\gamma\beta_j, \quad \Lambda^{i}{}_{0} = -\gamma\beta^i, \quad \Lambda^{i}{}_{j} = \delta^i_j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j}$$

- 逆 Lorentz 推动中的变换系数则为：

$$\boxed{\tilde{\Lambda}^{0}{}_{0} = \gamma, \quad \tilde{\Lambda}^{0}{}_{j} = \gamma\beta_j, \quad \tilde{\Lambda}^{i}{}_{0} = \gamma\beta^i, \quad \tilde{\Lambda}^{i}{}_{j} = \delta^i_j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j}$$

$\mathcal{Q}$: 检验赝正交条件 $\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\,\tilde{\Lambda}^{\rho}{}_{\nu}=\delta^{\mu}_{\nu}$.

- 情形 $\mu=\nu=0$:

$$\Lambda^{0}{}_{\rho}\,\tilde{\Lambda}^{\rho}{}_{0}=\Lambda^{0}{}_{0}\,\tilde{\Lambda}^{0}{}_{0}+\Lambda^{0}{}_{i}\,\tilde{\Lambda}^{i}{}_{0}=\gamma^2-\gamma^2\beta_i\beta^i=\gamma^2(1-\beta^2)=1$$

- 情形 $\mu=0,\ \nu=j$:

$$\begin{aligned}\Lambda^{0}{}_{\rho}\,\tilde{\Lambda}^{\rho}{}_{j}=\Lambda^{0}{}_{0}\,\tilde{\Lambda}^{0}{}_{j}+\Lambda^{0}{}_{i}\,\tilde{\Lambda}^{i}{}_{j}&=\gamma^2\beta_j-\gamma\beta_i\left(\delta^i_j+\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j\right)\\&=\gamma(\gamma-1)\beta_j-\frac{\gamma^3\beta_i\beta^i}{\gamma+1}\beta_j\\&=\gamma(\gamma-1)\beta_j-\frac{\gamma(\gamma^2-1)}{\gamma+1}\beta_j=0\end{aligned}$$

同理知 $\Lambda^{i}{}_{\rho}\,\tilde{\Lambda}^{\rho}{}_{0}=0$.

以上验算中我们使用了数学恒等式:

$$\beta^i\beta_i=\beta^2,\qquad \gamma^2\beta^2=\gamma^2-1=(\gamma+1)(\gamma-1)$$

- 情形 $\mu=i,\ \nu=j$:

$$\begin{aligned}
\Lambda^i{}_\rho\,\tilde{\Lambda}^\rho{}_j &= \Lambda^i{}_0\,\tilde{\Lambda}^0{}_j+\Lambda^i{}_k\,\tilde{\Lambda}^k{}_j\\
&=-\gamma^2\beta^i\beta_j+\left(\delta^i_k+\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_k\right)\left(\delta^k_j+\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^k\beta_j\right)\\
&=-\gamma^2\beta^i\beta_j+\delta^i_j-\frac{2\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j+\frac{\gamma^4\beta^2}{(\gamma+1)^2}\beta^i\beta_j\\
&=\delta^i_j+\gamma^2\left(-1+\frac{2}{\gamma+1}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\beta^i\beta_j\\
&=\delta^i_j
\end{aligned}$$

至此, Lorentz 满足一般 Lorentz 变换赝正交条件的论断完全证实. 换言之, Lorentz 推动的确属于洛伦兹变换(群).

$\mathcal{Q}$: 怎样正确解读与洛伦兹变换矩阵相关的矩阵元?

- 鉴于我们把闵氏空间时空点的位置坐标写成了 x^μ 且约定 x^μ 构成了列矩阵

$$X = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

第 μ 行的矩阵元, 洛伦兹变换 $x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu$ 可以理解为矩阵方程:

$$X \quad \rightsquigarrow \quad X' = \mathbf{\Lambda} \, X$$

式中 $\mathbf{\Lambda}$ 是洛伦兹变换矩阵:

$$\mathbf{\Lambda} = (\Lambda^\mu{}_\nu) \qquad \rightsquigarrow \quad \Lambda^\mu{}_\nu = (\mathbf{\Lambda})^\mu{}_\nu$$

换言之, 应该把 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 解读为洛伦兹变换矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 第 μ 行、第 ν 列的矩阵元.

- 注意到列矩阵的转置是行矩阵，

$$X = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad X^T = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix}$$

洛伦兹变换可以等价地表为 $X^T \rightsquigarrow X'^T = X^T \boldsymbol{\Lambda}^T$. 写成矩阵元形式，即为：

$$x^\mu \quad \rightsquigarrow \quad x'^\mu = x^\nu \left(\boldsymbol{\Lambda}^T\right)_\nu{}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu \quad \rightsquigarrow \quad \left(\boldsymbol{\Lambda}^T\right)_\nu{}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu$$

所以，转置洛伦兹变换矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}^T$ 的矩阵元结构是：

$$\boldsymbol{\Lambda}^T = \left[\left(\boldsymbol{\Lambda}^T\right)_\nu{}^\mu\right]$$

换言之，也可以把 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 按照 $\Lambda^\mu{}_\nu = \left(\boldsymbol{\Lambda}^T\right)_\nu{}^\mu$ 解读为 $\boldsymbol{\Lambda}^T$ 第 ν 行、第 μ 列的矩阵元.

- 或许你有机会遭遇到“矩阵元”

$$\Lambda_{\mu}{}^{\nu}$$

如何解读它呢？ 它的确可以诠释为某个矩阵第 $\boldsymbol{\mu}$ 行、第 $\boldsymbol{\nu}$ 列的矩阵元，但这个矩阵不是洛伦兹变换矩阵 $\mathbf{\Lambda}$. 如前述，$\mathbf{\Lambda}$ 第 $\boldsymbol{\mu}$ 行、第 $\boldsymbol{\nu}$ 列的矩阵元是 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$. 为了找到这个矩阵，我们使用闵氏空间的度规矩阵和逆矩阵对 $\Lambda_{\mu}{}^{\nu}$ 的指标进行升降：

$$\Lambda_{\mu}{}^{\nu} \equiv \eta_{\mu\alpha}\,\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\,\eta^{\beta\nu} = \left(\boldsymbol{\eta}\,\mathbf{\Lambda}\,\boldsymbol{\eta}^{-1}\right)_{\mu}{}^{\nu}$$

即把 $\Lambda_{\mu}{}^{\nu}$ 定义成为复合矩阵 $\boldsymbol{\eta}\,\mathbf{\Lambda}\,\boldsymbol{\eta}^{-1}$ 第 $\boldsymbol{\mu}$ 行、第 $\boldsymbol{\nu}$ 列的矩阵元.

注意到逆洛伦兹矩阵

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \boldsymbol{\eta}^{-1}\,\mathbf{\Lambda}^{T}\,\boldsymbol{\eta} \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{\mathbf{\Lambda}}^{T} = \boldsymbol{\eta}\,\mathbf{\Lambda}\,\boldsymbol{\eta}^{-1}$$

换言之，

$$\Lambda_{\mu}{}^{\nu} \equiv \left(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{T}\right)_{\mu}{}^{\nu}$$

即应该把 $\Lambda_{\mu}{}^{\nu}$ 解读为逆洛伦兹变换矩阵之转置矩阵 $\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{T}$ 第 $\boldsymbol{\mu}$ 行、第 $\boldsymbol{\nu}$ 列的矩阵元.

- $\Lambda_\mu{}^\nu$ 本来并没有定义，它也并没有出现在洛伦兹变换中. 这个事实值得特别强调. 前页我们通过

$$\Lambda_\mu{}^\nu \equiv \eta_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, \eta^{\beta\nu}$$

给它补充了一个定义. 但实际上是不必要的. 以下我们选择不定义符号 $\Lambda_\mu{}^\nu$ 以避免出现歧义. 因此，$\tilde{\mathbf{\Lambda}}^T$ 的矩阵元应准确地表达为：

$$\left(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^T\right)_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, \eta^{\beta\nu}$$

- 根据逆洛伦兹变换矩阵 $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ 的表达式

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \boldsymbol{\eta}^{-1}\, \mathbf{\Lambda}^T\, \boldsymbol{\eta}$$

我们很容易弄明白 $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ 的矩阵元结构. 很显然，$\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ 第 μ 行、第 ν 列的矩阵元是：

$$\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu \equiv \left(\tilde{\mathbf{\Lambda}}\right)^\mu{}_\nu = \eta_{\nu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, \eta^{\beta\mu} = \left(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^T\right)_\nu{}^\mu$$

设时空中存在着两个事件．以第一事件 O 为时空原点 $(0,0,0,0)$ 建立直角坐标系，使得第二事件 P 的时空坐标为 (t,x^1,x^2,x^3)，则此 O,P 二事件的间隔是：

$$s^2=-c^2t^2+r^2$$

这里 $r=\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}$ 为二事件的空间距离．

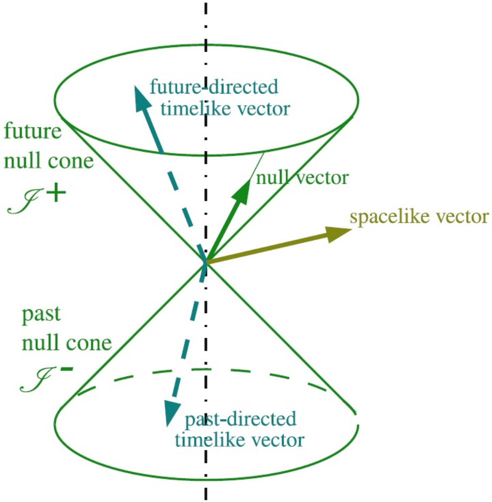
事件的间隔可以有如下三种类型：

1. 类光间隔：若二事件可以用光波联系，则 $r=ct$, $\rightsquigarrow$ $s^2=0$.
2. 类时间隔：若二事件可用速度为 u $(u<c)$ 的作用联系，则 $r=ut<ct$, $\rightsquigarrow$ $s^2<0$.
3. 类空间隔：若二事件的空间距离超过了光波在时间 t 内所能传播的距离，则 $r>ct$, $\rightsquigarrow$ $s^2>0$.

事件的间隔不因参考系的变换而改变． 因此，上述三种间隔的分类是绝对的，与参考系的选择无关．

光锥 (Lightcone):

若事件 P 与事件 O 的间隔类光, $s^2 = 0$, 则 $r = ct$, 即 P 点位于一个以 O 点为顶点的锥面上, 这个锥面称为光锥.



因果律与相互作用的最大传播速度

- 二事件之间存在因果联系的前提条件是二者的间隔类时或类光.

若事件 O, P 的间隔类时 (类光)、且在某惯性系中事件 P 处于 O 的上半光锥内 (包括锥面), 则对任意选择的其他惯性系而言, P 也保持在 O 的上半光锥内:

- 事件 P 是事件 O 的绝对未来.
- 事件 O, P 之间可用光波或者其传播速度低于光速的作用相联系. 所以, 事件 O 是因, 事件 P 为果.

因此, 如果不存在超光速的相互作用, 则两事件 O, P 发生因果联系的必要条件是 P 处于 O 的光锥内. 这样, 二事件发生的先后次序在各个参考系中相同, 因而因果关系是绝对的.

1. 相互作用的最大传播速度是真空中的光速.

现在从 Lorentz 变换出发定量地研究二事件之间的因果律.

在惯性系 Σ 上, 以 (t_1, x_1^1) 表示作为原因的第一事件, (t_2, x_2^1) 表示作为结果的第二事件. $\rightsquigarrow$ $t_2 > t_1$.

若这两个事件在另一惯性系 Σ' 上用 $(t_1', x_1'^1)$ 和 $(t_2', x_2'^1)$ 表示, 则由 Lorentz 变换知:

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - v(x_2^1 - x_1^1)/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

若二事件之间的因果联系是绝对的、不因参考系的选择而改变, 应有: $t_2' > t_1'$. 从而应有条件:

$$\frac{x_2^1 - x_1^1}{t_2 - t_1} < c^2/v$$

用 u 表示 Σ 系中测得的作用传播速度, $u = (x_2^1 - x_1^1)/(t_2 - t_1)$, 则上述条件可改写为: $uv < c^2$.

固定于参考系 Σ' 上的观测者也可以用来传递作用, 即牵连速度 v 也可以看做一种作用传递速度, 从而在不等式 $uv < c^2$ 中 u, v 的角色是平权的.

所以, $uv < c^2$ 的解是:

$$u \leq c, \quad v < c.$$

结论:

若相互作用的传播速度不大于光速 ($u \leq c$) 且二事件的间隔类时或类光, 则此二事件之间可以存在因果联系.

同时性的相对性

考虑具有类空间隔的二事件.

1. 若二事件的间隔类空，则 $r > ct$. 因为相互作用的传播速度不超过光速，间隔类空的二事件之间不可能用任何方式相互联系，它们之间没有因果联系，其发生的先后次序也就失去了绝对性.

现在从 Lorentz 推动出发研究类空间隔. 设参考系 Σ 上二事件的时空坐标为 (t_1, x_1^1) 和 (t_2, x_2^1). 若二事件间隔类空且 Σ 系上的观测者测得第一事件先于第二事件发生，则：

$$c\left\|t_2 - t_1\right\| < \left\|x_2^1 - x_1^1\right\|, \quad t_1 < t_2.$$

变换到另一惯性系 Σ' 上，由 Lorentz 推动变换知：

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - (x_2^1 - x_1^1)v/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

若 Σ' 相对于 Σ 的速度 v 足够大，则我们的约定 $t_2 > t_1$ 和类空间隔不等式 $c|t_2 - t_1| < |x_2^1 - x_1^1|$ 仍允许存在如下不等式：

$$0 < t_2 - t_1 \leq \frac{v}{c} \cdot \frac{|x_2^1 - x_1^1|}{c} < \frac{|x_2^1 - x_1^1|}{c}$$

回忆所涉及的 Lorentz 推动，

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - (x_2^1 - x_1^1)v/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

我们看到，若上列不等式成立则必有：

$$t_2' \leq t_1'$$

即对于 Σ' 系中的观测者而言，第二事件是先于 (或同时于) 第一事件发生的.

这样的两个事件自然不会有因果联系. 其时间次序的先后或同时，都没有绝对的意义，因参考系的选择而不同.