粒子的 4-速度 U

- 粒子 4-速度 U^μ 与其自身求缩并，可以构造出一个四维标量：

$$\boxed{U^\mu U_\mu = -c^2}$$

此式是 $\boldsymbol{U} = (U^\mu)$ 最重要的性质.

- 可以把闵氏空间 $\mathbb{M}_4$ 时间轴方向的单位基矢选择为：

$$\boldsymbol{e}_0 = \frac{\boldsymbol{U}}{c} \quad \rightsquigarrow \quad \boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_0 = -1 = \eta_{00}$$

- 利用 4-速度可以高效地推导出相对论的速度合成法则.

回忆洛伦兹推动矩阵的矩阵元

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma, \quad \Lambda^0{}_i = -\gamma\beta_i, \quad \Lambda^i{}_0 = -\gamma\beta^i, \quad \Lambda^i{}_j = \delta^i_j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j$$

式中 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$，而 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}/c$ 是无量纲化的牵连速度. 惯性系 Σ 和 Σ' 中粒子 4-速度的逆变分量分别是：

$$U^\mu = \gamma_u(c,\ u^i), \quad U'^\mu = \gamma_{u'}(c,\ u'^i) \quad \rightsquigarrow \quad U'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu U^\nu$$

我们有:

$$\begin{aligned}\gamma_{u'} u'^i = U'^i = \Lambda^i{}_\nu U^\nu = \Lambda^i{}_0 U^0 + \Lambda^i{}_j U^j = \Lambda^i{}_0 \gamma_u c + \Lambda^i{}_j \gamma_u u^j \\ = -\gamma\beta^i\gamma_u c + \left[\delta^i_j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j\right]\gamma_u u^j \\ = \gamma_u\left[u^i + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta})\beta^i - \gamma\beta^i c\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{u'} c = U'^0 = \Lambda^0{}_\nu U^\nu = \Lambda^0{}_0 U^0 + \Lambda^0{}_j U^j = \gamma\gamma_u c - \gamma\beta_j\gamma_u u^j \\ = \gamma_u\gamma c(1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta}/c)\end{aligned}$$

整理此二式,我们看到:

$$u'^i = \frac{\gamma_u}{\gamma_{u'}}\left[u^i + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta})\beta^i - \gamma\beta^i c\right], \qquad \frac{\gamma_{u'}}{\gamma_u} = \gamma\left(1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta}/c\right).$$

把第二式代入到第一式，即得：

$$u'^i = \frac{u^i + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta})\beta^i - \gamma\beta^i c}{\gamma\left(1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta}/c\right)}$$

或等价地，

$$\boxed{\boldsymbol{u}' = \frac{\boldsymbol{u} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}c}{\gamma\left(1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta}/c\right)}}$$

这正是相对论的速度合成法则.

- 通过求粒子 4-速度 U 对固有时 τ 的时间导数，可以构造出一个新的四维矢量 $\mathscr{A}$：

$$\mathscr{A} \equiv \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau} = (\mathscr{A}^\mu) = \left(\mathscr{A}^0,\ \mathscr{A}^i\right), \qquad \rightsquigarrow \mathscr{A}^\mu = \frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

常称 $\mathscr{A} = (\mathscr{A}^\mu)$ 为粒子的 4-加速度.

现在研究粒子 4-加速度 $\mathscr{A}$ 与其物理加速度 $\boldsymbol{w}$ 之间的联系. 注意到:

$$U^\mu = \gamma_u(c,\, u^i) = \gamma_u c(1,\, \beta_u^i),\quad ,\boldsymbol{\beta}_u = \boldsymbol{u}/c,\quad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_u^2}},\quad \mathrm{d}t = \gamma_u \mathrm{d}\tau$$

我们有 $\dot{u}^i = w^i$ 且 $\dot{\gamma}_u = \gamma_u^3\ (\boldsymbol{\beta}_u \cdot \boldsymbol{w}/c)$. 进而,

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}^0 &= \frac{\mathrm{d}U^0}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}(\gamma_u\, c)}{\mathrm{d}t} = \gamma_u^4\, \boldsymbol{\beta}_u \cdot \boldsymbol{w} \\
\mathscr{A}^i &= \frac{\mathrm{d}U^i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}(\gamma_u\, c\beta_u^i)}{\mathrm{d}t} = \gamma_u(\gamma_u\, w^i + \dot{\gamma}_u c\, \beta_u^i) \\
&= \gamma_u^4 \left[(1-\beta_u^2)w^i + \boldsymbol{\beta}_u \cdot \boldsymbol{w}\beta_u^i\right] \\
&= \gamma_u^4 w^i + \gamma_u^4\, [\boldsymbol{\beta}_u \times (\boldsymbol{\beta}_u \times \boldsymbol{w})]^i
\end{aligned}$$

亦即:

$$\boxed{\mathscr{A} = (\mathscr{A}^0,\, \mathscr{A}^i) = \gamma_u^4\Big(\boldsymbol{\beta}_u \cdot \boldsymbol{w},\ w^i + [\boldsymbol{\beta}_u \times (\boldsymbol{\beta}_u \times \boldsymbol{w})]^i\Big)}$$

粒子 4-加速度 $\mathscr{A}$ 的空间分矢量 $\boldsymbol{a} := (\mathscr{A}^i)$ 与其物理加速度 $\boldsymbol{w}$ 之间的联系是:

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \gamma_u^4 \left[\boldsymbol{w} + \boldsymbol{\beta}_u \times (\boldsymbol{\beta}_u \times \boldsymbol{w})\right]}$$

不难看出:$(\boldsymbol{\beta}_u \cdot \boldsymbol{a}) = \gamma_u^4 (\boldsymbol{\beta}_u \cdot \boldsymbol{w})$. 所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的关系也可等价地表达为:

$$\boxed{\boldsymbol{w} = \frac{1}{\gamma_u^2} \left[\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\beta}_u (\boldsymbol{\beta}_u \cdot \boldsymbol{a})\right]}$$

- 倘若 $\boldsymbol{\beta}_u \parallel \boldsymbol{w}$, 即粒子做加速直线运动, $\boldsymbol{a} = \gamma_u^4 \boldsymbol{w}$.
- 倘若 $\boldsymbol{\beta}_u \perp \boldsymbol{w}$, 即粒子做匀速曲线运动, $\boldsymbol{a} = \gamma_u^2 \boldsymbol{w}$.
- 倘若粒子的运动速率远小于光速, $|\boldsymbol{\beta}_u| \ll 1$, 精确到无量纲速度参数 $\boldsymbol{\beta}_u$ 的一次幂, 我们看到: $\boldsymbol{a} \approx \boldsymbol{w}$.
- 在粒子瞬时自身系 Σ' 中 $(\boldsymbol{\beta}_{u'} = 0,\ \gamma_{u'} = 1)$,

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{w}'$$

但必须注意的是:绝不能把普通惯性系中的 $\boldsymbol{a}$ 误解为粒子在 Σ' 中、即其瞬时自身系 (MCRF) 中的物理加速度 $\boldsymbol{w}'$.

$\mathscr{Q}$: 粒子 4-加速度 $\mathscr{A}^{\mu}$ 的空间分矢量 $\boldsymbol{a}$ 与其瞬时自身系 Σ' 中的物理加速度 $\boldsymbol{w}'$ 之间有何关系?

前面我们已经求出了一般惯性系 Σ 中粒子 $\mathcal{O}$ 的物理加速度 $\boldsymbol{w}$ 与其瞬时自身系 Σ' 中物理加速度 $\boldsymbol{w}'$ 之间的联系:

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{\gamma_u^3}\left[\boldsymbol{w}' - \frac{\gamma_u^2}{\gamma_u + 1}\boldsymbol{\beta}_u \times (\boldsymbol{\beta}_u \times \boldsymbol{w}')\right]$$

式中 $\gamma_u = 1/\sqrt{1-\beta_u^2}$, 而 $\boldsymbol{\beta}_u = \boldsymbol{u}/c$ 是 $\mathcal{O}$ 相对于 Σ 系的无量纲运动速度. 上式可以重新表为:

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{\gamma_u^2}\left[\boldsymbol{w}' - \frac{\gamma_u}{\gamma_u + 1}\boldsymbol{\beta}_u(\boldsymbol{\beta}_u \cdot \boldsymbol{w}')\right]$$

由此知:

$$\boldsymbol{\beta}_u \cdot \boldsymbol{w} = \frac{1}{\gamma_u^3}(\boldsymbol{\beta}_u \cdot \boldsymbol{w}')$$

利用以上二式,我们有:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \gamma_u^4\left[\boldsymbol{w}+\boldsymbol{\beta}_u\times(\boldsymbol{\beta}_u\times\boldsymbol{w})\right] \\
&= \gamma_u^2\boldsymbol{w}+\gamma_u^4\boldsymbol{\beta}_u(\boldsymbol{\beta}_u\cdot\boldsymbol{w}) \\
&= \boldsymbol{w}'-\frac{\gamma_u}{\gamma_u+1}\boldsymbol{\beta}_u(\boldsymbol{\beta}_u\cdot\boldsymbol{w}')+\gamma_u\boldsymbol{\beta}_u(\boldsymbol{\beta}_u\cdot\boldsymbol{w}') \\
&= \boldsymbol{w}'+\frac{\gamma_u^2}{\gamma_u+1}\boldsymbol{\beta}_u(\boldsymbol{\beta}_u\cdot\boldsymbol{w}')
\end{aligned}$$

或者等价地,

$$\boxed{\boldsymbol{a}=\gamma_u\boldsymbol{w}'+\frac{\gamma_u^2}{\gamma_u+1}\boldsymbol{\beta}_u\times(\boldsymbol{\beta}_u\times\boldsymbol{w}')}$$

所以一般情形下 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{w}'$, 除非 $\boldsymbol{\beta}_u\perp\boldsymbol{w}'$. 倘若粒子 $\mathcal{O}$ 做加速直线运动, $\boldsymbol{\beta}_u\parallel\boldsymbol{w}'$, 我们看到:

$$\boldsymbol{a}=\gamma_u\boldsymbol{w}'=\frac{\boldsymbol{w}'}{\sqrt{1-\beta_u^2}}$$

关联于粒子的 4-加速度 $\mathscr{A}$, 存在着如下两个 4-标量:

$$\mathscr{A}^{\mu} U_{\mu}, \qquad \mathscr{A}^{\mu} \mathscr{A}_{\mu}$$

- 由于 $U^{\mu} U_{\mu} = -c^2$, 我们确定粒子的 4-速度 $\boldsymbol{U}$ 为类时 4-矢量. 求此式对于固有时 τ 的导数, 我们有:

$$0 = 2U_{\mu} \frac{\mathrm{d}U^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}, \qquad \rightsquigarrow \ \mathscr{A}^{\mu} U_{\mu} = 0$$

  所以, 粒子的 4-加速度 $\mathscr{A}$ 是类空 4-矢量. 总可以找到一个惯性系, 使得在其中 $\mathscr{A}^0 = 0$. 因为

$$\mathscr{A}^0 = \gamma_u^4 \, \boldsymbol{\beta}_u \cdot \boldsymbol{w}$$

  这个惯性系实际上是粒子的瞬时自身系 Σ'.

- 另一个 4-标量常常记为：

$$\mathscr{A}^{\mu}\mathscr{A}_{\mu}=a^2$$

在相对论力学中，粒子加速度的量值定义为：

$$a=\sqrt{\mathscr{A}^{\mu}\mathscr{A}_{\mu}}$$

1. 切记：$a\neq|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\mathscr{A}^{i}\mathscr{A}_{i}}$.
2. 鉴于 $\mathscr{A}^{\mu}$ 的类空性，$\mathscr{A}^{\mu}\mathscr{A}_{\mu}>0$. 所以 $a>0$.
3. 不难证明：

$$a=\gamma_u^3\sqrt{[1-(u/c)^2]\,\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})^2/c^2}$$

4. a 是 4-标量，它的量值不依赖于惯性系的选择. 可以把 a 用粒子瞬时自身系 Σ' 中的加速度 $\boldsymbol{w}'$ 表达为：

$$\boxed{a=\sqrt{\boldsymbol{w}'\cdot\boldsymbol{w}'}=|\boldsymbol{w}'|}$$

所以，a 就是瞬时自身系 Σ' 中粒子物理加速度的量值. 换言之，瞬时自身系中粒子物理加速度的量值 $|\boldsymbol{w}'|$ 是一个 4-标量.

- 电磁波的相位因子 $e^{i\phi}$ 是一个 4-标量，

$$\phi = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t$$

这是因为某个波峰通过某一时空点是一个物理事件，而相位 ϕ 只是计数问题，不应随参考系而变.

引入数组 $k^{\mu} = (\omega/c,\ \boldsymbol{k})$ 和 $x^{\mu} = (ct,\ \boldsymbol{r})$，可以把 4-标量 ϕ 重新写为：

$$\phi = \eta_{\mu\nu} k^{\mu} x^{\nu} = k^{\mu} x_{\mu}$$

然而 $(x_{\mu}) = X$ 是一个 4-矢量，即粒子在闵氏空间 $\mathbb{M}_4$ 中的位置矢量．所以，

$$k^{\mu} = (\omega/c,\ \boldsymbol{k})$$

必须也是一个 4-矢量，常称之为 4-波矢．k^{μ} 的洛伦兹变换法则为：

$$k^{\mu} \quad \rightsquigarrow \quad k'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} k^{\nu}$$

倘若考虑洛伦兹推动变换，则有：

$$\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}\omega/c$$
$$\omega' = \gamma(\omega - c\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{k})$$

1. **相对论的多普勒效应.** 考虑在真空中传播的平面电磁波. 假设 Σ 系中的物理波矢 $\boldsymbol{k}$ 与牵连速度 $\boldsymbol{\beta}c$ 之间的夹角为 θ，

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{k} = k\beta\cos\theta = \frac{\omega}{c}\beta\cos\theta \qquad \hookleftarrow \quad k = \frac{\omega}{c}$$

我们有：

$$\omega' = \gamma(\omega - c\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{k}) = \gamma\omega(1-\beta\cos\theta)$$

若 Σ' 系为光源静止参考系，$\omega' = \omega_0$. 这里用 ω_0 标记静止光源的辐射角频率. 于是，相对论的多普勒效应由下式描写：

$$\boxed{\omega = \frac{\omega_0\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}}$$ 光行差效应 $\rightsquigarrow$ $$\boxed{\tan\theta = \frac{\sin\theta'\sqrt{1-\beta^2}}{\cos\theta'+\beta}}$$

- 在垂直于光源运动方向观测辐射时，经典力学多普勒效应的结论是 $\omega = \omega_0$.
- 与经典力学结论不同，狭义相对论预言存在横向的多普勒效应 ($\theta = \pi/2$)：
$$\omega = \omega_0\sqrt{1-\beta^2} < \omega_0$$
横向多普勒效应为 Ives-Stilwell 实验 (1938) 所证实.

答疑：

现在解释一下如何理解“可以选择粒子的无量纲 4-速度 U/c 作为某惯性系中时间轴方向的单位基矢”.

- 设 Σ 为实验室参考系，有质量粒子 $\mathcal{O}$ 以速度 $\boldsymbol{u}$ 在其中作匀速直线运动. 倘若在 Σ 中建立笛卡尔直角坐标系，可以把坐标系的基矢取为：
$$e_0 = (1, 0, 0, 0); \quad e_1 = (0, 1, 0, 0); \quad e_2 = (0, 0, 1, 0);$$
$$e_3 = (0, 0, 0, 1)$$

- 粒子 $\mathcal{O}$ 相对于 Σ 系的 4-速度为：

$$U = U^\mu e_\mu = \gamma_u c e_0 + \gamma_u u^i e_i \quad \rightsquigarrow \quad \frac{U}{c} = \gamma_u \left(1, \ \frac{u^i}{c}\right)$$

- 设 Σ' 为粒子 $\mathcal{O}$ 的自身参考系. 倘若也在 Σ' 系中建立笛卡尔直角坐标系，则 $\mathcal{O}$ 会朴素地认为坐标系的基矢是：

$$e_0' = (1, 0, 0, 0); \quad e_1' = (0, 1, 0, 0); \quad e_2' = (0, 0, 1, 0);$$
$$e_3' = (0, 0, 0, 1)$$

换言之，

$$e_\mu' = \delta_\mu^\nu \, e_\nu' \quad \rightsquigarrow \quad \left(e_\mu'\right)^{\prime\nu} = \delta_\mu^\nu$$

特别地，e_0' 作为一个 4-矢量，其在粒子自身系 Σ' 中的笛卡尔分量为：

$$\boxed{\left(e_0'\right)^{\prime\nu} = \delta_0^\nu}$$

- 借助于 $\Sigma' \to \Sigma$ 的逆洛伦兹推动变换 $\tilde{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}(\boldsymbol{u})$，我们推知类时 4-矢量 e_0' 在实验室参考系 Σ 中的笛卡尔分量为：

$$(e_0')^{\mu} = \tilde{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}(\boldsymbol{u})\,(e_0')^{\prime\nu} = \tilde{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}(\boldsymbol{u})\,\delta_0^{\nu} = \tilde{\Lambda}^{\mu}{}_{0}(\boldsymbol{u})$$

所以，

$$(e_0')^0 = \tilde{\Lambda}^0{}_0(\boldsymbol{u}) = \gamma_u, \qquad (e_0')^i = \tilde{\Lambda}^i{}_0(\boldsymbol{u}) = \gamma_u \beta_u^i, \qquad \boldsymbol{\beta}_u = \boldsymbol{u}/c$$

亦即：

$$\boxed{e_0' = \gamma_u\left(1,\ \beta_u^i\right) = \frac{U}{c}}$$

- 同理知类空 4-矢量 e_j' $(j = 1,\ 2,\ 3)$ 在实验室参考系 Σ 中的笛卡尔分量为：

$$e_j' = \left(\gamma_u \beta_{uj},\ \delta_j^i + \frac{\gamma_u^2}{\gamma_u + 1}\beta_u^i \beta_{uj}\right)$$