物理量的显示协变性

我们已经学习了 Lorentz 变换:

$$x^{\mu} \quad \rightsquigarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}, \quad \eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}$$

特别是惯性参考系之间的 Lorentz 推动变换:

$$t' = \gamma\left(t - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{r}/c\right)$$
$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}ct$$

现在我们有条件贯彻狭义相对论的第二条假设了，即考察候选的“物理学规律”是否具有惯性参考系选择的无关性.

1. 当务之急的事情是了解各个具体的物理量在 Lorentz 变换下如何变换.
2. Lorentz 变换表现为四维闵氏空间中的赝转动:

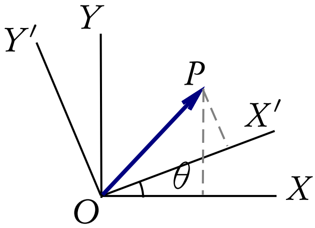
$$X \quad \rightsquigarrow X' = \boldsymbol{\Lambda}\, X, \quad \tilde{\boldsymbol{\Lambda}} = \eta^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^{T}\eta$$

$\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}$ 是 Lorentz 变换矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的逆矩阵, $\tilde{\boldsymbol{\Lambda}} \neq \boldsymbol{\Lambda}^{T}$.

三维欧氏空间中的转动

鉴于 Lorentz 变换非常类似于欧氏空间中的转动,我们首先对三维欧氏空间中的转动做一简单复习、并讨论一下物理量按照其在转动变换下的性质所进行的分类.

先看二维平面上的转动,设坐标系 S' 相对于 S 转了一个角 θ,平面上的点 P 在新旧坐标系中的坐标分别为 (x', y') 与 (x, y). 转动前后 P 点位置坐标之间的关系是:



$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = -x\cos\theta + y\cos\theta$$

1. 显见,转动变换的特点是保持 OP 矢量的长度不变:

$$\left\|OP\right\|^2 = x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2$$

现在考虑三维欧氏空间的转动.

设 P 为三维欧氏空间 $\mathbb{E}_3$ 中的一点，其在笛卡尔直角坐标系 S 中的坐标为 (x^1, x^2, x^3). P 点相对于原点 $O(0,0,0)$ 的位置矢量为：

$$\boldsymbol{r} = x^i \boldsymbol{e}_i$$

- 若在 $\mathbb{E}_3$ 中建立另一笛卡尔直角坐标系 S', 使得 P 点在其中的位置坐标为 (x'^1, x'^2, x'^3) 且 $\boldsymbol{r} = x'^i \boldsymbol{e}_i'$, 则这两组坐标之间一般是通过线性变换相联系：

$$x^i \quad \rightsquigarrow \quad x'^i = a^i{}_j x^j + b^i$$

- 倘若此变换保持新旧坐标系具有同一坐标原点 ($\rightsquigarrow$ $b^i = 0$) 且保持 P 点相对于原点的位置矢量的长度不变：

$$(x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

则称此线性变换为转动 (Rotation).

采取笛卡尔坐标后，

1. 欧氏空间 $\mathbb{E}_3$ 中两点之间的距离 (平方) 表达为：

$$\left\|r_P - r_Q\right\|^2 = \left(x_P^1 - x_Q^1\right)^2 + \left(x_P^2 - x_Q^2\right)^2 + \left(x_P^3 - x_Q^3\right)^2$$

换言之，

$$\left\|r_P - r_Q\right\|^2 = \delta_{ij}\left(x_P^i - x_Q^i\right)\left(x_P^j - x_Q^j\right)$$

2. $\mathbb{E}_3$ 的度规矩阵为单位矩阵，$g = (\delta_{ij})$. $\mathbb{E}_3$ 的逆度规矩阵实际上也是单位矩阵

$$g^{-1} = \left(\delta^{ij}\right) \quad \rightsquigarrow \quad g\,g^{-1} = g^{-1}g = I \quad \hookleftarrow \quad I = \left(\delta^i_j\right)$$

或者写成矩阵元形式：

$$\delta_{ij}\,\delta^{jk} = \delta^{kj}\,\delta_{ji} = \delta^k_i$$

按照保持位置矢量长度不变的要求，转动变换 $x'^i = a^i{}_j x^j$ 的系数 $a^i{}_j$ 须满足如下条件：

$$\delta_{kl}\, x^k x^l = \delta_{ij}\, x'^i x'^j = \delta_{ij}\, a^i{}_k\, a^j{}_l\, x^k x^l \qquad \rightsquigarrow \quad \delta_{ij}\, a^i{}_k\, a^j{}_l = \delta_{kl}$$

或者等价地，

$$\tilde{a}^l{}_i\, a^i{}_k = \delta^l_k \qquad \hookleftarrow \quad \tilde{a}^l{}_i \equiv \delta_{ij}\, a^j{}_k\, \delta^{kl}$$

若将线性变换 $x'^i = a^i{}_j x^j$ 写成矩阵方程 $X' = AX$，这里，

$$X' = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

我们看到：

$$a^i{}_j = (A)^i{}_j \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{a}^l{}_i = (g)_{ij}\, (A)^j{}_k \left(g^{-1}\right)^{kl} = \left(gAg^{-1}\right)_i{}^l = \left(g^{-1}A^T g\right)^l{}_i$$

换言之，

$$\tilde{a}^{l}{}_{i} = \left(\tilde{A}\right)^{l}{}_{i} \quad \hookleftarrow \quad \boxed{\tilde{A} = g^{-1}A^{T}g}$$

我们可以把转动变换条件 $\tilde{a}^{l}{}_{i}\, a^{i}{}_{k} = \delta^{l}_{k}$ 表为矩阵方程 $\tilde{A}A = I$.

1. 满足这个条件的矩阵 A 称为正交矩阵，相应的变换称为正交变换. 显见，$\det A = \pm 1$.
2. 对于真实的空间转动而言，$\det A = 1$.
3. 因为欧氏空间度规矩阵和逆度规矩阵皆为单位矩阵，转动矩阵 A 的逆 $\tilde{A}$ 本质上就是 A^{T}. 鉴于我们对转动矩阵行列指标的约定，$\tilde{A} = A^{T}$ 的写法是错误的，必须避免.
4. 可以定义下指标的空间坐标 $x_i \equiv \delta_{ij}\, x^j$，它们是列矩阵 gX 的矩阵元. 空间转动 $X \rightsquigarrow X' = AX$ 可以等价地重新表达为

$$gX \rightsquigarrow gX' = gAX = gAg^{-1}\, gX$$

亦即：

$$(gX')^{T} = (gX)^{T}\, g^{-1}A^{T}g = (gX)^{T}\, \tilde{A}$$

注意到：

$$(gX)^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

上式所示的转动变换可以显示地写为：

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \tilde{A}$$

其矩阵元形式是：

$$x_i \quad \rightsquigarrow \quad x_i' = x_l \left(\tilde{A}\right)^l{}_i = x_l\, \tilde{a}^l{}_i$$

值得强调的是：

- 虽然 $x_i = \delta_{ij} x^j$ 在取值上等同于 x^i，但二者在空间转动下的变换性质完全不同．但鉴于 $\tilde{a}^l{}_i$ 的定义，

$$\boxed{\tilde{a}^l{}_i = \delta_{ij}\, a^j{}_k\, \delta^{kl}}$$

变换式 $x_i \rightsquigarrow x_i' = x_l\, \tilde{a}^l{}_i$ 和 $x^i \rightsquigarrow x'^i = a^i{}_j x^j$ 在几何内涵上完全一致．

物理量按空间转动性质的分类

物理量常常分类为标量、矢量和高阶张量等. 这种分类本质上是根据物理量在三维欧氏空间转动

$$x^i \rightsquigarrow x'^i = a^i{}_j x^j, \qquad \tilde{a}^l{}_i a^i{}_k = \delta^l_k, \qquad \det\left(a^i{}_j\right) = \det\left(\tilde{a}^i{}_j\right) = 1$$

下的变换性质规定的 ($\tilde{a}^l{}_i = \delta_{ij} a^j{}_k \delta^{kl}$):

- 若某物理量, 例如 u, 它仅有 1 个分量, 在坐标系转动时此分量保持不变,

  $$u \rightsquigarrow u' = u$$

  则称其为标量.

- 若某物理量, 例如 V, 它具有 3 个独立分量 (v^1, v^2, v^3), 在坐标系转动时其分量 v^i 与位置矢径的分量 x^i 具有相同的变换法则:

  $$v^i \rightsquigarrow v'^i = a^i{}_j v^j$$

  则称 V 为 $\mathbb{E}_3$ 中的矢量、v^i 为矢量 V 的逆变分量.

- 考虑矢量 V, 倘若它的 3 个独立分量 (v_1, v_2, v_3), 在坐标系转动时的变换法则为：

$$v_i \rightsquigarrow \quad v_i' = v_j\, \tilde{a}^j{}_i$$

则称 v_i 为矢量 V 的协变分量.

1. 矢量 V 的协变分量与逆变分量之间的关系是：

$$v_i = \delta_{ij}\, v^j, \qquad v^i = \delta^{ij}\, v_j$$

根据 $v'^i = a^i{}_j\, v^j$ 并注意到 δ^{ij} 是转动变换下的不变张量，我们有：

$$v_i \quad \rightsquigarrow \quad v_i' = \delta_{ij}' v'^j = \delta_{ij}\, a^j{}_k\, v^k = \left(\delta_{ij}\, a^j{}_k\, \delta^{kl}\right) v_l = v_l\, \tilde{a}^l{}_i$$

2. x^i 与 x_i 分别称为位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的逆变分量和协变分量. 二者的关系是 $x^i = \delta^{ij}\, x_j$ 或者 $x_i = \delta_{ij}\, x^j$.
3. 两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的点乘运算定义为：

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \equiv a^i b_i = a_i b^i = \delta_{ij}\, a^i b^j$$

点乘服从交换律，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$, 其结果是标量.

- 在欧氏空间 $\mathbb{E}_3$ 中建立笛卡尔直角坐标系，引入坐标轴方向的单位基矢 $\boldsymbol{e}_i$ 使得

$$V = v^i \boldsymbol{e}_i \qquad \rightsquigarrow \quad (\boldsymbol{e}_j)^i = \delta^i_j \quad \hookleftarrow \qquad \boldsymbol{e}_j = \delta^i_j\, \boldsymbol{e}_i = (\boldsymbol{e}_j)^i\, \boldsymbol{e}_i$$

我们看到两个单位基矢之间的标量积恰好给出了 $\mathbb{E}_3$ 度规矩阵的矩阵元：

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{kl}\ (\boldsymbol{e}_i)^k\, (\boldsymbol{e}_j)^l\ = \delta_{kl}\, \delta^k_i\, \delta^l_j = \delta_{ij}$$

由此推论：

$$V \cdot \boldsymbol{e}_i = v^m\ \boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}_i = v^m\ \delta_{im} = v_i \qquad \rightsquigarrow \quad v_i = V \cdot \boldsymbol{e}_i$$

- 也可以在 $\mathbb{E}_3$ 中定义两个矢量的矢量积、特别是笛卡尔坐标系中基矢之间的矢量积：

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j \equiv \epsilon_{ijk}\ \boldsymbol{e}^k \qquad \rightsquigarrow \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \epsilon_{ijk}\ \boldsymbol{e}^k a^i b^j$$

式中 $\boldsymbol{e}^i$ 是与基矢 $\boldsymbol{e}_i$ 相关联的所谓余基矢：

$$\boldsymbol{e}^i \equiv \delta^{im} \boldsymbol{e}_m \qquad \rightsquigarrow \quad V = v^i \boldsymbol{e}_i = v_i \boldsymbol{e}^i$$

ϵ_{ijk} 称为 Levi-Civita 全反对称符号，

$$\epsilon_{ijk}=\begin{cases}1, & (ijk)\text{ 形成 }(123)\text{ 的偶排列};\\ -1, & (ijk)\text{ 形成 }(123)\text{ 的奇排列};\\ 0, & \text{其他情形}.\end{cases}$$

或者等价地，

$$\epsilon_{ijk}=\begin{vmatrix}\delta_i^1 & \delta_i^2 & \delta_i^3\\ \delta_j^1 & \delta_j^2 & \delta_j^3\\ \delta_k^1 & \delta_k^2 & \delta_k^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\delta_i^1 & \delta_j^1 & \delta_k^1\\ \delta_i^2 & \delta_j^2 & \delta_k^2\\ \delta_i^3 & \delta_j^3 & \delta_k^3\end{vmatrix}$$

所以 $\epsilon_{ijk}=\epsilon_{jki}=\epsilon_{kij}=-\epsilon_{jik}$，但 $\epsilon_{ijk}\delta^{ij}=0$.

- 若某物理量 T，它具有 3^{n+m} 个独立分量 $T^{i_1i_2\cdots i_m}_{j_1j_2\cdots j_n}$. 在坐标系转动时其分量的每一个上指标都与位置矢径逆变分量 x^i 有相同的变换法则，每一个下指标都与位置矢径协变分量 x_i 有相同的变换法则：

$$T^{i_1i_2\cdots i_m}_{j_1j_2\cdots j_n}\quad\rightsquigarrow\quad T'^{i_1i_2\cdots i_m}_{j_1j_2\cdots j_n}=a^{i_1}{}_{k_1}\cdots a^{i_m}{}_{k_m}\;T^{k_1k_2\cdots k_m}_{l_1l_2\cdots l_n}\;\tilde{a}^{l_1}{}_{j_1}\cdots\tilde{a}^{l_n}{}_{j_n}$$

则称 T 为 $\mathbb{E}_3$ 中的一个 (m,n) 型张量，$m+n$ 称为此张量的阶.

以 $(0,2)$ 型张量 T 为例[8]，它具有 9 个独立分量 T_{ij}. 在坐标系转动时 T_{ij} 中的变换法则是：

$$T_{ij} \rightsquigarrow \quad T'_{ij} = T_{kl}\,\tilde{a}^{k}{}_{i}\,\tilde{a}^{l}{}_{j}$$

T_{ij} 可以进一步分解为：

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} + \frac{1}{3} T^{k}{}_{k}\,\delta_{ij}$$

其中，

1. $S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) - \frac{1}{3} T_{k}{}^{k}\,\delta_{ij}$ 是对称无迹的二阶张量，$S_{ij} = S_{ji}$，$S_{ij}\delta^{ji} = 0$.
2. $A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$ 是反对称二阶张量，$A_{ij} = -A_{ji}$. 反对称张量天然无迹，$A_{ij}\delta^{ji} = 0$.
3. $T^{k}{}_{k} \equiv T_{ij}\,\delta^{ji}$ 称为张量 T_{ij} 的迹，它本身是一个标量.
4. δ_{ij} 是 $\mathbb{E}_3$ 的度规张量，它在空间转动变换下保持不变.

[8]也可以称它为 2 阶协变张量.

疑难解析:

1. 张量的对称性质不因空间转动而改变. 设 S_{ij} 在转动前的坐标系中是对称张量, $S_{ij}=S_{ji}$. 空间转动后,

$$S_{ij} \quad \rightsquigarrow \quad S'_{ij}=S_{kl}\,\tilde{a}^{k}{}_{i}\,\tilde{a}^{l}{}_{j} \;=S_{lk}\,\tilde{a}^{l}{}_{j}\,\tilde{a}^{k}{}_{i}\;=S'_{ji}$$

2. 张量之迹确为标量:

$$T^{k}{}_{k} \quad \rightsquigarrow \quad T'^{k}{}_{k}=a^{k}{}_{i}\,T^{i}{}_{j}\,\tilde{a}^{j}{}_{k}=T^{i}{}_{j}\left(\tilde{a}^{j}{}_{k}\,a^{k}{}_{i}\right)\;=\delta^{j}_{i}\,T^{i}{}_{j}=T^{i}{}_{i}$$

3. 度规 δ_{ij} 是欧氏空间 $\mathbb{E}_3$ 中的不变张量:

$$\delta_{ij} \quad \rightsquigarrow \quad \delta'_{ij}=\delta_{kl}\,\tilde{a}^{k}{}_{i}\,\tilde{a}^{l}{}_{j}=\delta_{kl}\left(\delta_{im}\,a^{m}{}_{n}\,\delta^{nk}\right)\tilde{a}^{l}{}_{j}=\delta_{im}\,a^{m}{}_{l}\,\tilde{a}^{l}{}_{j}$$

所以,

$$\delta'_{ij}=\delta_{im}\,\delta^{m}_{j}=\delta_{ij}$$

$\mathcal{Q}$: 欧氏空间 $\mathbb{E}_3$ 中独立的不变张量共有两个. 除二阶对称的度规张量 δ_{ij} 之外, 另一个不变张量是三阶 Levi-Civita 全反对称张量 ϵ_{ijk}.

现在检验 ϵ_{ijk} 在空间转动下的不变性. 首先约定 ϵ_{ijk} 是 $\mathbb{E}_3$ 中的三阶协变张量, 则在进行了空间转动变换 $x^i \rightsquigarrow x'^i = a^i{}_j x^j$ 之后, ϵ_{ijk} 变为:

$$\epsilon_{ijk} \quad \rightsquigarrow \quad \epsilon'_{ijk} = \epsilon_{mnl}\, \tilde{a}^m{}_i\, \tilde{a}^n{}_j\, \tilde{a}^l{}_k = \kappa\, \epsilon_{ijk}$$

上式最后一步基于对称性的分析. 为了确定比例系数 κ, 注意到真实空间转动矩阵的行列式是 $+1$,

$$1 = \det \tilde{A} = \epsilon_{mnl}\, \tilde{a}^m{}_1\, \tilde{a}^n{}_2\, \tilde{a}^l{}_3$$

所以:

$$\kappa = \kappa\, \epsilon_{123} = \epsilon'_{123} = \epsilon_{mnl}\, \tilde{a}^m{}_1\, \tilde{a}^n{}_2\, \tilde{a}^l{}_3 = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \epsilon'_{ijk} = \epsilon_{ijk}$$

点评：

虽然 $\mathbb{E}_3$ 中独立的不变张量只有 δ_{ij} 与 ϵ_{ijk}，但与它们相关的 δ^{ij}, δ^i_j 与 ϵ^{ijk} 也都是空间转动下的不变张量. 例如在空间转动变换下，

$$\delta^i_j \quad \rightsquigarrow \quad (\delta\,')^i_j = a^i{}_k\, \delta^k_l\, \tilde{a}^l{}_j = a^i{}_k\, \tilde{a}^k{}_j = \delta^i_j, \qquad \delta^i_i = 3$$

全反对称的逆变 Levi-Civita 张量 ϵ^{ijk} 定义为：

$$\epsilon^{ijk} \equiv \delta^{im}\,\delta^{jn}\,\delta^{kl}\,\epsilon_{mnl} = \delta^{im}\,\delta^{jn}\,\delta^{kl} \begin{vmatrix} \delta^1_m & \delta^1_n & \delta^1_l \\ \delta^2_m & \delta^2_n & \delta^2_l \\ \delta^3_m & \delta^3_n & \delta^3_l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta^i_1 & \delta^i_2 & \delta^i_3 \\ \delta^j_1 & \delta^j_2 & \delta^j_3 \\ \delta^k_1 & \delta^k_2 & \delta^k_3 \end{vmatrix}$$

不难证明 (Optional):

$$\epsilon^{ijk}\,\epsilon_{mnl} = \begin{vmatrix} \delta^i_m & \delta^i_n & \delta^i_l \\ \delta^j_m & \delta^j_n & \delta^j_l \\ \delta^k_m & \delta^k_n & \delta^k_l \end{vmatrix}$$

从而，

$$\boxed{\epsilon^{ijk}\,\epsilon_{mnk} = \delta^i_m\,\delta^j_n - \delta^i_n\,\delta^j_m} \qquad \rightsquigarrow \quad \epsilon^{ijk}\,\epsilon_{mjk} = 2\delta^i_m, \qquad \epsilon^{ijk}\,\epsilon_{ijk} = 6$$

作为 $\mathbb{E}_3$ 中张量的物理量举例

- **标量：** 质量 m, 电荷 Q, 静电标势 φ, 电荷分布的体密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ 等. 特别是处在空间点 $\boldsymbol{r}_0$ 处的点电荷 Q 的电荷体密度：

$$\rho(\boldsymbol{r}) = Q\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

显然，

$$\int_V \rho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^3x = Q\int_V \delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\,\mathrm{d}^3x = Q$$

$\mathcal{Q}$: 为什么说狄拉克戴尔塔函数 $\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ 是标量？

戴尔塔函数的定义是：

$$\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \begin{cases} \infty, & \text{倘若 } \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0; \\ 0, & \text{倘若 } \boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}_0. \end{cases} \qquad \int_V \delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\,\mathrm{d}^3x = 1$$

$\mathbb{E}_3$ 的体积元在笛卡尔坐标系中定义为:

$$d^3x \equiv dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

式中 $\wedge$ 表示坐标微分 dx^i 之间的外积[9],具有性质:

$$\boxed{dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i} \quad \rightsquigarrow \quad dx^1 \wedge dx^1 = dx^2 \wedge dx^2 = dx^3 \wedge dx^3 = 0$$

所以,

$$dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = \epsilon^{ijk}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \epsilon^{ijk}\, d^3x$$

在空间转动变换下, $x^i \rightsquigarrow x'^i = a^i{}_j\, x^j$, 我们看到:

$$dx^i \quad \rightsquigarrow \quad dx'^i = a^i{}_j\, dx^j$$

$$d^3x \quad \rightsquigarrow \quad d^3x' = dx'^1 \wedge dx'^2 \wedge dx'^3 = a^1{}_i\, a^2{}_j\, a^3{}_k\, dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$$

[9]外积就是反对称化的直积. 例如:

$$dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2}\left(dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i\right).$$

亦即：

$$\mathrm{d}^3x\,' = a^1{}_i\, a^2{}_j\, a^3{}_k\, \epsilon^{ijk}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 = \det \boldsymbol{A}\, \mathrm{d}^3x = \mathrm{d}^3x$$

换言之，体积元 d^3x 在空间转动变换下保持不变，它是 $\mathbb{E}_3$ 中的标量.

鉴于此以及戴尔塔函数的积分定义式，

$$\int_V \delta^{(3)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\, \mathrm{d}^3x = 1$$

我们确信 $\delta^{(3)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$ 也是 $\mathbb{E}_3$ 中的标量，其量纲为：

$$\left[\delta^{(3)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\right] = L^{-3}$$

- **矢量：** 带电粒子的速度 $\boldsymbol{u}$，静电力 $\boldsymbol{F}$，电场强度 $\boldsymbol{E}$，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 等. 特别地，点电荷 Q 以速度 $\boldsymbol{u}$ 运动时它的电流密度矢量：

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \equiv \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{u} = Q\boldsymbol{u}\, \delta^{(3)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$$

- 梯度算符 ∇ 也具有矢量性质. 在笛卡尔直角坐标系中,

$$\nabla = e^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

其分量算符在空间转动下的变换法则是:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

在空间转动下,

$$x^i \quad \rightsquigarrow \quad x'^i = a^i{}_j x^j \quad \rightsquigarrow \quad x^j = \tilde{a}^j{}_i x'^i$$

由此我们知:

$$\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} = \tilde{a}^j{}_i \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial}{\partial x^j} \tilde{a}^j{}_i}$$

即 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 形成了矢量算符 ∇ 的协变分量.

4-张量

1. 物理量可以按照其在空间转动变换下的变换性质分类为欧氏空间 $\mathbb{E}_3$ 中的标量、矢量和高阶张量等.
2. 为了方便地表达狭义相对论的相对性原理,我们需要把物理量按照其在洛伦兹变换下的变换性质重新进行分类.

洛伦兹变换

$$x^\mu \quad \rightsquigarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu, \qquad \boxed{\eta_{\mu\nu}\,\Lambda^\mu{}_\rho\,\Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}}$$

可以重新诠释为四维闵氏空间(Minkowski)中的赝转动:

$$X^T\,\boldsymbol{\eta}\,X = X'^T\,\boldsymbol{\eta}\,X', \quad X' = \boldsymbol{\Lambda}\,X, \quad \boldsymbol{\Lambda}\,\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}} = \widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}\,\boldsymbol{\Lambda} = I$$

式中,

$$\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{\eta}^{-1}\,\boldsymbol{\Lambda}^T\,\boldsymbol{\eta}, \; \left(\boldsymbol{\Lambda}^T\right)_\nu{}^\mu = (\boldsymbol{\Lambda})^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu, \quad \rightsquigarrow \quad \left(\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}\right)^\mu{}_\nu = \eta_{\nu\rho}\,\Lambda^\rho{}_\sigma\,\eta^{\sigma\mu}$$

且:

$$\det\boldsymbol{\Lambda} = \det\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}} = \pm 1$$

物理量新分类的结果常常称之为 4-张量或者四维协变量.

假设在闵氏空间 $\mathbb{M}_4$ 中建立起了笛卡尔直角坐标系，沿各坐标轴延伸方向的单位基矢为 $\boldsymbol{e}_\mu$ $(\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ 使得

$$\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu = \eta_{\mu\nu}$$

- 仅有一个分量且其在洛伦兹变换下保持不变的物理量 A

  $$A \quad \rightsquigarrow \quad A' = A$$

  称为 4-标量.

- 具有四个分量的物理量 $\boldsymbol{V}$, 设其在笛卡尔坐标系中表达为:

  $$\boldsymbol{V} = V^\mu \boldsymbol{e}_\mu$$

  倘若 V^μ 在洛伦兹变换下与位置坐标 x^μ 有相同的变换法则,

  $$\boxed{V^\mu \quad \rightsquigarrow \quad V'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu}$$

  则称 $\boldsymbol{V}$ 形成了一个 4-矢量. V^μ 称为 4-矢 $\boldsymbol{V}$ 的逆变分量.

$\mathcal{Q}$: 怎么定义时间轴方向的单位基矢 e_0 ?

- 通过度规矩阵 $\eta_{\mu\nu}$ 与 V^μ 的缩并，我们也可以定义 4-矢量 V 的协变分量：

$$V_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} V^\nu \qquad \rightsquigarrow \quad V^\mu = \eta^{\mu\nu} V_\nu$$

在洛伦兹变换下，

$$V_\mu \quad \rightsquigarrow \quad V'_\mu = \eta'_{\mu\nu} V'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho V^\rho = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho \eta^{\rho\sigma} \, V_\sigma$$

亦即：

$$\boxed{V_\mu \quad \rightsquigarrow \quad V'_\mu = V_\nu \, \tilde{\Lambda}^\nu{}_\mu}$$

- 具有 4^{m+n} 个笛卡尔分量的物理量 T, 倘若在洛伦茨变换下它的分量

$$T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}$$

中每一个上指标 μ_i $(1 \le i \le m)$ 都与逆变位置坐标 x^μ 有相同的变换法则、每一个下指标 ν_j $(1 \le j \le n)$ 都与协变位置坐标 x_ν 有相同的变换法则:

$$\boxed{T^{\mu_1\cdots\mu_m}_{\nu_1\cdots\nu_n} \quad \rightsquigarrow \quad T'^{\mu_1\cdots\mu_m}_{\nu_1\cdots\nu_n} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\rho_1}\cdots\Lambda^{\mu_m}{}_{\rho_m}\; T^{\rho_1\cdots\rho_m}_{\sigma_1\cdots\sigma_n}\; \tilde{\Lambda}^{\sigma_1}{}_{\nu_1}\cdots\tilde{\Lambda}^{\sigma_n}{}_{\nu_n}}$$

则称 T 为 $(m,\ n)$ 型 4-张量, $m+n$ 为此张量的阶.

1. 通常把 $(m,\ 0)$ 型的 4-张量称为逆变的 m 阶 4-张量, 把 $(0,\ n)$ 型的 4-张量称为协变的 n 阶 4-张量.
2. m 与 n 皆取非零值时的 $(m,\ n)$ 型 4-张量称为混合张量.
3. 4-张量的逆变、协变分量可以通过度规矩阵 $\eta_{\mu\nu}$ 或者其逆 $\eta^{\mu\nu}$ 相互转换. 例如:

$$T_{\mu\nu} \quad \rightsquigarrow \quad T^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}T_{\rho\sigma}$$

4-标量举例：

- 事件的间隔

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x_\mu$$

  不受洛伦兹变换的影响，因此是一个 4-标量.

- 物理过程持续的固有时 $\mathrm{d}\tau = -\mathrm{d}s/c$.

- 电磁波的相位因子 ϕ. 相位只是计数问题，不应随参考系的改变而发生变化.

- 粒子的质量 m.

- 闵氏空间 $\mathbb{M}_4$ 的体积元 $\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$.

- 带电粒子的电荷 Q 及其在 $\mathbb{M}_4$ 中的电荷体密度：

$$\rho(x) = Q\,\delta^{(4)}(x - x_0) \equiv \frac{Q}{c}\,\delta(t - t_0)\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$$

4-矢量举例:

- 粒子的时空坐标本身形成了一个四维矢量,

$$X = (x^\mu) = (x^0,\ \boldsymbol{r})$$

常称之为 4-位置矢量,此处 $x^0 \equiv ct$.

- 对 x^μ 的微商算符形成了一个 4-矢量微商,

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\ \boldsymbol{\nabla}\right)$$

常称之为 4-梯度算符. 洛伦兹变换$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu$的逆变换可写为:

$$x^\nu = \tilde{\Lambda}^\nu{}_\mu\, x'^\mu$$

因此在洛伦兹变换下,

$$\partial_\mu \quad \rightsquigarrow \partial'_\mu := \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \tilde{\Lambda}^\nu{}_\mu\, \partial_\nu$$

即 ∂_μ 形成了 4-梯度矢量的协变分量.

- 对 $X = (x^\mu)$ 的微分形成了一个四维矢量：

$$\mathrm{d}X = (\mathrm{d}x^\mu) \ = \left(\mathrm{d}x^0,\ \mathrm{d}\boldsymbol{r}\right)$$

常称之为 4-位移矢量.

- 将 4-位移 $\mathrm{d}X$ 与固有时 $\mathrm{d}\tau$ 相除，可以构造出一个 4-矢量 U，其逆变分量为：

$$\boxed{U^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}}$$

常称 U 为粒子的 4-速度. 按此构造，U^μ 与 x^μ 显然具有完全相同的在洛伦兹变换规律：

$$U^\mu \quad \rightsquigarrow \quad U'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu U^\nu$$

注意到粒子的物理速度为 $\boldsymbol{u} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$， 而运动时钟延缓效应又暗示着：

$$\mathrm{d}t = \gamma_u \mathrm{d}\tau, \qquad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \qquad \rightsquigarrow \quad U = (U^\mu) = \gamma_u (c,\ \boldsymbol{u})$$

这就是粒子的 4-速度 U 与其物理速度 $\boldsymbol{u}$ 之间的联系.