经典电动力学

Chapter 2. 电动力学的理论基础

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

hyang@ustc.edu.cn

May 10, 2024

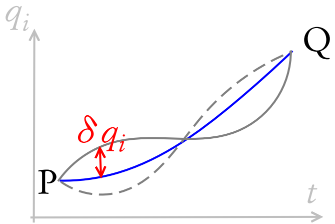
1. 分析力学的形式体系 (Formalism) 简述
   - 狭义相对论意义下的作用量泛函
   - 自由粒子
   - 拓展：一般参考系中自由粒子的运动方程
     - 孪生子佯谬的解决方案
   - 自由标量场
2. 电磁相互作用的经典场论
   - 应该用什么经典场描写电磁场？
   - 规范原理
   - 从对称性出发构造电磁相互作用拉氏量
   - 麦克斯韦方程组
   - 两个重要的 4-标量
   - 拓展：电磁场拉氏密度中是否需要加入陈-西蒙斯项？
   - 电磁场强度在洛伦兹推动变换下的变换法则
   - 连续对称性与诺特定理
   - 时空平移对称性与能动量守恒
   - 空间转动对称性与角动量守恒
   - 电磁场的哈密顿形式体系
3. 带电粒子与电磁场的相互作用

作用量泛函

1. 我们选择把带电粒子与电磁场纳入到分析力学的形式体系，通过定义洛伦兹不变的作用量泛函建立符合相对性原理的电动力学基本方程组.

哈密顿原理 (最小作用量原理):

一个保守力学体系，在相同的时间内的任何真实的动力学过程 $P \to Q$，必定满足作用量泛函



$$S = \int_P^Q L(q_i, \dot{q}_i)\,\mathrm{d}t$$

取极值，即：

$$\delta S = 0$$

作用量泛函 S 的核 $L(q_i, \dot{q}_i)$ 称为体系的拉氏函数，其中 q_i 为广义坐标，$\dot{q}_i$ 为广义速度. 独立 q_i 的数目称为体系的自由度数.

拉氏方程

保守力体系经典物理意义下的动力学方程，即 $\delta S = 0$，可以通过拉氏函数表为：

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0}$$

此式称为拉氏 (Lagrangian) 方程.

证明如下.

若广义坐标 q_i 发生了一个变分 δq_i，它将诱导拉氏函数发生如下变分：

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i$$

交换求时间导数和求变分的次序，即令 $\delta \dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_i)$，可把上式重新写为：

$$\delta L = \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)$$

哈密顿原理 $\delta S=0$ 表述为：

$$
\begin{aligned}
0=\delta S &= \int_P^Q \delta L\,\mathrm{d}t \\
&= \int_P^Q \mathrm{d}t\,\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i+\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)\Big|_P^Q
\end{aligned}
$$

注意到广义坐标在路径的两个端点处的变分均为零，$\delta q_i|_P=0$，$\delta q_i|_Q=0$，上式最后一项为零. 所以：

$$
0=\int_P^Q \mathrm{d}t\,\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i
$$

由于 δq_i 的任意性，上式的成立意味着：

$$
\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=0
$$

这正是期待的拉氏方程.

- 在非相对论性的牛顿力学中，保守力体系的拉氏函数常表为体系动能与势能之差：

$$L=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}m\dot{q}_i^2-V(q_i)\right]$$

代入到拉氏方程中，即得保守力情形下的牛顿第二定律：

$$m\ddot{q}_i=-\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

- 拉氏函数 L 具有能量的量纲． 因为

$$S=\int_P^Q L(q_i,\dot{q}_i)\,\mathrm{d}t$$

作用量泛函 S 具有能量与时间乘积的量纲：

$$[S]=ML^2T^{-1}\qquad\rightsquigarrow\quad\frac{S}{\hbar}\sim\text{dimensionless}$$

S 的量纲实际上也是角动量的量纲．

- 对经典力学或者经典场体系的描述也可以采取哈密顿正则程式 (Formalism). 假定体系的状态由正则坐标 q_i 和与之共轭的正则动量 p_i

$$p_i(t) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

描写. 体系的动力学决定于哈密顿量 (不显含时间参数时, 哈密顿量可诠释为体系的总能量):

$$H(q_i,\ p_i) \equiv \sum_{i=1}^{N} p_i \dot{q}_i - L(q_i,\ \dot{q}_i)$$

动力学方程是所谓哈密顿正则方程组:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}}$$

它实际上与拉氏方程等价.

- 采取了哈密顿正则程式后，可以定义任意两个物理量 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 之间的泊松括号：

$$\{\mathscr{A},\mathscr{B}\} \equiv \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial q_i}\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial p_i} - \frac{\partial\mathscr{B}}{\partial q_i}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial p_i}\right]$$

特别地，

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = \{q_i, q_j\} = 0$$

泊松括号具有性质：

$$\{\mathscr{A},\mathscr{B}\} = -\{\mathscr{B},\mathscr{A}\}$$
$$\{\mathscr{A},\mathscr{B}\mathscr{C}\} = \mathscr{B}\{\mathscr{A},\mathscr{C}\} + \{\mathscr{A},\mathscr{B}\}\mathscr{C}$$
$$\{\mathscr{A},\{\mathscr{B},\mathscr{C}\}\} + \{\mathscr{B},\{\mathscr{C},\mathscr{A}\}\} + \{\mathscr{C},\{\mathscr{A},\mathscr{B}\}\} = 0$$

- 利用泊松括号可以把哈密顿正则方程组重新表达为：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \{q_i, H\}, \qquad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = \{p_i, H\}}$$

相对性原理对作用量泛函的限制

$\mathscr{F}$: 为了满足相对性原理，必须把体系的作用量泛函构造为闵氏空间 $\mathbb{M}_4$ 中的 4-标量.

- 在相对论性经典力学中，质点的作用量泛函常表达为：

$$S = \int \mathcal{L}(x^\mu,\ \dot{x}^\mu)\,\mathrm{d}\tau \qquad \hookleftarrow\ \dot{x}^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

式中 τ 为质点演化的固有时. 体系拉氏函数 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x^\mu,\ \dot{x}^\mu)$ 的选择有很大的任意性，相对性原理仅要求它是一个具有能量量纲的 4-标量.

极值条件 $\delta S = 0$ 表达为拉氏方程：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = 0$$

鉴于 τ 与 $\mathcal{L}$ 均为 4-标量而 x^μ 和 $\dot{x}^\mu$ 均为 4-矢量，如此拉氏方程中各项都是相同类型的 4-张量 $\rightsquigarrow$ 此拉氏方程具有明显的洛伦兹变换下的不变性.

- 把 $x^\mu(\tau)$ 看作粒子的正则坐标, 引入与之共轭的正则动量

$$\pi_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}$$

并通过勒让德变换定义体系的哈密顿函数:

$$\mathcal{H} = \pi_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} \quad \rightsquigarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}(x^\mu, \pi_\mu)$$

我们也可以把对粒子的描写纳入到哈密顿程式. 此情形下作用量泛函的极值条件重新表达为哈密顿正则方程组:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\mu}, \qquad \frac{\mathrm{d}\pi_\mu}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu}}$$

哈密顿正则方程组与拉氏方程是等价的.

- 鉴于 τ 与 $\mathcal{H}$ 均为 4-标量而 x^μ 和 π_μ 均为 4-矢量, 哈密顿正则方程组也具有明显的洛伦兹变换不变性.

- 考虑到体系拉氏函数与哈密顿量定义的任意性，$\mathcal{L}$ 与 $\mathcal{H}$ 本身并没有直接的物理意义[1]．体系的物理量（能量、动量等），必须从对称性与守恒定律的关系出发做出定义．

现在简述沟通力学体系对称性与守恒定律的诺特 (Noether) 定理．设 $x^\mu(\tau) \rightsquigarrow x'^\mu(\tau) = x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$ 是力学体系的一种对称性，即 $\delta x^\mu(\tau)$ 并不导致作用量泛函的改变：

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta S = \int d\tau \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \delta \dot{x}^\mu \right) \\
&= \int d\tau \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} \right) \\
&= \int d\tau \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu \right) + \int d\tau \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \delta x^\mu \\
&= \int d\tau \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu \right)
\end{aligned}
$$

最后一步使用了拉氏方程（体系沿着真实的经典路径运动）．

---

[1]特别地，不能沿用非相对论性经典力学的习惯，把 $\mathcal{L}$ 误解为体系动能与势能之差、把 $\mathcal{H}$ 误解为体系的总能量．

所以,

$$\boxed{\delta x^\mu \ : \ \delta S = 0 \ \rightsquigarrow \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}\,\delta x^\mu\right) = 0}$$

这就是相对论力学体系情形下的诺特定理.

1. $\delta x^\mu = \varepsilon^\mu$ (常 4-矢) 表示无穷小的时空平移变换. 倘若体系具有时空平移变换下的不变性, 那么相应的守恒定律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}\,\varepsilon^\mu\right) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}\right) = 0$$

就诠释为体系的能量、动量守恒定律:

$$\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0 \qquad \hookleftarrow \ p_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}$$

4-矢量 p^μ 称为力学体系的 4-动量, 其时间分量与空间分量分别诠释为体系的能量与物理动量:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c},\, \boldsymbol{p}\right)$$

- 在相对论性经典场论中，场 $\Psi(x)$ 的作用量泛函常表达为：

$$S=\int \mathscr{L}(\Psi,\ \partial_\mu\Psi)\,\mathrm{d}^4x$$

$\mathscr{L}=\mathscr{L}(x)$ 称为经典场体系的拉氏函数密度 (Lagrangian)，它必须是一个 4-标量. 拉氏密度的量纲为 $[\mathscr{L}(x)]=ML^{-2}T^{-1}$.

- 极值条件 $\delta S=0$ 可等价地表达为如下拉氏方程：

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Psi}-\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)}\right]=0$$

倘若 Ψ 为 4-张量，则此经典场的拉氏方程明显地是洛伦兹不变的，从而满足了相对性原理对于候选物理规律的资格审查.

我们现在以标量场为例，讨论一下经典场情形下的诺特定理. 设 $\Psi=\Psi(x)$ 为 $\mathbb{M}_4$ 空间中的一个 4-标量场. 倘若 Ψ 因为某种原因发生了一个无穷小改变：

$$\Psi(x)\quad\rightsquigarrow\quad\Psi'(x)=\Psi(x)+\delta\Psi(x)$$

它引起的场 $\Psi(x)$ 拉氏密度的改变为:

$$\mathscr{L}(x) \quad \rightsquigarrow \ \mathscr{L}\,'(x) = \mathscr{L}(x) + \delta\mathscr{L}(x)$$

其中,

$$\begin{aligned}
\delta\mathscr{L}(x) \quad &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Psi(x)}\,\delta\Psi(x) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi(x))}\,\delta\partial_\mu\Psi(x) \\
&= \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi(x))}\,\delta\Psi(x)\right] + \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Psi(x)} - \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi(x))}\right]\delta\Psi(x) \\
&= \partial_\mu j^\mu(x) + \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Psi(x)} - \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi(x))}\right]\delta\Psi(x)
\end{aligned}$$

右端第一项中出现的

$$j^\mu(x) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi(x))}\,\delta\Psi(x)$$

是一个 4-矢量, 而第二项正比于经典场作用量泛函对场量 $\Psi(x)$ 的泛函导数.

最基本的泛函导数是:

$$\frac{\delta\Psi(y)}{\delta\Psi(x)} = \delta^{(4)}(x-y)$$

因为,

$$S = \int \mathscr{L}(y)\,\mathrm{d}^4 y = \int \mathscr{L}(\Psi(y),\, \partial_\mu\Psi(y))\,\mathrm{d}^4 y$$

作用量泛函对场量 $\Psi(x)$ 的泛函导数计算如下:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta\Psi(x)} &= \int \mathrm{d}^4 y \left[\frac{\partial\mathscr{L}(y)}{\partial\Psi(y)}\frac{\delta\Psi(y)}{\delta\Psi(x)} + \frac{\partial\mathscr{L}(y)}{\partial(\partial_\mu\Psi(y))}\frac{\delta(\partial_\mu\Psi(y))}{\delta\Psi(x)}\right] \\
&= \int \mathrm{d}^4 y \left[\frac{\partial\mathscr{L}(y)}{\partial\Psi(y)}\delta^{(4)}(x-y) + \frac{\partial\mathscr{L}(y)}{\partial(\partial_\mu\Psi(y))}\frac{\partial\delta^{(4)}(x-y)}{\partial y^\mu}\right] \\
&= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Psi(x)} - \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi(x))}
\end{aligned}$$

所以，可以把场量的无穷小改变 $\delta\Psi(x)$ 所引起的经典场拉氏密度的改变表达为：

$$\delta\mathscr{L}(x)=\partial_\mu j^\mu(x)+\frac{\delta S}{\delta\Psi(x)}\,\delta\Psi(x)$$

考虑到 $\Psi(x)$ 的真实演化遵从拉氏方程，

$$\frac{\delta S}{\delta\Psi(x)}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Psi(x)}-\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi(x))}=0$$

我们有：

$$\partial_\mu j^\mu(x)=\delta\mathscr{L}(x)$$

- 倘若 $\delta\Psi(x)\ \rightsquigarrow\delta\mathscr{L}(x)=0$，则称 $\delta\Psi(x)$ 为经典场体系的一种对称性. 与其相伴的守恒定律为：

  $$\partial_\mu j^\mu(x)=0$$

  4-矢量 $j^\mu(x)$ 就称为此经典场相应于这个对称性的守恒流.

- 倘若 $\delta\Psi(x)$ 是由时空坐标的平移变换 $\delta x^\mu = \varepsilon^\mu$ 引起的，

$$\delta\Psi(x) = \frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu}\varepsilon^\mu \quad \rightsquigarrow \quad \delta\mathscr{L}(x) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^\mu}\varepsilon^\mu = \partial_\mu\left(\mathscr{L}\varepsilon^\mu\right)$$

虽然 $\delta\mathscr{L} \neq 0$，但如此 $\delta\Psi(x)$ 仍为经典场体系的一种对称性（时空平移对称性）. 与其相伴的守恒定律

$$\partial^\mu T_{\mu\nu}(x) = 0$$

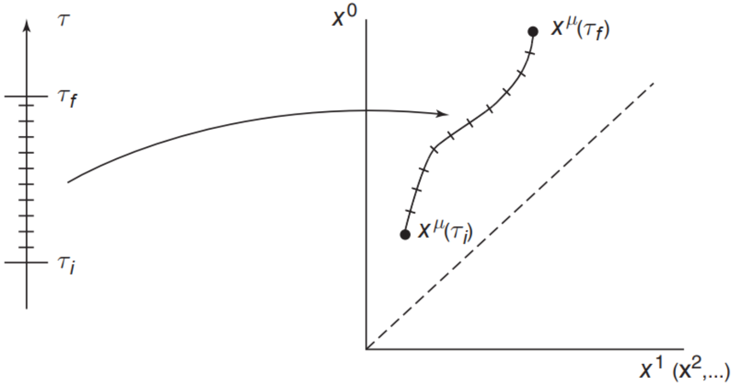
称为体系的能量、动量守恒定律. 二阶 4-张量 $T_{\mu\nu}(x)$

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial^\mu\Psi(x))}\partial_\nu\Psi(x) - \eta_{\mu\nu}\mathscr{L}(x)$$

诠释为此经典场的能量动量张量[2].

[2] T_{00} 与 T_{0i} 分别诠释为经典场在 $\mathbb{E}_3$ 中的能量体密度与动量体密度，而 T_{ij} 诠释为场的动量流密度张量.

自由粒子



我们先看看相对论力学对自由粒子的描写. 设粒子质量为 m, 其在 $\mathbb{M}_4$ 中的运动轨迹(世界线)可以刻化为:

$$x^\mu = x^\mu(\tau), \qquad \tau_i \le \tau \le \tau_f$$

粒子的世界线(world-line)上, 相邻两点之间的间隔可表为:

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = \eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}(\mathrm{d}\tau)^2 = U^\mu U_\mu (\mathrm{d}\tau)^2 = -c^2(\mathrm{d}\tau)^2 < 0$$

- 立足于 $\mathbb{M}_4$ 的几何, 可以把 $\sqrt{-\mathrm{d}s^2}$ 理解为粒子世界线上相邻两点之间的微元弧长, 它是一个 4-标量.
- 对于连接 $x_i^\mu = x^\mu(\tau_i)$ 与 $x_f^\mu = x^\mu(\tau_f)$ 的其他路径[3],

$$\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} \neq -c^2$$

这些候选路径上相邻两点之间的微元弧长为:

$$\sqrt{-\mathrm{d}s^2} = \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}}\,\mathrm{d}\tau$$

$\sqrt{-\mathrm{d}s^2}$ 仍是一个 4-标量, $\left[\sqrt{-\mathrm{d}s^2}\right] = L$.

[3]因此, $U^\mu U_\mu = -c^2$ 常称作是粒子的质壳条件.

自由粒子的拉氏函数可以定义为：

$$\mathcal{L} = -mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}} = -mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} \qquad \hookleftarrow \quad \dot{x}^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

如此定义的 $\mathcal{L}$ 既是一个 4-标量，又具有能量的量纲[4]，是相对论力学意义下自由粒子合格的拉氏函数.

不难看出：

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu} = mc\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}$$

这里约定 $\dot{x}^2 \equiv \eta_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$. 所以，自由粒子情形下的拉氏方程 (亦即自由粒子世界线方程)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu} = 0$$

表达为：

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}\right) \qquad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2x_\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = 0$$

[4]从而保证了作用量泛函具有角动量量纲.

上面的计算中最后一步使用了粒子的质壳条件 $\dot{x}^2 = -c^2$.

- 倘若把对自由粒子的描述纳入到哈密顿程式, 则需要引入与粒子正则坐标 $x^\mu(\tau)$ 共轭的正则动量

$$\pi_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = mc\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \qquad \rightsquigarrow \; \pi^\mu \pi_\mu = -m^2c^2$$

与哈密顿量:

$$\mathcal{H} \equiv \pi_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} = mc\frac{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} + mc\sqrt{-\dot{x}^2}$$

不过很显然,

$$\mathcal{H} = 0$$

所以, 依托 $\mathcal{L} = -mc\sqrt{-\dot{x}^2}$ 的勒让德变换并不能建立起自由粒子有意义的哈密顿表述[5].

[5] 当然, 建立在 $\mathcal{L} = -mc\sqrt{-\dot{x}^2}$ 基础上的自由粒子拉氏表述仍是合理的.

我们也可以把自由粒子的拉氏函数重新选择为：

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{m}{2}\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{m}{2}\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

如此 $\tilde{\mathcal{L}}$ 既是一个 4-标量，又具有能量的量纲，从而也是相对论力学意义下自由粒子合格的拉氏函数[6].

不难看出：

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial x^\mu} = 0, \qquad \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{x}^\mu} = m\dot{x}_\mu$$

按照新定义的拉氏函数 $\tilde{\mathcal{L}}$，描写自由粒子动力学演化的拉氏方程

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{x}^\mu} = 0$$

表达为：

$$0 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(m\dot{x}_\mu\right) = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2x_\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = 0$$

这正是我们期望的结果，也与 $\mathcal{L} = -mc\sqrt{-\dot{x}^2}$ 满足的拉氏方程结论一致.

---

[6]切忌把 $\tilde{\mathcal{L}}$ 曲解为自由粒子的动能. 请愿意动脑筋的同学想想其中的道理.

依托新拉氏函数 $\tilde{\mathcal{L}}$ 的勒让德变换可以建立起自由粒子有意义的哈密顿表述.

- 视 $x^\mu(\tau)$ 为粒子的正则坐标,共轭的正则动量定义为:

$$\tilde{\pi}_\mu = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}^\mu} = m\dot{x}_\mu = mU_\mu$$

- 按照勒让德变换,自由粒子的哈密顿量定义为[7]:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\pi}_\mu \dot{x}^\mu - \tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2m}\tilde{\pi}_\mu \tilde{\pi}^\mu = \frac{1}{2m}\tilde{\pi}^2 < 0$$

因此,自由粒子的哈密顿正则运动方程组为:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{\pi}^\mu} = \tilde{\pi}_\mu, \quad \frac{\mathrm{d}\tilde{\pi}_\mu}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial x^\mu} = 0} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 x_\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = 0$$

[7]也不能把 $\tilde{\mathcal{H}}$ 曲解为自由粒子的动能.

- 因为
$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\pi}_\mu}{\mathrm{d}\tau}=0$$
$\tilde{\pi}_\mu=mU_\mu$ 实际上描写了自由粒子的一组守恒量，通常将其标记为 4-动量：
$$\boxed{p_\mu=mU_\mu=m\gamma_u\left(-c,\ u_i\right)}$$

- 这个守恒量 4-矢量的时间分量与空间分量分别对应于自由粒子作用量泛函在时间平移与空间平移变换下的不变性，因此可以诠释为粒子的能量 E 与动量 $\boldsymbol{p}$：
$$p^\mu=\left(\frac{E}{c},\ \boldsymbol{p}\right)\qquad\rightsquigarrow\ p_\mu=\left(-\frac{E}{c},\ \boldsymbol{p}\right)$$

- 质壳条件 $\dot{x}^2=-c^2$ 可用粒子的 4-动量等价地表达为：
$$\boxed{p_\mu p^\mu=-m^2c^2}\qquad\rightsquigarrow\ p^2=-m^2c^2$$
它实际上就是相对论意义下自由粒子的能量、动量关系式 $E^2=m^2c^4+\boldsymbol{p}^2c^2$.

- 根据 4-动量的定义 $p^\mu = mU^\mu$ 以及 4-速度 U^μ 和粒子物理速度 $\boldsymbol{u}$ 之间的关系，相对论意义下粒子能量、动量表达为：

$$\boxed{E = cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}}, \qquad \boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}}}$$

即使粒子静止不动，它也具有非零的能量：

$$E_0 = mc^2$$

有质量粒子静止能量的揭示是狭义相对论最重要的成果之一，它为原子能的开发与利用奠定了理论基础.

- 粒子因为运动而具有的能量称为动能. 因此，相对论力学中粒子动能的定义是：

$$K = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} - 1\right]$$

不难证明在 $u \ll c$ 的低速近似下，K 的上述表达式将回归牛顿力学中质点动能的表达式：

$$K \approx \frac{1}{2}mu^2$$

$\mathbb{M}_4$ 的非平庸度规 $g_{\mu\nu}(x)$

狭义相对论不仅允许选取惯性参考系，事实上也允许选取加速参考系.

为了方便地在狭义相对论理论中使用加速参考系，需要在闵氏空间 $\mathbb{M}_4$ 中引入非平庸度规张量 $g_{\mu\nu}(x) \neq \eta_{\mu\nu}$.

- 在某个选定的参考系 Σ 中，$\mathbb{M}_4$ 中任一场点 P 的 4-位置坐标记为：

  $$x^\mu = (x^0,\ r) = (ct,\ x^1,\ x^2,\ x^3),$$

  相邻两点之间的间隔定义为：

  $$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$$

  $g_{\mu\nu}(x)$ 称为 Σ 系中 $\mathbb{M}_4$ 的度规张量，一般情形下它是时空坐标的函数. 因为 $\mathbb{M}_4$ 是赝欧氏空间，度规矩阵的行列式恒负：

  $$g = \det g_{\mu\nu} < 0$$

- 倘若 Σ 是惯性参考系且在其中选择了笛卡尔直角坐标系，度规张量 $g_{\mu\nu}$ 退化为 $\eta_{\mu\nu}$，其非零分量仅有 $\eta_{00} = -1$ 与

$$\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$$

写成矩阵，即为：

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \rightsquigarrow \quad \det \eta_{\mu\nu} = -1 < 0$$

$\mathbb{M}_4$ 中相邻两点之间的间隔正是我们期望的形式：

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &= -(c dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \end{aligned}$$

- 在参考系 Σ 中, $\mathbb{M}_4$ 的张量仍区分为逆变张量 $T^{\alpha\beta\cdots}$、协变张量 $T_{\alpha\beta\cdots}$ 和混合张量 $T^{\alpha\cdots}{}_{\beta\cdots}$ 三类. 倘若在 Σ 系中 $\mathbb{M}_4$ 的度规是 $g_{\mu\nu}$, 则张量指标的升降由 4-张量与 $g_{\mu\nu}$ 或 $g^{\mu\nu}$ 之间的缩并实现, 此处 $g^{\mu\nu}$ 是逆度规张量:

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\rho} = \delta^{\mu}_{\rho}$$

例如:

$$g_{\mu\nu}V^{\nu} = V_{\mu}, \quad g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}T^{\alpha\beta} = T_{\mu\nu}$$

或者:

$$g_{\mu\nu}W^{\nu\beta} = W_{\mu}{}^{\beta}, \quad g^{\mu\nu}T_{\nu\rho} = T^{\mu}{}_{\rho}$$

- 引入度规 $g_{\mu\nu}$ 后, 粒子 4-速度 $U^{\mu} = \mathrm{d}x^{\mu}/\mathrm{d}\tau$ 满足的恒等式表达为:

$$\boxed{U^{\mu}U_{\mu} = g_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu} = -c^2}$$

换言之, 4-动量 $p^{\mu} = mU^{\mu}$ 服从的重要关系式应重新写成:

$$\boxed{p^{\mu}p_{\mu} = -m^2c^2}$$

- 遵循光速不变原理，M_4 空间中相邻两点之间的间隔不受参考系变换 $x^\mu \to x'^\mu(x)$ 的影响：

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu &= \mathrm{d}s^2 \\ &= \mathrm{d}s'^2 \\ &= g'_{\alpha\beta}(x')\mathrm{d}x'^\alpha \mathrm{d}x'^\beta \\ &= g'_{\alpha\beta}(x')\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \end{aligned}$$

所以，

$$g_{\mu\nu}(x) = g'_{\alpha\beta}(x')\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}$$

亦即：

$$\boxed{g'_{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\,g_{\mu\nu}(x)}$$

此乃度规张量在两个参考系 $\Sigma(x)$ 和 $\Sigma'(x')$ 之间的变换关系.

- 倘若两个参考系 $\Sigma(x)$ 和 $\Sigma'(x')$ 均为惯性参考系，则二者之间的变换是 Lorentz 变换[8]：

$$x^\mu \quad \to \quad x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu$$

计及惯性参考系中的度规张量皆为 $\eta_{\mu\nu}$ 的事实，进而有：

$$\boxed{\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \, \eta_{\alpha\beta}}$$

此式正是洛伦兹变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 的赝正交矩阵性质.

---

[8] 这里假设在二惯性系中都采取了笛卡尔直角坐标系.

- 假设观测者 A 相对于实验室参考系 $\Sigma(X)$ 沿 X 轴作加速度为 $a=\sqrt{\mathscr{A}^{\mu}\mathscr{A}_{\mu}}$ 的匀加速直线运动. A 的自身系形成了一个加速参考系 $\Sigma'(x)$. $\mathbb{M}_4$ 中的同一时空点 P 在两个参考系中的笛卡尔直角坐标分别为:

$$X^{\mu}=(cT,\ X,\ Y,\ Z),\qquad x^{\mu}=(ct,\ x,\ y,\ z)$$

约定二参考系在 $T=t=0$ 时刻重合, 则时空点 P 在两个参考系中的坐标通过非线性的 Møller 变换相联系:

$$X=\left(x+\frac{c^2}{a}\right)\cosh\frac{at}{c}-\frac{c^2}{a},\qquad Y=y,\qquad Z=z,$$
$$T=\left(\frac{c}{a}+\frac{x}{c}\right)\sinh\frac{at}{c}$$

$\mathbb{M}_4$ 的度规张量在两个参考系中分别为 $\eta_{\mu\nu}$ 和 $g_{\mu\nu}(x)$:

$$g_{\mu\nu}(x)=\frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial X^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\,\eta_{\alpha\beta}$$

不难求出其具体表达式：

$$g_{00}(x) = -\left(1 + ax/c^2\right)^2, \quad g_{0j}(x) = g_{i0}(x) = 0, \quad g_{ij}(x) = \delta_{ij}$$

所以，在 A 的自身系 $\Sigma'(x)$ 中，相邻二事件之间的间隔表达为：

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = -\left(1 + ax/c^2\right)^2 c^2(\mathrm{d}t)^2 + (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}$$

- 考虑 A 的自身系 Σ' 中与观测者 A 保持相对静止的一个时钟. 因为该时钟在 Σ' 系中始终处在位置坐标为 $(x,\ y,\ z)$ 的同一地点，它相继经历的二事件的间隔是：

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 + ax/c^2\right)^2 c^2(\mathrm{d}t)^2$$

式中 $\mathrm{d}t$ 是该时钟记录的二事件之间的坐标时间. 倘若用 $\mathrm{d}\tau$ 表示二事件之间的固有时，$\mathrm{d}s^2 = -c^2(\mathrm{d}\tau)^2$，我们有：

$$\boxed{\mathrm{d}\tau = \left(1 + ax/c^2\right)\ \mathrm{d}t}$$

任一参考系中自由粒子的运动方程

相对论力学中，体系的作用量

$$S = \int_P^Q \mathrm{d}t\, L = \int_P^Q \mathrm{d}\tau\, \gamma L = \int_P^Q \mathrm{d}\tau\, \mathscr{L}$$

必须是一个任意坐标变换下的 4-标量．这是相对性原理的要求．

1. L 称为 Lagrange 函数．$\mathscr{L} = \gamma L$ 必须是一个 4-标量．
2. 事实上，完全可以抛弃 L，而把 4-标量 $\mathscr{L}$ 作为体系的拉氏量．如此行事唯一需要付出的代价，就是在 $\mathscr{L}$ 中不能使用恒等式

$$U^\mu U_\mu = -c^2$$

以及与之等价的 $p^\mu p_\mu = -m^2c^2$．这些恒等式只能在拉氏方程成立的基础上使用，因此称为质壳 (mass-shell) 条件．

最小作用量原理 $\delta S = 0$ 可以表达为如下拉氏方程：

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = 0$$

式中 $\dot{x}^\mu := \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau$．

把 x^μ 看作质点的广义坐标，按下式定义其共轭正则动量：

$$p_\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^\mu}$$

可把拉氏方程改写为：

$$\dot{p}_\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^\mu}$$

式中 $\dot{p}_\mu = \mathrm{d}p_\mu/\mathrm{d}\tau$. 倘若 x^μ 是循环坐标，即拉氏量 $\mathscr{L}$ 不依赖于 x^μ，则 p_μ 是体系的一个守恒量.

质量为 m 的自由粒子的拉氏量可取为：

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} m\, U^\mu U_\mu = \frac{1}{2} m\, g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu, \quad U^\mu := \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \dot{x}^\mu$$

在惯性参考系中，

$$p_\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = m\, \eta_{\mu\nu} U^\nu, \quad \dot{p}_\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^\mu} = 0$$

即自由粒子的正则动量就是其物理的机械动量，它的 4 个分量皆是守恒量 (能量、动量均守恒).

下面从匀加速参考系的角度考察一下自由质点的运动. 在观测者 A 的自身系中, 自由粒子 m 的拉氏量表达为:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{1}{2} m\, g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} \\
&= \frac{1}{2} mc^2\, g_{00}(x) \dot{t}^2 + \frac{1}{2} m\, \delta_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \\
&= -\frac{1}{2} mc^2 \left(1 + ax/c^2\right)^2 \dot{t}^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)
\end{aligned}
$$

显然, t, y, z 均为体系的循环坐标, 相应的正则动量

$$
p_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{t}} = -mc \left(1 + ax/c^2\right)^2 \dot{t}, \quad p_2 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y},
$$

$$
p_3 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}
$$

皆为守恒量. 但因为

$$
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = -ma \left(1 + ax/c^2\right) \dot{t}^2 \neq 0
$$

$p_1 = m\dot{x}$ 不是守恒量. 这些论断与惯性系不尽相同.

拉氏方程求得为:

$$\ddot{x}+a\left(1+ax/c^2\right)\dot{t}^2=0,\quad \ddot{y}=0,\quad \ddot{z}=0,$$

$$\frac{2a}{c^2}\dot{x}\,\dot{t}+\left(1+ax/c^2\right)\ddot{t}=0$$

积分之,有:

$$-\left(1+ax/c^2\right)^2c^2\dot{t}^2+\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=-c^2$$

或者等价地,

$$\boxed{-\frac{(p_0)^2}{(1+ax/c^2)^2}+m^2\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)=-m^2c^2}$$

它可改写为 $g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu=-m^2c^2$, 正是我们所期望的加速系中自由粒子的能量、动量关系式.

现在我们有条件讨论著名的孪生子佯谬的解决方案了.

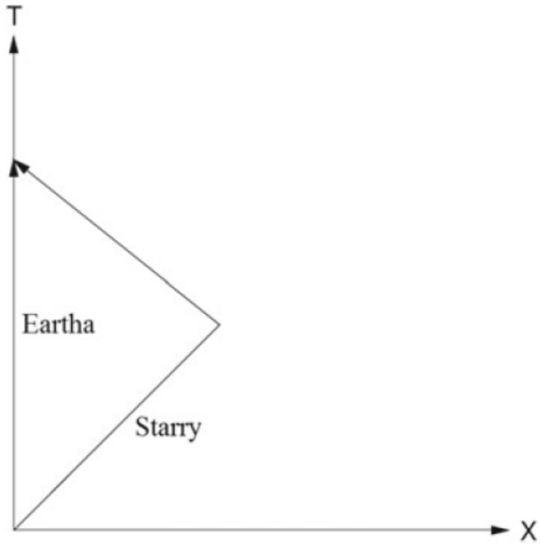
- 假设存在一对孪生子, Eartha 与 Starry.
- Eartha 始终站在地球上某固定地点 O. Starry 乘飞船进入太空向半人马座 α (Alpha Centauri) 航行.
- 倘若 Starry 到达半人马座 α 后立刻以原速率折返, 则当她与 Eartha 重逢时, Eartha 认为二人的年龄增量之间存在关系:

$$\Delta T_{\text{Eartha}} = \frac{\Delta T_{\text{Starry}}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

  此处 u 为 Starry 所乘飞船相对于地球的速率.
- 太阳系到半人马座 α 的空间距离 $L_0 \approx 4$ 光年. 倘若 $u = 0.8c$, 我们看到:

$$\Delta T_{\text{Eartha}} = \frac{2L_0}{u} = 10 \text{ year}, \qquad \Delta T_{\text{Starry}} = 6 \text{ year}$$

  即当孪生子重逢时, Eartha 认为自己比 Starry 年长了 4 岁.


T
Eartha
Starry
X

Starry 的观点如何呢?

- 首先, Starry 认定自己始终处于静止状态, 但 Eartha、地球以及半人马座 α 等以速率 u 运动.
- 以 Starry 的视角, 地球与半人马座 α 之间的空间距离形成了一把运动的直尺, 其长度为:

$$L = L_0\sqrt{1 - u^2/c^2} = 2.4 \text{ 光年}$$

因此, 孪生子重逢时, Starry 认为自己的年龄增量是:

$$\Delta t_{\text{Starry}} = \frac{2L}{u} = \frac{2 \times 2.4}{0.8} = 6 \text{ year}$$

即 $\Delta t_{\text{Starry}} = \Delta T_{\text{Starry}}$, 孪生子二人对 Starry 的年龄增量结论一致.

- 但 Starry 认为 Eartha 相当于是一个运动的时钟. 按照相对论的运动时钟延缓效应, Starry 认为 Eartha 的年龄增量应该是:

$$\Delta t_{\text{Eartha}} = \Delta t_{\text{Starry}}\sqrt{1 - u^2/c^2} = 3.6 \text{ year}$$

1. 孪生子关于 Eartha 年龄增量的分歧称为孪生子佯谬.

那么，哪里分析错了？

事实上，因为涉及从半人马座 α 折返这一动作，Starry 所处的飞船参考系不是惯性参考系. 囿于惯性系的讨论和分析不可能逻辑自洽地走出孪生子佯谬的困惑.

我们现在把 Starry 所处的飞船看作是一个加速度为 a 的加速参考系 Σ'.

1. 站在 Σ' 中观测，Eartha 的运动也不是匀速直线运动. Eartha 的速度在 $x_1 = L = 2.4$ 光年时开始下降，降为零后开始折返，此时地球与半人马座 α 之间的空间距离又变回为 $x_2 = L_0 = 4$ 光年.

按照加速参考系中自由粒子的运动方程，Starry 认为 Eartha 的运动服从如下方程：

$$p_t^2 - c^2\left(1 + ax/c^2\right)^2 = \left(1 + ax/c^2\right)^2 \dot{x}^2$$

$p_t = p_0/m$ 本质上是 Eartha 的能量，它是一个守恒量. 因为 $x = x_2$ 时 $\dot{x} = 0$(折返点)，我们有：

$$p_t = c\left(1 + ax_2/c^2\right)$$

按照 Eartha 的运动方程,

$$\mathrm{d}\tau = \frac{1 + ax/c^2}{\sqrt{p_t^2 - c^2 \left(1 + ax/c^2\right)^2}}\,\mathrm{d}x$$

积分之, 可知 Eartha 的固有时在速度从 u 降为零过程中的增量为:

$$\tau_{1\to 2} = \frac{c}{a}\sqrt{\left(1 + ax_2/c^2\right)^2 - \left(1 + ax_1/c^2\right)^2}$$

倘若取 $a \to \infty$ 的极限,

$$\tau_{1\to 2} = \frac{1}{c}\sqrt{x_2^2 - x_1^2} = \frac{1}{c}\sqrt{L_0^2 - L^2} = 3.2\ \text{year}$$

所以, Starry 对于 Eartha 年龄增量的正确结论应该是:

$$\Delta\tilde{t}_{\text{Earth}} = \Delta t_{\text{Eartha}} + 2\tau_{1\to 2} = 3.6 + 2 \times 3.2 = 10\ \text{year}$$

如此, 二人对于 Eartha 年龄增量的见解没有分歧. 孪生子佯谬得以完美消除.

自由标量场

设 $\Phi(x)$ 为 $\mathbb{M}_4$ 中的标量场，其拉氏密度可定义为：

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Phi^2 \qquad \rightsquigarrow \quad [\Phi] = M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$$

式中 m 称为标量场 $\Phi(x)$ 的质量参数，$[m] = M$. 我们默认 m 为 4-标量，如此 $\mathscr{L}$ 明显是 4-标量，从而从源头上保证了此标量场理论的参考系选择无关性.

因为 $\mathscr{L}$ 中未包含相互作用项，此拉氏密度描写的实际上是一个自由标量场的演化. 拉氏方程为：

$$\partial_\mu\partial^\mu\Phi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Phi = 0$$

这是一个洛伦兹不变的波动方程. $m \neq 0$ 意味着此标量场波动的能量传播速度 (即所谓群速度) 小于光速 c.

现在把标量场的描写纳入到哈密顿程式. 以 $\Phi(x)$ 作为相空间中场的正则坐标, 与之共轭的正则动量定义为:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial^0 \Phi(x))} = -\partial_0 \Phi(x) = \partial^0 \Phi(x)$$

决定经典场动力学演化的哈密顿密度根据拉氏密度 $\mathscr{L}$ 的勒让德变换定义:

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}(x) &= \pi(x)\partial^0\Phi(x) - \mathscr{L}(x) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_0\Phi(x)\partial^0\Phi(x) + \frac{1}{2}\partial_i\Phi(x)\partial^i\Phi(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Phi^2 \\
&= \frac{1}{2}\pi^2(x) + \frac{1}{2}\nabla\Phi(x)\cdot\nabla\Phi(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Phi^2
\end{aligned}$$

上式右端的表达式没有明晰的洛伦兹变换性质. 不过, 回忆标量场能量动量张量的定义式,

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial^\mu \Phi(x))}\partial_\nu\Phi(x) - \eta_{\mu\nu}\mathscr{L}(x)$$

我们辨认出 $\boxed{\mathscr{H}(x) = -T_{00}(x)}$.

1. 标量场的哈密顿密度 $\mathscr{H}$ 构成二阶 4-张量的 00 分量，它在洛伦兹变换下遵从二阶张量的变换法则.
2. $\mathscr{H}(x) = -T_{00}(x)$ 意味着可以在物理上把 $\mathscr{H}$ 诠释为标量场 $\Phi(x)$ 在 $\mathbb{E}_3$ 中的能量体密度. 换言之，可以把 $\Phi(x)$ 场的总能量定义为：

$$\begin{aligned} H &= \int_{\Omega} \mathscr{H}(t,\ r)\, \mathrm{d}^3 x \\ &= \int_{\Omega} \mathrm{d}^3 x \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi + \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \Phi^2\right] \end{aligned}$$

最后让我们补上自由标量场 $\Phi(x)$ 的哈密顿正则方程组：

$$\boxed{\partial^0 \Phi(t,\ r) = \frac{\delta H}{\delta \pi(t,\ r)}} = \pi(t,\ r),$$

$$\boxed{\partial^0 \pi(t,\ r) = -\frac{\delta H}{\delta \Phi(t,\ r)}} = \nabla^2 \Phi(t,\ r) - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \Phi(t,\ r)$$

$\mathcal{Q}$: 应该用什么经典场描写电磁场 ?

首先看看静电学的启迪.

静电势 $\phi(r)$ 是满足泊松方程的静态分布:

$$\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$$

做代换 $\nabla^2 \rightsquigarrow \partial_\mu\partial^\mu$, 并要求源与势同时依赖于时间参数 t 和空间位矢 r, 我们可以把这个方程提升为:

$$\boxed{\sigma\,\partial_\mu\partial^\mu\phi(x) = -\lambda\,J(x)}$$

以初步满足相对性原理的要求, 式中约定 $\sigma = \pm 1$ 与 $\lambda = \pm 1$ 是独立取值的无量纲实参数. 欲真正通过相对性原理对候选物理规律的资格审查, 还须对势 $\phi(x)$ 和源 $J(x)$ 在洛伦兹变换下的性质做出明确规定.

- 最简单的选择是假定势 $\phi(x)$ 与源 $J(x)$ 均是 4-标量场.

假设某物理场可以用势分布 $\phi(x)$ 描写，其动力学演化方程是：

$$\sigma\,\partial_\mu\partial^\mu\phi(x) = -\lambda\,J(x)$$

其中 $J(x)$ 是 $\phi(x)$ 的源． 为符合相对性原理的要求，我们假设 $\phi(x)$ 和 $J(x)$ 均为 $\mathbb{M}_4$ 中的标量场，即 4-标量场．不难看出，上述动力学方程可以看做是拉氏函数密度

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{\sigma}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \lambda\,J(x)\phi(x)$$

决定的拉氏方程．

1. 拉氏密度中未引入标量场 $\phi(x)$ 的质量项，相当于假设此标量场描写的波动其相速度和群速度均等于光速．
2. 源 $J(x)$ 可以是另一个标量场或者几个标量场的耦合． 我们这里不关心 $J(x)$ 本身的动力学，仅把它看作是一个激发了 $\phi(x)$ 的 4-标量场．
3. $\phi(x)$ 的动力学方程在静态近似下退化为泊松方程：

$$\sigma\,\nabla^2\phi(r) = -\lambda\,J(r) \qquad \boxed{\rightsquigarrow\quad \phi(r) = \frac{\lambda}{4\pi\sigma}\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{J(r')}{|r-r'|}}$$

标量场 $\phi(x)$ 的总能量是:

$$\boxed{H = \int_\Omega \mathrm{d}^3x \left(\frac{\sigma}{2}\pi^2 + \frac{\sigma}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi - \lambda J\phi\right)} \qquad \hookleftarrow \ \pi = \sigma\partial^0\phi$$

- H 积分核中的 π^2 项称为 $\phi(x)$ 场的动能项 (kinetic term). 为了保证无源的自由标量场能量有下界, 动能项必须非负.

  $\rightsquigarrow \sigma = 1.$
- 使用矢量分析恒等式

$$\nabla\phi\cdot\nabla\phi = \nabla\cdot(\phi\nabla\phi) - \phi\,\nabla^2\phi$$

与场方程, 并假定

$$\phi(x)\Big|_{|r|\to\infty} \to 0$$

我们可以把场 $\phi(x)$ 的能量改写为:

$$H = \frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{d}^3x\left[\sigma\left(\partial_0\phi\right)^2 - \sigma\phi\partial_0^2\phi - \lambda J\phi\right]$$

此处暂时保留了参数 σ 取值的不确定.

- 对于静止的源所激发的静场，

$$J(x)=J(r),\quad \phi(x)=\phi(r)\qquad \rightsquigarrow\ \partial_0\phi=\partial_0^2\phi=0$$

场的能量表达为：

$$H=-\frac{\lambda}{2}\int_{\Omega}\mathrm{d}^3x\,J(r)\phi(r)$$

亦即：

$$\boxed{H=-\frac{\lambda^2}{8\pi\sigma}\int\mathrm{d}^3x\int\mathrm{d}^3x'\,\frac{J(r')J(r)}{|r-r'|}}$$

- 倘若激发静场分布 $\phi(r)$ 的源是两个点状荷，

$$J(r)=Q_1\delta^{(3)}(r-r_1)+Q_2\delta^{(3)}(r-r_2)$$

它们以标量场 $\phi(r)$ 为媒介发生相互作用的相互作用能量为：

$$\mathcal{W}_{12}=-\frac{\lambda^2}{4\pi\sigma}\frac{Q_1Q_2}{|r_1-r_2|}$$

审视

$$\mathcal{W}_{12} = -\frac{\lambda^2}{4\pi\sigma}\frac{Q_1 Q_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}$$

我们看到:

1. 两个同号的点场源之间的相互作用究竟是斥力还是引力与参数 λ 的取值无关,但强烈地依赖于参数 σ 的取值.
2. 倘若可以取 $\sigma = -1$, 则 Q_1 和 Q_2 同号时 $\mathcal{W}_{12} > 0$, 表明二点场源之间存在的是斥力. 不幸的是,这是一个虚假的可能性.
3. 标量场 $\phi(x)$ 的相对论性理论要求 $\sigma = 1$. Q_1 和 Q_2 同号时 $\mathcal{W}_{12} < 0$. 换言之,二个同号的点场源之间通过标量场作为媒介传递的相互作用力是引力.
4. 所以,在狭义相对论意义下,电磁场的势不能用标量场描写[9].

既然标量场不能胜任,我们只好探索用矢量场描写电磁场的可能性.

---

[9]那么,相对论意义下万有引力的势可否用标量场描写呢?

回到静电势泊松方程的相对论性提升方程:

$$\sigma\, \partial_\mu \partial^\mu \phi(x) = -\lambda\, J(x)$$

既然不能把势 $\phi(x)$ 和源 $J(x)$ 看做 4-标量场, 那么接下来最简单的能满足相对性原理要求的方案是假设它们形成 4-矢量场的时间分量:

$$A^\mu(x) = (\phi(x), \mathbf{A}(x)), \quad J^\mu(x) = (J(x), \mathbf{J}(x))$$

从而把静电势泊松方程在相对论意义下重新提升为:

$$\boxed{\sigma\, \partial_\mu \partial^\mu A_\nu(x) = -\lambda\, J_\nu(x)}$$

容易验证, $A_\nu(x)$ 服从的这个波动方程恰好是洛伦兹不变的拉氏密度

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{\sigma}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \lambda\, J^\mu A_\mu$$

所决定的拉氏方程.

1. 为叙事方便起见，我们暂时把 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 称为候选电磁势.
2. 拉氏密度中未出现 $A_\mu(x)$ 的质量项，

$$-\frac{1}{2}\mu^2 A^\mu A_\mu$$

相当于承认候选电磁势描写的波动其波速等于光速.
3. 我们知道电磁场的源是电荷电流分布. 因此，可以把 $J^\mu(x)$ 称为电流密度 4-矢量. 这里不关心 $J^\mu(x)$ 本身的动力学，仅把它看作是一个激发了 $A_\mu(x)$ 的 4-矢量场.
4. 矢量场 $A_\mu(x)$ 的动力学方程在静态近似下退化为“泊松”方程：

$$\sigma\,\nabla^2 A_\mu(\boldsymbol{r}) = -\lambda\, J_\mu(\boldsymbol{r})$$

其在无界空间的解为：

$$\boxed{A_\mu(\boldsymbol{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\sigma}\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{J_\mu(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}$$

矢量场 $A_\mu(x)$ 的能量动量张量是:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial^\mu A^\rho)}\partial_\nu A^\rho - \eta_{\mu\nu}\mathscr{L} \qquad \boxed{\rightsquigarrow\ \partial^\mu T_{\mu\nu} = 0} \\ &= -\sigma\partial_\mu A_\rho\,\partial_\nu A^\rho + \eta_{\mu\nu}\left(\frac{\sigma}{2}\partial_\alpha A_\beta\partial^\alpha A^\beta - \lambda J^\rho A_\rho\right) \end{aligned}$$

由此知其在 $\mathbb{E}_3$ 中的能量体密度为:

$$\begin{aligned} \mathscr{H} &= -T_{00} \\ &= \sigma\partial_0 A_\rho\,\partial_0 A^\rho + \frac{\sigma}{2}\partial_\alpha A_\beta\partial^\alpha A^\beta - \lambda J^\rho A_\rho \\ &= \frac{\sigma}{2}\eta^{\mu\nu}\left(\pi_\mu\pi_\nu + \nabla A_\mu\cdot\nabla A_\nu\right) - \lambda J^\rho A_\rho \end{aligned}$$

式中

$$\pi_\mu = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial^0 A^\mu)} = -\sigma\partial_0 A_\mu$$

是相空间中与正则坐标 $A_\mu(x)$ 共轭的正则动量.

矢量场 $A_\mu(x)$ 的总能量为：

$$H=\int \mathrm{d}^3x\,\mathscr{H}=\int \mathrm{d}^3x\left(\frac{\sigma}{2}\eta^{\mu\nu}\pi_\mu\pi_\nu+\frac{\sigma}{2}\eta^{\mu\nu}\nabla A_\mu\cdot\nabla A_\nu-\lambda J^\rho A_\rho\right)$$

假定

$$A_\mu(x)\Big|_{|r|\to\infty}\to 0$$

我们可以把场的总能量改写为：

$$H=\int \mathrm{d}^3x\left[\frac{\sigma}{2}\eta^{\mu\nu}\left(\partial_0 A_\mu\right)\left(\partial_0 A_\nu\right)-\frac{\sigma}{2}A^\mu\left(\partial_0^2 A_\mu\right)-\frac{\lambda}{2}J^\mu A_\mu\right]$$

对于静止的源 $J^\mu(r)$ 所激发的静场 $A_\mu(r)$，

$$H=-\frac{\lambda}{2}\int \mathrm{d}^3x\,J^\mu(r)A_\mu(r)=-\frac{\lambda}{8\pi\sigma}\iint \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3x'\,\frac{J^\mu(r)\,J_\mu(r')}{|r-r'|}$$

倘若激发静场分布 $A_\mu(r)$ 的源是两个点"电荷",

$$J^\mu(r) = \delta_0^\mu \left[Q_1\delta^{(3)}(r - r_1) + Q_2\delta^{(3)}(r - r_2)\right]$$

它们以矢量场 $A_\mu(r)$ 为媒介发生相互作用的相互作用能量为[10]:

$$\mathcal{W}_{12} = \frac{\lambda^2}{4\pi\sigma}\frac{Q_1 Q_2}{|r_1 - r_2|}$$

1. 与标量场情形类似,两个同号的点场源之间的相互作用究竟是斥力还是引力与参数 λ 的取值无关,但强烈地依赖于参数 σ 的取值.
2. 倘若可以取 $\sigma = 1$,则 Q_1 和 Q_2 同号时 $\mathcal{W}_{12} > 0$,表明二点"电荷"之间存在的是斥力. 这正是我们所需要的结果.
3. 不幸的是我们并无过硬的理由能强取 $\sigma = 1$. 这是因为矢量场 $A_\mu(x)$ 能量密度表达式中的动能项是:

$$\frac{1}{2}\sigma\eta^{\mu\nu}\pi_\mu\pi_\nu = \frac{1}{2}\sigma\left[-(\pi_0)^2 + \Sigma_{i=1}^3(\pi_i)^2\right] \quad \rightsquigarrow \quad \text{Failure !}$$

[10] 勿忘记 $J_0(r) = -J^0(r)$.

疑点重重的参考书

基础物理述评教程 （2011年科学出版社出版的图书）

播报 编辑 讨论 2 上传视频

《基础物理述评教程》是2011年科学出版社出版的图书，作者是潘根。本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，其前一版是教育部“面向21世纪”系列教材，被全国高等院校教学研究中心列入“优秀教材”行列。

书　名	基础物理述评教程	出版时间	2011-07
作　者	潘根	定　价	74 元
出版社	科学出版社	开　本	16 开
		ISBN	9787030317940

Let There be Light

Hermann Weyl (1855–1955)

- 前面的分析使我们悟到：倘若电磁势可以形成一个 4-矢量场 $A_\mu(x)$，则其时间分量 $A_0(x)$ 与空间分量 $A_i(x)$ 不能彼此独立.
- 具体实现了这个设想的方案是外尔 (H. Weyl) 提出的**规范原理**.
- 规范原理之所以能名扬天下、最后发展成为物理学中决定基本相互作用力的一条铁律，归功于 1954 年 Yang-Mills 非阿贝尔规范理论的诞生.

杨振宁与米尔斯(Mills):

获诺奖时的杨帅哥 (1957):

华人物理学家的双子星:

我们也不能忘记和杨振宁先生一起为华人争光的李政道先生. 李杨因正确地预言了弱作用过程中宇称不守恒而分享了 1957 年度的诺贝尔物理学奖金.

感动中国人物之百岁物理学家杨振宁 (2021):

颁奖词:

站在科学和传统的交叉点上, 惊人艳艳. 你贡献给世界的如此深奥, 懂的人不多; 你奉献给祖国的如此纯真, 我们都明白. 曾经, 你站在世界前排; 现在, 你与国家一起向未来.

外尔提出规范原理最初的目的是想构造引力与电磁相互作用的统一理论 (1918). 随着广义相对论 (GR) 的诞生 (1916), 我们有了一个描写引力的相对论性理论. GR 中存在着两个描写时空性质的动力学变量

$$g_{\mu\nu}(x), \quad \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}(x)$$

$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}(x)$ 称为仿射联络, 它用于定义 4-张量场的协变微商.例如:

$$\nabla_\mu A^\nu = \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\rho} A^\rho, \quad \nabla_\mu B_{\nu\rho} = \frac{\partial B_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} B_{\sigma\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} B_{\nu\rho}$$

- GR 通过假设 $\nabla_\mu g_{\rho\sigma} = 0$, 使得 $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}(x)$ 与 $g_{\mu\nu}(x)$ 不独立. 这是一个纯粹的引力理论.

- 外尔试图通过把条件 $\nabla_\mu g_{\rho\sigma} = 0$ 替换为

$$\boxed{(\nabla_\mu + A_\mu)\, g_{\rho\sigma} = 0}$$

  使得 $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}(x)$, $g_{\mu\nu}(x)$ 和新引入的 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 三者之间彼此依赖. 如此构建的理论实际上在引力之外还涉及到了其他的相互作用力.

外尔理论的作用量泛函存在着一种新的对称性:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &\rightsquigarrow g'_{\mu\nu}(x) = \omega^2(x) g_{\mu\nu}(x), \\ A_\mu(x) &\rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \left[\ln \omega^2(x)\right] \end{aligned}$$

- 这个对称变换与时空坐标 x^μ 的变换无关, 纯粹是场的变换. 对于 $g_{\mu\nu}(x)$ 而言, 它实际上是尺度伸缩变换 (Conformal).
- 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 的变换方式恰好是电磁势的规范变换, 因此外尔把 $A_\mu(x)$ 诠释成了电磁势.
- 爱因斯坦对外尔的电磁引力统一理论持反对态度. 如果外尔的理论是正确的, 那么引力场中原子发光的频率不仅依赖于原子目前的位置、也依赖于它的演化历史. 这个推论与实验相悖. 外尔早期关于规范变换的努力是一次失败的尝试.

量子力学(1925)、特别是波动力学(1926)问世后, 沉寂了大约十年的外尔重新研究了规范变换. 这一次他取得了重大成功!

20 世纪初叶，伴随着原子光谱学的发展，物理学家们逐渐认识到光与实物粒子都具有波动、粒子二重性。正确地描写了电子等实物粒子波粒二象性的理论是所谓非相对论性量子力学：

- 实物粒子的状态由波函数 $\Psi(x)$ 描写。$\Psi(x)$ 本身不是可观测量、没有物理意义，但 $|\Psi(x)|^2$ 是发现粒子的概率体密度.
- 波函数 $\Psi(x)$ 随时间的演化遵从薛定谔方程. 自由粒子的薛定谔方程为：

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi$$

倘若不计粒子的自旋，则自由粒子薛定谔方程的相对论性对应是所谓的 Klein-Gordon 方程：

$$\partial_\mu\partial^\mu\Psi(x) - \mu^2\Psi(x) = 0$$

此处“波函数”$\Psi(x)$ 是一个 4-标量场，其有效的质量参数为 $\mu = mc/\hbar$.

- 根据波函数的概率诠释(见上页), $\Psi(x)$ 与 $\Psi(x)\exp(i\theta)$ 在描写实物粒子量子态方面是完全等价的:

$$\Psi(x) \sim \Psi'(x) = \Psi(x)\exp(i\theta), \quad \forall\,\theta \in \mathbb{R}$$

的确, $|\Psi(x)|^2 = |\Psi'(x)|^2$, 且当 θ 取实常数时 $\Psi(x)$ 与 $\Psi'(x)$ 服从同一个波动方程.

$\mathcal{Q}$: 倘若 $\theta = \theta(x)$, 等价性 $\Psi(x) \sim \Psi'(x) = \Psi(x)\exp(i\theta)$ 是否还存在?

朴素地看, 虽然 $\Psi(x)$ 与 $\Psi'(x) = \Psi(x)e^{i\theta(x)}$ 仍具有相同的绝对值[11],

$$|\Psi(x)|^2 = |\Psi'(x)|^2$$

但因为

$$\partial_\mu \Psi'(x) = \partial_\mu \left[\Psi(x)e^{i\theta(x)}\right] = e^{i\theta(x)}\left[\partial_\mu \Psi(x) + i\Psi(x)\partial_\mu\theta(x)\right]$$

$\Psi(x)$ 与 $\Psi'(x) = \Psi(x)e^{i\theta(x)}$ 不满足相同的波动方程 $\rightsquigarrow$ 不再等价.

[11]默认 $\theta(x) \in \mathbb{R}$.

外尔的规范原理

外尔的想法 (1929) 与众不同, 他认为:

- 波函数的概率诠释是量子力学中必须坚守的基本原则. 换言之, $\Psi(x)$ 与 $\Psi'(x) = \Psi(x)e^{i\theta}$ 在 $\theta = \theta(x)$ 情形下也是等价的.
- $\Psi(x)$ 与 $\Psi'(x) = \Psi(x)e^{i\theta(x)}$ 不能满足自由粒子波函数的波动方程, 说明自然界不存在真正的自由粒子. 实物粒子都要参与某种由 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 传递的相互作用.
- 为了标记实物粒子参与的相互作用, 外尔假设实物粒子携带某种荷 q. 为了让 $\Psi(x)$ 与 $\Psi'(x)$ 满足相同的波动方程, 外尔假设必须在波动方程中把 ∂_μ 替换为协变导数算符

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu(x)$$

如此应摒弃 Klein-Gordon 方程, 而改用如下波动方程

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \Psi(x) - \mu^2 \Psi(x) = 0$$

描写实物粒子波动性.

- 当实物粒子波函数发生位相变换

$$\Psi(x) \quad \rightsquigarrow \; \Psi'(x) = \Psi(x)e^{iq\theta(x)}$$

时，作为相互作用媒介的 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 要发生一个伴随的规范变换：

$$A_\mu(x) \quad \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x)$$

如此，

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu\Psi(x) \;\rightsquigarrow \mathcal{D}'_\mu\Psi'(x) \;&= \left[\partial_\mu - iqA'_\mu(x)\right]\left[\Psi(x)e^{iq\theta(x)}\right] \\
&= e^{iq\theta(x)}\left[\partial_\mu + iq\partial_\mu\theta(x) - iqA'_\mu(x)\right]\Psi(x) \\
&= e^{iq\theta(x)}\left[\partial_\mu - iqA_\mu(x)\right]\Psi(x) \\
&= e^{iq\theta(x)}\,\mathcal{D}_\mu\Psi(x)
\end{aligned}$$

同理有：

$$\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu\Psi(x) \;\rightsquigarrow \mathcal{D}'_\mu\mathcal{D}'^\mu\Psi'(x) = e^{iq\theta(x)}\,\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu\Psi(x)$$

这样，实物粒子波函数满足的波动方程

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \Psi(x) - \mu^2 \Psi(x) = 0$$

在联合变换

$$\boxed{\Psi(x) \rightsquigarrow \Psi'(x) = \Psi(x) e^{iq\theta(x)}, \quad A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)}$$

下实际上是不变的：

$$\mathcal{D}'_\mu \mathcal{D}'^\mu \Psi'(x) - \mu^2 \Psi'(x) = e^{i\theta(x)} \Big[\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \Psi(x) - \mu^2 \Psi(x) \Big] = 0$$

- 变换因子 $e^{i\theta(x)}$ 的全体按普通乘法形成 $U(1)$ 群. 因此，上述联合变换称为局域的 $U(1)$ 规范变换. 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 称为 $U(1)$ 规范势，其描写的相互作用传递媒介称为 $U(1)$ 规范场.

- 规范变换的存在意味着规范势 $A_\mu(x)$ 与

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x), \qquad (\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

  在描写 $U(1)$ 规范场方面完全等价. 因此，规范势 $A_\mu(x)$ 的分量并不都是独立的动力学变量. 例如可以按 $A'_0(x) = \partial_0 \theta(x)$ 选择规范变换函数 $\theta(x) \rightsquigarrow A_0(x) = 0$.

- 规范变换函数 $\theta(x)$ 从物理上讲是完全任意的. 如果有需要, $\theta(x)$ 可以人为地随意指定. 指定 $\theta(x)$ 这件事通常称为选择“规范”. 例如可以通过求解微分方程

$$\partial^\mu A'_\mu(x) = \partial^\mu \partial_\mu \theta(x)$$

指定 $\theta(x)$, 它相当于是要求:

$$\partial^\mu A_\mu(x) = 0$$

这样确定的规范称为洛伦茨 (Lorenz) 规范. 洛伦茨规范最突出的优点是它具有参考系选择无关性, 因此是电动力学中最常用的规范选择. 电动力学中另一个使用频率较高的规范选择是库仑规范:

$$\nabla \cdot A(x) = \partial^i A_i(x) = 0$$

它没有参考系选择无关性. 前页提到的

$$A_0(x) = 0$$

也是一个合理的 (非洛伦兹协变的) 规范选择.

外尔规范原理小结：

1. 波函数 $\Psi(x)$ 与 $\Psi(x)e^{iq\theta(x)}$ 的等价性要求实物粒子必须携带某种荷 q，参与由规范势 $A_\mu(x)$ 传递的 $U(1)$ 规范相互作用，使得 $\Psi(x)$ 满足波动方程[12]：

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \Psi(x) - \mu^2 \Psi(x) = 0$$

式中 $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu(x)$.

2. 物质场 $\Psi(x)$ 与规范势 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 的变换

$$\Psi(x) \rightsquigarrow \Psi'(x) = \Psi(x)e^{iq\theta(x)}, \quad A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$$

统称为 (局域的)$U(1)$ 规范变换.

3. 物质场 $\Psi(x)$ 的波动方程

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \Psi(x) - \mu^2 \Psi(x) = 0$$

在局域规范变换下具有不变性. 这就是俗称的局域规范对称性.

---

[12] 此处假定 $\Psi(x)$ 是 4-标量场，描写无自旋标量粒子的波动性.

$\mathscr{C}$: $U(1)$ 规范场就是电磁场.

1. 通过之前的讨论我们知道一个不受约束的 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 并不能逻辑自洽地描写电磁势. 但如果进一步要求 $A_\mu(x)$ 是 $U(1)$ 规范势, 即要求 $A_\mu(x)$ 的拉氏密度具有局域规范变换

$$A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$$

下的不变性, 则 $A_\mu(x)$ 正是电磁场的势.

现在给出详细解释.

倘若电磁势可以用一个 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 描写, 那么用于构造电磁场拉氏密度的"元器件"只能如下五种 4-张量:

$$A_\mu(x), \quad \partial_\mu A_\nu(x), \quad J^\mu(x), \quad \eta_{\mu\nu}, \quad \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

此处 $J^\mu(x)$ 是电流密度 4-矢量. 在电磁场拉氏密度中使用 $J^\mu(x)$ 是为了反映电荷电流是电磁场场源的基本实验事实.

- 类比于标量场 $\Phi(x)$ 拉氏密度中的动能项,

$$\frac{1}{2}\partial_\mu \Phi(x)\, \partial^\mu \Phi(x)$$

我们朴素地猜测电磁场 $A_\mu(x)$ 拉氏密度中的动能项是用“广义速度”$\partial_\mu A_\nu(x)$ 构造出的如下 4-标量:

$$\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu(x)\, \partial^\mu A^\nu(x)$$

引入“广义速度”的对称与反对称组合

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \\ G_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu A_\nu(x) + \partial_\nu A_\mu(x) \end{aligned}$$

我们看到:

$$\partial_\mu A_\nu(x) = \frac{1}{2}\Big[F_{\mu\nu}(x) + G_{\mu\nu}(x)\Big]$$

猜测的电磁势动能项可以改写为：

$$\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu(x)\,\partial^\mu A^\nu(x) = \frac{1}{8}\Big[F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + G_{\mu\nu}(x)G^{\mu\nu}(x)\Big]$$

然而只有 $F_{\mu\nu}(x)$ 才是规范不变的场强，$G_{\mu\nu}(x)$ 并不具有规范变换下的不变性.

1. 电磁场拉氏密度的动能项只能考虑规范不变的 4-标量：

$$F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)$$

   而 $G_{\mu\nu}(x)G^{\mu\nu}(x)$ 项必须舍弃.

2. 倘若采取国际单位制并计及电磁相互作用过程中的时间反演对称性和宇称守恒定律，一般把电磁场拉氏密度中的动能项取为：

$$\mathscr{L}_{\mathrm{K}}(x) = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)$$

   式中 μ_0 为真空的磁导率.

- $F_{\mu\nu}(x)$ 称为法拉第张量，或称为电磁场张量. 当电磁势做规范变换 $A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x)$, 电磁场张量

$$\boxed{F_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)}$$

  的变换法则是:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) \rightsquigarrow F'_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu A'_\nu(x) - \partial_\nu A'_\mu(x) \\ &= \partial_\mu\left[A_\nu(x) + \partial_\nu\theta(x)\right] - \partial_\nu\left[A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x)\right] \\ &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \\ &= F_{\mu\nu}(x) \end{aligned}$$

  即 $F_{\mu\nu}(x)$ 是规范变换下的不变量.

- 通过求 $F_{\rho\sigma}$ 与 $\mathbb{M}_4$ 中全反对称不变张量 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 的缩并，可以定义所谓对偶电磁场张量:

$$\boxed{\mathscr{F}^{\mu\nu}(x) \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}(x)}$$

  它显然也是规范变换下的不变量.

- $\mathscr{F}^{\mu\nu}(x)$ 与 $F_{\mu\nu}(x)$ 的缩并可以形成如下规范不变的 4-标量：

$$\mathscr{F}^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)$$

  这个 4-标量是 $\partial_\mu A_\nu(x)$ 的二次型．或许我们可以考虑把它作为电磁场拉氏密度动能项的一个候选者．然而由于 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 不是时间反演变换和空间反射变换下的不变张量[13]，这个 4 标量出现在拉氏密度中会破坏电磁相互作用过程中的宇称守恒．计及这一点，电磁场的拉氏密度中一般并不包括这个规范不变的 4-标量．

- 普通的 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 的拉氏密度中可以包含一个质量项

$$\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A_\mu(x)A^\mu(x)$$

  但此质量项也不具备规范变换下的不变性，因此不能出现在电磁场的拉氏密度中．

[13] $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 在时间反演变换和空间反射变换下会改变符号．

答疑：

课后 (20220324) 有同学问：电磁场拉氏密度动能项中是否可以包含如下“广义速度”的二次型

$$(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) = (\partial_\mu A^\mu)^2$$

答案是不可以.

$\partial_\mu A^\mu(x)$ 没有规范变换 $A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$ 下的不变性：

$$\partial_\mu A^\mu(x) \rightsquigarrow \partial_\mu A'^\mu(x) = \partial_\mu A^\mu(x) + \partial_\mu \partial^\mu \theta(x)$$

问题中的二次型在规范变换下变成了：

$$(\partial_\mu A'^\mu)^2 = (\partial_\mu A^\mu)^2 + 2(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu \partial^\nu \theta) + (\partial_\nu \partial^\nu \theta)^2$$

即使分离出一些全导数项 (丢掉), 也无法按照某个合理的理由把上式中涉及规范变换函数 $\theta(x)$ 的项全丢弃. 二次型 $(\partial_\mu A^\mu)^2$ 虽然是 4-标量, 但因其不具备规范变换下的不变性, 它没有资格出现在电磁场的拉氏密度中.

或许有同学读到某些参考书[14]上把电磁场拉氏密度的动能项写成了

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\, \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2$$

上式的结果与本讲义前页的答疑并无内在矛盾．上式右端两项均无规范变换下的对称性，但二者之和是规范不变的．以我之见，上式的做法不是从第一原理出发构造拉氏密度，它只不过是在知道了拉氏密度的正确形式后凑答案而已．不难看出：

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) \\
&= 2\partial_\mu A_\nu\, \partial^\mu A^\nu - 2\partial_\mu A_\nu\, \partial^\nu A^\mu \\
&= 2\partial_\mu A_\nu\, \partial^\mu A^\nu - 2\partial_\mu\left(A_\nu\, \partial^\nu A^\mu\right) + 2A_\nu \partial^\nu\left(\partial_\mu A^\mu\right) \\
&= 2\partial_\mu A_\nu\, \partial^\mu A^\nu - 2\partial_\mu\left(A_\nu\, \partial^\nu A^\mu\right) + 2\partial^\nu\left(A_\nu\, \partial_\mu A^\mu\right) - 2\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2
\end{aligned}$$

丢弃了无关紧要的全导数项后，我们有：

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\, \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2$$

[14]例如网红讲义：David Tong, Quantum Field Theory, Eq.(1.18), Page 16.

- 根据 $A_\mu(x)$ 与 $F_{\mu\nu}(x)$ 还可以构造出两个 4-标量:

$$A_\mu(x)A_\nu(x)\left\{\begin{array}{l} F^{\mu\nu}(x) \\ \mathscr{F}^{\mu\nu}(x) \end{array}\right. \qquad \hookleftarrow \quad \mathscr{F}^{\mu\nu}(x) \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}(x)$$

姑且不论此二 4-标量在规范变换下是否不变, 因为它们恒等于零, 它们自然不会出现在电磁场的拉氏密度中.

- 电磁场拉氏密度的相互作用项有如下候选 4-标量:

$$J^\mu(x)A_\mu(x)$$

在规范变换下, $J^\mu(x)A_\mu(x)$ 的变换性质是:

$$\begin{aligned} J^\mu(x)A'_\mu(x) &= J^\mu(x)A_\mu(x) + J^\mu(x)\partial_\mu\theta(x) \\ &= J^\mu(x)A_\mu(x) + \partial_\mu\Big[J^\mu(x)\theta(x)\Big] - \Big[\partial_\mu J^\mu(x)\Big]\theta(x) \end{aligned}$$

上式右端第二项 $\partial_\mu\left(J^\mu\theta\right)$ 是全导数项, 它的存在与否不影响作用量泛函, 可以视而不见. 欲使 $J^\mu(x)A_\mu(x)$ 具有规范变换下的不变性, 必要条件是存在电荷守恒定律, $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$.

- 通常把电流密度 4-矢量 $J^\mu(x)$ 的分量形式表为：

$$J^\mu = (c\rho, \boldsymbol{j})$$

式中 $\rho(x)$ 与 $\boldsymbol{j}(x)$ 分别诠释为电荷电流体系的电荷体密度与电流密度矢量. 如此, 洛伦兹不变的连续性方程

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

可以用分量形式重新表达为：

$$\frac{\partial \rho(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = 0$$

其积分形式是：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \rho(\boldsymbol{r}, t)\, \mathrm{d}^3 x = -\oint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}}$$

这正是我们期望的电荷守恒定律. 之所以存在电荷守恒定律, 是因为电磁相互作用具有 $U(1)$ 规范变换下的对称性.

- 电磁场拉氏密度的相互作用项似乎还可以有如下几个候选4-标量：

$$J^{\mu}(x)J^{\nu}(x)\begin{cases} F_{\mu\nu}(x) \\ \mathscr{F}_{\mu\nu}(x) \end{cases}, \quad J^{\mu}(x)A^{\nu}(x)\begin{cases} F_{\mu\nu}(x) \\ \mathscr{F}_{\mu\nu}(x) \end{cases}$$

然而前二者恒为零，后二者不具有规范变换下的不变性．因此，它们都无资格出现在电磁场的拉氏密度表达式中．

综合起来，倘若我们不考虑4-电流密度 $J^{\mu}(x)$ 本身的动力学，则电磁场的动力学应决定于如下拉氏函数密度：

$$\boxed{\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + J^{\mu}(x)A_{\mu}(x)}$$

拉氏密度中，两项的系数原则上都是任意的，对其做出具体规定相当于选择了某种特殊的单位制[15]．按此拉氏密度，我们有：

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_{\nu}(x)} = J^{\nu}(x), \qquad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu}(x))} = -\frac{1}{\mu_0}F^{\mu\nu}(x)$$

[15]我们采取国际单位制，μ_0 是真空的磁导率，并按习惯取 $\lambda = 1$.

代入到电磁场的拉氏方程

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu(x))} \right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\nu(x)} = 0$$

可以将其明确地表为：

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = -\mu_0 J^\nu(x)}$$

这就是电磁场的动力学方程. 此外，根据电磁场张量的定义式

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$$

不难看出 $F_{\mu\nu}(x)$ 还须服从约束条件：

$$\boxed{\partial_\rho F_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu F_{\nu\rho}(x) + \partial_\nu F_{\rho\mu}(x) = 0}$$

假若你愿意，你可以把此约束条件称为电磁场张量必须满足的毕安琪 (Bianchi) 恒等式. 拉氏方程与毕安琪恒等式联合提供了描写电磁场性质的理论基础，它们就是协变形式的 Maxwell 方程组.

计算 Levi-Civita 全反对称张量 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 与电磁场毕安琪恒等式

$$\boxed{\partial_\rho F_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu F_{\nu\rho}(x) + \partial_\nu F_{\rho\mu}(x) = 0}$$

的缩并，我们有：

$$\begin{aligned}
0 &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left[\partial_\rho F_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu F_{\nu\rho}(x) + \partial_\nu F_{\rho\mu}(x)\right] \\
&= -\partial_\rho\left[\epsilon^{\sigma\rho\mu\nu} F_{\mu\nu}(x)\right] - \partial_\mu\left[\epsilon^{\sigma\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}(x)\right] - \partial_\nu\left[\epsilon^{\sigma\nu\rho\mu} F_{\rho\mu}(x)\right] \\
&= 3\partial_\rho\left[\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu} F_{\mu\nu}(x)\right]
\end{aligned}$$

借助于对偶电磁场张量

$$\mathscr{F}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}(x)$$

我们最终把电磁场的毕安琪恒等式简洁地表达为：

$$\boxed{\partial_\mu \mathscr{F}^{\mu\nu}(x) = 0}$$

电磁场张量 $F_{\mu\nu}(x)$ 的物理内涵：

电磁场张量

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$$

是闵氏空间 $\mathbb{M}_4$ 中的 2 阶反对称张量，$F_{\mu\nu}(x) = -F_{\nu\mu}(x)$，其独立分量的数目为

$$\left.\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}-1)}{2}\right|_{\mathrm{d}\to 4} = 6$$

我们规定这些分量的物理内涵为：

$$\boxed{F^{0i} = \frac{1}{c} E^{\,i}, \quad F^{\,ij} = \epsilon^{ijk} B_k}$$

或者等价地，

$$\boxed{E^{\,i} = c\, F^{0i}, \quad B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} F^{jk}}$$

此处 $\boldsymbol{E} = E^{\,i}\boldsymbol{e}_i$ 与 $\boldsymbol{B} = B^{\,i}\boldsymbol{e}_i$ 是欧氏空间 $\mathbb{E}_3$ 中电磁场的电场强度与磁感应强度.

现在讨论电磁场基本方程组

$$\boxed{\frac{1}{\mu_0}\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = -J^\nu(x), \quad \partial_\mu \mathscr{F}^{\mu\nu}(x) = 0}$$

的物理内涵:

- 拉氏方程 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 J^\nu$ 在 $\nu = 0$ 时表达为:

$$-\mu_0 c\rho = -\mu_0 J^0 = \partial_\mu F^{\mu 0} = \partial_i F^{i0} = -\frac{1}{c}\partial_i E^i = -\frac{1}{c}\nabla\cdot\boldsymbol{E}$$

回忆初等电磁学或者物理光学等前置课程中学过的光速与电磁常数的关系,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

上式可改写为:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$$

这正是电高斯定律.

- 拉氏方程 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 J^\nu$ 在 $\nu = i$ 时表达为：

$$\begin{aligned} -\mu_0 j^i &= -\mu_0 J^i = \partial_\mu F^{\mu i} = \partial_0 F^{0i} + \partial_k F^{ki} \\ &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial E^i}{\partial t} + \epsilon^{kij}\partial_k B_j \\ &= \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial E^i}{\partial t} - (\nabla \times \boldsymbol{B})^i \end{aligned}$$

亦即：

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

这是安培麦克斯韦方程，其中包含着位移电流修正项.

- 欲了解毕安琪恒等式的物理内涵，须事先了解对偶电磁场张量 $\mathscr{F}^{\mu\nu}(x)$ 的物理内涵 (Optional)：

$$\boxed{\mathscr{F}^{0i} = B^i, \quad \mathscr{F}^{ij} = -\frac{1}{c}\epsilon^{ijk}E_k}$$

或者等价地，

$$\boxed{B^i = \mathscr{F}^{0i}, \quad E_i = -\frac{c}{2}\epsilon_{ijk}\mathscr{F}^{jk}}$$

- 毕安琪恒等式 $\partial_\mu \mathscr{F}^{\mu\nu}(x)=0$ 在 $\nu=0$ 情形下表达为：

$$0=\partial_\mu \mathscr{F}^{\mu 0}=\partial_i \mathscr{F}^{i0}=-\partial_i B^i$$

亦即：

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B}=0$$

这是磁高斯定律. 从归纳法的视角看, 这是电磁场能获得规范场属性的实验基础. 它也在经典场论意义下排除了点磁荷存在的可能性[16].

- 毕安琪恒等式 $\partial_\mu \mathscr{F}^{\mu\nu}(x)=0$ 在 $\nu=i$ 情形下表达为：

$$\begin{aligned}0 &=\partial_\mu \mathscr{F}^{\mu i}=\partial_0 \mathscr{F}^{0i}+\partial_k \mathscr{F}^{ki}=\frac{1}{c}\frac{\partial B^i}{\partial t}-\frac{1}{c}\epsilon^{kij}\partial_k E_j\\ &=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}+\nabla\times\boldsymbol{E}\right)^i\end{aligned}$$

亦即：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=0$$

这是法拉第电磁感应定律.

[16]但磁高斯定律原则上仍允许磁单极的存在.

两个重要的 4-标量

使用电磁场张量与其对偶张量，可以构造出如下两个彼此独立的洛伦兹标量：

$$F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x), \qquad F_{\mu\nu}(x)\mathscr{F}^{\mu\nu}(x)$$

它们的物理内涵分别是：

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= F_{0\nu}F^{0\nu} + F_{i\nu}F^{i\nu} = F_{0j}F^{0j} + F_{i0}F^{i0} + F_{ij}F^{ij} \\ &= -\frac{2}{c^2}E_iE^i + \epsilon_{ijk}\epsilon^{ijl}B^kB_l \\ &= 2\left(\boldsymbol{B}^2 - \frac{\boldsymbol{E}^2}{c^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\mathscr{F}^{\mu\nu} &= F_{0\nu}\mathscr{F}^{0\nu} + F_{i\nu}\mathscr{F}^{i\nu} = F_{0j}\mathscr{F}^{0j} + F_{i0}\mathscr{F}^{i0} + F_{ij}\mathscr{F}^{ij} \\ &= -\frac{2}{c}E_iB^i - \frac{1}{c}\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijl}B^kE_l \\ &= -\frac{4}{c}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} \end{aligned}$$

4-标量

$$\boxed{\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=\boldsymbol{B}^2-\frac{\boldsymbol{E}^2}{c^2},\qquad -\frac{c}{4}F_{\mu\nu}\mathscr{F}^{\mu\nu}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}}$$

的存在意味着:

1. 倘若电磁场在某一惯性系中表现为纯粹的电场, 则一定找不到另一惯性系使得电磁场在其中表现为纯粹的磁场. 反之亦然.

2. 倘若电磁场在某一惯性系中表现为纯粹的电场或者纯粹的磁场, 则在任何一个别的惯性系中此电磁场的电场强度矢量必然正交于其磁感应强度.

3. 利用毕安琪恒等式不难看出:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\mathscr{F}^{\mu\nu} &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\,\mathscr{F}^{\mu\nu} = 2\,(\partial_\mu A_\nu)\,\mathscr{F}^{\mu\nu} \\ &= 2\partial_\mu\left(A_\nu \mathscr{F}^{\mu\nu}\right) - 2A_\nu\left(\partial_\mu \mathscr{F}^{\mu\nu}\right) \\ &= 2\partial_\mu\left(A_\nu \mathscr{F}^{\mu\nu}\right) \end{aligned}$$

这是 $\mathbb{M}_4$ 中的全散度. 对于拓扑性质平庸的 $\mathbb{M}_4$ 而言, 即使 $F_{\mu\nu}\mathscr{F}^{\mu\nu}$ 项出现在拉氏密度中, 也不会产生实质性的贡献.

顺便指出，虽然

$$\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}^{\mu\nu}$$

也是一个 4-标量，但它实际上就是 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. 无须重复考虑.

事实上，

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F^{\rho\sigma}F_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\delta^{\alpha}_{\rho}\delta^{\beta}_{\sigma} - \delta^{\beta}_{\rho}\delta^{\alpha}_{\sigma}\right)F^{\rho\sigma}F_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2}\left(F^{\alpha\beta} - F^{\beta\alpha}\right)F_{\alpha\beta} \\
&= -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

直接考虑其物理内涵，我们有:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}^{\mu\nu} &= 2\mathscr{F}_{i0}\mathscr{F}^{i0} + \mathscr{F}_{ij}\mathscr{F}^{ij} \\
&= -2B_iB^i + \frac{1}{c^2}\epsilon^{ijk}\epsilon_{ijl}E^lE_k \\
&= 2\left(\frac{\boldsymbol{E}^2}{c^2} - \boldsymbol{B}^2\right)
\end{aligned}$$

拓展:

规范不变的 4-标量

$$F_{\mu\nu}\mathscr{F}^{\mu\nu}$$

倘若出现在拓扑非平庸时空中某个场论体系的拉氏密度中，就称其为 Chern-Simions (CS) 项.

- 因为

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}\mathscr{F}^{\mu\nu} &= 2\partial_\mu\left(A_\nu\mathscr{F}^{\mu\nu}\right) = \partial_\mu\left(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu\, F_{\rho\sigma}\right) \\
&= 2\partial_\mu\left(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu\partial_\rho A_\sigma\right) \\
&= \partial_\mu K^\mu
\end{aligned}$$

  4-矢量

$$K^\mu = 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu\partial_\rho A_\sigma$$

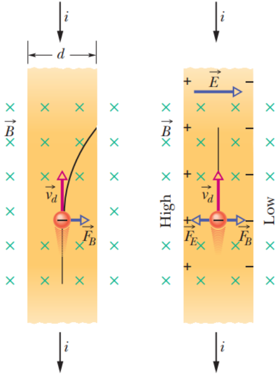
  称为(阿贝尔)Chern-Simions 流密度.

- CS 项意味着时间反演对称性的破坏与宇称不再守恒. 因此，在 QCD 的非微扰研究中常计及非阿贝尔 CS 项的贡献以企探索 $\mathcal{P}$ 与 $\mathcal{T}$ 这两个分立对称性的破坏程度.

- 磁场的存在会破坏时间反演对称性. 因此, CS 项常出现在 $(1+2)$ 维时空的电磁相互作用拉氏密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \alpha\, \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho} - J^\mu A_\mu$$

中, 从理论上解释与理解 $(1+2)$ 维时空中发现的分数统计和分数量子霍尔效应[17].



[17] 例如: Daniel Arovas, Lecture notes on quantum hall effect, 2020, in progress.

Quantum Hall Effect

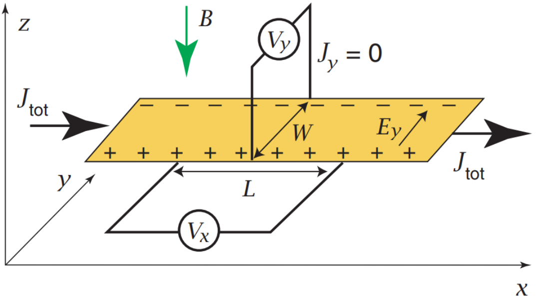


Fig. 1 Hall and diagonal resistivities R_{xy} and R_{xx} are independent of sample properties and given by $R_{xy} = V_y/J_{tot} \longrightarrow \nu^{-1}(2\pi\hbar/e^2)$, $R_{xx} = -WV_x/LJ_{tot} \longrightarrow 0$, in quantum Hall (QH) states. Here, ν is the filling factor.

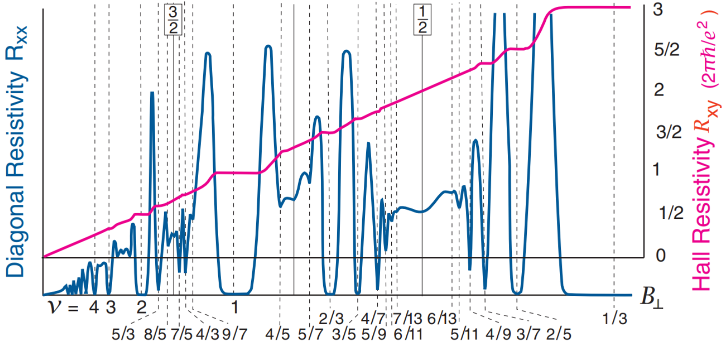
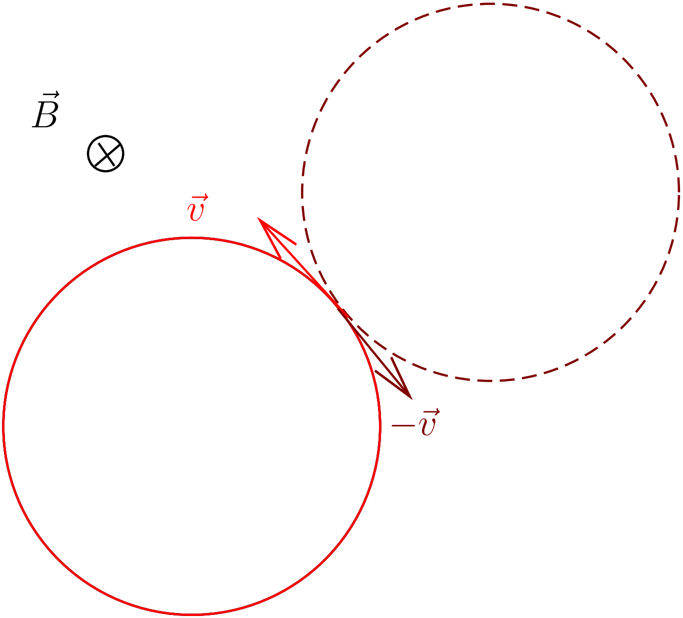


Fig. 2 QH states are detected by plateaux developed in the Hall resistivity R_{xy} or dips in the diagonal resistivity R_{xx}.

磁场的存在破坏时间反演对称性



$\mathbb{M}_3$ 与 $\mathbb{M}_4$ 中 Chern-Simions 项的比较:

如前所述，对于 $(1+3)$ 维时空 $\mathbb{M}_4$ 中的 $U(1)$ 规范场而言，其拉氏密度中候选的 Chern-Simions 项为：

$$\mathscr{L}_{\text{CS}}^{(4)} = \alpha\, F_{\mu\nu}\mathscr{F}^{\mu\nu} = \frac{\alpha}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$$

$\mathscr{L}_{\text{CS}}^{(4)}$ 显然地是一个规范不变的 4-标量. 因为

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{CS}}^{(4)}}{\partial A^\nu} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{CS}}^{(4)}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \alpha\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}F_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 2\alpha\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta} = 4\mathscr{F}^{\mu\nu}$$

$\mathscr{L}_{\text{CS}}^{(4)}$ 对规范势 $A_\nu(x)$ 拉氏方程的贡献是:

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{CS}}^{(4)}}{\partial A^\nu} - \partial_\mu\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{CS}}^{(4)}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -4\partial_\mu\mathscr{F}^{\mu\nu}$$

考虑到毕安琪恒等式，$\partial_\mu\mathscr{F}^{\mu\nu} = 0$，这个贡献实际上为零.

- 对于 $\mathbb{M}_4$ 中的 $U(1)$ 规范场而言，拉氏密度中计及 CS 项与否都不影响规范场的运动方程.

$(1+2)$ 时空 $\mathbb{M}_3$ 中的情形与此不同. $\mathbb{M}_3$ 中的全反对称不变张量是 $\epsilon^{\mu\nu\rho}$[18]. 因此，$\mathbb{M}_3$ 中规范场的毕安琪恒等式为：

$$\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$$

$U(1)$ 规范场拉氏密度中候选的 Chern-Simions 项为：

$$\boxed{\mathscr{L}_{\rm CS}^{(3)} = \alpha\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\rho F_{\mu\nu}}$$

容易看出，$\mathscr{L}_{\rm CS}^{(3)}$ 也是局域规范变换 $\delta A_\mu(x) = \partial_\mu\theta(x)$ 下的不变量：

$$\delta\mathscr{L}_{\rm CS}^{(3)} = \alpha\epsilon^{\mu\nu\rho}\Big(\delta A_\rho\Big)F_{\mu\nu} = \alpha\epsilon^{\mu\nu\rho}\Big(\partial_\rho\theta(x)\Big)F_{\mu\nu} = \partial_\rho\Big(\alpha\theta(x)\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\mu\nu}\Big)$$

最后一步使用了毕安琪恒等式.

---

[18] 我们约定 $\epsilon^{012} = 1$.

$\mathscr{L}_{\text{CS}}^{(3)}$ 对“广义坐标”$A_\mu(x)$ 以及“广义速度”$\partial_\nu A_\mu(x)$ 的偏导数为：

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{CS}}^{(3)}}{\partial A^\nu} = \alpha\epsilon^{\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma},$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{CS}}^{(3)}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \alpha\epsilon^{\beta\rho\sigma} A_\sigma \frac{\partial F_{\beta\rho}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 2\alpha\epsilon^{\mu\nu\sigma} A_\sigma$$

因此，$\mathscr{L}_{\text{CS}}^{(3)}$ 对规范场拉氏方程的贡献为：

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{CS}}^{(3)}}{\partial A^\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}_{\text{CS}}^{(3)}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \alpha\epsilon^{\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} - 2\alpha\epsilon^{\mu\nu\sigma} \partial_\mu A_\sigma = 4\alpha\epsilon^{\nu\rho\sigma} \partial_\rho A_\sigma$$

这个贡献不为零.

- 对于 $\mathbb{M}_3$ 中的 $U(1)$ 规范场而言，拉氏密度中计及 CS 项的贡献会严重影响规范场的运动方程.

电磁场强度的洛伦兹推动变换

电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 联合构成电磁场张量 $F_{\mu\nu}(x)$，它们在洛伦兹变换 $x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu$ 下的变换法则自然是:

$$\boxed{F_{\mu\nu}(x) \quad \rightsquigarrow \quad F'_{\mu\nu}(x') = F_{\rho\sigma}(x)\,\tilde{\Lambda}^\rho{}_\mu\,\tilde{\Lambda}^\sigma{}_\nu}$$

对于无量纲牵连速度为 $\boldsymbol{\beta}$ 的洛伦兹推动变换，逆洛伦兹变换矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 非零的矩阵元为:

$$\tilde{\Lambda}^0{}_0 = \gamma, \quad \tilde{\Lambda}^0{}_i = \gamma\beta_i, \quad \tilde{\Lambda}^i{}_0 = \gamma\beta^i, \quad \tilde{\Lambda}^i{}_j = \delta^i_j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j.$$

式中 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ 是相对论收缩因子.

回想电磁场张量的物理内涵,

$$\boxed{E_i = -cF_{0i}, \quad B^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk}}$$

我们看到:

$$E'_i = -cF'_{0i} = -cF_{\rho\sigma}\,\tilde{\Lambda}^\rho{}_0\,\tilde{\Lambda}^\sigma{}_i = -cF_{0\sigma}\,\tilde{\Lambda}^0{}_0\,\tilde{\Lambda}^\sigma{}_i - cF_{k\sigma}\,\tilde{\Lambda}^k{}_0\,\tilde{\Lambda}^\sigma{}_i$$

亦即：

$$\begin{aligned} E_i' &= -cF_{0j}\,\tilde{\Lambda}^0{}_0\,\tilde{\Lambda}^j{}_i - cF_{k0}\,\tilde{\Lambda}^k{}_0\,\tilde{\Lambda}^0{}_i - cF_{kj}\,\tilde{\Lambda}^k{}_0\,\tilde{\Lambda}^j{}_i \\ &= -\gamma cF_{0i} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta_i\beta^j cF_{0j} - \gamma c\beta^j F_{ji} \\ &= \gamma E_i - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta_i\beta^j E_j + \gamma c\beta^j \epsilon_{ijk}B^k \end{aligned}$$

换言之，

$$\boxed{\boldsymbol{E}' = \gamma\boldsymbol{E} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{\beta} + \gamma c\,\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}}$$

同理有：

$$\begin{aligned} B'^i &= \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F'_{jk} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{\mu\nu}\,\tilde{\Lambda}^\mu{}_j\,\tilde{\Lambda}^\nu{}_k \\ &= \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{0l}\,\tilde{\Lambda}^0{}_j\,\tilde{\Lambda}^l{}_k + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{m0}\,\tilde{\Lambda}^m{}_j\,\tilde{\Lambda}^0{}_k + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{ml}\,\tilde{\Lambda}^m{}_j\,\tilde{\Lambda}^l{}_k \\ &= \epsilon^{ijk}F_{0l}\,\tilde{\Lambda}^0{}_j\,\tilde{\Lambda}^l{}_k + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{ml}\,\tilde{\Lambda}^m{}_j\,\tilde{\Lambda}^l{}_k \end{aligned}$$

亦即：

$$
\begin{aligned}
B'^{i} &= \gamma\epsilon^{ijk}\beta_j F_{0k} + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\epsilon^{ijk}F_{jl}\beta^l\beta_k \\
&= -\frac{\gamma}{c}\epsilon^{ijk}\beta_j E_k + B^{i} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\epsilon^{ijk}\epsilon_{jlm}B^m\beta^l\beta_k \\
&= B^{i} - \frac{\gamma}{c}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E})^{i} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left(\delta^k_l\delta^i_m - \delta^k_m\delta^i_l\right)B^m\beta^l\beta_k \\
&= B^{i} - \frac{\gamma}{c}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E})^{i} + \frac{\gamma^2\beta^2}{\gamma+1}B^{i} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{B})\,\beta^{i} \\
&= \gamma B^{i} - \frac{\gamma}{c}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E})^{i} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{B})\,\beta^{i}
\end{aligned}
$$

换言之，

$$
\boxed{\boldsymbol{B}' = \gamma\boldsymbol{B} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{\beta} - \frac{\gamma}{c}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}}
$$

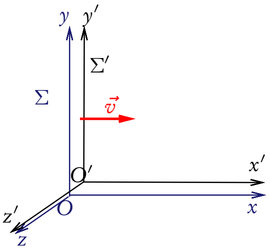
所以，电场与磁场是同一个电磁场的两个侧面. 在给定参考系中，电磁场的电场与磁场表现出不同性质. 但是当参考系变换时，它们可以互相转化.

电磁场强度在两个惯性系之间的反变换关系式是：

$$\boxed{\boldsymbol{E}=\gamma\boldsymbol{E}'-\frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E}')\boldsymbol{\beta}-\gamma c\,\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}'}$$

$$\boxed{\boldsymbol{B}=\gamma\boldsymbol{B}'-\frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{B}')\boldsymbol{\beta}+\frac{\gamma}{c}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}'}$$

例：求出以速度 $\boldsymbol{v}=c\boldsymbol{\beta}$ 相对于惯性系 Σ 作匀速直线运动的点电荷 Q 所激发的电磁场场强分布.



解：

选择 Σ' 系为点电荷自身系．由于在 Σ' 系中点电荷始终处在静止状态，故 Σ' 系中只存在静电场：

$$\boldsymbol{E}' = \frac{Q\boldsymbol{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}, \quad \boldsymbol{B}' = 0$$

按照洛伦兹推动变换，Q 在实验室系 Σ 中激发的电磁场场强为：

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \gamma\boldsymbol{E}' - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}\left(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E}'\right), \quad \boldsymbol{B} = \frac{\gamma}{c}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}'}$$

求上述第一式与牵连速度 $\boldsymbol{\beta}$ 的矢量积，可知 $\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E} = \gamma\,\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}'$．所以实验室参考系中电磁场强是彼此正交的：

$$\boxed{\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}}$$

此外，一旦求出了实验室系中的电场强度分布，上式可以使我们立刻获得磁感应强度的分布．

以下专心计算 Σ 系中的电场强度分布. 场点位置矢量在二惯性系 Σ 和 Σ' 之间的洛伦兹推动变换是

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}\left(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}\right) - \gamma c\boldsymbol{\beta}t$$

假设 Σ 系中的观察者是在 $t=0$ 时刻进行测量, 则有:

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}\left(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}\right)$$

且

$$\begin{aligned}
r'^2 &= \boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}' \\
&= r^2 + \frac{2\gamma^2}{\gamma+1}\left(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}\right)^2 + \frac{\gamma^4\beta^2}{(\gamma+1)^2}\left(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}\right)^2 \\
&= r^2 + \gamma^2\left(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \quad \boldsymbol{E}' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\left[r^2+\gamma^2(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r})^2\right]^{3/2}}\left[\boldsymbol{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r})\right]$$

于是:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \gamma \boldsymbol{E}' - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E}') \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\left[r^2+\gamma^2(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r})^2\right]^{3/2}}\left[\gamma\boldsymbol{r} + \frac{\gamma^3}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}) \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\gamma^4\beta^2}{(\gamma+1)^2}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r})\right] \\
&= \frac{\gamma Q\,\boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0\left[r^2+\gamma^2(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r})^2\right]^{3/2}}
\end{aligned}
$$

运动点电荷 Q 激发的电磁场在实验室系 Σ 中的磁感应强度为:

$$
\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E} = \frac{\gamma\mu_0 Q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})}{4\pi\left[r^2+\gamma^2(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r})^2\right]^{3/2}}
$$

若点电荷作极低速运动, $v \ll c$, 可以略去 β^2 级项且取 $\gamma \approx 1$,

$$
\rightsquigarrow \quad \boldsymbol{E} \approx \frac{Q\boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \qquad \boldsymbol{B} \approx \frac{\mu_0 Q\,(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})}{4\pi r^3}
$$

场量的连续变换

为了讨论电磁相互作用服从的守恒定律，我们需要研究电磁规范势 $A_\mu(x)$ 的变换性质.

- $A_\mu(x)$ 的变换可以仅仅是场空间内部的变化，例如局域规范变换

$$A_\mu(x) \quad \rightsquigarrow \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$$

- $A_\mu(x)$ 的变换也可以是时空点位置坐标的改变在场空间诱导的变换. 例如洛伦兹变换

$$x^\mu \quad \rightsquigarrow \quad x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu \qquad \boxed{\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}}$$

可以诱导出电磁势的如下变换：

$$A_\mu(x) \quad \rightsquigarrow \quad A'_\mu(x') = A_\nu(x)\tilde{\Lambda}^\nu{}_\mu \qquad \boxed{\tilde{\Lambda}^\nu{}_\mu = \eta_{\mu\rho}\Lambda^\rho{}_\sigma\eta^{\sigma\nu}}$$

- 倘若场量 $A_\mu(x)$ 以及时空点位置坐标的改变存在无穷小形式，这类改变就称为连续变换.
- 电磁势在场空间的无穷小变换记为：

$$\delta_0 A_\mu(x) = A'_\mu(x) - A_\mu(x)$$

- 我们把时空点位置坐标的无穷小变换记为

$$x^\mu \quad \rightsquigarrow \quad x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$$

它在场空间诱导的电磁势无穷小变换是：

$$\delta A_\mu(x) = A'_\mu(x') - A_\mu(x)$$

显然，

$$\begin{aligned}\delta A_\mu(x) &= A'_\mu(x+\delta x) - A_\mu(x) \approx \left[A'_\mu(x) + \delta x^\nu \partial_\nu A'_\mu(x)\right] - A_\mu(x) \\ &\approx \delta_0 A_\mu(x) + \delta x^\nu \partial_\nu A_\mu(x) + \mathscr{O}\left((\delta x)^2\right)\end{aligned}$$

所以，精确到无穷小变换变换参数的一次幂，我们有：

$$\boxed{\delta A_\mu(x) = \delta_0 A_\mu(x) + \delta x^\nu \partial_\nu A_\mu(x)}$$

- 无穷小的局域规范变换：

$$\delta x^\mu = 0, \quad \delta A_\mu(x) = \delta_0 A_\mu(x) = \partial_\mu \theta(x)$$

- 通常认为电磁势等场量在时空点位置坐标的平移变换下保持不变

$$x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = x^\mu + b^\mu, \quad A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x') = A_\mu(x)$$

所以，无穷小的时空平移变换表达为：

$$\delta x^\mu = \epsilon^\mu, \quad \delta A_\mu(x) = 0, \quad \delta_0 A_\mu(x) = -\epsilon^\nu \partial_\nu A_\mu(x)$$

- 洛伦兹变换矩阵 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 服从条件 $\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}=\eta_{\rho\sigma}$. 设 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 的无穷小形式为:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}=\delta^{\mu}_{\nu}+\eta^{\mu\rho}\omega_{\rho\nu}$$

$\omega_{\mu\nu}$ 是无穷小的洛伦兹变换实参数[19], 我们看到:

$$\begin{aligned}\eta_{\rho\sigma}&=\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}=\eta_{\mu\nu}\left(\delta^{\mu}_{\rho}+\omega^{\mu}{}_{\rho}\right)\left(\delta^{\nu}_{\sigma}+\omega^{\nu}{}_{\sigma}\right)\\&=\eta_{\rho\sigma}+\omega_{\rho\sigma}+\omega_{\sigma\rho}+\mathscr{O}(\omega^2)\qquad\rightsquigarrow\quad\boxed{\omega_{\rho\sigma}=-\omega_{\sigma\rho}}\end{aligned}$$

因此, 逆洛伦兹矩阵的无穷小形式是:

$$\tilde{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}=\eta_{\nu\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\sigma}\eta^{\sigma\mu}=\delta^{\mu}_{\nu}-\eta^{\mu\rho}\omega_{\rho\nu}$$

电磁势 $A_{\mu}(x)$ 相关的无穷小洛伦兹变换最终表达为:

$$\begin{aligned}&\delta x^{\mu}=\eta^{\mu\rho}\omega_{\rho\nu}x^{\nu},\qquad\delta A_{\mu}(x)=\omega_{\mu\nu}A^{\nu}(x),\\&\delta_0 A_{\mu}(x)=\omega_{\mu\nu}A^{\nu}(x)+\omega_{\rho\sigma}x^{\rho}\partial^{\sigma}A_{\mu}(x)\end{aligned}$$

[19]我们约定: $\omega^{\mu}{}_{\nu}=\eta^{\mu\rho}\omega_{\rho\nu}$.

解释：

电磁势作为一个协变的 4-矢量，它遵循的洛伦兹变换为：

$$A_\mu(x) \quad \rightsquigarrow \quad A'_\mu(x') = A_\nu(x)\,\tilde{\Lambda}^\nu{}_\mu$$

对于无穷小洛伦兹变换，

$$A'_\mu(x') = A_\nu(x)\left(\delta^\nu_\mu - \eta^{\nu\rho}\omega_{\rho\mu}\right) = A_\mu(x) + \omega_{\mu\rho}A^\rho(x)$$

所以，

$$\begin{aligned}
\delta A_\mu(x) &= \omega_{\mu\nu}A^\nu(x) \\
&= \frac{1}{2}\left(\omega_{\mu\nu} - \omega_{\nu\mu}\right)A^\nu(x) = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\left(\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\nu\delta^\beta_\mu\right)A^\nu(x) \\
&= \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\left(\Sigma^{\alpha\beta}\right)_{\mu\nu}A^\nu(x)
\end{aligned}$$

式中

$$\boxed{\left(\Sigma^{\alpha\beta}\right)_{\mu\nu} = \delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\nu\delta^\beta_\mu}$$

是洛伦兹群 $O(1,3)$ 在其矢量表示中生成元的矩阵元.

时空点位置坐标 x^μ 的无穷小洛伦兹变换为：

$$\delta x^\mu = \eta^{\mu\rho}\omega_{\rho\sigma}x^\sigma$$

因此，电磁势的无穷小洛伦兹变换可以表达为如下纯粹的场空间中 $A_\mu(x)$ 的改变：

$$\begin{aligned}
\delta_0 A_\mu(x) &= \delta A_\mu(x) - \delta x^\nu \partial_\nu A_\mu(x) \\
&= \omega_{\mu\nu}A^\nu(x) + \omega_{\rho\sigma}x^\rho\partial^\sigma A_\mu(x) \\
&= \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\left(\Sigma^{\rho\sigma}\right)_{\mu\nu}A^\nu(x) + \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\left(x^\rho\partial^\sigma - x^\sigma\partial^\rho\right)A_\mu(x)
\end{aligned}$$

亦即，

$$\boxed{\delta_0 A_\mu(x) = \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\Big[\eta_{\mu\nu}\left(x^\rho\partial^\sigma - x^\sigma\partial^\rho\right) + \left(\Sigma^{\rho\sigma}\right)_{\mu\nu}\Big]A^\nu(x)}$$

下面考虑电磁相互作用的诺特定理.

诺特定理

诺特定理断言：相应于体系作用量泛函在任意一种连续变换下的不变性，体系存在着一个守恒定律. 现在以电磁相互作用为例讨论诺特定理. 电磁作用体系的作用量泛函是：

$$S = \int \mathrm{d}^4x\, \mathscr{L}(x) = \int \mathrm{d}^4x \left[\mathscr{L}(A_\mu(x),\, \partial_\nu A_\mu(x)) + \mathscr{L}_\mathrm{m}(x)\right]$$

式中，

$$\boxed{\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J^\mu A_\mu + \mathscr{L}_\mathrm{m}(x)}$$

电磁势的规范变换 $\delta_0 A_\mu(x) = \partial_\mu\theta(x)$ 是纯粹的场空间中场量的改变，

$$\delta_0\mathscr{L} = J^\mu\delta_0 A_\mu = J^\mu\partial_\mu\theta(x) = \partial_\mu\left[J^\mu\theta(x)\right] - \theta(x)\partial_\mu J^\mu$$

所以，作用量泛函在局域规范变换下的不变性意味着存在电荷守恒定律：

$$0 = \delta_0 S = -\int \mathrm{d}^4x\, \theta(x)\, \partial_\mu J^\mu \quad \rightsquigarrow \quad \partial_\mu J^\mu = 0$$

现在考虑作用量泛函在时空点位置坐标的连续变换

$$x^\mu \quad \rightsquigarrow \quad x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$$

下的不变性所导致的守恒定律. 注意到:

$$\boxed{\delta S = \int \mathrm{d}^4x\,(\delta\mathscr{L}) + \int (\delta \mathrm{d}^4x)\,\mathscr{L}}$$

- 因为场空间电磁势的无穷小变换 $\delta_0 A_\mu(x)$ 引起的拉氏密度改变为:

$$\begin{aligned}
\delta_0\mathscr{L} &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_\mu(x)}\delta_0 A_\mu(x) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu(x))}\delta_0(\partial_\nu A_\mu(x)) \\
&= \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_\mu(x)} - \partial_\nu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu(x))}\right]\delta_0 A_\mu(x) \\
&\quad + \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu(x))}\delta_0 A_\mu(x)\right) \\
&= \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu(x))}\delta_0 A_\mu(x)\right)
\end{aligned}$$

- 直接因为 x^μ 的无穷小变换引起的拉氏密度改变为:

$$\delta_1\mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}(x)}{\partial x^\mu}\,\delta x^\mu = \delta x^\mu\,\partial_\mu\mathscr{L}$$

所以,

$$\delta\mathscr{L} = \delta_0\mathscr{L} + \delta_1\mathscr{L} = \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu(x))}\delta_0 A_\mu(x)\right) + \delta x^\mu\,\partial_\mu\mathscr{L}$$

接下来再考虑 $\delta(\mathrm{d}^4x)$. 因为

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \qquad \rightsquigarrow\ \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu + \partial_\nu(\delta x^\mu)$$

其行列式为:

$$\det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) = \prod_{a=0}^{3}\left[1 + \partial_a(\delta x^a)\right] = 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)$$

由此知:

$$\delta\left(\mathrm{d}^4x\right) = \mathrm{d}^4x' - \mathrm{d}^4x = \left[\det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) - 1\right]\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}^4x\,\partial_\mu(\delta x^\mu)$$

所以，时空坐标的无穷小变化

$$x^\mu \quad \rightsquigarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$$

可能引起的电磁相互作用体系作用量泛函的改变为：

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int \Big[\delta(\mathrm{d}^4 x)\mathscr{L} + \mathrm{d}^4 x\, \delta\mathscr{L}\Big] \\
&= \int \mathrm{d}^4 x \left[\mathscr{L}\partial_\mu(\delta x^\mu) + \delta x^\mu \partial_\mu \mathscr{L} + \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu(x))}\delta_0 A_\mu(x)\right)\right] \\
&= \int \mathrm{d}^4 x\, \partial_\mu \left[\mathscr{L}\delta x^\mu + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu(x))}\delta_0 A_\nu(x)\right] \\
&= \int \mathrm{d}^4 x\, \partial_\mu \mathscr{J}^\mu
\end{aligned}$$

式中，

$$\mathscr{J}^\mu = \mathscr{L}\delta x^\mu + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu(x))}\delta_0 A_\nu(x)$$

- 倘若时空坐标变换 δx^μ 是电磁相互作用体系的一种对称性:

$$\delta S = 0 \qquad \rightsquigarrow \quad \partial_\mu \mathscr{J}^\mu = 0$$

如此,

$$\boxed{\mathscr{J}^\mu = \mathscr{L}\delta x^\mu + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu(x))}\delta_0 A_\nu(x)}$$

就称为与此对称性相联系的守恒流 4-矢量.

- 回忆矢量场 $A_\mu(x)$ 的能量动量张量 $T^{\mu\nu}$ 的定义:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)}\partial^\nu A_\rho - \eta^{\mu\nu}\mathscr{L}$$

可以把守恒流 4-矢量改写为:

$$\begin{aligned}\mathscr{J}^\mu &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\delta_0 A_\nu + \delta x_\nu\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)}\partial^\nu A_\rho - T^{\mu\nu}\right)\\ &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu(x))}\delta A_\nu(x) - T^{\mu\nu}(x)\,\delta x_\nu\end{aligned}$$

时空平移对称性

在无穷小的时空平移变换下，

$$\delta x_\nu = \epsilon_\nu, \quad \delta A_\nu(x) = 0$$

倘若电磁相互作用体系具有时空平移对称性，$\delta S = 0$，相应的守恒流 4-矢量为：

$$\partial_\mu \mathscr{J}^\mu(x) = 0 \qquad \hookleftarrow \quad \mathscr{J}^\mu(x) = -T^{\mu\nu}(x)\,\epsilon_\nu$$

所以，

- 与时空平移对称性相联系的守恒定律本质上是电磁相互作用体系的能量动量守恒定律：

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}(x) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial T^{0\nu}}{\partial t} = -c\,\partial_i T^{i\nu}$$

- 定义 4-矢量 $\mathscr{M}^\mu$：

$$\mathscr{M}^\mu \equiv -\int \mathrm{d}^3x\, T^{0\mu}(x)$$

它实际上就是体系能量动量守恒定律中出现的守恒量：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathscr{M}^{\mu}}{\mathrm{d}t} &= c\int \mathrm{d}^3x\, \partial_i T^{i\mu}(x) \\ &= c\oint_{\infty} \mathrm{d}s_i T^{i\mu}(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

- 电磁相互作用体系的能量与动量分别定义为：

$$E = -\int \mathrm{d}^3x\, T^{00}(x)$$

$$\boldsymbol{P}^{i} = -\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3x\, T^{0i}(x)$$

换言之，

$$\mathscr{M}^{\mu} = (E,\ c\boldsymbol{P})$$

电磁场的能量动量 4-张量

- 自由电磁场的拉氏密度为

$$\mathscr{L}_{\text{em}} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

所以，电磁场对于电磁相互作用体系能量动量张量的贡献为：

$$T^{\mu\nu}_{\text{em}} = -\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4\mu_0} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

$\mathscr{Q}$: 能否把 $T^{\mu\nu}_{\text{em}}$ 诠释为电磁场的能量动量 4-张量？

1. 很明显，$T^{\mu\nu}_{\text{em}}$ 不是规范变换下的不变量.
2. 倘若电磁相互作用的理论可以作为一个可靠的物理理论，那么 $T^{\mu\nu}_{\text{em}}$ 不具有规范变换下的不变性就是一条不可接受的缺点. 我们的结论是：$T^{\mu\nu}_{\text{em}}$ 没有获得能被解读为电磁场能量动量 4-张量的资格.

- 因为

$$\partial^{\nu} A_{\rho}=\eta^{\nu\sigma}\partial_{\sigma}A_{\rho}=\eta^{\nu\sigma}\left(F_{\sigma\rho}+\partial_{\rho}A_{\sigma}\right)=-\eta^{\nu\sigma}F_{\rho\sigma}+\eta^{\nu\sigma}\partial_{\rho}A_{\sigma}$$

我们可以把 $T_{\rm em}^{\mu\nu}$ 改写为：

$$\begin{aligned} T_{\rm em}^{\mu\nu} &= \frac{1}{\mu_0}\left(\eta^{\nu\sigma}F^{\mu\rho}F_{\rho\sigma}+\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)-\frac{1}{\mu_0}\eta^{\nu\sigma}F^{\mu\rho}\partial_{\rho}A_{\sigma} \\ &= \Theta^{\mu\nu}+T_{\rm D}^{\mu\nu} \end{aligned}$$

式中，

$$\boxed{\Theta^{\mu\nu}=\frac{1}{\mu_0}\left(\eta^{\nu\sigma}F^{\mu\rho}F_{\rho\sigma}+\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)}$$

而

$$T_{\rm D}^{\mu\nu}=-\frac{1}{\mu_0}\eta^{\nu\sigma}F^{\mu\rho}\partial_{\rho}A_{\sigma}$$

使用自由电磁场的 Maxwell 方程 $\partial_{\rho}F^{\mu\rho}=0$，我们可以把 $T_{\rm D}^{\mu\nu}$ 表达为一个全导数：

$$\boxed{T_{\mathrm{D}}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0}\partial_\rho\left(\eta^{\nu\sigma}F^{\mu\rho}A_\sigma\right)}$$

1. $T_{\mathrm{D}}^{\mu\nu}$ 自动满足守恒定律：

$$\partial_\mu T_{\mathrm{D}}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0}\partial_\mu\partial_\rho\left(\eta^{\nu\sigma}F^{\mu\rho}A_\sigma\right) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = \partial_\mu T_{\mathrm{em}}^{\mu\nu}$$

2. $T_{\mathrm{D}}^{0\mu}$ 在 $\mathbb{E}_3$ 上的体积分为零：

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^3x\, T_{\mathrm{D}}^{0\mu} &= -\frac{1}{\mu_0}\int \mathrm{d}^3x\,\partial_i\left(\eta^{\mu\sigma}F^{0i}A_\sigma\right)\\ &= -\frac{1}{\mu_0}\oint_\infty \mathrm{d}s_i\,\left(\eta^{\mu\sigma}F^{0i}A_\sigma\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

所以，

$$\mathscr{M}_{\mathrm{em}}^{\mu} \equiv -\int \mathrm{d}^3x\, T_{\mathrm{em}}^{0\mu}(x) = -\int \mathrm{d}^3x\,\Theta^{0\mu}(x)$$

综合以上因素，通常把电磁场本身的能量动量张量定义为：

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(\eta^{\nu\sigma} F^{\mu\rho} F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}\right)$$

$\Theta^{\mu\nu}$ 具有如下特点：

- 它是规范不变的二阶 4-张量.
- 它是对称张量，$\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu}$.
- 它是无迹张量，

$$\Theta^{\mu}{}_{\mu} = \eta_{\mu\nu}\Theta^{\mu\nu} = 0$$

- 它服从守恒定律：

$$\partial_\mu \left(\Theta^{\mu\nu} + T_{\mathrm{m}}^{\mu\nu}\right) = 0$$

分量 $\Theta^{0\mu}$ 在 $\mathbb{E}_3$ 上的体积分诠释为电磁场本身的能量与动量：

$$(E,\ cP) = \mathscr{M}^{\mu} = -\int \mathrm{d}^3x\, \Theta^{0\mu}(x)$$

现在讨论 $\Theta^{\mu\nu}$ 诸分量的物理内涵:

$$\begin{aligned}
\Theta^{00} &= \frac{1}{\mu_0}\left(\eta^{0\sigma}F^{0\rho}F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4}\eta^{00}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \\
&= \frac{1}{\mu_0}F^{0i}F_{0i} - \frac{1}{4\mu_0}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{\mu_0 c^2}\boldsymbol{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0}\left(\boldsymbol{B}^2 - \frac{\boldsymbol{E}^2}{c^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\epsilon_0\boldsymbol{E}^2 + \frac{\boldsymbol{B}^2}{\mu_0}\right)
\end{aligned}$$

显然,

$$\boxed{u = -\Theta^{00} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0\boldsymbol{E}^2 + \frac{\boldsymbol{B}^2}{\mu_0}\right)}$$

正是我们期望的电磁场在 $\mathbb{E}_3$ 中的能量体密度.

$$
\begin{aligned}
\Theta^{0i} &= \frac{1}{\mu_0}\eta^{i\sigma}F^{0\rho}F_{\rho\sigma} = \frac{1}{\mu_0}\eta^{ik}F^{0j}F_{jk} \\
&= -\frac{1}{\mu_0 c}\epsilon^{ijk}E_j B_k \\
&= -\frac{1}{\mu_0 c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})^i
\end{aligned}
$$

换言之,

$$
\boxed{\boldsymbol{S} = -c\,\Theta^{0i}\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}
$$

正是通常描写电磁能量传输性质的能流密度矢量.

- 电磁场在 $\mathbb{E}_3$ 中的动量密度矢量定义为:

$$
\boxed{\boldsymbol{g} = -\frac{1}{c}\Theta^{0i}\boldsymbol{e}_i = \epsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}
$$

显然, $\boldsymbol{S} = c^2\boldsymbol{g}$.

$$
\begin{aligned}
\Theta^{ij} &= \frac{1}{\mu_0}\left(\eta^{j\sigma}F^{i\rho}F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4}\eta^{ij}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \\
&= \frac{1}{\mu_0}\eta_{\rho\sigma}F^{i\rho}F^{\sigma j} + \frac{1}{4\mu_0}\eta^{ij}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{\mu_0}F^{0i}F^{0j} - \frac{1}{\mu_0}\eta_{kl}F^{ik}F^{jl} + \frac{1}{4\mu_0}\eta^{ij}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{\mu_0 c^2}E^iE^j - \frac{1}{\mu_0}\eta^{jl}\epsilon^{imk}\epsilon_{lnk}B_mB^n + \frac{1}{2\mu_0}\eta^{ij}\left(\boldsymbol{B}^2 - \frac{\boldsymbol{E}^2}{c^2}\right) \\
&= \epsilon_0 E^iE^j - \frac{1}{\mu_0}\left(\eta^{ij}\boldsymbol{B}^2 - B^iB^j\right) + \frac{1}{2\mu_0}\eta^{ij}\left(\boldsymbol{B}^2 - \frac{\boldsymbol{E}^2}{c^2}\right) \\
&= \epsilon_0 E^iE^j + \frac{1}{\mu_0}B^iB^j - \frac{1}{2}\eta^{ij}\left(\epsilon_0\boldsymbol{E}^2 + \frac{\boldsymbol{B}^2}{\mu_0}\right)
\end{aligned}
$$

通常把

$$
\boxed{\mathscr{T}^{ij} = -\Theta^{ij} = -\epsilon_0 E^iE^j - \frac{1}{\mu_0}B^iB^j + \frac{1}{2}\eta^{ij}\left(\epsilon_0\boldsymbol{E}^2 + \frac{\boldsymbol{B}^2}{\mu_0}\right)}
$$

称为电磁场在 $\mathbb{E}_3$ 中的动量流密度张量.

能量动量守恒定律

1. 倘若所考虑的体系是纯粹的电磁场

$$\mathscr{L}_{\rm em} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

没有电荷电流体系与其发生相互作用，则体系的能量动量守恒定律为：

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu}(x) = 0$$

2. 能够对电磁相互作用体系提供完整描写的拉氏密度是：

$$\mathscr{L}_{\rm Full} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J^\mu A_\mu + \mathscr{L}_{\rm m}$$

电磁场充当电荷电流分布 $(J^\mu, \mathscr{L}_{\rm m})$ 发生电磁相互作用的媒介. 体系的能量动量守恒定律为：

$$\partial_\mu \left[\Theta^{\mu\nu}(x) + T^{\mu\nu}_{\rm m}(x) \right] = 0$$

式中

$$T_{\mathrm{m}}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}_{\mathrm{m}}}{\partial(\partial_\mu \phi_{\mathrm{m}})} \partial^\nu \phi_{\mathrm{m}} - \eta^{\mu\nu} \mathscr{L}_{\mathrm{m}}$$

是电荷电流分布本身 [暂设用 4-张量场 $\phi_{\mathrm{m}}(x)$ 描写] 的能量动量 4-张量.

我们暂时不关心电荷电流分布的动力学[20], 仅仅把 J^μ 看作是电磁场的源:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J^\mu A_\mu$$

在此情形下, 如何表述体系的能量动量守恒定律呢?

- 虽然不完整的拉氏密度 $\mathscr{L}$ 舍弃了对作为电磁场源的电荷电流分布的动力学描写, 但它仍提供了对于电磁场本身动力学的完整描写. 根据 $\mathscr{L}$ 可以推导出 Maxwell 方程组

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 J^\nu$$

  并定义电磁场规范不变的能量动量 4-张量 $\Theta^{\mu\nu}(x)$.

---

[20] 即暂时不讨论 $\mathscr{L}_{\mathrm{m}}$ 与 $T_{\mathrm{m}}^{\mu\nu}$.

电磁场的能量动量 4 张量 $\Theta^{\mu\nu}(x)$

$$\boxed{\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(\eta^{\nu\sigma}F^{\mu\rho}F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)}$$

具有对称、无迹和规范变换不变性等性质，但在电磁场源存在的情形下 $\partial_\mu\Theta^{\mu\nu}(x) \neq 0$．这是因为电磁场与其源之间不可避免的存在着能量与动量的交换：

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\Theta^{\mu\nu} &= \frac{1}{\mu_0}\partial_\mu\left(\eta^{\nu\sigma}F^{\mu\rho}F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \\
&= -\eta^{\nu\sigma}J^\rho F_{\rho\sigma} + \frac{1}{\mu_0}\eta^{\nu\sigma}F^{\mu\rho}\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \frac{1}{2\mu_0}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}\partial_\mu F_{\alpha\beta} \\
&= -\eta^{\nu\sigma}J^\rho F_{\rho\sigma} + \frac{1}{2\mu_0}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}\left(\partial_\mu F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\mu} + \partial_\beta F_{\mu\alpha}\right) \\
&= -\eta^{\nu\sigma}J^\rho F_{\rho\sigma}
\end{aligned}$$

亦即：

$$\partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = -J_\mu F^{\mu\nu}$$

或者:

$$\boxed{\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} + J_\mu F^{\mu\nu} = 0}$$

这就是计入了电磁场源(但未考虑其动力学)时电磁相互作用体系的能量动量守恒定律. 回忆

$$J^\mu = (c\rho, \boldsymbol{j}), \quad \Theta^{00} = -u, \quad \Theta^{0i} = -\frac{S^i}{c}, \quad F^{0i} = \frac{E^i}{c}, \quad F^{ij} = \epsilon^{ijk} B_k$$

$\nu = 0$ 时上式的物理内涵为:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \Theta^{\mu 0} + J_\mu F^{\mu 0} = \frac{1}{c}\frac{\partial \Theta^{00}}{\partial t} + \partial_i \Theta^{i0} + j_i F^{i0} \\ &= -\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{c}\partial_i S^i - j_i \frac{E^i}{c} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{S} + \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}\right) \end{aligned}$$

亦即,

$$\boxed{-\nabla \cdot \boldsymbol{S} = \frac{\partial u}{\partial t} + \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}}$$

求其在 $\mathbb{E}_3$ 上某个区域 V 上的的体积分，

$$\boxed{-\oint_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{S} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V u\,\mathrm{d}^3x + \int_V \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}^3x}$$

由于上式右端第二项恰为洛伦兹力做功的功率，上式正是我们期望的电磁场源存在情形下的能量守恒定律.

倘若 $\nu = i$，我们有：

$$\Theta^{0i} = -cg^i, \quad \Theta^{ij} = -\mathscr{T}^{ij}$$

因此，

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\mu\Theta^{\mu i} + J_\mu F^{\mu i} = \frac{1}{c}\frac{\partial\Theta^{0i}}{\partial t} + \partial_k\Theta^{ki} - c\rho F^{0i} + j_k F^{ki} \\
&= -\frac{\partial g^i}{\partial t} - \partial_k\mathscr{T}^{ki} - \rho E^i + \epsilon^{kil} j_k B_l \\
&= -\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathscr{T} + \rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}\right)^i
\end{aligned}$$

亦即：

$$\boxed{-\nabla\cdot\mathscr{T}=\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t}+\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}}$$

求其在 $\mathbb{E}_3$ 上某个区域 V 上的的体积分，

$$\boxed{-\oint_{\partial V}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot\mathscr{T}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}^3x+\int_V(\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})\,\mathrm{d}^3x}$$

这恰可解读为电磁场源存在情形下的动量守恒定律.

- $\mathscr{T}$ 可解读为单位时间内垂直通过界面 ∂V 上单位面元从区域 V 流出（到外部环境中）的动量.
- 单位时间内通过界面 ∂V 流出区域 V 的总电磁动量为：

$$\boldsymbol{F}=\oint_{\partial V}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot\mathscr{T}$$

按照牛顿第二定律，这就是区域 V 中的电磁场通过界面 ∂V 施加给外部环境的合力.

- 洛伦兹力情形下的牛顿第二定律表为：

$$\frac{\mathrm{d}\wp}{\mathrm{d}t} = \rho \boldsymbol{E} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}$$

式中 $\wp$ 是电荷电流分布机械动量体密度，

$$\boldsymbol{P} = \int_V \wp \, \mathrm{d}^3 x = \sum_i \boldsymbol{p}_i$$

因此，积分形式的动量守恒定律可重新表为：

$$\boxed{-\oint_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{s} \cdot \mathscr{T} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_V \boldsymbol{g} \, \mathrm{d}^3 x + \sum_i \boldsymbol{p}_i\right)}$$

所以，即使区域 V 内外没有电磁动量交换，$\mathscr{T}^{ij} = 0$，作为电磁场源的电荷电流分布本身的总机械动量也是不守恒的[21]：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i \boldsymbol{p}_i \neq 0$$

---

[21] 换言之，牛顿第三定律在电磁相互作用过程中不成立.

空间转动对称性

为简单起见，本小节的研究对象仅限于自由电磁场：

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

在无穷小的洛伦兹变换下，

$$\delta x_\mu = \omega_{\mu\sigma} x^\sigma, \qquad \delta A_\mu(x) = \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\left(\Sigma^{\rho\sigma}\right)_{\mu\nu} A^\nu(x)$$

自由电磁场天然地具有洛伦兹变换下的不变性，$\delta S = 0$. 相应的守恒流 4-矢量为：

$$\begin{aligned}
\mathscr{J}^\mu(x) &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu(x))} \delta A_\nu(x) - T^{\mu\nu}(x)\, \delta x_\nu \\
&= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu(x))} \left[\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\left(\Sigma^{\rho\sigma}\right)_{\nu\alpha} A^\alpha(x)\right] - \omega_{\nu\alpha} T^{\mu\nu}(x)\, x^\alpha \\
&= -\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\left(\Sigma^{\rho\sigma}\right)_{\nu\alpha} A^\alpha(x)\right] - \omega_{\rho\sigma} T^{\mu\rho}(x)\, x^\sigma
\end{aligned}$$

亦即：

$$\mathscr{J}^{\mu}=-\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\widetilde{\mathscr{M}}^{\mu\rho\sigma}$$

式中，

$$\widetilde{\mathscr{M}}^{\mu\rho\sigma}=\frac{1}{\mu_0}F^{\mu\nu}\left(\Sigma^{\rho\sigma}\right)_{\nu\alpha}A^{\alpha}(x)+\left[T^{\mu\rho}(x)\,x^{\sigma}-T^{\mu\sigma}(x)\,x^{\rho}\right]$$

因为 $\mathscr{J}^{\mu}$ 是自由电磁场与洛伦兹不变性相联系的守恒流 4-矢量，$\partial_{\mu}\mathscr{J}^{\mu}=0$，$\widetilde{\mathscr{M}}^{\mu\rho\sigma}$ 自然也就是电磁场与洛伦兹不变性相联系的守恒 3 阶 4-张量：

$$\partial_{\mu}\widetilde{\mathscr{M}}^{\mu\rho\sigma}=0$$

1. 在洛伦兹变换中，参数 ω_{ij} 描写无穷小空间转动. 自由电磁场与空间转动对称性相联系的守恒定律即为：

$$\boxed{\partial_{\mu}\widetilde{\mathscr{M}}^{\mu ij}=0}$$

现在的问题是：应该在物理上如何诠释上式中出现的 9 个守恒 4-矢量 $\widetilde{\mathscr{M}}^{\mu ij}$？

暂且回避守恒 4-矢量 $\widetilde{\mathscr{M}}^{\mu ij}$ 的诠释问题，我们先设法克服守恒 4-张量 $\widetilde{\mathscr{M}}^{\mu\rho\sigma}$ 表达式的缺点 $\rightsquigarrow$ $\widetilde{\mathscr{M}}^{\mu\rho\sigma}$ 中出现了 $T^{\mu\rho}(x)$. 由于 $T^{\mu\rho}(x)$ 不能诠释为电磁场的能量动量 4-张量，它的出现阻碍了我们合理理解 $\widetilde{\mathscr{M}}^{\mu\rho\sigma}$ 的物理内涵.

$\mathscr{Q}$: 那么，能否使用

$$\mathscr{M}^{\mu\rho\sigma}=\frac{1}{\mu_0}F^{\mu\nu}\left(\Sigma^{\rho\sigma}\right)_{\nu\alpha}A^{\alpha}(x)+\left[\Theta^{\mu\rho}(x)\,x^{\sigma}-\Theta^{\mu\sigma}(x)\,x^{\rho}\right]$$

替代 $\widetilde{\mathscr{M}}^{\mu\rho\sigma}$ 作为自由电磁场联系于洛伦兹不变性的守恒 4-张量?

如前述，$T^{\mu\nu}(x)$ 与自由电磁场能量动量张量 $\Theta^{\mu\nu}(x)$ 之间的关系是:

$$T^{\mu\nu}=\Theta^{\mu\nu}+T_{\rm D}^{\mu\nu}$$

$T_{\rm D}^{\mu\nu}$ 自动满足守恒定律 $\partial_\mu T_{\rm D}^{\mu\nu}=0$ 且具有表达式

$$T_{\rm D}^{\mu\nu}=-\frac{1}{\mu_0}\partial_\rho\left(F^{\mu\rho}A^{\nu}\right)=-\frac{1}{\mu_0}F^{\mu\rho}\partial_\rho A^{\nu}$$

我们看到：

$$\widetilde{\mathscr{M}}^{\mu\rho\sigma} - \mathscr{M}^{\mu\rho\sigma} = T_{\mathrm{D}}^{\mu\rho}(x)\, x^{\sigma} - T_{\mathrm{D}}^{\mu\sigma}(x)\, x^{\rho}$$

进而，

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \mathscr{M}^{\mu\rho\sigma} &= \partial_\mu \widetilde{\mathscr{M}}^{\mu\rho\sigma} - \partial_\mu \left[T_{\mathrm{D}}^{\mu\rho}(x)\, x^{\sigma} - T_{\mathrm{D}}^{\mu\sigma}(x)\, x^{\rho}\right] \\
&= -T_{\mathrm{D}}^{\mu\rho}(x)\, \partial_\mu x^{\sigma} + T_{\mathrm{D}}^{\mu\sigma}(x)\, \partial_\mu x^{\rho} \\
&= -T_{\mathrm{D}}^{\mu\rho}(x)\, \delta_\mu^{\sigma} + T_{\mathrm{D}}^{\mu\sigma}(x)\, \delta_\mu^{\rho} \\
&= T_{\mathrm{D}}^{\rho\sigma}(x) - T_{\mathrm{D}}^{\sigma\rho}(x)
\end{aligned}$$

回忆

$$T_{\mathrm{D}}^{\rho\sigma} = \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu \left(F^{\mu\rho} A^{\sigma}\right)$$

前面的表达式实际上是如下连续性方程：

$$\partial_\mu \left[\mathscr{M}^{\mu\rho\sigma} - \frac{1}{\mu_0}\left(F^{\mu\rho} A^{\sigma} - F^{\mu\sigma} A^{\rho}\right)\right] = 0$$

所以，能替代 $\widetilde{\mathscr{M}}^{\mu\rho\sigma}$ 作为自由电磁场联系于洛伦兹不变性的守恒 4-张量并不是 $\mathscr{M}^{\mu\rho\sigma}$，而是：[22]

$$M^{\mu\rho\sigma} \equiv \mathscr{M}^{\mu\rho\sigma} - \frac{1}{\mu_0}\left(F^{\mu\rho}A^{\sigma} - F^{\mu\sigma}A^{\rho}\right)$$

进一步注意到：

$$F^{\mu\rho}A^{\sigma} - F^{\mu\sigma}A^{\rho} = F^{\mu\nu}\left(\delta^{\rho}_{\nu}\delta^{\sigma}_{\alpha} - \delta^{\sigma}_{\nu}\delta^{\rho}_{\alpha}\right)A^{\alpha} = F^{\mu\nu}\left(\Sigma^{\rho\sigma}\right)_{\nu\alpha}A^{\alpha}$$

我们有：

$$\boxed{M^{\mu\rho\sigma} = \Theta^{\mu\rho}x^{\sigma} - \Theta^{\mu\sigma}x^{\rho}}$$

- 3 阶 4-张量 $M^{\mu\rho\sigma}$ 表达式中不出现裸露的规范势因子，因此它明显地具有规范变换下的不变性.
- $M^{\mu\rho\sigma}$ 具有后二指标交换的反对称性：

$$M^{\mu\rho\sigma} = -M^{\mu\sigma\rho}$$

[22] K. Bhattacharya 等人的新著 Introduction to advanced electrodynamics 上的 (9.101) 式看起来完全错了.

- $M^{\mu\rho\sigma}$ 就是自由电磁场联系于洛伦兹不变性的守恒 4-张量:

$$\partial_\mu M^{\mu\rho\sigma} = 0$$

其中分量 $M^{\mu ij}$ 形成了自由电磁场联系于空间转动对称性的守恒角动量 4-矢量.

求连续性方程 $\partial_\mu M^{\mu\rho\sigma} = 0$ 在 $\mathbb{E}_3$ 某个区域 V 中的体积分,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_V \partial_\mu M^{\mu\rho\sigma}\,\mathrm{d}^3x \\
&= \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V M^{0\rho\sigma}\,\mathrm{d}^3x + \int_V \partial_i M^{i\rho\sigma}\,\mathrm{d}^3x \\
&= \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V M^{0\rho\sigma}\,\mathrm{d}^3x + \oint_{\partial V}\mathrm{d}s_i\, M^{i\rho\sigma} = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V M^{0\rho\sigma}\,\mathrm{d}^3x
\end{aligned}$$

最后一步使用了场量 (法分量) 在边界面 ∂V 上为零的假设.

所以，自由电磁场联系于洛伦兹不变性的守恒定律改写为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M^{\rho\sigma} = 0 \qquad \hookleftarrow \quad M^{\rho\sigma} = \int_V M^{0\rho\sigma}\, \mathrm{d}^3 x$$

守恒量 $M^{\rho\sigma}$ 的被积函数可表为：

$$M^{0\rho\sigma} = \Theta^{0\rho}\, x^{\sigma} - \Theta^{0\sigma}\, x^{\rho}$$

回忆

$$\Theta^{00} = -u, \qquad u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$\Theta^{0i} = -c g^i = -\frac{S^i}{c}, \qquad \boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{S}}{c^2} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$

我们有：

$$M^{00i} = \Theta^{00}\, x^i - \Theta^{0i}\, x^0 = -u\, x^i + c^2\, g^i\, t = -\left(u\boldsymbol{r} - c^2 \boldsymbol{g} t\right)^i$$

$$M^{0jk} = \Theta^{0j}\, x^k - \Theta^{0k}\, x^j = -c\, g^j\, x^k + c\, g^k\, x^j = c\, \epsilon^{jkl} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{g})_l$$

我们看到：

- M^{0jk} 的物理本质是 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g}$，其在区域 V 中的体积分

$$\boxed{\boldsymbol{M}\equiv\int_V \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}^3x}$$

  正是自由电磁场联系于空间转动对称性的守恒量．我们把它诠释为区域 V 中电磁场的角动量．

- M^{00i} 的物理内涵是 $u\boldsymbol{r}-c^2t\boldsymbol{g}$. 其在区域 V 中的体积分是自由电磁场联系于洛伦兹推动不变性的守恒量：[23]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \left(u\boldsymbol{r}-c^2t\boldsymbol{g}\right)\,\mathrm{d}^3x=0$$

自由电磁场联系于洛伦兹推动不变性的守恒定律可改写为：

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \left(u\boldsymbol{r}\right)\,\mathrm{d}^3x-c^2\int_V \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}^3x-c^2t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}^3x$$

---

[23]进一步的讨论请参阅：H. Muller-Kirsten, *Electrodynamics, an introduction including quantum effects*, World Scientific, 2004, Page 434.

假设区域 V 中没有电荷电流分布，V 内外也无电磁能量、动量的交换：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V u\,\mathrm{d}^3x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}^3x = 0$$

在此情形下，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V (u\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^3x = c^2\int_V \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}^3x$$

倘若定义区域 V 中自由电磁场的“能量中心”：

$$\boxed{\boldsymbol{r}_c \equiv \frac{\int_V (u\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^3x}{\int_V u\,\mathrm{d}^3x}}$$

此能量中心的运动速度为：

$$\boldsymbol{v}_c = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V (u\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^3x}{\int_V u\,\mathrm{d}^3x} = c^2\,\frac{\int_V \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}^3x}{\int_V u\,\mathrm{d}^3x} = \frac{\boldsymbol{G}\,c^2}{U}$$

式中 U 与 $\boldsymbol{G}$ 分别是区域 V 中电磁场的总能量和总动量：

$$U = \int_V u \,\mathrm{d}^3 x, \qquad \boldsymbol{G} = \int_V \boldsymbol{g} \,\mathrm{d}^3 x$$

所以, 电磁场作用量泛函具有洛伦兹推动变换下的不变性意味着其能量中心的运动类似于一个能量为 U 动量为 $\boldsymbol{G}$ 的相对论性质点的运动.

接下来讨论电磁场角动量的物理内涵. 我们对 $F^{\mu\nu}$ 所赋予的物理内涵意味着

$$\epsilon_{ijk} B^k = F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = \epsilon_{ijk} (\nabla \times A)^k \quad \rightsquigarrow \ \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

进而,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g} &= \epsilon_0 \,\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \epsilon_0 \boldsymbol{e}_i \epsilon_{ijk} \epsilon^{mnk} E_j \partial^m A^n \\ &= \epsilon_0 \boldsymbol{e}_i E_j (\partial^i A^j - \partial^j A^i) = \epsilon_0 E_j \nabla A^j - \epsilon_0 (\boldsymbol{E} \cdot \nabla) \boldsymbol{A} \end{aligned}$$

以及:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\epsilon_0} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{g} = E_j (\boldsymbol{r} \times \nabla) A^j - E^j (\boldsymbol{r} \times \partial_j \boldsymbol{A}) \\ &= E_j (\boldsymbol{r} \times \nabla) A^j - \partial_j [E^j (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{A})] + (\nabla \cdot \boldsymbol{E})(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{A}) + E^j [(\partial_j \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{A}] \\ &= E_j (\boldsymbol{r} \times \nabla) A^j - \partial_j [E^j (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{A})] + \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{A} \end{aligned}$$

求其在 $\mathbb{E}_3$ 某个区域 V 中的体积分，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M} &= \int_V \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}^3x \\
&= \epsilon_0 \int_V E_j(\boldsymbol{r}\times\nabla)A^j\,\mathrm{d}^3x + \epsilon_0\int_V \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}^3x \\
&\qquad - \epsilon_0\int_V \partial_j[E^j(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A})]\,\mathrm{d}^3x \\
&= \epsilon_0 \int_V E_j(\boldsymbol{r}\times\nabla)A^j\,\mathrm{d}^3x + \epsilon_0\int_V \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}^3x - \epsilon_0\oint_{\partial V}\mathrm{d}s_j\,E^j(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A})
\end{aligned}$$

假设电磁场仅分布于区域 V 之内、无场强法分量通过边界面 ∂V 溢出：

$$\oint_{\partial V}\mathrm{d}s_j\,E^j(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A}) = 0$$

如此，

$$\boxed{\boldsymbol{M} = \epsilon_0 \int_V E_j(\boldsymbol{r}\times\nabla)A^j\,\mathrm{d}^3x + \epsilon_0\int_V \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}^3x}$$

或者等价地，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M} &= \epsilon_0 \int_V E^{\,i} \Big[\delta_{ij} (\boldsymbol{r} \times \nabla) + \epsilon_{ijk} \boldsymbol{e}^k \Big] A^{\,j} \, \mathrm{d}^3 x \\ &= \frac{i\epsilon_0}{\hbar} \int_V E^{\,i} \Big[\delta_{ij} (\boldsymbol{r} \times \hat{\boldsymbol{p}}) - i\hbar \epsilon_{ijk} \boldsymbol{e}^k \Big] A^{\,j} \, \mathrm{d}^3 x \end{aligned}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\nabla$. 此式可以启发性地改写为：

$$\boxed{\boldsymbol{M} = \frac{i\epsilon_0}{\hbar} \int_V E^{\,i} \Big[\delta_{ij} \hat{\boldsymbol{l}} + (\hat{\boldsymbol{s}})_{ij} \Big] A^{\,j} \, \mathrm{d}^3 x}$$

这里 $\hat{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{r} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ 是 (量子力学意义下) 光子的轨道角动量算符，而

$$(\hat{\boldsymbol{s}})_{ij} = -i\hbar \epsilon_{ijk} \boldsymbol{e}^k \qquad \rightsquigarrow \quad (\hat{s}_k)_{ij} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$$

应诠释为光子的自旋角动量算符. 容易检验：$(\hat{\boldsymbol{s}}^2)_{ij} = 2\hbar^2 \delta_{ij}$. 故光子的自旋量子数 $s = 1$.[24]

[24] 此结论通常俗称为：光子的自旋为 1.

返回到经典场论．经典电磁场的角动量可表为：

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{s}$$

其中，

1. $\boldsymbol{l}$ 称为电磁场的轨道角动量：

$$\boldsymbol{l} = \epsilon_0 \int_V \mathrm{d}^3x \, E_j(\boldsymbol{r} \times \nabla) A^j$$

之所以如此命名是因为其被积函数中含有复合算符 $(\boldsymbol{r} \times \nabla)$，而量子力学体系的轨道角动量算符是 $-i\hbar(\boldsymbol{r} \times \nabla)$.

2. $\boldsymbol{s}$ 称为电磁场的自旋角动量：

$$\boxed{\boldsymbol{s} = \epsilon_0 \int_V \mathrm{d}^3x \, \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{A}}$$

自旋角动量的特点是其被积函数不显含场点的位置矢径 $\boldsymbol{r}$.

为了对量子物理中光子的自旋有一点感觉，现在考虑真空中一列具有确定频率的时谐电磁波且具有圆极化. 假设该电磁波的频率为 ω，传播方向为直角坐标系的 X^3 轴正向[25]，则此时谐电磁波可用矢量势

$$\boldsymbol{A} = A(r)\big[\boldsymbol{e}_1 \cos(\omega t) + \boldsymbol{e}_2 \sin(\omega t)\big], \qquad k = \omega/c$$

描写. 把磁感应强度的定义式 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ 与法拉第定律结合起来，

$$0 = \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)$$

因此，在物理上可以有：

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \omega A(r)\big[\boldsymbol{e}_1 \sin(\omega t) - \boldsymbol{e}_2 \cos(\omega t)\big] \qquad \rightsquigarrow \ [A(r)]^2 = \frac{\boldsymbol{E}^2}{\omega^2}$$

进一步地，

$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{A} = \omega [A(r)]^2 \boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{E}^2}{\omega} \boldsymbol{e}_3$$

[25] 直角坐标系三个独立方向的基矢分别记为 $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$.

所以,

$$s=\epsilon_0\int_V \mathrm{d}^3x\,\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{e}_3}{\omega}\,\epsilon_0\int_V \mathrm{d}^3x\,\boldsymbol{E}^2$$

回忆电磁场总能量的表达式:

$$U=\frac{\epsilon_0}{2}\int_V \mathrm{d}^3x\,\boldsymbol{E}^2+\frac{1}{2\mu_0}\int_V \mathrm{d}^3x\,\boldsymbol{B}^2$$

且对于真空中的平面电磁波而言[26],

$$\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2=\epsilon_0\boldsymbol{E}^2 \quad\rightsquigarrow\quad U=\epsilon_0\int_V \mathrm{d}^3x\,\boldsymbol{E}^2$$

我们又可以把圆极化的平面电磁波自旋角动量表达为:

$$s=\frac{U}{\omega}\boldsymbol{e}_3$$

[26]证明请参见本课程后续课件,或者郭硕鸿先生的著作《电动力学》第三版第 116 页之 (1.30) 式.

1. 倘若频率为 ω 的一列平面电磁波恰好对应于量子物理中的一个光子，它的能量须表为：

$$U = \hbar\omega$$

式中的 $\hbar$ 称为 Planck 常数，它具有角动量的量纲、其实验值是：

$$\hbar \approx 1.054 \times 10^{-34} \ \ \text{Joul} \cdot \text{s}$$

于是，光子的自旋角动量写为：

$$\boldsymbol{s} = \hbar \boldsymbol{e}_3$$

鉴于 $\boldsymbol{s}$ 的量值只是 $\hbar$ 的一倍，所以称光子的自旋为 1.[27]

[27] $s_3 = \pm 1$，对应于平面电磁波有两个独立的极化方向.

电磁场的哈密顿程式

电磁场的拉氏密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J^{\mu} A_{\mu}$$

通过场强 $F_{\mu\nu}$ 依赖于 $\partial_\rho A_\sigma$, 其中 $\partial_0 A_\sigma$ 是场空间中“广义坐标”A_σ 所对应的“广义速度”. 现把 $A_\sigma(x)$ 重新解读为相空间中的正则坐标, 与其共轭的正则动量定义为:

$$\pi^{\sigma}(x) \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0 A_\sigma(x))} = -\frac{1}{\mu_0} F^{0\sigma}(x)$$

电磁场的动力学决定于哈密顿密度:

$$\mathscr{H} = \pi^{\mu} \partial_0 A_{\mu} - \mathscr{L}$$

与基本的等式泊松括号:

$$\{A_\rho(t,\ x), \pi^{\sigma}(t,\ y)\} = \delta_\rho^\sigma \delta^{(3)}(x - y)$$

1. 不幸的是：电磁场与“正则坐标”$A_0(x)$ 共轭的“正则动量”$\pi^0(x)$ 恒等于零，

$$\pi^0(x) = -\frac{1}{\mu_0} F^{00}(x) = 0$$

它使得基本泊松括号[28]

$$\left\{A_0(t,\ \boldsymbol{x}), \pi^0(t,\ \boldsymbol{y})\right\} = \delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

无法逻辑自洽地成立。我们现在身处尴尬的局面：$\pi^0(x)$ 并不是电磁场真实的动力学变量； $\pi^0 = 0$ 是一个约束方程，但我们又不能简单粗暴地使用它直接把 π^0 从理论中剔除.

$\mathcal{Q}$: 应该怎么建立电磁场的哈密顿形式体系？

[28]在经典场论意义下，任意两个电磁场量 $F(t, \boldsymbol{x})$ 与 $G(t, \boldsymbol{y})$ 的等时泊松括号按照泛函导数的积分定义：

$$\{F(t,\ \boldsymbol{x}), G(t,\ \boldsymbol{y})\} = \int \mathrm{d}^3 z \left[\frac{\delta F(t,\ \boldsymbol{x})}{\delta A_\mu(t,\ \boldsymbol{z})} \frac{\delta G(t,\ \boldsymbol{y})}{\delta \pi^\mu(t,\ \boldsymbol{z})} - \frac{\delta G(t,\ \boldsymbol{y})}{\delta A_\mu(t,\ \boldsymbol{z})} \frac{\delta F(t,\ \boldsymbol{x})}{\delta \pi^\mu(t,\ \boldsymbol{z})}\right]$$

含有约束的哈密顿程式

为了合理地建立电磁场的哈密顿表述，我们须事先了解狄拉克的约束理论. 为方便计，暂时考虑质点组构成的力学体系.

1. 在相空间中，由体系的正则坐标与正则动量构成的正则共轭变量为 $(q_a,\ p_a)$ $(a=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$.
2. 作为工作假定，暂且认为这些正则变量彼此独立(不一定为真)，

$$\{q_a, p_b\} = \delta_{ab}, \qquad \{q_a, q_b\} = \{p_a, p_b\} = 0$$

泊松括号的定义为：

$$\{F, G\} = \sum_{a=1}^{N}\left(\frac{\partial F}{\partial q_a}\frac{\partial G}{\partial p_a} - \frac{\partial G}{\partial q_a}\frac{\partial F}{\partial p_a}\right)$$

3. 动力学决定于哈密顿量 $H(q,\ p) = \sum_{a=1}^{N} p_a\dot{q}_a - L(q, \dot{q})$：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}q_a}{\mathrm{d}t} = \{q_a, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \qquad \frac{\mathrm{d}p_a}{\mathrm{d}t} = \{p_a, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_a}}$$

- 倘若因为拉氏量 $L(q, \dot{q})$ 的内部结构或者人为施加的某些外部条件, 正则变量之间存在函数关系:

$$\phi_m(q,\ p) = 0, \quad m = 1,\ 2,\ \cdots,\ M$$

即正则变量彼此间存在着相互关联, 以致于某些正则变量不独立. 我们称 $\phi_m(q,\ p) = 0\ (1 \leq m \leq M)$ 为初级约束.

- 当体系运动时, 我们要求初级约束仍然成立:

$$\frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}t} = \{\phi_m, H\} \approx 0 \rightsquigarrow \phi_n(q,\ p) = 0,\ n = M+1,\ \cdots,\ M+N$$

新出现的这些约束就称为次级约束.[29]

- 进一步要求次级约束在体系运动时成立,

$$\frac{\mathrm{d}\phi_n}{\mathrm{d}t} = \{\phi_n, H\} \approx 0 \rightsquigarrow \phi_l(q,\ p) = 0,\ l = M+N+1,\ \cdots$$

直至找出体系中隐藏的所有次级约束.

[29]这里出现近似等号 $\approx$ 的意思是: 在涉及约束 ϕ_m 的泊松括号 $\{\phi_m, A\}$ 计算完成之前时暂时不能使用约束条件 $\phi_m = 0$. 下同.

- 把体系中的约束区分为初级约束和所有次级约束这种分类虽然是必要的，但并不重要.以下把它们笼统地记为

$$\chi_r(q, p) = 0, \quad 1 \le r \le S$$

- 计算泊松括号：

$$C_{rs}(q, p) \approx \{\chi_r(q, p), \chi_s(q, p)\}, \qquad 1 \le r, s \le S$$

对于指定的 r，倘若对所有的 s $(1 \le s \le S)$ 均有 $C_{rs} \approx 0$ 或者 $C_{rs} \approx \sum_{t=1}^{S} u_t^{(s)} \chi_t$ 成立，则称 $\chi_r(q, p) = 0$ 为体系的第一类约束. 否则称 $\chi_r(q, p) = 0$ 为体系的第二类约束.

- 存在第一类约束意味着体系中含有非物理自由度. 可以人为施加新的外来约束条件将其转化为第二类约束，从而消除掉体系中所有的非物理自由度[30].
- 第二类约束的存在说明之前定义的泊松括号并不能提供对体系动力学的恰当描写，应该由所谓的 Dirac 括号所替代：

[30] 某些特殊情形下也可以通过直接求解第一类约束的方法消除非物理自由度.

$$\boxed{\{f, g\}_{\mathrm{D}} = \{f, g\} - \sum_{r, s} \{f, \chi_r\} C_{rs}^{-1} \{\chi_s, g\}}$$

此处 $C = (C_{rs})$, C^{-1} 是 C 的逆矩阵:

$$\sum_s C_{rs} C_{st}^{-1} = \delta_{rt}$$

当所有的约束都是第二类约束时, $\det C \neq 0$, C^{-1} 显然是存在的.

- 第二类约束 $\chi_r(q, p) = 0$ 与其满足的 Dirac 括号相容:

$$\begin{aligned}
\{\chi_r, g\}_{\mathrm{D}} &= \{\chi_r, g\} - \sum_{t, s} \{\chi_r, \chi_t\} C_{ts}^{-1} \{\chi_s, g\} \\
&= \{\chi_r, g\} - \sum_s \left[\sum_t C_{rt} C_{ts}^{-1} \right] \{\chi_s, g\} \\
&= \{\chi_r, g\} - \sum_s \delta_{rs} \{\chi_s, g\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

因此可以安全地从体系的动力学描写中舍去.

从 C 矩阵之矩阵元的定义

$$C_{rs}(q,\ p) \approx \{\chi_r(q,\ p),\ \chi_s(q,\ p)\}$$

可知:

1. C 矩阵是反对称矩阵, $C_{rs} = -C_{sr}$.
2. 倘若 C 有逆 C^{-1}, C^{-1} 也必为反对称矩阵 $C^{-1}_{rs} = -C^{-1}_{sr}$.
3. 物理体系中第二类约束的总数必定是偶数个.

不难验证, Dirac 括号具有如下重要性质:

1. 反交换律:

$$\boxed{\{f,\ g\}_{\mathrm{D}} = -\{g,\ f\}_{\mathrm{D}}}$$

2. 分配律:

$$\boxed{\{f,\ gh\}_{\mathrm{D}} = \{f,\ g\}_{\mathrm{D}}\, h + g\,\{f,\ h\}_{\mathrm{D}}}$$

3. 雅可比恒等式:

$$\boxed{\{f,\ \{g,\ h\}_{\mathrm{D}}\}_{\mathrm{D}} + \{g,\ \{h, f\}_{\mathrm{D}}\}_{\mathrm{D}} + \{h,\ \{f,\ g\}_{\mathrm{D}}\}_{\mathrm{D}} = 0}$$

回到电磁场.

因为存在初级约束 $\pi^0=0$, 电磁场的哈密顿密度表达为:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{H} &= \pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathscr{L} \\
&= \pi^i \partial_0 A_i + \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \\
&= -\frac{1}{\mu_0} F^{0i} F_{0i} - \frac{1}{\mu_0} F^{0i} \partial_i A_0 + \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \\
&= -\frac{1}{\mu_0} \partial_i (F^{0i} A_0) - \frac{1}{2\mu_0} F^{0i} F_{0i} + \frac{1}{4\mu_0} F^{ij} F_{ij} - J^i A_i \\
&\quad + \left[\frac{1}{\mu_0} \partial_i F^{0i} - J^0\right] A_0
\end{aligned}
$$

式中 $F^{0i}=-\mu_0\pi^i$. 体系的哈密顿量是 $\mathscr{H}$ 在 $\mathbb{E}_3$ 中的体积分:

$$
H = \int \mathrm{d}^3 x \left[\frac{1}{2}\mu_0 \pi^i \pi_i + \frac{1}{4\mu_0} F^{ij} F_{ij} - j^i A_i - A_0 \left(\frac{1}{\mu_0}\partial_i F^{i0} + J^0\right)\right]
$$

于是存在如下次级约束:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi^0(t,\ \boldsymbol{x}) = \left\{\pi^0(t,\ \boldsymbol{x}), H\right\} \\
&\approx -\int \mathrm{d}^3 y \left\{\pi^0(t,\ \boldsymbol{x}), A_0(t,\ \boldsymbol{y})\right\} \left[\frac{1}{\mu_0}\partial_i F^{i0}(t,\ \boldsymbol{y}) + J^0(t,\ \boldsymbol{y})\right] \\
&= \int \mathrm{d}^3 y\, \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \left[\frac{1}{\mu_0}\partial_i F^{i0}(t,\ \boldsymbol{y}) + J^0(t,\ \boldsymbol{y})\right] \\
&= \frac{1}{\mu_0}\partial_i F^{i0}(t,\ \boldsymbol{x}) + J^0(t,\ \boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

这实际上是电高斯定律 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$. 因为 $\pi^\mu = F^{\mu 0}/\mu_0$, 我们现在把前两个约束表达为:

$$
\begin{aligned}
\chi_1 &\approx \pi^0 = 0 \\
\chi_2 &\approx \partial_i \pi^i + J^0 = 0
\end{aligned}
$$

体系中不再存在更多个次级约束. 这是因为 $\dot{\chi}_2 = 0$ 自动成立:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}\chi_2}{\mathrm{d}t} \approx c\,\partial_0\left(\partial_i\pi^i + J^0\right) = c\left[-\frac{1}{\mu_0}\,\partial_i\left(\partial_0 F^{0i}\right) + \partial_0 J^0\right] \\
&= c\left[-\frac{1}{\mu_0}\,\partial_i\left(\partial_\mu F^{\mu i}\right) + \frac{1}{\mu_0}\,\partial_i\left(\partial_j F^{ji}\right) + \partial_0 J^0\right] \\
&= c\left[\partial_i J^i + \frac{1}{\mu_0}\partial_i\partial_j F^{ji} + \partial_0 J^0\right] \\
&= c\,\partial_\mu J^\mu \\
&= 0
\end{aligned}
$$

容易看出:

$$\{\chi_1, \chi_1\} \approx \{\chi_1, \chi_2\} \approx \{\chi_2, \chi_2\} \approx 0$$

所以 χ_1 和 χ_2 都是第一类约束.

为了消除第一类约束带来的非物理自由度, 需要人为地施加新的约束条件, 即取规范. 电动力学中经常采取的两种规范是:

1. Lorenz 规范 $\rightsquigarrow \partial^\mu A_\mu = 0$.
2. 库仑规范 $\rightsquigarrow \partial^i A_i = 0$.

以下我们采取库仑规范,即在体系中引入第三个约束:

$$\boxed{\chi_3 \approx \partial^i A_i = 0}$$

如此有 $\{\chi_2(t,x),\ \chi_3(t,y)\} \neq 0$,从而 χ_2 与 χ_3 都变成了体系的第二类约束. 为了进一步把 $\chi_1 \approx \pi^0 = 0$ 也变成第二类约束,需要对 A_0 做出某种人为规定. 在库仑规范中,$\chi_2 = 0$ 可重新表为:

$$\begin{aligned}
c\rho &= J^0 = -\frac{1}{\mu_0}\partial_i F^{i0} = -\frac{1}{\mu_0}\partial_i(\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) \\
&= -\frac{1}{\mu_0}\Big[\partial_i\partial^i A^0 + \partial_0(\partial_i A^i)\Big] \\
&= -c^2\epsilon_0\,\nabla^2 A^0 \qquad \rightsquigarrow\ \nabla^2 A^0(t,x) = -\frac{\rho(t,x)}{c\,\epsilon_0}
\end{aligned}$$

它允许我们进一步引入第四个约束:

$$\boxed{\chi_4 \approx A^0(t,x) - \frac{1}{4\pi c\,\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3 y\,\frac{\rho(t,y)}{|x-y|} = 0}$$

从而使 $\{\chi_1(t,x),\ \chi_4(t,y)\} \neq 0$. 电磁场体系中存在着且仅存在着这四个约束.

引入约束矩阵 $\mathscr{C}(x, y)$，其矩阵元定义为：

$$\mathscr{C}_{ab}(x, y) \approx \{\chi_a(t,x), \chi_b(t,y)\}, \qquad 1 \leq a, b \leq 4$$

约束间非零的泊松括号为：

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}_{14}(x, y) &= \{\chi_1(t,x), \chi_4(t,y)\} = \left\{\pi^0(t,x), A^0(t,y)\right\} \\
&= -\left\{\pi^0(t,x), A_0(t,y)\right\} \\
&= \delta^{(3)}(x-y) \\
\mathscr{C}_{23}(x, y) &= \{\chi_2(t,x), \chi_3(t,y)\} = \left\{\partial_i\pi^i(t,x), \partial^j A_j(t,y)\right\} \\
&= \partial_i^x\partial_y^j\left\{\pi^i(t,x), A_j(t,y)\right\} \\
&= -\partial_i^x\partial_y^i\delta^{(3)}(x-y) \\
&= \nabla^2\delta^{(3)}(x-y)
\end{aligned}$$

同理有：

$$\mathscr{C}_{32}(x, y) = -\nabla^2\delta^{(3)}(x-y), \quad \mathscr{C}_{41}(x, y) = -\delta^{(3)}(x-y)$$

所以，

$$\mathscr{C}(x,\ y)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta^{(3)}(x-y) \\ 0 & 0 & \nabla^2\delta^{(3)}(x-y) & 0 \\ 0 & -\nabla^2\delta^{(3)}(x-y) & 0 & 0 \\ -\delta^{(3)}(x-y) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以，$\det \mathscr{C}(x,y)\neq 0$，逆约束矩阵 $\widetilde{\mathscr{C}}(x,\ y)$ 是存在的：

$$\widetilde{\mathscr{C}}(x,\ y)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \widetilde{\mathscr{C}}_{14}(x,\ y) \\ 0 & 0 & \widetilde{\mathscr{C}}_{23}(x,\ y) & 0 \\ 0 & \widetilde{\mathscr{C}}_{32}(x,\ y) & 0 & 0 \\ \widetilde{\mathscr{C}}_{41}(x,\ y) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其定义为：

$$\int \mathrm{d}^3 z \sum_{c=1}^{4} \mathscr{C}_{ac}(x,\ z)\,\widetilde{\mathscr{C}}_{cb}(z,\ y)=\delta_{ab}\,\delta^{(3)}(x-y)$$

现在计算逆约束矩阵的非零矩阵元.

$$
\begin{aligned}
\delta_{11}\,\delta^{(3)}(x-y) &= \int \mathrm{d}^3 z \sum_{c=1}^{4} \mathscr{C}_{1c}(x,\ z)\,\widetilde{\mathscr{C}}_{c1}(z,\ y) \\
&= \int \mathrm{d}^3 z\, \mathscr{C}_{14}(x,\ z)\,\widetilde{\mathscr{C}}_{41}(z,\ y) = \int \mathrm{d}^3 z\, \delta^{(3)}(x-z)\,\widetilde{\mathscr{C}}_{41}(z,\ y) \\
&= \widetilde{\mathscr{C}}_{41}(x,\ y)
\end{aligned}
$$

亦即：

$$
\boxed{\widetilde{\mathscr{C}}_{41}(x,\ y) = \delta^{(3)}(x-y)}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_{22}\,\delta^{(3)}(x-y) &= \int \mathrm{d}^3 z \sum_{c=1}^{4} \mathscr{C}_{2c}(x,\ z)\,\widetilde{\mathscr{C}}_{c2}(z,\ y) \\
&= \int \mathrm{d}^3 z\, \mathscr{C}_{23}(x,\ z)\,\widetilde{\mathscr{C}}_{32}(z,\ y) = \int \mathrm{d}^3 z\, \nabla^2 \delta^{(3)}(x-z)\,\widetilde{\mathscr{C}}_{32}(z,\ y) \\
&= \nabla^2 \left[\int \mathrm{d}^3 z\, \delta^{(3)}(x-z)\,\widetilde{\mathscr{C}}_{32}(z,\ y)\right] = \nabla^2 \widetilde{\mathscr{C}}_{32}(x,\ y)
\end{aligned}
$$

亦即：

$$\nabla^2 \tilde{\mathscr{C}}_{32}(x,\ y) = \delta^{(3)}(x-y)$$

使用数学恒等式 $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta^{(3)}(r)$，我们有：

$$\boxed{\tilde{\mathscr{C}}_{32}(x,\ y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|}}$$

同理有：

$$\boxed{\tilde{\mathscr{C}}_{23}(x,\ y) = \frac{1}{4\pi|x-y|}, \qquad \tilde{\mathscr{C}}_{14}(x,\ y) = -\delta^{(3)}(x-y)}$$

这些就是 $\tilde{\mathscr{C}}$ 所有的非零矩阵元. 进一步注意到 $A_i(t, x)$ 与第二类约束之间非零的泊松括号仅仅是：

$$\begin{aligned}
\{A_i(t, x),\ \chi_2(t, y)\} &= \left\{A_i(t, x),\ \partial_j^y \pi^j(t, y)\right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial y^j}\left\{A_i(t, x),\ \pi^j(t, y)\right\} = \delta_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}\delta^{(3)}(x-y) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x^i}\delta^{(3)}(x-y)
\end{aligned}$$

$\pi^i(t,x)$ 与第二类约束之间非零的泊松括号仅仅是:

$$
\begin{aligned}
\left\{\pi^i(t,x),\ \chi_3(t,y)\right\} &= \left\{\pi^i(t,x),\ \partial_y^j A_j(t,y)\right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial y_j}\left\{\pi^i(t,x),\ A_j(t,y)\right\} = -\delta_j^i \frac{\partial}{\partial y_j}\delta^{(3)}(x-y) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\delta^{(3)}(x-y)
\end{aligned}
$$

由此可计算电磁场侯选的独立正则变量 $A_i(t,x)$ 与 $\pi^j(t,y)$ 之间的 Dirac 括号:

$$
\begin{aligned}
\left\{A_i(t,x),\ \pi^j(t,y)\right\}_{\mathrm{D}} = &\left\{A_i(t,x),\ \pi^j(t,y)\right\} - \iint \mathrm{d}^3 z\, \mathrm{d}^3 w \\
&\{A_i(t,x),\ \chi_2(t,z)\}\widetilde{\mathscr{C}}_{23}(z,w)\left\{\chi_3(t,w),\ \pi^j(t,y)\right\} \\
= &\delta_i^j \delta^{(3)}(x-y) - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial y_j}\iint \mathrm{d}^3 z\, \mathrm{d}^3 w\, \delta^{(3)}(x-z)\, \widetilde{\mathscr{C}}_{23}(z,w) \\
&\delta^{(3)}(w-y)
\end{aligned}
$$

$$= \delta_i^j \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial y_j} \widetilde{\mathscr{C}}_{23}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \delta_i^j \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial y_j} \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$$

亦即：

$$\left\{A_i(t, \boldsymbol{x}),\ \pi^j(t, \boldsymbol{y})\right\}_{\mathrm{D}} = \delta_i^j \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x_j} \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$$

同理有：

$$\{A_i(t, \boldsymbol{x}),\ A_j(t, \boldsymbol{y})\}_{\mathrm{D}} = \left\{\pi^i(t, \boldsymbol{x}),\ \pi^j(t, \boldsymbol{y})\right\}_{\mathrm{D}} = 0$$

构造出 Dirac 括号意味着体系中的约束正式解除（**即可以使用第二类约束方程去除体系中的非独立正则变量**）. 相空间中电磁场的正则变量并不是起初猜测的 $A_\mu(t, \boldsymbol{x})$ 和 $\pi^\mu(t, \boldsymbol{x})$（共 8 个），其数目为：

$$8\text{ 减去第二类约束的数目} = 8 - 4 = 4$$

在库仑规范里，它们是满足无散条件 $\partial_i \pi^i = 0$ 与 $\partial^i A_i = 0$ 的矢势分量 $A_i(t, \boldsymbol{x})$ 和 $\pi^i(t, \boldsymbol{x})$. 习惯上常称它们为 $\boldsymbol{A}_\perp$ 和 $\boldsymbol{\pi}_\perp$.

小结:

- 库仑规范中，自由电磁场独立的正则变量共有 4 个，即服从无散条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}_\perp=\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}_\perp=0$$

的 $\boldsymbol{A}_\perp=A^i\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{\pi}_\perp=\pi^i_\perp\boldsymbol{e}_i$. 无散条件可以等价地表为：

$$\boxed{\partial^i A_i=\partial_i\pi^i_\perp=0}$$

所以，(在场论意义下) 自由电磁场的自由度为 2.

- 因为

$$\chi_2\approx\partial_i\pi^i(t,\boldsymbol{x})+c\rho(t,\boldsymbol{x})=0$$

$$\chi_4\approx A^0(t,\boldsymbol{x})-\frac{1}{4\pi c\,\epsilon_0}\int\mathrm{d}^3y\,\frac{\rho(t,\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}=0$$

我们看到：

$$\pi^i_\perp(t,\boldsymbol{x})\equiv\pi^i(t,\boldsymbol{x})-\frac{1}{\mu_0}\partial^i A^0(t,\boldsymbol{x})\quad\rightsquigarrow\quad\boxed{\boldsymbol{\pi}_\perp=\boldsymbol{\pi}-\frac{1}{\mu_0}\nabla A^0}$$

- 电磁场独立的正则变量满足的 Dirac 括号为：

$$\boxed{\left\{A_i(t,x),\ \pi_\perp^j(t,y)\right\}_\mathrm{D} = \delta_i^j\delta^{(3)}(x-y) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x_j}\frac{1}{4\pi|x-y|}}$$

$$\boxed{\{A_i(t,x),\ A_j(t,y)\}_\mathrm{D} = \left\{\pi_\perp^i(t,x),\ \pi_\perp^j(t,y)\right\}_\mathrm{D} = 0}$$

很明显，这些 Dirac 括号与无散条件 $\partial^i A_i = \partial_i \pi_\perp^i = 0$ 相容.

- 使用独立的正则变量，电磁场的哈密顿量在库仑规范中可表为[31]：

$$\begin{aligned} H &= \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{1}{2}\mu_0 \pi_\perp^i \pi_i^\perp + \frac{1}{2\mu_0}(\nabla\times A)^2 - j\cdot A\right] \\ &\quad + \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\iint \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\frac{\rho(t,x)\rho(t,y)}{|x-y|} \end{aligned}$$

可以期望 Maxwell 方程组会以哈密顿正则方程的面目出现(略).

[31] 证明留作本次课的一道习题(Optional).

电磁场中带电粒子的拉氏函数

Q: 怎样确定电磁场中带电粒子的拉氏函数?

1. 为明确起见,我们以积分

$$S=\int dt\, L=\int d\tau\, \gamma L$$

定义带电粒子 $(q,\ m)$ 的拉氏量 $L=L(x,\dot{x})$. $\rightsquigarrow$ γL 必须是一个具有能量量纲的 4-标量.

2. 带电粒子与电磁场 $A_\mu(x)$ 发生相互作用时,相关的 4-张量有:

$$\boxed{m,\ \ q,\ \ \tau}\quad \boxed{U^\mu,\ \ p^\mu=mU^\mu,\ \ A_\mu}\quad \boxed{F_{\mu\nu},\ \ \mathscr{F}_{\mu\nu}}$$

在此基础上能够派生出来的、与带电粒子相关的 4-标量只有:

$$U^\mu U_\mu=-c^2,\quad U^\mu A_\mu,\quad U^\mu A^\nu F_{\mu\nu},\quad U^\mu A^\nu \mathscr{F}_{\mu\nu}$$

但后两个 4-标量不具有规范变换下的不变性,不予考虑.

于是，电磁场中带电粒子的拉氏量具有如下候选形式：

$$\gamma L = mU^{\mu}U_{\mu} + qU^{\mu}A_{\mu} = -mc^2 + q\,\gamma(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} - \phi)$$

这里约定：

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad U^{\mu} = \gamma(c,\ \boldsymbol{v}), \qquad A_{\mu} = \left(-\frac{\phi}{c},\ \boldsymbol{A}\right)$$

所以，带电粒子的拉氏量可重新表达为：

$$\boxed{L = -mc^2\sqrt{1-(v/c)^2} + q(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} - \phi)}$$

- 现在研究粒子的拉氏方程。取轨道上各地点的笛卡尔直角坐标 $x^i(t)$ 为带电粒子的广义坐标，我们有：

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = q(v^j\partial_i A_j - \partial_i\phi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial v^i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + qA_i = p_i + qA_i$$

在粒子的轨道上, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 且 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{x}}$. 所以,

$$\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial A_i}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\partial A_i}{\partial x^j}=\partial_t A_i+v^j\partial_j A_i$$

由此推论:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v^i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i+qA_i)=\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}+q\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}+q(\partial_t A_i+v^j\partial_j A_i)$$

至此, 可写出电磁场中带电粒子的拉氏方程:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v^i}-\frac{\partial L}{\partial x^i}\\
&= \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}+q(\partial_t A_i+v^j\partial_j A_i)-q(v^j\partial_i A_j-\partial_i\phi)\\
&= \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}+q\Big[(\partial_i\phi+\partial_t A_i)+v^j(\partial_j A_i-\partial_i A_j)\Big]\\
&= \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}+q\Big(cF_{0i}+v^jF_{ji}\Big)=\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}-q\Big(E_i+\epsilon_{ijk}v^jB^k\Big)
\end{aligned}$$

亦即：

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = q\Big(E_i + \epsilon_{ijk}v^jB^k\Big)$$

或者，

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}}$$

上式正是期望的牛顿第二定律[32]，它决定了带电粒子在电磁场中运动的动力学.

- 洛伦兹力公式可以重新表为：

  $$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -q\Big(cF_{0i} + v^jF_{ji}\Big) = -\frac{q}{\gamma}\Big(U^0F_{0i} + U^jF_{ji}\Big) = -\frac{q}{\gamma}U^\mu F_{\mu i}$$

  计及时间膨胀效应 $\mathrm{d}t = \gamma\mathrm{d}\tau$，上式可改写为：

  $$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}\tau} = -q\,U^\mu F_{\mu i}$$

  由此猜测洛伦兹力公式存在如下协变形式：

  $$\boxed{\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} = q\,F_{\mu\nu}U^\nu}$$

- 协变动力学方程 $\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} = q\,F_{\mu\nu}U^{\nu}$ 在 $\mu = 0$ 情形下变为：

$$\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}\tau} = q\,F_{0\nu}U^{\nu} = q\,F_{0i}U^{i} = q\,\gamma\,F_{0i}v^{i} = -\gamma\frac{q}{c}E_i v^{i} = -\gamma\frac{q}{c}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}$$

回忆粒子 4-动量的物理内涵,

$$p^{\mu} = \left(\frac{W}{c}, \boldsymbol{p}\right) \quad \rightsquigarrow \quad p_0 = -\frac{W}{c}$$

所以,前式改写为：

$P_0 = (-\frac{W}{c}, \vec{p})$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}}$$

这是洛伦兹力做功的功率方程,它显然是合理的.

$\mathcal{Q}$: 可否重新构造一个拉氏函数,使协变的动力学方程

$$\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} = q\,F_{\mu\nu}U^{\nu}$$

以带电粒子拉氏方程的身份出现?

答案是 Yes. 只要我们把带电粒子的新拉氏函数取为:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + qU^\mu A_\mu, \qquad \dot{x}^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = U^\mu$$

且将其作用量泛函重新表达为新拉氏函数对粒子固有时 τ 的积分 $S = \int \mathscr{L}\mathrm{d}\tau$. 因为粒子的 4-速度 U^μ 以拉氏表述中体系广义速度的面貌出现, 新拉氏函数中不能使用质壳条件 $U^\mu U_\mu = -c^2$. 鉴于 $\mathscr{L}$ 是 4-标量, 由此导出的拉氏方程具有明显的 Lorentz 变换不变性:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial U^\mu} \\ &= qU^\nu \partial_\mu A_\nu - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(mU_\mu + qA_\mu\right) \\ &= qU^\nu \partial_\mu A_\nu - m\dot{U}_\mu - qU^\nu \partial_\nu A_\mu \\ &= qF_{\mu\nu}U^\nu - \dot{p}_\mu \end{aligned}$$

这正是期望中的带电粒子动力学方程 $\dot{p}^\mu = qF^{\mu\nu}U_\nu$.

电磁场中带电粒子的正则动量

1. 从拉氏量

$$L = -mc^2\sqrt{1-(v/c)^2} + q(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}-\phi)$$

出发求出的带电粒子的拉氏方程是:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

它明显是规范变换不变的.

电磁场中带电粒子的正则动量定义如下:

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial v^i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + qA_i = p_i + qA_i$$

即:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} + q\boldsymbol{A} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + q\boldsymbol{A}$$

对于在电磁场中运动的带电粒子而言,其正则动量不等于它的机械动量 $\boldsymbol{p}$,而是附加了一项与电磁势相关的项 $q\boldsymbol{A}$.

电磁场中带电粒子的哈密顿量

电磁场中带电粒子的哈密顿量定义为：

$$\begin{aligned}
H &= P_i v^{\,i} - L \\
&= \left[\frac{mv_i}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + qA_i\right] v^{\,i} + mc^2\sqrt{1-(v/c)^2} + q(\phi - v^{\,i}A_i) \\
&= \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + q\phi
\end{aligned}$$

上式第一项是带电粒子自由运动时的总能量，它可以通过粒子的机械动量重新表达为：

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

把此式代回到哈密顿量的表达式中，并注意到 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{P} - q\boldsymbol{A}$，就可以将其最终写为正则变量的函数：

$$H = \sqrt{(\boldsymbol{P} - q\boldsymbol{A})^2c^2 + m^2c^4} + q\phi$$

- 带电粒子的正则动量和哈密顿量均依赖于规范的选择，但由此通过哈密顿正则方程组

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial P_i},\quad \frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial x^i}}$$

确定出来的带电粒子动力学方程并不依赖于规范的选择.

证明如下. 因为,

$$H=\sqrt{(\boldsymbol{P}-q\boldsymbol{A})^2c^2+m^2c^4}+q\phi$$

我们有:

$$\begin{aligned} v^i &= \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial P_i} \\ &= \frac{(P^i-qA^i)c^2}{\sqrt{(\boldsymbol{P}-q\boldsymbol{A})^2c^2+m^2c^4}} \end{aligned}$$

此式自乘，得：

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{(\boldsymbol{P} - q\boldsymbol{A})^2 c^2}{(\boldsymbol{P} - q\boldsymbol{A})^2 c^2 + m^2 c^4} = 1 - \frac{m^2 c^4}{(\boldsymbol{P} - q\boldsymbol{A})^2 c^2 + m^2 c^4}$$

于是，

$$\frac{mc^2}{\sqrt{(\boldsymbol{P} - q\boldsymbol{A})^2 c^2 + m^2 c^4}} = \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

哈密顿正则方程组中的第一个方程可以改写为：

$$v_i = \frac{\sqrt{1 - (v/c)^2}}{m}(P_i - qA_i)$$

$$\leadsto \quad P_i = p_i + qA_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + qA_i$$

此式恰为带电粒子正则动量 $\boldsymbol{P}$ 与机械动量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ 之间的联系.

正则方程组中的第二个方程是:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial H}{\partial x^{i}} \\ &= -q\partial_i\phi + \frac{(P^{j} - qA^{j})c^2}{\sqrt{(\boldsymbol{P} - q\boldsymbol{A})^2c^2 + m^2c^4}}\,q\partial_i A_j \\ &= -q\partial_i\phi + \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{m}p^{j}q\partial_i A_j \\ &= -q\partial_i\phi + qv^{j}\partial_i A_j\end{aligned}$$

两个正则方程相结合,我们有:

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} + q\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} = -q\partial_i\phi + qv^{j}\partial_i A_j$$

在粒子轨道上,$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$. 所以,

$$\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} = \partial_t A_i + \frac{\mathrm{d}x^{j}}{\mathrm{d}t}\partial_j A_i = \partial_t A_i + v^{j}\partial_j A_i$$

代入上式，即得：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} &= -q\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} - q\partial_i\phi + qv^j\partial_i A_j \\ &= q(-\partial_i\phi - \partial_t A_i) + qv^j(\partial_i A_j - \partial_j A_i) \\ &= qE_i + qv^j\epsilon_{ijk}B^k\end{aligned}$$

此式正是所预期的带电粒子在电磁场中的动力学方程：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

它具有明显的规范选择无关性.

若取非相对论极限，

$$H \approx mc^2 + \frac{(\boldsymbol{P} - q\boldsymbol{A})^2}{2m} + q\phi$$

因为哈密顿量出现在正则方程组中，对它加减一个常数不会改变物理. 所以，非相对论力学中带电粒子的哈密顿量常写为：

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{P} - q\boldsymbol{A})^2 + q\phi$$

1. 过渡到量子力学时，需要把粒子的正则动量 (而不是其机械动量) 厄米算符化：

$$\boldsymbol{P} \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\boldsymbol{P}} = -i\hbar\nabla$$

2. 描写微观带电粒子在电磁场中运动的动力学方程是如下形式的薛定谔方程：

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla - i\frac{q}{\hbar}\boldsymbol{A}\right)^2 + q\phi\right]\psi$$

其在规范变换下是不变的.