0515 习题答案

中国科学技术大学
李雨桥 刘元彻

0519

例 0.0.1. *倘若电荷分布的体密度 $\rho(\vec{r})$ 关于原点具有空间反射对称性，即 $\rho(\vec{r})=\rho(-\vec{r})$，请计算其电偶极矩矢量。*

解. 按照电偶极矩矢量的定义：

$$\vec{p}=\int_{\Omega}\mathrm{d}^3x'\vec{r}'\rho(\vec{r}')$$

注意到对于任意 $\vec{r}'=(x',y',z')$，其反射 $-\vec{r}'=(-x',-y',-z')$，我们知道 $-\vec{r}'\rho(-\vec{r}')=-\vec{r}'\rho(\vec{r}')$。由于积分测度处处一致，因此对空间中任意一点处的积分都会与其空间反射处的积分抵消，因此上述积分给出 $\vec{p}=0$，即在这个空间不能定义电偶极矩矢量。 □

例 0.0.2. *当不考虑原子核的运动以及原子核的电荷分布时，氢原子的电荷分布在球坐标系中可表为：*

$$\rho(r,\theta)=-\frac{er^2\sin^2\theta}{64\pi}e^{-r},\qquad 0\le r<\infty,\ \ 0\le\theta\le\pi.$$

e 是电子电荷量的绝对值. 请计算氢原子所有的非零电多极矩（精确到电四极矩，10 分），计算其在远处的静电势分布（10 分）.

解. 精确到电四极矩，体系的电多极矩可表为：

$$q_{lm}=\int\mathrm{d}^3x\rho(\vec{x})r^lY_{lm}(\theta,\phi),\quad (l=0,1,2)$$

因为题设 $\rho(\vec{x})$ 在球坐标系中的表达式与方位角 ϕ 无关，故非零的电多极矩只有 q_{l0}：

$$q_{l0}=\int_0^\infty\mathrm{d}rr^{l+2}\int\mathrm{d}\Omega\rho(r,\theta)Y_{l0}(\theta,\phi)$$

计及“提示”中枚举的球谐函数表达式以及

$$Y_{20}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right)$$

体系的电荷体密度可表为：

$$\rho(r,\theta)=-\frac{e}{64\pi}r^2\exp(-r)\ \sin^2\theta=-\frac{e}{96\pi}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\ r^2\exp(-r)\left[\sqrt{5}Y_{00}(\theta,\phi)-Y_{20}(\theta,\phi)\right]$$

所以，

$$\begin{aligned}q_{l0}&=-\frac{e}{96\pi}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\ \int_0^\infty\mathrm{d}rr^{l+4}\exp(-r)\int\mathrm{d}\Omega\left[\sqrt{5}Y_{00}(\theta,\phi)-Y_{20}(\theta,\phi)\right]Y_{l0}(\theta,\phi) &(1)\\&=-\frac{e}{96\pi}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\ \Gamma(l+5)\left[\sqrt{5}\delta_{l0}-\delta_{l2}\right] &(2)\\&=-\frac{e}{96\pi}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\ (\sqrt{5}\ 4!\delta_{l0}-6!\delta_{l2}) &(3)\end{aligned}$$

换言之，此氢原子非零的电多极矩为:

$$q_{00} = -\frac{e}{\sqrt{4\pi}}, \quad q_{20} = 6e\sqrt{\frac{5}{4\pi}}$$

它们激发的静电势分布是:

$$\varphi(r,\theta) = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{lm}\frac{1}{2l+1}\frac{q_{lm}}{r^{l+1}}Y_{lm}(\theta,\phi) = \frac{1}{\epsilon_0}\left[\frac{q_{00}}{r}Y_{00}(\theta,\phi) + \frac{q_{20}}{5r^3}Y_{20}(\theta,\phi)\right] \tag{4}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{r}\left[1 - \frac{3}{r^2}(3\cos^2\theta - 1)\right] \tag{5}$$

若不使用球多极展开，则计算过程略繁. 计算结果应是：体系的总电荷量为 $Q = -e$，电偶极矩为零 ($\vec{p} = 0$)，电四极矩张量非零的笛卡尔分量是 $D_{11} = D_{22} = -6e$，$D_{33} = 12e$. 静电势的表达式同上. □

例 0.0.3. 空心导体球壳的内外半径分别为 R_1 与 R_2 . 球心放置一个电偶极子 $\vec{p}$. 请计算空间各点的静电势。

解. 由于导体球壳，在内部，夹层，外部分别由金属球壳隔开，所以我们只需要算出每个区域的源电荷，然后分别使用各个区域的格林函数求解。

我们首先可以给出电偶极子的电荷密度表达式:

$$\rho(r') = -\vec{p}\cdot\nabla'\delta^{(3)}(\vec{r}')$$

进一步地，给出球壳空间格林函数，特别是其在球坐标下的展开:

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \sum_{lm}\frac{Y^*_{lm}(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)}{(2l+1)\varepsilon_0[1-(R_1/R_2)^{2l+1}]}(r^l_< - \frac{R_1^{2l+1}}{r_<^{l+1}})(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r^l_>}{R_2^{2l+1}})$$

在这个问题中，由于不接地，我们不能直接钦定导体球壳的电势为 0，而是应该取 $\varphi = 0$ 作为边界条件，但最后再计算出无穷远处的电势，以定出这里的电势到底是多少。

这样，电势解就写为:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \int_{B(r)} \mathrm{d}^3x' G(r,r')\rho(r') - \varepsilon_0\oint_{\partial B(r)}\mathrm{d}s'\varphi\frac{\partial G}{\partial n'} \\ &= -\int_{B(r)}\mathrm{d}^3x' G(r,r')\vec{p}\cdot\nabla'\delta^{(3)}(\vec{r}') \\ &= \vec{p}\cdot\nabla'[G(r,r')]\Big|_{r'=0}\end{aligned}$$

我们这里可以直接把 $r_< = r', r_> = r$ 代入化简:

$$G(r,r') = \sum_{lm}\frac{Y^*_{lm}(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)}{(2l+1)\varepsilon_0[1-(R_1/R_2)^{2l+1}]}(r'^l - \frac{R_1^{2l+1}}{r'^{l+1}})(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{R_2^{2l+1}})$$

在考察球内部空间时，我们取 $R_1 \to 0, R_2 \to R_1$，于是：

$$G(r,r') = \sum_{lm} \frac{Y^*_{lm}(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)}{(2l+1)\varepsilon_0}(\frac{r'^l}{r^{l+1}} - \frac{r^l r'^l}{R_1^{2l+1}})$$

而 ∇' 可以展开为：

$$\nabla' = e_{r'}\frac{\partial}{\partial r'} + \frac{e_{\theta'}}{r'}\frac{\partial}{\partial \theta'} + \frac{e_{\varphi'}}{r'\sin\theta'}\frac{\partial}{\partial \varphi'}$$

$l=0$ 显然没有贡献，$l \geq 2$ 的项最后会因为 $r' \to 0$ 的极限而消去，因而我们只要考虑 $l=1$ 的三项。最终化简得：

$$\phi(r) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_1^3})$$

这是球壳内部的电势。

在考察球壳之间空间时，我们保持 R_1, R_2 不变，$R_1 < r < R_2$。所以格林函数不变。但是我们注意到，金属内部不可能有任何自由电荷，所以 $\rho(r') = 0$，这样自然 $\phi(r) = 0$

在考察球壳外部时，我们同样知道导体外表面没有电荷。我们首先来考察球壳内壁的电荷密度。我们不妨沿着 $\vec{p}$ 的方向来建立一根轴，这样就可以有 $\vec{p}\cdot\vec{r} = pr\cos\theta$。由此，我们在球坐标下，$\phi(r,\theta) = \frac{pr\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_1^3})$，接着就可以求出电场强度：

$$\begin{aligned} E_r &= e_r\frac{\partial\phi}{\partial r} \\ &= \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{-3}{r^3} - \frac{1}{R_1^3}) \end{aligned}$$

这里我们只求了径向分量，因为根据边界条件，球壳内壁上的电荷分布即为：

$$\begin{aligned} \sigma(\theta,\varphi) &= \varepsilon_0\vec{E}(r=R_1)\cdot\hat{n} \\ &= \varepsilon_0\vec{E}(r=R_1)\cdot e_r \\ &= -\frac{p\cos\theta}{\pi R_1^3} \end{aligned}$$

在这个内壁上面积分，立刻可以得到 $Q_{in} = 0$。由于导体本身并不带电，所以 $Q_{out} = 0$，这就表明整个球外部和球面上都没有宏观电荷。所以可以知道外部的 $\rho(r') = 0$，由格林函数法可以得到 $\phi(r) = 0$。

注意到，这里我们求出无穷远点的电势也为 0，这就表明了我们认为球壳内壁的电势为 0 是合理的，不需要作修正。因而我们给出了：

$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_1^3}) & (0 < r < R_1) \\ 0 & (R_1 < r < R_2) \\ 0 & (R_2 < r < \infty) \end{cases}$$

□

例 0.0.4. 一个半径为 R_0 的球面，球坐标 $0<\theta<\pi/2$ 的上半球面电势为 φ_0 ，球坐标 $\pi/2<\theta<\pi$ 的下半球面电势为 $-\varphi_0$. 请计算空间各点的静电势。

解. 我们可以注意到电势仅在球面不同 θ 处有差异。对球内外，我们不妨用 Legendre 函数展开：

$$\phi_{in}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n P_n(\cos\theta)$$
$$\phi_{out}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta)$$

我们在球面 $\partial B(R_0)$ 上作广义 Fourier 展开，可以得到：

$$\phi(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n P_n(\cos\theta)$$

反演可以得到广义 Fourier 系数：

$$\begin{aligned}\phi_n&=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}\phi(\theta)P_n(\cos\theta)\mathrm{d}\cos\theta\\&=\frac{2n+1}{2}[\varphi_0\int_0^1 P_n(x)\mathrm{d}x-\varphi_0\int_{-1}^{0}P_n(x)\mathrm{d}x]\\&=\frac{2n+1}{2}\varphi_0\int_0^1\mathrm{d}x[P_n(x)-P_n(-x)]\end{aligned}$$

注意到，n 为偶数时，$P_n(-x)=P_n(x)$，于是 $\phi_n=0$；n 为奇数时，$P_n(-x)=-P_n(x)$，并且积分得到：

$$\begin{aligned}\int_0^1 P_n(x)\mathrm{d}x&=\left.\frac{P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)}{2n+1}\right|_0^1\\&=(-1)^{(n-1)/2}\frac{(n-2)!!}{(n+1)!!}\end{aligned}$$

从而，得到展开系数为：

$$\phi_n=\begin{cases}0 & \text{(n is even)}\\(2n+1)\varphi_0(-1)^{(n-1)/2}\dfrac{(n-2)!!}{(n+1)!!} & \text{(n is odd)}\end{cases}$$

所以我们可以重新取一个求和指标，只对奇数项求和，并考虑到 $r=R_0$ 时应该有连续性条件：$\phi_{in}=\phi_{out}=\phi(\theta)$，于是就有：

$$\phi_{in}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4n+3)\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}P_{2n+1}(\cos\theta)(\frac{r}{R_0})^{2n+1}\varphi_0$$
$$\phi_{out}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4n+3)\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}P_{2n+1}(\cos\theta)(\frac{R_0}{r})^{2n+2}\varphi_0$$

即为所求的电势。 □

李雨桥、刘元彻
2024 年 5 月 19 日