中国科学技术大学电动力学期终考试试题卷(2023)

姓名： 参考解答

学号：

成绩：

提示：

- 闵氏空间$\mathbb{M}_4$中洛伦兹推动变换$\boldsymbol{x}^\mu \rightsquigarrow \boldsymbol{x}'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \boldsymbol{x}^\nu$的非零矩阵元是：

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma, \quad \Lambda^0{}_j = -\gamma\beta_j, \quad \Lambda^i{}_0 = -\gamma\beta^i, \quad \Lambda^i{}_j = \delta^i_j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j \tag{1}$$

  式中$\boldsymbol{\beta} = \beta^i \boldsymbol{e}_i$为无量纲的牵连速度，$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

- 在3维欧氏空间$\mathbb{E}_3$中，我们默认使用$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$和$\boldsymbol{e}_3$表示整体笛卡尔直角坐标系的单位基矢，

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}, \quad \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{2}$$

  球坐标系基矢与笛卡尔直角坐标系基矢之间的关系可表为：

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}_\phi = -\boldsymbol{e}_1 \sin\phi + \boldsymbol{e}_2\cos\phi, \qquad \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_3\cos\theta + \boldsymbol{e}_1\sin\theta\cos\phi + \boldsymbol{e}_2\sin\theta\sin\phi, \\ &\boldsymbol{e}_\theta = -\boldsymbol{e}_3\sin\theta + \boldsymbol{e}_1\cos\theta\cos\phi + \boldsymbol{e}_2\cos\theta\sin\phi \end{aligned} \tag{3}$$

  或者等价地，

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_r\cos\theta - \boldsymbol{e}_\theta\sin\theta, \qquad \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_r\sin\theta\cos\phi + \boldsymbol{e}_\theta\cos\theta\cos\phi - \boldsymbol{e}_\phi\sin\phi, \\ &\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_r\sin\theta\sin\phi + \boldsymbol{e}_\theta\cos\theta\sin\phi + \boldsymbol{e}_\phi\cos\phi \end{aligned} \tag{4}$$

0.1 简答(40分)：

1. 电磁场是4-矢量场$A^\mu(x)$. 为什么电磁场的动力学不能由如下朴素的拉格朗日密度

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{2\mu_0}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + J^\mu A_\mu \tag{5}$$

   描写(5分)？

答： 因为电磁场是规范场，电磁场的拉氏密度应该具有规范变换$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x)$下的不变性. 而题设拉氏密度 并不具备这个对称性.

2. 倘若坐标原点($\boldsymbol{r}=0$)被一偶极矩为$\boldsymbol{p}$的偶极子所占据，且空间中的场强分布可表为：

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})=\frac{3(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}-\frac{\boldsymbol{g}}{r^3}+\frac{8\pi}{3}\boldsymbol{g}\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}) \tag{6}$$

请问这个偶极子是电偶极子还是磁偶极子(2分)？ 请简述理由(3分).

答：是磁偶极子，因为$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})=0$.

3. 电偶极子$\boldsymbol{p}$与外静电场$\boldsymbol{E}$之间的相互作用能是$W=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}$还是$U=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}$ (5分) ?

答：静电场是保守力场，故电偶极子与外静电场之间的相互作用能就是二者之间的相互作用势能$U=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}$.

4. 一个磁偶极矩为$\boldsymbol{m}(t)$的振荡磁偶极子占据了坐标原点. 请写出它所激发的辐射电磁场的推迟矢势(5分).

答：采取球坐标系，设$k=\omega/c$，则振荡磁偶极子激发的辐射电磁场推迟矢势(Lorenz规范)为：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0\exp[i(kr-\omega t)]}{4\pi c\, r^2}\dot{\boldsymbol{m}}\times\boldsymbol{r} \tag{7}$$

5. 设介质1和介质2均为寻常的电介质(即$\epsilon_1>0$，$\epsilon_2>0$，$\mu_1\approx\mu_2\approx\mu_0$). 当平面电磁波从介质1向介质2入射时，在介质分界面发生全反射现象的必要条件是什么(5分)?

答：发生全反射现象的必要条件是$\epsilon_1>\epsilon_2$.

6. 与电荷守恒定律$\partial_\mu J^\mu=0$ 相联系的对称性是什么(5分)?

答：电磁相互作用体系作用量在规范变换$A_\mu\rightsquigarrow A'_\mu=A_\mu+\partial_\mu\alpha(x)$下的不变性.

7. 加速运动带电粒子在运动过程中会产生辐射电磁场. 倘若使用Lorentz-Dirac力

$$F^\mu_{\text{Lorentz-Dirac}}=\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0}\left(\frac{\mathrm{d}\mathscr{A}^\mu}{\mathrm{d}\tau}-\frac{1}{c^2}\mathscr{A}^2U^\mu\right) \tag{8}$$

描写辐射电磁场施加给带电粒子的反作用力，式中U^μ与$\mathscr{A}^\mu$分别是粒子的4-速度和4-加速度，请问$F^\mu_{\text{Lorentz-Dirac}}U_\mu=$? (5分)

答：$F^\mu_{\text{Lorentz-Dirac}}U_\mu=0$.

8. 在绝缘介质中传播的平面电磁波遵从的Maxwell方程组可表为：

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\omega\mu(\omega)\boldsymbol{H},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}=-\omega\epsilon(\omega)\boldsymbol{E} \tag{9}$$

式中$\epsilon = \epsilon(\omega)$与$\mu = \mu(\omega)$分别是介质的介电常数和磁导率. $\boldsymbol{k}$是平面电磁波的波矢，其方向定义为平面波相速度的方向. 倘若对于特定的频段，绝缘介质变成$\epsilon < 0$与$\mu < 0$的双负超材料，请问在此情形下，平面电磁波能流密度矢量$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$的方向与$\boldsymbol{k}$一致还是相反(3分)？ 请简述理由(2分).

答：$\boldsymbol{S}$与$\boldsymbol{k}$的方向相反. 这是因为在双负超材料内部，

$$\boldsymbol{S} = \frac{H^2}{\omega\epsilon}\boldsymbol{k} = \frac{E^2}{\omega\mu}\boldsymbol{k}, \quad \rightsquigarrow \ \boldsymbol{S} \propto -\boldsymbol{k} \tag{10}$$

0.2 计算(60分):

9. 某电磁场在实验室参考系S中表现为匀强静电场$\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_1$和匀强静磁场

$$\boldsymbol{B} = \frac{B}{2}(\boldsymbol{e}_1 + \sqrt{3}\boldsymbol{e}_2) \tag{11}$$

的叠加，式中E与B分别是S系中电场强度与磁感应强度的量值. 假设存在另一惯性参考系S'，其中的观测者O所测得的同一电磁场的场强分布分别是$\boldsymbol{E}'$和$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{E}'/c$. 请确定$O$相对于实验室参考系$S$的运动速度$\boldsymbol{v}$(20分).

解：电磁场的场强在两个惯性系之间的Lorentz推动变换是

$$\boldsymbol{E} = \gamma\left(\boldsymbol{E}' - c\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{B}'\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E}'), \quad \boldsymbol{B} = \gamma\left(\boldsymbol{B}' + \frac{\boldsymbol{\beta}}{c} \times \boldsymbol{E}'\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{B}') \tag{12}$$

式中$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}/c$，$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. 为简单计，试取$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{B}' = 0$，则上面的变换式简化为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \gamma\left(\boldsymbol{E}' - c\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{B}'\right) = \gamma\left(\boldsymbol{E}' - \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{E}'\right), \\ \boldsymbol{B} &= \gamma\left(\boldsymbol{B}' + \frac{\boldsymbol{\beta}}{c} \times \boldsymbol{E}'\right) = \frac{\gamma}{c}\left(\boldsymbol{E}' + \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{E}'\right) \end{aligned} \tag{13}$$

此处我们已经使用了题设的条件$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{E}'/c$. 根据以上二式计算$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$，我们有：

$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \frac{2\gamma^2}{c}\boldsymbol{E}' \times (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{E}') = \frac{2\gamma^2}{c}\boldsymbol{E}'^2\boldsymbol{\beta} \tag{14}$$

注意到$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$是4-标量，

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{B}' = \frac{1}{c}\boldsymbol{E}'^2 \tag{15}$$

所以，

$$\gamma^2\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}} \tag{16}$$

这个方程可以用来确定观测者O相对于实验室系S的运动速度$\boldsymbol{v}$. 按题设条件，

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}EB, \quad \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}EB\boldsymbol{e}_3 \quad \rightsquigarrow \ \gamma^2\boldsymbol{\beta} = \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_3 \tag{17}$$

设$\boldsymbol{\beta} = \beta\boldsymbol{e}_3$，则$\beta$的定解方程是$\sqrt{3}\beta^2 + 2\beta - \sqrt{3} = 0$，其物理上合理的解仅有$\beta = 1/\sqrt{3}$. 换言之，

$$\boldsymbol{v} = \frac{c}{\sqrt{3}} \boldsymbol{e}_3 \tag{18}$$

10. 两个等量、反号的点电荷$\pm q$系在一根长度为l的绝缘棒两端，此电荷体系在初始时刻($t = 0$)的电偶极矩矢量为$\boldsymbol{p}_0 = ql\boldsymbol{e}_2$. 此后绝缘棒绕过中点的$z$轴以角速度$\omega = ck$ 逆时针在xy平面上转动，使电荷体系形成一个振荡电偶极子.

- 请证明t时刻体系的电偶极矩矢量可表为(5分):

$$\boldsymbol{p}(t) = -iql(\boldsymbol{e}_1 + i\boldsymbol{e}_2)\exp(-i\omega t) \tag{19}$$

- 计算此振荡电偶极子激发的辐射电磁场场强并将它们在球坐标系中表出(10分).
- 计算平均辐射功率(5分).

```
解：
按题设，振荡电偶极子的电偶极矩随时间的变化可表为：
```

$$\boldsymbol{p}(t) = ql\Big[\boldsymbol{e}_2\cos(\omega t) - \boldsymbol{e}_1\sin(\omega t)\Big] = ql\mathrm{Re}\Big[(\boldsymbol{e}_2 - i\boldsymbol{e}_1)e^{-i\omega t}\Big] = ql\mathrm{Re}\Big[-i(\boldsymbol{e}_1 + i\boldsymbol{e}_2)e^{-i\omega t}\Big] \tag{20}$$

写成复数形式，即为：

$$\boldsymbol{p}(t) = -iql(\boldsymbol{e}_1 + i\boldsymbol{e}_2)\exp(-i\omega t) \tag{21}$$

此振荡电偶极子激发的辐射电磁场的推迟矢势(采取Lorenz规范)是：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\boldsymbol{p}}(t)}{r}\exp(ikr) \\
&= -i\omega\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{p}(t)}{r}\exp(ikr) \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ql\omega}{r}(\boldsymbol{e}_1 + i\boldsymbol{e}_2)\exp[i(kr - \omega t)] \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ql\omega}{r}(\sin\theta\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\boldsymbol{e}_\theta + i\boldsymbol{e}_\phi)\exp[i(kr - \omega t + \phi)]
\end{aligned} \tag{22}$$

上面计算的最后一步使用了坐标系基矢之间的变换关系，

$$\boldsymbol{e}_1 + i\boldsymbol{e}_2 = \Big(\sin\theta\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\boldsymbol{e}_\theta + i\boldsymbol{e}_\phi\Big)e^{i\phi} \tag{23}$$

因此，辐射电磁场的场强分别为：

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = ik\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\mu_0 ql\omega^2}{4\pi cr}(\cos\theta\boldsymbol{e}_\phi - i\boldsymbol{e}_\theta)\exp[i(kr - \omega t + \phi)] \tag{24}$$

与

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = c\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{e}_r = -\frac{\mu_0 ql\omega^2}{4\pi r}(\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta + i\boldsymbol{e}_\phi)\exp[i(kr - \omega t + \phi)] \tag{25}$$

辐射电磁场的平均能流密度矢量是：

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{S}\rangle &= \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\Big[\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\Big]\\ &= \frac{\mu_0 q^2 l^2\omega^4}{32\pi^2 c r^2}\mathrm{Re}\Big[(\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta - i\boldsymbol{e}_\phi)\times(\cos\theta\boldsymbol{e}_\phi - i\boldsymbol{e}_\theta)\Big]\\ &= \frac{\mu_0 q^2 l^2\omega^4}{32\pi^2 c r^2}(1+\cos^2\theta)\boldsymbol{e}_r\end{aligned} \tag{26}$$

辐射功率为：

$$P = \oint \mathrm{d}\sigma\,\langle\boldsymbol{S}\rangle\cdot\boldsymbol{e}_r = \frac{\mu_0 q^2 l^2\omega^4}{32\pi^2 c}\cdot\frac{16\pi}{3} = \frac{q^2 l^2\omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^3} \tag{27}$$

11. 考虑时谐电磁波在矩形波导管中的传播. 设波导管横截面的边长分别是a与b $(a\geq b)$，电磁波沿z轴方向传播.

- 请证明矩形波导管中不存在TM_{m0}波(10分).
- 求出频率为$f=3\times10^{10}$ Hz的微波在横截面为$0.3\text{cm}\times0.6\text{cm}$的矩形波导管中传播的模式(10分).

```
解：
```

波导管内电磁波的电场强度具有形式

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = \boldsymbol{E}(x,y)\exp[i(k_3 z-\omega t)] \tag{28}$$

其中$\boldsymbol{E}(x,y)$的诸直角分量满足Helmholz方程和理想导体边界条件，它们的具体形式是：

$$\begin{aligned}&E_1(x,y) = A_1\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right),\qquad E_2(x,y) = A_2\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right),\\ &E_3(x,y) = A_3\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).\end{aligned} \tag{29}$$

式中的模式参数m, n是一些非负整数，满足约束条件：

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k_3^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tag{30}$$

此外，由高斯定律$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=0$可知：

$$\frac{m\pi A_1}{a} + \frac{n\pi A_2}{b} - ik_3A_3 = 0 \tag{31}$$

波导管内电磁波的磁感应强度由Faraday电磁感应定律给出：

$$\boldsymbol{B} = -\frac{i}{\omega}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} \tag{32}$$

其纵分量是：

$$\begin{aligned}B_3(x,y,z,t) &= -\frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y}\right)\\ &= -\frac{i}{\omega}\left(\frac{m\pi A_2}{a} - \frac{n\pi A_1}{b}\right)\cos(m\pi x/a)\cos(n\pi y/b)\exp[i(k_3 z-\omega t)]\end{aligned} \tag{33}$$

对于 TM波，$B_3=0$，这意味着：

$$mbA_2 = naA_1 \tag{34}$$

模式为TM_{m0}的横磁波要求$n=0$但$m\neq 0$. 结合(34)式知$A_2=0$. 把$n=A_2=0$代回到(29)式中可知波导管内的电场强度诸分量恒为零. 进而按(32)式有$\boldsymbol{B}=0$. 所以，矩形波导管内是不存在TM_{m0}波的. 当然，也不存在TM_{0n}横磁波.

波导管内能够传播的电磁波的纵向波数k_3必须是实数. 因此，约束条件(30)的成立意味着存在不等式：

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\leq\frac{\omega^2}{c^2} \tag{35}$$

对于频率为$f=3\times 10^{10}$赫兹的微波，

$$\frac{\omega^2}{c^2}=\frac{4\pi^2 f^2}{c^2}=4\pi^2\ \mathrm{cm}^{-2} \tag{36}$$

所以当$a=0.6\mathrm{cm}$和$b=0.3\mathrm{cm}$时，上面的不等式简化为：

$$\frac{m^2}{36}+\frac{n^2}{9}\leq\frac{1}{25} \tag{37}$$

此不等式的解是惟一的，即$m=1,\ n=0$. 这个模式是横电波TE_{10}.