电动力学第三次习题课

中国科学技术大学
李雨桥 刘元彻

6.16

目 录

第一章 作业答案及解析 **5**

1.1 0524 6

1.2 0607 15

1.3 0610 17

1.4 0612 19

第一章　作业答案及解析

1.1 0524

例 1.1.1. 考虑一半径为 a 的圆形薄片，其电荷面密度为 $\sigma = kr$ ，这里 r 为薄片上点到圆心的距离，k 为一有量纲的常参数. 利用多级展开，求该带电圆形薄片在远场区的静电势分布（精确到电四极矩的贡献）。

解. 我们默认在平面中考虑电势。远场条件下，我们记场点为 (r', θ)，则 $r' \gg r$，并且电荷密度为 $\sigma(r) = kr$，所以可以表达为 $\rho(r, z) = kr\delta(z)$。

根据公式计算多级展开：

$$
\begin{aligned}
Q &= \int \mathrm{d}^2 x \sigma(r) \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a r \mathrm{d}r kr \\
&= \frac{2}{3}\pi k a^3 \\
\vec{p} &= \int \mathrm{d}^2 x \vec{r} \sigma(r) \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathrm{d}\theta r \mathrm{d}r kr \dot{(} r\cos\theta \hat{x} + r\sin\theta \hat{y}) \\
&= 0 \\
D_{ij} &= \int \mathrm{d}^2 x (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) \rho(r) \\
\Rightarrow D &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathrm{d}\theta r \mathrm{d}r kr \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) \mathrm{d}z \cdot \\
&\begin{pmatrix} 3r^2\cos^2\theta - r^2 & 3r^2 \sin\theta\cos\theta & 3r\cos\theta z \\ 3r^2\sin\theta\cos\theta & 3r^2\sin^2\theta - r^2 & 3r\sin\theta z \\ 3r\cos\theta & 3r\sin\theta z & 3z^2 - r^2 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{diag}(\frac{\pi k a^5}{5}, \frac{\pi k a^5}{5}, -\frac{2\pi k a^5}{5})
\end{aligned}
$$

于是我们利用多级展开就可给出电势的表达式：

$$
\begin{aligned}
\phi(r') &\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{Q}{r'} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r'}}{r'^3} + \frac{1}{2r'^5}\vec{r'}^T Q \vec{r'}] \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{2\pi k a^3}{3r'} + \frac{k\pi a^5}{10 r'^3}(3\sin^2\theta - 2)]
\end{aligned}
$$

即为多级展开给出的表达式，注意这里的 θ 已经换成了球坐标，所以势函数不含 φ 就表明柱对称性仍然存在。 □

例 1.1.2. 一带电球体半径为 a，其电荷体密度具有球对称性，$\rho = \rho(r)$. 求该带电球体在远场区的各阶电极矩（考虑到二阶极矩[1]项）和静电势的分布。

[1]查阅资料知道，二阶极矩指的是电四极矩

解. 和上一题非常相似，我们可以求出各极矩项的值：

$$
\begin{aligned}
Q &= \int \mathrm{d}^3x\rho(r) \\
&= 4\pi\int_0^a \mathrm{d}rr^2\rho(r) \\
\vec{p} &= \int \mathrm{d}^3x\vec{r}\rho(r) \\
&= 0 \\
D_{ij} &= \int \mathrm{d}^3x(3x_ix_j - \delta_{ij}r^2)\rho(r) \\
&= \int_0^a r^2\mathrm{d}r\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\rho(r)\cdot \\
&\begin{pmatrix} 3r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi - r^2 & 3r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi & 3r^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi \\ 3r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi & 3r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi - r^2 & 3r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi \\ 3r^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi & 3r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi & 3r^2\cos^2\theta - r^2 \end{pmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

上面利用了直角坐标在球坐标下的分量表达：

$$
\begin{cases}
x = r\sin\theta\cos\varphi \\
y = r\sin\theta\sin\varphi \\
z = r\cos\theta
\end{cases}
$$

我们惊人地发现这个体系既没有偶极矩，也没有四极矩。然后按照多极展开，得到：

$$
\begin{aligned}
\phi(r') &\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{Q}{r'} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r'}}{r'^3} + \frac{1}{2r'^5}\vec{r'}^TQ\vec{r'}] \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{4\pi}{r'}\int_0^a \mathrm{d}rr^2\rho(r) + \frac{2\pi}{3r'^3}\int_0^a \mathrm{d}rr^4\rho(r)] \\
&= \frac{1}{\varepsilon_0}[\frac{1}{r'}\int_0^a \mathrm{d}rr^2\rho(r)]
\end{aligned}
$$

这就是我们需要的的电势表达式。倘若我们令 $\rho(r) = \rho$ 为常数，就得到：

$$
\begin{aligned}
\phi(r') &\approx \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{1}{r'}\frac{1}{3}a^3 \\
&= \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r'}
\end{aligned}
$$

正是我们想要的精确表达式，这符合我们的期待。 □

例 1.1.3. 倘若把一个半径为 R_0、介电常数为 ϵ 的介质球置于均匀外静电场 $\vec{E}_0$ 中，介质球将发生极化. 请计算介质球的极化强度 $\vec{P}$ 以及介质球内部及表面上的束缚电荷分布。

解. 沿着静电场方向作为主轴 $\hat{z}$ 方向，我们来考虑这个静电场的宏观问题。

首先，由于介质球均匀，外电场均匀，故我们知道，介质内部应该有均匀的极化强度 $\langle P\rangle$，外部的极化强度自然是 0。

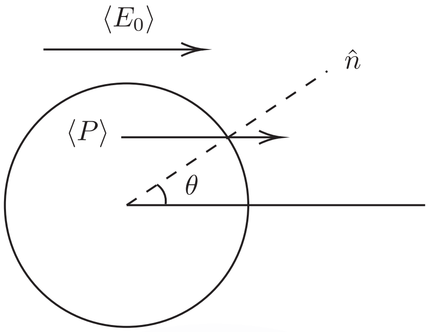

图 1.1.1: 几何关系

由于这个问题中，空间本身处处不存在自由电荷 $\langle \rho_f\rangle$，所以我们知道这个空间中处处满足同样的 Laplace 方程：

$$\nabla^2\phi = 0$$

这个体系具有柱对称性，所以我们的解可以用 Legendre 多项式写为：

$$\phi_{in} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k P_k(\cos\theta)$$
$$\phi_{out} = \sum_{k=0}^{\infty}(B_k r^k + C_k \frac{1}{r^{k+1}})P_k(\cos\theta)$$

分别是球内部和球外部的解（这样分解是因为，球面上必然带有束缚电荷，这些束缚电荷会对电势有贡献，分开讨论之）。

对无穷远处进行分析，此时可以忽略掉球面上电荷的贡献（因为球面上电荷密度自然是有限的）。于是 ϕ_{out} 中的 B_k 除了 $k=0$ 的平凡项（对电势加减常数没有影响）和 $k=1$ 的线性项之外，其余系数都为 0. 在无穷远处，电势标记为：

$$\phi_{out}(z) = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta$$

考虑到 $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$，所以自然有 $B_1 = -E_0, B_i \neq 0$。

由于 Legendre 多项式具有正交性，并且我们考虑的线性均匀计极化具有线性性，由于外场只有 $l=1$ 的 Legendre 函数，那么其激发出的极化场也只能有 $l=1$，否则对应的电场会违反线性性。这就表明：

$$\phi_{in} = Ar\cos\theta$$
$$\phi_{out} = -E_0 r\cos\theta + \frac{C}{r^2}\cos\theta$$

这给出了形式解。我们借助两个边界条件：一方面，内外电势在边界处应该连续：

$$AR_0\cos\theta = -E_0R_0\cos\theta + \frac{C}{R_0^2}\cos\theta$$

另外，我们写出各个分区的电场强度：

$$\begin{aligned}
E_{in} &= -\nabla\phi_{in} \\
&= -\frac{\partial\phi_{in}}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi_{in}}{\partial\theta}\hat{\theta} \\
&= -A\cos\theta\hat{r} + A\sin\theta\hat{\theta} \\
E_{out} &= -\nabla\phi_{out} \\
&= -\frac{\partial\phi_{out}}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi_{out}}{\partial\theta}\hat{\theta} \\
&= (E_0\cos\theta + \frac{2C}{r^3}\cos\theta)\hat{r} + (-E_0\sin\theta + \frac{C}{r^3}\sin\theta)\hat{\theta}
\end{aligned}$$

考虑到电位移矢量应该在法向上连续，我们有：

$$\epsilon A = -\epsilon_0(E_0 + \frac{2C}{R_0^3})$$

联立上面两个边界条件式子，得到：

$$A = -\frac{3\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}E_0, \quad C = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}E_0R_0^3$$

所以我们完整地写出电场的形式：

$$\begin{aligned}
\langle E_{in}\rangle &= \frac{3\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}E_0\hat{z} \\
\langle E_{out}\rangle &= E_0\hat{z} + 2\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}E_0\frac{R_0^3}{r^3}\cos\theta\hat{r} + \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}E_0\frac{R_0^3}{r^3}\sin\theta\hat{\theta}
\end{aligned}$$

可以看出，内部电场呈现匀强，而外部电场呈现出原本的匀强外场和一个电偶极子场的叠加。我们可以求出极化强度矢量：

$$\langle P\rangle = (\epsilon - \epsilon_0)\langle E_{in}\rangle = \frac{3\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon + 2\epsilon_0}E_0\hat{z}$$

借此就可以求出束缚电荷的密度：

$$\begin{aligned}
\langle\sigma_p\rangle &= -\langle P\rangle\cdot\hat{r} = -\frac{3\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon + 2\epsilon_0}E_0\cos\theta \\
\langle\rho_p\rangle &= -\nabla\langle P\rangle = 0
\end{aligned}$$

即 θ 相同的一圈环带上具有相同的束缚电荷面密度，而没有体电荷密度。 □

例 1.1.4. 假设把一个磁偶极矩为 $\vec{m}$ 的磁偶极子放在坐标原点，证明空间中的电流密度分布为 $\vec{j} = -\vec{m}\times\nabla\delta^{(3)}(\vec{x})$.

解. 我们知道静磁场满足 Maxwell 方程:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

也等价于关于磁矢势的方程:

$$\mu_0 \vec{j} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$$

而偶极矩为 $\vec{m}$ 的磁偶极子产生的磁矢势可以写为:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

我们可以计算出:

$$\begin{aligned}
\vec{j} &= \frac{1}{\mu_0}\nabla \times (\nabla \vec{A}) \\
&= \frac{1}{4\pi}\nabla \times (\nabla \times \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}) \\
\Rightarrow 4\pi j_i &= \varepsilon_{ijk}\partial_j(\varepsilon_{klm}\partial_l \frac{\varepsilon_{mab} m_a r_b}{r^3}) \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l(\frac{\varepsilon_{mab} m_a r_b}{r^3}) \\
&= \varepsilon_{jab}\partial_i\partial_j(m_a r_b/r^3) - \varepsilon_{iab}\partial_j\partial_j(m_a r_b/r^3)
\end{aligned}$$

我们可以计算出:

$$\partial_i\partial_j(\frac{m_a r_b}{r^3}) = m_a\partial_i[\delta_{jb}\frac{1}{r^3} - 3\frac{r_b r_j}{r^5}]$$

注意到这个式子的 j,b 两个指标总是对称的，所以上面 j_i 式中第一项的全反对称张量使得这项为 0. 另外，我们算出:

$$\begin{aligned}
\partial_j\partial_j(\frac{m_a r_b}{r^3}) &= m_a[\nabla\nabla \cdot (\frac{\vec{r}}{r^3})]_b \\
&= -m_a[\nabla\nabla \cdot (\nabla\frac{1}{r})]_b \\
&= 4\pi m_a[\nabla\delta^{(3)}(\vec{r})]_b
\end{aligned}$$

带回原来的式子就给出了:

$$\begin{aligned}
\vec{j} &= -\frac{4\pi}{4\pi}[m_a \times \nabla\delta^{(3)}(\vec{r})] \\
&= -\vec{m} \times \nabla\delta^{(3)}(\vec{r})
\end{aligned}$$

这就是我们想要的结果。 □

例 1.1.5. 请证明磁偶极子 $\vec{m}$ 所激发的磁感应强度分布:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}] + \frac{2\mu_0}{3}\vec{m}\delta^{(3)}(\vec{r})$$

满足静磁学基本方程: $\nabla \cdot \vec{B} = 0, \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

解. 注意到上一题的结论，我们认为这个磁偶极的电流密度正是：$\vec{j} = -\vec{m} \times \nabla\delta^{(3)}(\vec{r})$ 我们对各项求旋度：

$$
\begin{aligned}
\{\nabla \times [\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}]\}_i &= \frac{3\mu_0}{4\pi}\varepsilon_{ijk}\partial_j(\frac{m_a r_a r_k}{r^5}) \\
&= \frac{3\mu_0}{4\pi}\varepsilon_{ijk}m_a[\frac{\delta_{ja}r_k}{r^5} + \frac{\delta_{jk}r_a}{r^5} - 5\frac{r_a r_j r_k}{r^7}] \\
&= \frac{3\mu_0}{4\pi}\varepsilon_{ijk}\frac{m_j r_k}{r^5} \\
\Rightarrow \nabla \times [\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}] &= \frac{3\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^5} \\
[\nabla \times (\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}}{r^3})]_i &= \varepsilon_{ijk}\partial_j(\frac{m_k}{r^3}) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\varepsilon_{ijk}m_k\partial_j\frac{1}{r^3} \\
\Rightarrow \nabla \times (\frac{3\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}}{r^3}) &= \frac{3\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^5}
\end{aligned}
$$

这里我们就能看到，$\vec{B}$ 的前两项求旋度后为 0. 考虑到 δ 函数的性质，在 $r \neq 0$ 时，$\vec{B} = 0$，同时 $\vec{j} = 0$，所以候选等式显然成立；

对于在原点的情况，我们考虑：

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{B^3(\epsilon)} \mathrm{d}V - \nabla(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}) &= \lim_{\epsilon\to 0^+} -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\partial B^3(\epsilon)} \mathrm{d}\vec{S}(\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}) \\
&= -\int_0^{\pi}\epsilon^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi(m_x\sin\theta\cos\varphi + m_y\sin\theta\sin\varphi + m_z\cos\theta)\epsilon \\
&\times(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)/\epsilon^3 \\
&= -\frac{\mu_0}{3}\vec{m}
\end{aligned}
$$

这个积分过程表明，在 $r = \epsilon \to 0$ 时，原先写出的 $\vec{b} = -\nabla(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3})$ 并不是良定义的。为了保证通量守恒，应该通过修正源项，改为：

$$
\vec{b} = -\nabla(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}) + \frac{\mu_0}{3}\vec{m}\delta^{(3)}(\vec{r})
$$

这样一来，我们就可以改写磁场分布为：

$$
\vec{B} = -\nabla(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}) + \mu_0\vec{m}\delta^{(3)}(\vec{r})
$$

这个式子更加物理；他表明一个偶极子的磁场可以被看作远场处的标量势梯度和源附近的 δ 函数的叠加。求旋度，很容易得到：

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\vec{B} &= -\nabla\times\nabla(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}) + \mu_0\nabla\times(\vec{m}\delta^{(3)(\vec{r})}) \\
&= \mu_0\nabla\times\vec{m}\delta^{(3)}(\vec{r}) - \mu_0\vec{m}\times\nabla\delta^{(3)}(\vec{r}) \\
&= -\mu_0\vec{m}\times\nabla\delta^{(3)} = \mu_0\vec{j}
\end{aligned}
$$

即证明。 □

例 1.1.6. 置于坐标原点处的电偶极子 $\vec{p}$ 在空间激发的静电场强度分布为:

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{p}}{r^3}]-\frac{\vec{p}}{3\varepsilon_0}\delta^{(3)}(x)$$

请证明它满足静电学方程组 $\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$ 与 $\nabla\times\vec{E}=0$.

解. 利用上一问的恒等式:

$$[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{m}}{r^3}]=-\nabla(\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3})+\frac{4\pi}{3}\vec{m}\delta^{(3)}(\vec{r})$$

我们可以更明确地看出一些结果。我们先改写电场强度为:

$$\vec{E}=-\nabla[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}]$$

注意到这个式子里面 δ 函数项消掉了。这里，电场强度正是电偶极子标量势的梯度。这个式子很容易看出 $\nabla\times\vec{E}=0$

另一方面，如果求散度就有:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{E}&=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla^2(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3})\\&=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}4\pi\vec{p}\cdot[\nabla\delta^{(3)}(\vec{r})]\end{aligned}$$

我们之前已经知道，电偶极子的电荷密度正是 $\rho(\vec{r})=-\vec{p}\cdot\nabla\delta^{(3)}(\vec{r})$，于是立刻就得到 $\nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$. □

例 1.1.7. 半径为 a 的无限长圆柱导体上有恒定电流 $\vec{j}$ 均匀分布在其截面上。设导体的磁导率为 μ_0 ，导体外介质的磁导率为 μ。请通过在库仑规范中求解矢势微分方程确定导体圆柱内外空间中矢势的分布。

解. 我们取圆柱体的中心轴为 z 轴，则根据静磁学的基本方程，矢势 $\vec{A}$ 应该满足:

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{A}_i=-\mu_0 j\hat{z}\quad(r<a)\\\nabla^2\vec{A}_o=0\quad(r>a)\end{cases}$$

物理上的边值条件是界面上的矢势边值条件，外加上 $r=0$ 处 $\vec{A}$ 收敛的条件:

$$|A|_{r\to0}<+\infty$$

$$\vec{A}_i(r=a)=\vec{A}_o(r=a),\quad\hat{r}\times(\frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}_o-\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}_i)=0$$

分析对称性。我们知道内部的电流密度 $\vec{j}=j\hat{z}$，因而内部的矢势一定可以写作 $\vec{A}_i=A_i\hat{z}$；另一方面，因为这电流分布关于 θ 是对称的，我们可以认为 A_i 只能是 r 的函数:

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}r})=-\mu_0 j$$

而边界上的连续性条件告诉我们，外部的矢势也只能是 $\vec{A}_o = A_o(r)\hat{z}$：

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\frac{\mathrm{d}A_o}{\mathrm{d}r}) = 0$$

这就是矢势遵守的微分方程。事实上，这些微分方程都是关于 r 的常微分方程，我们可以直接解出通解：

$$A_i = -\frac{\mu_0}{4}jr^2 + c_1\ln r + c_2$$
$$A_o = c_3\ln r + c_4$$

而此时边值条件自然变成了：

$$\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}A_o(r)}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=a} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\mathrm{d}A_i(r)}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=a}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\mu}\frac{c_3}{a} = \frac{1}{\mu_0}(-\frac{\mu_0}{2}ja + \frac{c_1}{a})$$

另外，有限条件要求 $c_1 = 0$. 由上可以解出：

$$c_3 = -\frac{\mu}{2}ja^2$$

另外，连续性条件会给出 c_2 和 c_4 的一组关系，这导致他们不能完全确定，这正是经典电动力学中矢势 $\vec{A}$ 规范冗余的表现。我们不妨做 $A_i(a) = A_o(a) = 0$ 的规范固定，立刻可以得到：

$$c_2 = \frac{\mu_0}{4}ja^2$$
$$c_4 = \frac{\mu}{2}ja^2\ln a$$

综上，矢势的解即为[2]：

$$\vec{A}_i = \frac{\mu_0}{4}(a^2 - r^2)\vec{j} + C$$
$$\vec{A}_o = \frac{\mu}{2}a^2\ln\frac{a}{r}\vec{j} + C$$

□

例 1.1.8. *把一磁导率为 μ 、半径为 a 的介质球置于均匀外磁场 $\vec{B}_0$ 中，求介质球内外空间中磁感应强度 $\vec{B}$ 的分布*

解. 这题目最简单的解法是，考虑到这空间中处处都没有自由电流密度 $\vec{j}_f$，于是我们可以引入磁标势 ϕ_m 来解这个问题：

$$\nabla^2\phi_m = 0$$

---

[2]这里我们保留到一个全局的有限常数 C，以表示规范冗余

这个方程的正确性可以由线性介质保证。因为对于线性介质，$\vec{B}=\mu\vec{H}=-\mu\nabla\phi_m$，由静磁学基本方程 $\nabla\cdot\vec{B}=0$ 即可证明。

现在我们考察边界条件。我们知道对于一个线性介质的静电极化问题，我们的边界条件是 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ 在法向上连续，电势 φ 在边界上连续，并且有 $\vec{E}=-\nabla\varphi$，综合一下就是：

$$\hat{n}\cdot(\vec{D}_{out}-\vec{D}_{in})=\hat{n}\cdot(\varepsilon_{out}\vec{E}_{out}-\varepsilon_{in}\vec{E}_{in})=0$$
$$\varphi_{in}=\varphi_{out}$$
$$\vec{E}=-\nabla\varphi$$

而现在，静磁边界条件是：磁感应强度 $\vec{B}=\mu\vec{H}$ 法向分量连续，磁标势 ϕ_m 在边界上连续[3]，以及 $\vec{H}=-\nabla\phi_m$，综合一下就是：

$$\hat{n}\cdot(\vec{B}_{out}-\vec{B}_{in})=\hat{n}\cdot(\mu_{out}\vec{H}_{out}-\mu_{in}\vec{H}_{in})=0$$
$$\phi_{m,in}=\phi_{m,out}$$
$$\vec{H}=-\nabla\phi_m$$

我们立刻意识到，这样一个关于 $\vec{H},\vec{B},\mu,\phi_m$ 的静磁体系在数学结构上完全等价于一个关于 $\vec{E},\vec{D},\varepsilon,\varphi$ 的静电体系。所以本题完全等价于我们曾经做过的线性介质球体电极化结果，我们可以直接写出答案：

$$\langle H_{in}\rangle=\frac{3\mu_0}{\mu+2\mu_0}H_0\hat{z}$$
$$\langle H_{out}\rangle=H_0\hat{z}+2\frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}H_0\frac{a^3}{r^3}\cos\theta\hat{r}+\frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}H_0\frac{a^3}{r^3}\sin\theta\hat{\theta}$$

当然，我们考虑到 $H_0=\dfrac{1}{\mu_0}B_0$，就可以给出：

$$\langle B_{in}\rangle=\frac{3\mu}{\mu+2\mu_0}B_0\hat{z}$$
$$\langle B_{out}\rangle=B_0\hat{z}+2\frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}B_0\frac{a^3}{r^3}\cos\theta\hat{r}+\frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}B_0\frac{a^3}{r^3}\sin\theta\hat{\theta}$$

这就是所要求的内外磁场分布。 □

[3]仿照静电学，我们可以证明这个式子等价于电场切向行为的边界条件

1.2 0607

例 1.2.1. *若将真空中的 Maxwell 方程组涉及的电场强度拆分为无散和无旋两部分，即:*

$$\vec{E}=\vec{E}_T+\vec{E}_L,\quad \nabla\cdot\vec{E}_T=0,\quad \nabla\times\vec{E}_L=0$$

1. 请证明 $\vec{E}_L$ 对应于库仑场。

2. 在库仑规范下把 $\vec{E}_T$ 和 $\vec{E}_L$ 分别用电磁势表达出来。

解. 1. 我们对 $\vec{E}$ 求散度和旋度:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{E}&=\nabla\cdot\vec{E}_T+\nabla\cdot\vec{E}_L\\&=\nabla\cdot\vec{E}_L=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\\\nabla\times\vec{E}&=\nabla\times\vec{E}_T+\nabla\times\vec{E}_L\\&=\nabla\times\vec{E}_T=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

我们注意到 $\vec{E}_L$ 满足的等式正是: $\nabla\cdot\vec{E}_L=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\nabla\times\vec{E}_L=0$，这正是库仑场。亥姆霍兹分解定理保证这样的分解方法是唯一的，因此分出的库仑场不会有其他的候选形式，$\vec{E}_L$ 正是唯一可能的库仑场形式。

2. 我们注意到:

$$\nabla\times\vec{E}=\nabla\times\vec{E}_T=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{A})=\nabla\times(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})$$

到这里，我们将 $\vec{E}_T$ 确定到相差一个无旋场 $\vec{k},\nabla\times\vec{k}=0$，即: $\vec{E}_T=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\vec{k}$ 。检验他的散度，我们同时将得到 $\nabla\cdot\vec{k}=0$，这来自 $\vec{E}_L$ 完全消除了电荷项。

而考察 $\vec{E}_L$ 时，我们的散度条件为:

$$\nabla\cdot\vec{E}_L=\nabla\cdot\vec{E}=\nabla\cdot(-\nabla\phi)$$

另一方面，我们知道标准的 Maxwell 方程是:

$$\vec{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

所以我们确定出:

$$\begin{aligned}\vec{E}&=\vec{E}_T+\vec{E}_L\\&=(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\vec{k})+(-\nabla\phi-\vec{k})\end{aligned}$$

$\vec{k}$ 是一个满足 $\nabla\times\vec{k}=0,\quad \nabla\cdot\vec{k}=0$ 的任意矢量场。实际上，我们很快就能发现这个 $\vec{k}$ 是冗余的。由于在整个 $\mathbb{E}^3$ 上[4]都有 $\nabla\cdot\vec{k}=0$，自然就可以选择另一个矢量场 $\vec{X}\to\nabla\times\vec{X}=0$. 此时我们会知道 $\vec{A}\sim\vec{A}+\vec{X}$ 是一个自然认同；同理，$\nabla\times\vec{k}=0$ 允许我们选择一个标量场 $\psi\to\nabla\psi=0$，此时 $\phi\sim\phi+\psi$ 也是一个自然认同。所以，我们完全可以把 $\vec{A}$ 和 ϕ 看作是吸收了这些冗余的场，即直接令 $\vec{k}=0$，从而：

$$\begin{aligned}\vec{E}&=\vec{E}_T+\vec{E}_L\\&=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\phi\end{aligned}$$

这就是我们想要的分解。

□

例 1.2.2. 请验证球面波 $\phi_{\pm}(\vec{r},t)=\phi_0\frac{e^{\pm i(kr-\omega t)}}{r},k=\frac{\omega}{c}$ 是波动方程 $\Box\phi=0$ 的特解，式中 ϕ_0 是一个常数。

解. 将特解回带方程即可验证：

$$\begin{aligned}(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2)\phi_{\pm}(\vec{r},t)&=(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2)(\phi_0\frac{e^{\pm i(kr-\omega t)}}{r})\\&=\frac{\omega^2}{c^2}\phi_0\frac{e^{\pm i(kr-\omega t)}}{r}\\&+(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{r^2sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2sin\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2})(\phi_0\frac{e^{\pm i(kr-\omega t)}}{r})\\&=\frac{\omega^2}{c^2}\phi_0\frac{e^{\pm i(kr-\omega t)}}{r}-k^2\phi_0\frac{e^{\pm i(kr-\omega t)}}{r}=0\end{aligned}$$

得证。 □

[4]这一点是为了保证电磁场诱导出的闭形式一定是恰当的，否则可能会找不出我们需要的辅助场。详细的讨论需要参看 de Rham 上同调理论

1.3 0610

例 1.3.1. *一束平面电磁波 $\vec{E}(x,t)=E_0\exp[i(kx-\omega t)]\vec{e}_3$ 射向一球形介质颗粒，颗粒介电常数为 ε、半径为 R_0 (其线度远小于电磁场的波长，即满足不等式 $\omega R_0\ll c$). 由于介质在外电场中发生极化且极化强度随时间做简谐振荡，颗粒会产生次级辐射。试求:*

1. *球形介质颗粒因极化产生的时谐电偶极矩.*

2. *电偶极近似下介质颗粒产生的辐射电磁场及其平均能流密度分布.*

解. 1. 我们知道，对于一个极小的 $(\omega R_0\ll c)$ 介质球，其上各处感受到的场强近似是均匀的；所以这个介质颗粒感受到的极化场可以近似视作时变的匀强场:

$$E=E_0\exp\left(-i\omega t\right)$$

这里我们完全没有考虑小球是否在原点，这是因为对于不同的位置 x，总能通过取合适的时间原点 t 来使得其初始相位为 0. 根据我们曾经在静电场中求过的结果，这个匀强场导致的球极化可以被视为一个电偶极子，其偶极矩为:

$$P=4\pi\varepsilon_0\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}a^3E_0\exp(-i\omega t)$$

这便是我们想要的结果。

2. 现在我们考虑这个极化的偶极子，我们直接使用辐射偶极子产生的电磁场公式:

$$\begin{aligned}\vec{B}=B_\varphi\hat{\varphi}&=\frac{|\ddot{p}|\mathrm{e}^{ikx}}{4\pi\varepsilon_0c^3r}\sin\theta\hat{\varphi}\\&=-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\frac{\omega^2a^3\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}}{c^3r}\sin\theta\hat{\varphi}\\\vec{E}=E_\theta\hat{\theta}&=\frac{|\ddot{p}|\mathrm{e}^{ikx}}{4\pi\varepsilon_0c^2r}\sin\theta\hat{\theta}\\&=-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\frac{\omega^2a^3\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}}{c^2r}\sin\theta\hat{\theta}\end{aligned}$$

这便是我们想要的辐射电磁场，特别注意我们这个坐标中的 $\hat{\theta}$ 或者 $\hat{\varphi}$ 是相对于 $\hat{x}$ 而言的。而电偶极子的平均能流密度分布是:

$$\begin{aligned}\langle S\rangle&=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\mathrm{d}t\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}\\&=\frac{1}{\mu_0}(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0})^2\frac{\omega^4a^6}{c^5r^2}\sin^2\theta\hat{r}\end{aligned}$$

$\hat{r}$ 是矢径的单位矢量。

□

例 1.3.2. 检验振荡偶极子的推迟势：

$$\begin{aligned}\Phi(r,\theta,t) &= \frac{p_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}\left\{-\frac{\omega}{c}\sin[\omega(t-\frac{r}{c})]+\frac{1}{r}\cos[\omega(t-\frac{r}{c})]\right\}\\ \vec{A}(r,\theta,t) &= -\frac{\mu_0 p_0\omega}{4\pi r}\sin[\omega(t-\frac{r}{c})]\hat{z}\end{aligned}$$

满足 *Lorenz* 规范（注意矢势表达式是在球坐标下写出来的）。

解. Lorenz 规范是：

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$$

我们逐项计算：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial t} &= -\frac{\omega p_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}\left\{\frac{\omega}{c}\cos[\omega(t-\frac{r}{c})]+\frac{1}{r}\sin[\omega(t-\frac{r}{c})]\right\}\\ \Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} &= -\frac{\mu_0\omega p_0\cos\theta}{4\pi r}\left\{\frac{\omega}{c}\cos[\omega(t-\frac{r}{c})]+\frac{1}{r}\sin[\omega(t-\frac{r}{c})]\right\}\\ \nabla\cdot\vec{A} &= \frac{\partial A_z}{\partial z}=\frac{\partial A_z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\\ &= -\frac{\mu_0 p_0\omega}{4\pi}\left\{-\frac{1}{r^2}\sin[\omega(t-\frac{r}{c})]-\frac{\omega}{rc}\cos[\omega(t-\frac{r}{c})]\right\}\frac{z}{r}\end{aligned}$$

注意到 $z/r=\cos\theta$，于是：

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\mu_0\omega p_0\cos\theta}{4\pi r}\left\{\frac{\omega}{c}\cos[\omega(t-\frac{r}{c})]-\frac{1}{r}\sin[\omega(t-\frac{r}{c})]\right\}$$

立刻就能看出来：

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$$

也便是我们要证明的 Lorenz 规范。 □

1.4 0612

例 1.4.1. 无限长的矩形波导管（横截面尺寸为 $a\times b$），在 $z=0$ 处被一块垂直插入的理想导体版完全封闭。求 $-\infty<z\leq 0$ 这一段管内可能存在的电磁波模式。

解. 因为这不是一个无限长的波导管，所以我们不能将 Helmholtz 方程约化到二维，而应该取：

$$\nabla^2 u(x,y,z)+k^2u(x,y,z)=0$$

作为波动模式满足的方程。分离变量法告诉我们，我们可以获得如下的模式解：

$$u(x,y,z)=[C_1\cos(k_xx)+D_1\sin(k_xx)][C_2\cos(k_yy)+D_2\sin(k_yy)][C_3\cos(k_zz)+D_3\sin(k_zz)]$$

首先取 $E_x=u(x,y,z)$，法向边界条件为：

$$\partial_xE_x\big|_{x=0}=0,\quad \partial_xE_x\big|_{x=a}=0$$
$$\Rightarrow D_1=0,\qquad k_x=\frac{m\pi}{a},m=0,1,2\dots$$

而切向边界条件为：

$$E_x\big|_{y=0}=E_x\big|_{y=b}=E_x\big|_{z=0}=0$$
$$\Rightarrow C_2=0,C_3=0\qquad k_y=\frac{n\pi}{b},n=0,1,2\dots$$

从而可以给出：$E_x(x,y,z)=E_1\cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\sin(k_zz)$
同理给出：$E_y(x,y,z)=E_2\sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)\sin(k_zz)$

而 z 方向对应的边界条件有所不同；法向边界条件为：

$$\partial_zE_z\big|_{z=0}=0\Rightarrow D_3=0$$

而切向边界条件是：

$$E_z\big|_{x=0}=E_z\big|_{x=a}=E_z\big|_{y=0}=E_z\big|_{y=0}=0$$
$$\Rightarrow C_1=C_2=0,\qquad k_x=\frac{m\pi}{a},m=0,1,2\dots;\quad k_y=\frac{n\pi}{b},n=0,1,2\dots$$

因而 $E_z(x,y,z)=E_3\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\cos(k_zz)$，我们发现这给出的解实际上是一样的。

另外，我们还有一个分离变量法带来的模式的约束：$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2$。取正频率解，可以给出 $k_z=\sqrt{k^2-\frac{m^2\pi^2}{a^2}-\frac{n^2\pi^2}{b^2}}$。这样我们就知道，在这种半无限长的波导管中，一样可以有 (m,n) 两参数决定的波模，其三个方向电场的频率为：

$$(\omega_x,\omega_y,\omega_z)=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}(\frac{m\pi}{a},\frac{n\pi}{b},\sqrt{k^2-(\frac{m\pi}{a})^2-(\frac{n\pi}{b})^2})$$

这就意味着这种波导管内的电磁波模式也是两个自由度的，散度条件同样告诉我们 E_1, E_2, E_3 也只有两个是独立的；这种波导管和无限长波导管的区别是，无限长波导管在任意 z 处，其 E_x, E_y, E_z 都是有平移不变性的，但是对这种半无限长的波导管，E_x, E_y, E_z 沿着 z 方向的平移不变性破缺成为以 $(k^2-(\frac{m\pi}{a})^2-(\frac{n\pi}{b})^2)^{-1/2}$ 为周期的周期平移对称性。 □

例 1.4.2. 证明整个谐振腔内的电场能量与磁场能量对时间的平均值相等。

解. 对于一个任意的谐振腔，其电场应该满足：

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{F}(\vec{k},\vec{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

其中 $\vec{k}$ 是谐振腔的特征波矢，满足 $k^2=\omega^2/c^2$，且 $\vec{k}\cdot\vec{F}=0$.

另一方面，利用 Maxwell 方程：$\omega\vec{B}=\vec{k}\times\vec{E}$，可以得到：

$$\vec{B}=\frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}=\frac{1}{\omega}\nabla\times\vec{F}\exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

因为此时电磁场具有相同的频率（周期），我们只需要考虑两场的空间能量密度在一个周期内的平均：

$$\begin{aligned}
W_E &= \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2=\frac{1}{2}\varepsilon F^2\\
W_B &= \frac{1}{2\mu}B_0^2=\frac{1}{2\omega^2\mu}(\vec{k}\times\vec{F})^2\\
&= \frac{1}{2\omega^2\mu}[k^2F^2-(\vec{k}\cdot\vec{F})^2]\\
&= \frac{1}{2\omega^2\mu}k^2F^2=\frac{1}{2}\varepsilon F^2
\end{aligned}$$

最后一步使用了波矢关系 $k^2=\omega^2/c^2$，并计及光速 $c=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$. 这样我们就证明了，对于任意形状的谐振腔（只要他满足类似于方形谐振腔的单频双模谐振条件），就一定有谐振腔内**处处满足**电场能量与磁场能量对时间平均相等。 □

例 1.4.3. 证明矩形波导管内不存在 TM_{0n} 或者 TM_{m0} 波.

解. 通过解波动方程，我们已经得到：

$$\begin{aligned}
H_x(x,y) &= -\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu}\left(k_yA_3-\mathrm{i}k_zA_2\right)\sin\left(k_xx\right)\cos\left(k_yy\right)\\
H_y(x,y) &= -\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu}\left(\mathrm{i}k_zA_1-k_xA_3\right)\cos\left(k_xx\right)\sin\left(k_yy\right)\\
H_z(x,y) &= -\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu}\left(k_xA_2-k_yA_1\right)\cos\left(k_xx\right)\cos\left(k_yy\right)
\end{aligned}$$

我们假设横磁波条件，故有 $k_xA_2-k_yA_1=0$

- 倘若 $m=0$，则根据 $k_x=\frac{m\pi}{a}$，可知 $k_x=0$，同时因为 $k_y=\frac{n\pi}{b}\neq 0$，故横波条件要求 $A_1=0$；代入上面的磁场表达式立刻得到 $H_x=H_y=0$，于是这个磁场不存在。

- 倘若 $n=0$，则根据 $k_y=\dfrac{n\pi}{b}$，可知 $k_y=0$，同时因为 $k_x=\dfrac{m\pi}{a}\neq 0$，故横波条件要求 $A_2=0$；代入上面的磁场表达式立刻得到 $H_x=H_y=0$，于是这个磁场不存在。

由上面的讨论，我们假定的横波条件是不成立的，即 TM_{0n} 和 TM_{m0} 都是不合法的。 □

例 1.4.4. 频率为 3×10^{10} 赫兹的微波，在 $0.8\text{cm}\times0.5\text{cm}$ 的矩形波导管内能以什么波模传播？

解. 对于用 (m,n) 标记的模式，我们知道其传播的频率最大不能超过：

$$f_{max}=\frac{\omega_{max}}{2\pi}=\frac{c_0}{2}\sqrt{(\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2}$$

现在我们取 $c_0=3.0\times10^8\text{m/s}$，$a=8\times10^{-3}\text{m},b=5\times10^{-3}\text{m}$，枚举 m,n 得到如下结果：

$$f_{10}=1.875\times10^{10}\text{Hz}$$
$$f_{01}=3.000\times10^{10}\text{Hz}$$
$$f_{11}=3.538\times10^{10}\text{Hz}$$

传播条件是 $f\geq f_{mn}$ 这表明，这个波只能按照 $(1,0)$ 模式传播。而根据之前的论断，这个模式只能是 TE_{10}.

另外，$(0,1)$ 模式比较特殊，通常考虑到 $\omega=0$ 会导致无法随时间波动，所以这并不是一个正常的传播模式。 □

例 1.4.5. 一对无限大的平行理想导体板，相距为 b，电磁波沿平行于板面的 z 方向传播。设电磁波在 x 方向是均匀的，求可能传播的波模和每种波模的截止频率。

解. 因为在 x 方向上电磁波是均匀的，我们可以把电磁波写为：

$$\vec{E}=\vec{E}(y)\exp\mathrm{i}(k_z z-\omega t)$$

其中每一个直角分量都应该满足 Helmholtz 方程。注意到边界条件为：

$$E_x\big|_{y=0}=E_x\big|_{y=b}=E_z\big|_{y=0}=E_z\big|_{y=b}=0$$
$$\partial_y E_y\big|_{y=0}=\partial_y E_y\big|_{y=b}=0$$

对通解应用边界条件，可以给出：

$$E_x=A_x\sin(k_y y),\quad E_y=A_y\cos(k_y y),\quad E_z=A_z\sin(k_y y)$$

并且波矢应该满足：

$$k_y=\frac{n\pi}{b},n=0,1,2\ldots$$
$$k_z=\sqrt{k^2-(\frac{n\pi}{b})^2}$$

另外，散度条件 $\nabla\cdot\vec{E}=0$ 要求 A_1 自由，$A_2k_y=iA_3k_z$，所以对于每一个 m，有两个独立的模式。他们有共同的截止频率 $\omega_m=\dfrac{m\pi c}{b}$. □

李雨桥、刘元彻

2024 年 6 月 16 日