

中国科学技术大学电动力学期终考试试题卷(2023)

姓名:

学号:

成绩:

提示:

- 闵氏空间 \mathbb{M}_4 中洛伦兹推动变换 $x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ 的非零矩阵元是:

$$\Lambda^0_0 = \gamma, \quad \Lambda^0_j = -\gamma\beta_j, \quad \Lambda^i_0 = -\gamma\beta^i, \quad \Lambda^i_j = \delta^i_j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j \quad (1)$$

式中 $\beta = \beta^i \mathbf{e}_i$ 为无量纲的牵连速度, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

- 在3维欧氏空间 \mathbb{E}_3 中, 我们默认使用 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 和 \mathbf{e}_3 表示整体笛卡尔直角坐标系的单位基矢,

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \quad (2)$$

球坐标系基矢与笛卡尔直角坐标系基矢之间的关系可表为:

$$\mathbf{e}_\phi = -\mathbf{e}_1 \sin \phi + \mathbf{e}_2 \cos \phi, \quad \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_3 \cos \theta + \mathbf{e}_1 \sin \theta \cos \phi + \mathbf{e}_2 \sin \theta \sin \phi, \quad (3)$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_3 \sin \theta + \mathbf{e}_1 \cos \theta \cos \phi + \mathbf{e}_2 \cos \theta \sin \phi \quad (4)$$

或者等价地,

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r \sin \theta \cos \phi + \mathbf{e}_\theta \cos \theta \cos \phi - \mathbf{e}_\phi \sin \phi, \quad (5)$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_r \sin \theta \sin \phi + \mathbf{e}_\theta \cos \theta \sin \phi + \mathbf{e}_\phi \cos \phi \quad (6)$$

简答(40分):

- 电磁场是4-矢量场 $A^\mu(x)$. 为什么电磁场的动力学不能由如下朴素的拉格朗日密度

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2\mu_0} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + J^\mu A_\mu \quad (7)$$

描写(5分)?

答:

- 倘若坐标原点($\mathbf{r} = 0$)被一偶极矩为 \mathbf{g} 的偶极子所占据, 且空间中的场强分布可表为:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{g}}{r^3} + \frac{8\pi}{3} \mathbf{g} \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \quad (8)$$

请问这个偶极子是电偶极子还是磁偶极子(2分)? 请简述理由(3分).

答:

3. 电偶极子 \mathbf{p} 与外静电场 \mathbf{E} 之间的相互作用能是 $W = \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ 还是 $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ (5分) ?

答:

4. 一个磁偶极矩为 $\mathbf{m}(t)$ 的振荡磁偶极子占据了坐标原点. 请写出它所激发的辐射电磁场的推迟矢势(5分).

答:

5. 设介质1和介质2均为寻常的电介质(即 $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$, $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$). 当平面电磁波从介质1向介质2入射时, 在介质分界面发生全反射现象的必要条件是什么(5分)?

答:

6. 与电荷守恒定律 $\partial_\mu J^\mu = 0$ 相联系的对称性是什么(5分)?

答:

7. 加速运动带电粒子在运动过程中会产生辐射电磁场. 倘若使用Lorentz-Dirac力

$$F_{\text{Lorentz-Dirac}}^\mu = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0} \left(\frac{d\mathcal{A}^\mu}{d\tau} - \frac{1}{c^2} \mathcal{A}^2 U^\mu \right) \quad (9)$$

描写辐射电磁场施加给带电粒子的反作用力, 式中 U^μ 与 \mathcal{A}^μ 分别是粒子的4-速度和4-加速度, 请问 $F_{\text{Lorentz-Dirac}}^\mu U_\mu = ?$ (5分)

答:

8. 在绝缘介质中传播的平面电磁波遵从的Maxwell方程组可表为:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mu(\omega)\mathbf{H}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega\epsilon(\omega)\mathbf{E} \quad (10)$$

式中 $\epsilon = \epsilon(\omega)$ 与 $\mu = \mu(\omega)$ 分别是介质的介电常数和磁导率, \mathbf{k} 是平面电磁波的波矢, 其方向定义为平面波相速度的方向.

倘若对于特定的频段, 绝缘介质变成 $\epsilon < 0$ 与 $\mu < 0$ 的双负超材料, 请问在此情形下, 平面电磁波能流密度矢量

$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 的方向与 \mathbf{k} 一致还是相反(3分)? 请简述理由(2分).

答:

计算(60分):

9. 某电磁场在实验室参考系 S 中表现为匀强静电场 $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_1$ 和匀强静磁场

$$\boldsymbol{B} = \frac{B}{2}(\boldsymbol{e}_1 + \sqrt{3}\boldsymbol{e}_2) \quad (11)$$

的叠加, 式中 E 与 B 分别是 S 系中电场强度与磁感应强度的量值. 假设存在另一惯性参考系 S' , 其中的观测者 O 所测得的同一电磁场的场强分布分别是 \boldsymbol{E}' 和 $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{E}'/c$. 请确定 O 相对于实验室参考系 S 的运动速度 \boldsymbol{v} (20分).

10. 两个等量、反号的点电荷 $\pm q$ 系在一根长度为 l 的绝缘棒两端，此电荷体系在初始时刻($t = 0$)的电偶极矩矢量为 $\mathbf{p}_0 = ql\mathbf{e}_2$. 此后绝缘棒绕过中点的 z 轴以角速度 $\omega = ck$ 逆时针在 xy 平面上转动，使电荷体系形成一个振荡电偶极子.

- 请证明 t 时刻体系的电偶极矩矢量可表为(5分):

$$\mathbf{p}(t) = -iql(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2)\exp(-i\omega t) \quad (12)$$

- 计算此振荡电偶极子激发的辐射电磁场场强并将它们在球坐标系中表出(10分).
- 计算平均辐射功率(5分).

11. 考虑时谐电磁波在矩形波导管中的传播. 设波导管横截面的边长分别是 a 与 b ($a \geq b$), 电磁波沿 z 轴方向传播.

- 请证明矩形波导管中不存在 TM_{m0} 波(10分).
- 求出频率为 $f = 3 \times 10^{10}$ Hz的微波在横截面为 $0.3\text{cm} \times 0.6\text{cm}$ 的矩形波导管中传播的模式(10分).