中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

数学实验

实验十：混沌

翟晓雅

Email: xiaoyazhai@ustc.edu.cn
Homepage: https://xiaoyazhai.github.io/

实验目的

- 了解混沌的起源
- 以迭代的观点了解混沌的基本特性以及生成混沌图形的基本方法

10.1 混沌的起源

大自然的复杂性和非线性

物理系统
- 简单系统——自由落体、单摆
- 复杂系统——分子物理系统

复杂系统
- 大气系统——风云变幻难测
- 生物系统——千差万别、种类繁多
- 经济系统
- 社会系统

复杂多变，难以预测控制

10.1 混沌的起源

由于人的认识的发展总是从简单事物开始的，所以在科学发展的早期，首先从线性关系来认识自然事物，较多地研究了事物间的线性相互作用，这是很自然的。

非线性系统只是例外的病态现象和非本质特征，没有普遍的规律，只能作为对线性系统的扰动或采取特殊的方法做个别处理。

10.1 混沌的起源

复杂的世界如何从简单性演化而来

我们面对的现象和工程问题越来越复杂越来越困难千变万化，丰富多彩的宇宙如何能从简单的基本粒子，基本相互作用演化而来的呢?

如果人们对基本粒子的性质，基本的物理规律完全掌握后，是否有可能对我们所生活的世界作各种长期的精确预言呢?

人们能精确地预言哈雷慧星每76年回归地球一次。但长期的天气预报进展甚微，这是为什么?

水果产量的大年小年现象事实上相当普遍，这是为什么?

10.1 混沌的起源

- 非线性科学是一门研究非线性系统的共性，探索事物复杂性的新学科 (science of complexity)。

无序中的有序

10.1 混沌的起源

- 19世纪末庞加莱(H.Poincare)正是在总结整个世纪这方面进展的基础上，提出不少新的理论和方法，当前非线性科学中的很多概念和思想，都本源于庞加莱。

- 非线性科学中，那些可以有定量分析、精确计算、数学理论或实验研究的部分，一般认为可以归为以下三种：**孤立波(soliton)，混沌(chaos)，分形(fractal)。**

10.1 混沌的起源

- 1979年12月，洛伦兹在华盛顿的美国科学促进会的一次讲演中提出：一只蝴蝶在巴西扇动翅膀，有可能会在美国的德克萨斯引起一场龙卷风。他的演讲和结论给人们留下了极其深刻的印象。从此以后，所谓“蝴蝶效应”之说就不胫而走，名声远扬了。

10.2混沌的定义与特征

- 混沌，原意指无序和混乱的状态，一种貌似无规的运动，但支配它这种运动的规律却可用确定性的方程来描述。

-细节完全不同，整体却都相似

-变化无常的天气却有固定的四季转变

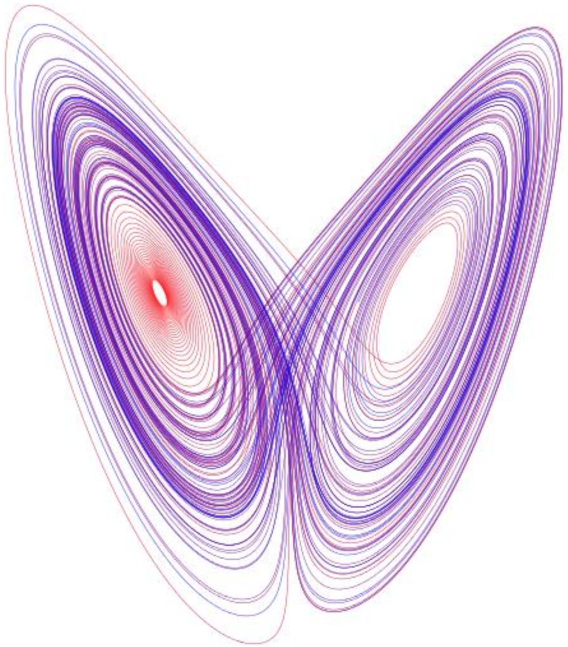
10.2混沌的定义与特征

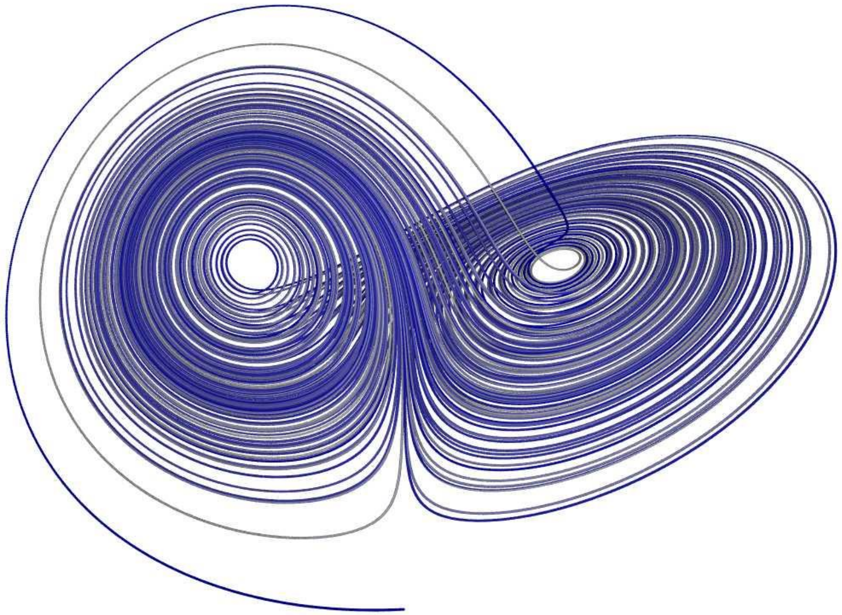
- **混沌**是指发生在确定性系统中的貌似随机的不规则运动，一个确定性理论描述的系统，其行为却表现为不确定性—不可重复、不可预测，这就是混沌现象。

- **混沌**是非线性动力系统的固有特性，是非线性系统普遍存在的现象。在现实生活和实际工程技术问题中，混沌是无处不在的！

10.2混沌的定义与特征

- 著名的洛伦兹吸子：不论起始值如何设定，外观看來仍都是两个环圈





10.2混沌的定义与特征

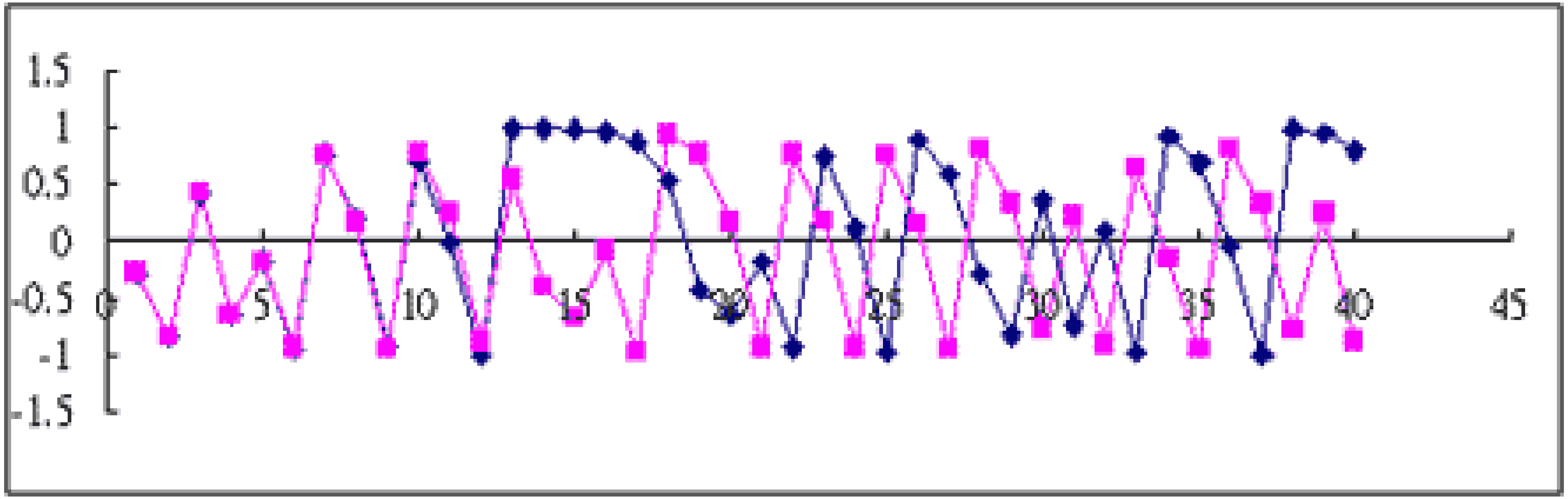
- 混沌理论认为在混沌系统中，初始条件的十分微小的变化经过不断放大，对其未来状态会造成极其巨大的差别。

系统的长期行为对初始条件的敏感依赖性

1960年，美国麻省理工学院教授洛伦兹研究“长期天气预报”问题时，在计算机上用一组简化模型模拟天气的演变。他原本的意图是利用计算机的高速运算来提高技期天气预报的准确性。但是，事与愿违，多次计算表明，初始条件的极微小差异，均会导致计算结果的很大不同。

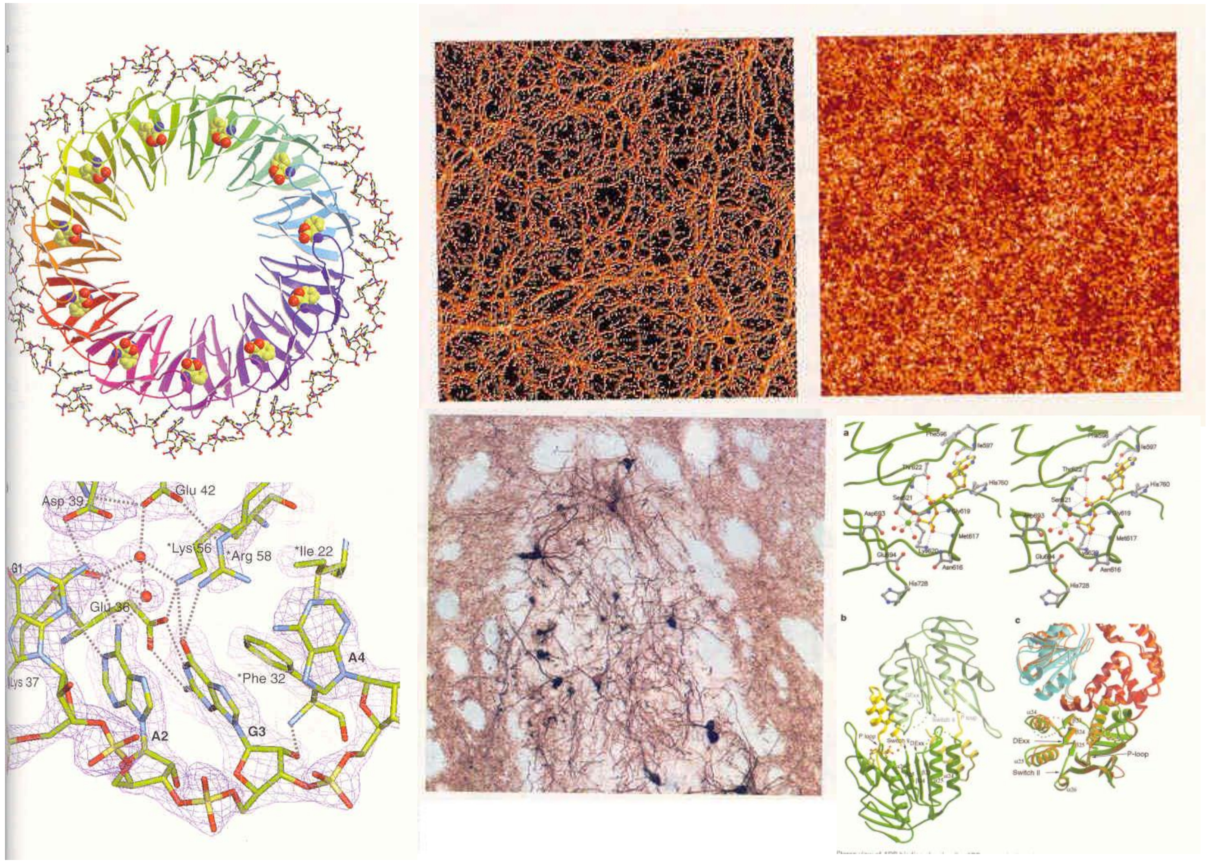
10.2混沌的定义与特征

对$y=2x^2-1$以只差0.001的初始值迭代而出現两种截然不同的结果



10.2混沌的定义与特征

混沌中包含着分形，分形中包含混沌。



生物系统中的复杂网络：

细胞网络，

蛋白质-蛋白质作用网络，

生态网络，

蛋白质折叠网络，

神经系统

10.2混沌的定义与特征

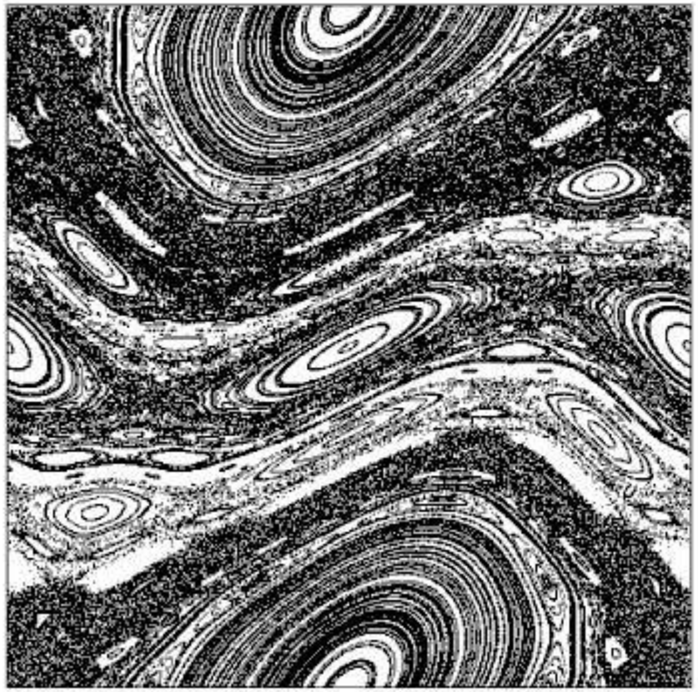
- 混沌理论——一个确定的系统因随机性产生复杂不规则的状态

- 特性:

-混沌的内部存在着有序规律

-极为有限的可预测性

-对初始状态具高敏感度



10.3 函数迭代

给定一函数 $f(x)$ 以及初始点 x_0， 定义数列

$$x_{k+1} = f(x_k), \qquad k = 0,1,\ldots.$$

称为函数 $f(x)$ 的迭代序列。

满足 $f(u)=u$ 的点，称为u的**不动点**，记之为$u \to u$ 。如果所有附近的点在迭代过程中都趋向于某一不动点，则该不动点称为**吸引点**。如果所有附近的点都远离它，则它是**排斥点**。

10.3 函数迭代

例如，0 与 1 是$f(x)=x^2$ 的不动点。0 是**吸引点**，1是**排斥点**。

如果$f(u_1)=u_2, f(u_2)=u_3, \cdots, f(u_k)=u_1$,且$u_j \neq u_1, j=2,\cdots,k$

则点集$u_1, u_2, \cdots, u_k$形成一个***k*循环**， u_1称为k**周期点**，k为**周期**。

迭代序列的收敛与发散性质不仅与函数$f(x)$有关，而且与初值的选择有关。

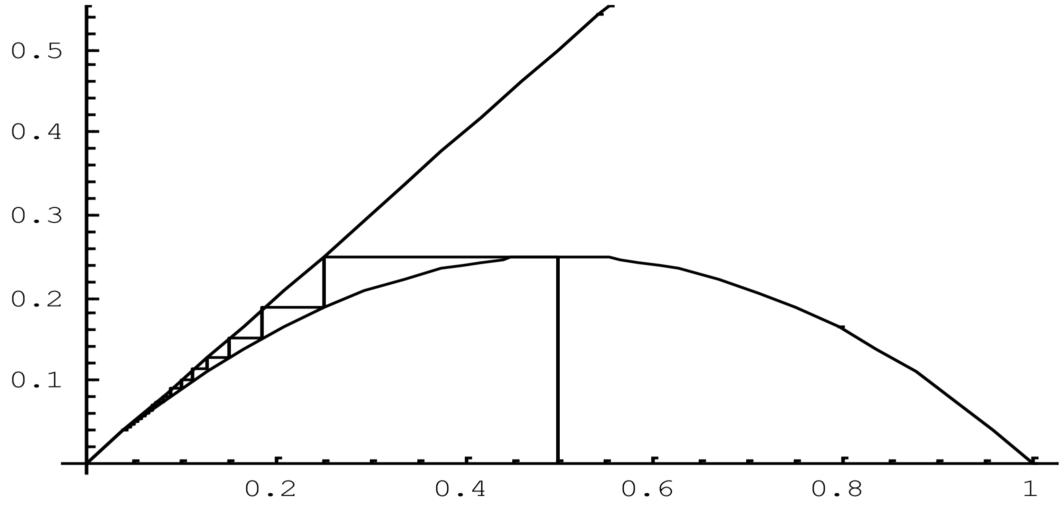
10.4 二次函数的迭代

从$f(x) = ax(1-x)$的二次函数开始迭代:

$$x_{k+1} = f(x_k) = ax_k(1-x_k), \qquad k = 0,1,\cdots$$

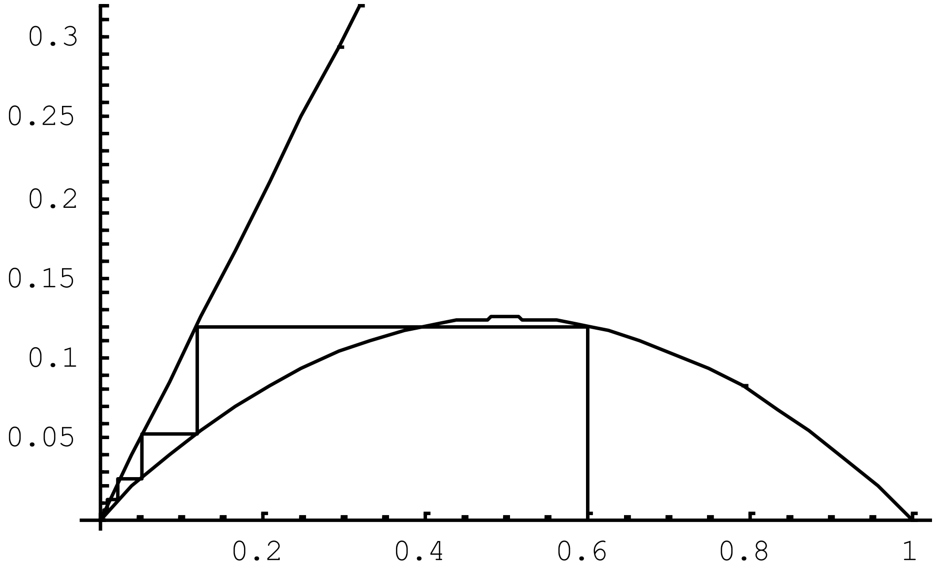
这里，$a \in [0,4]$是一个参数。

取a=1，$x_0 = 0.5$ 迭代的几何直观图为右图

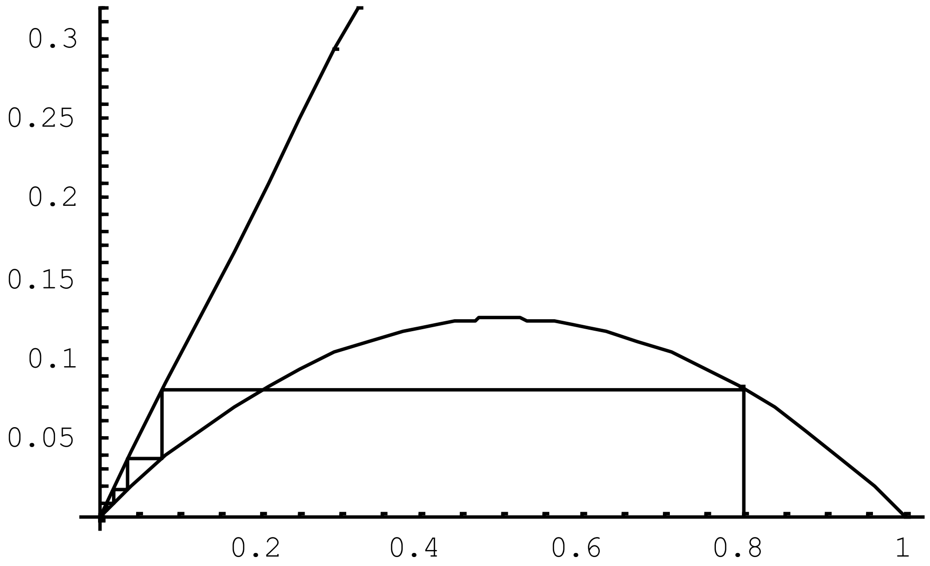


10.4 二次函数的迭代

练习 1 对几组不同的参数值 a(如a=0.5,1.6,4)以及不同的初值x_0， 观察迭代是否收敛。



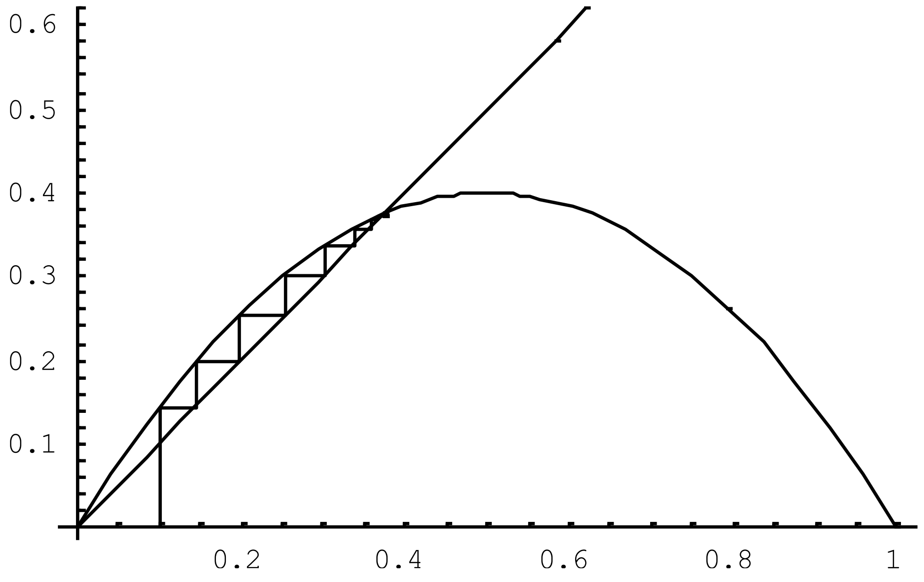
$a = 0.5\ x_0 = 0.6$



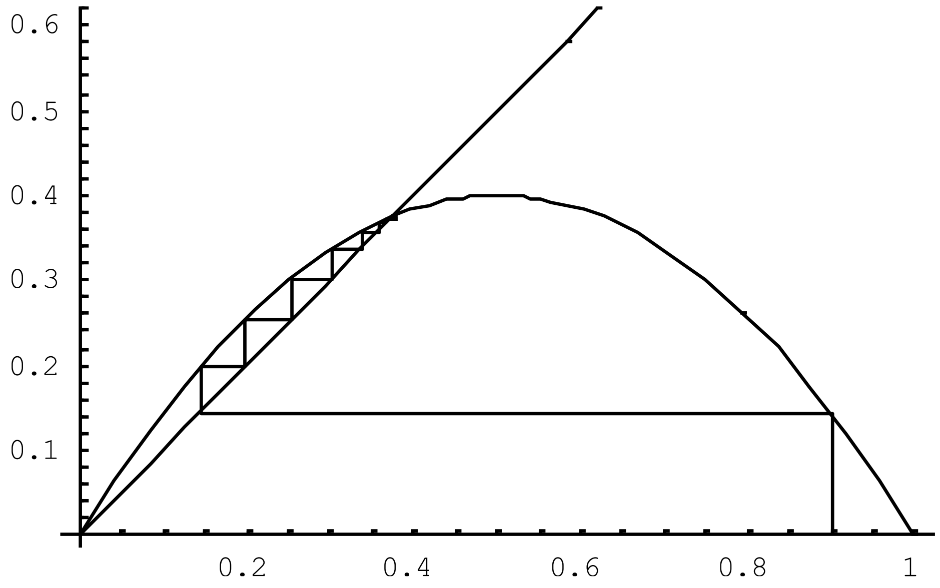
$a = 0.5\ x_0 = 0.8$

10.4 二次函数的迭代

练习 1 对几组不同的参数值 a(如a=0.5,1.6,4)以及不同的初值x_0， 观察迭代是否收敛。



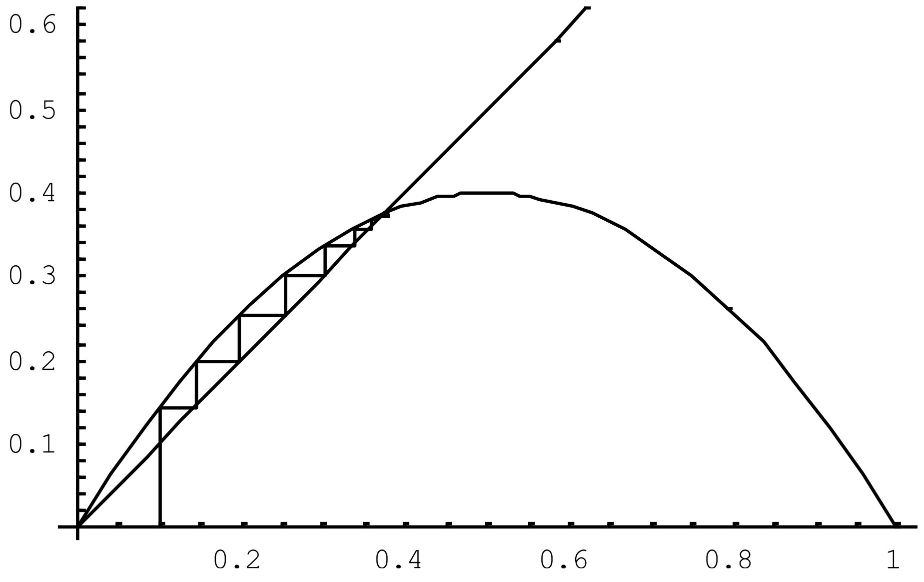
$a = 1.6\ x_0 = 0.1$



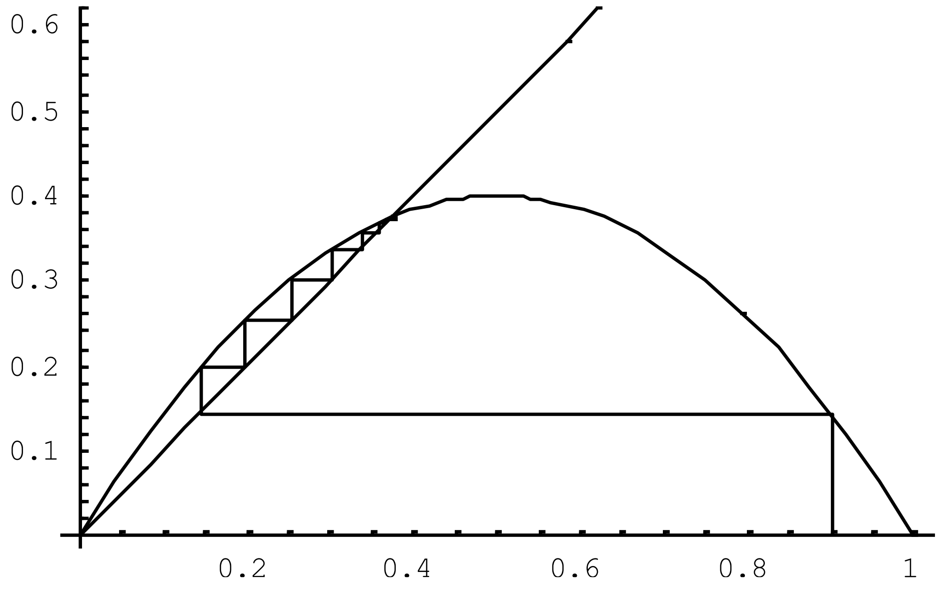
$a = 1.6\ x_0 = 0.9$

10.4 二次函数的迭代

练习 1 对几组不同的参数值 a(如a=0.5,1.6,4)以及不同的初值x_0， 观察迭代是否收敛。



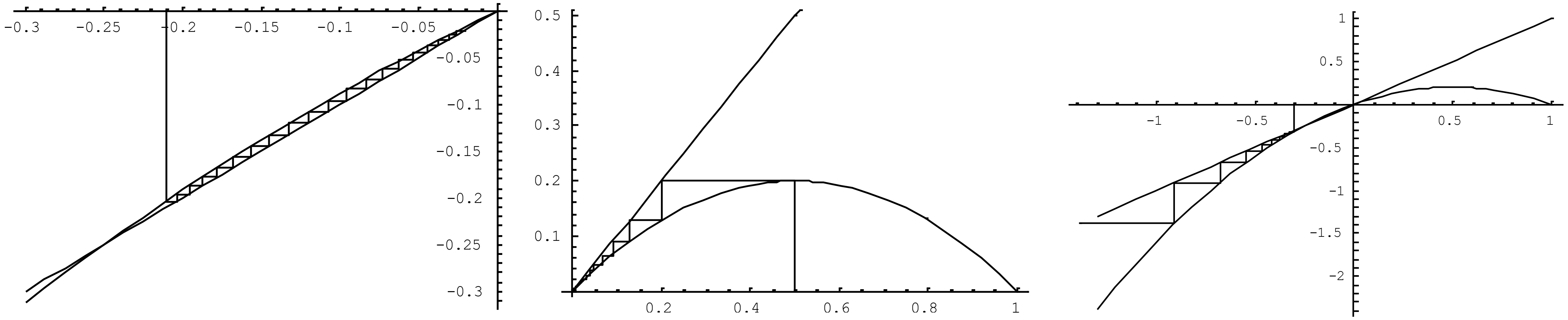
$a=1.6\ x_0=0.1$



$a=1.6\ x_0=0.9$

10.4 二次函数的迭代

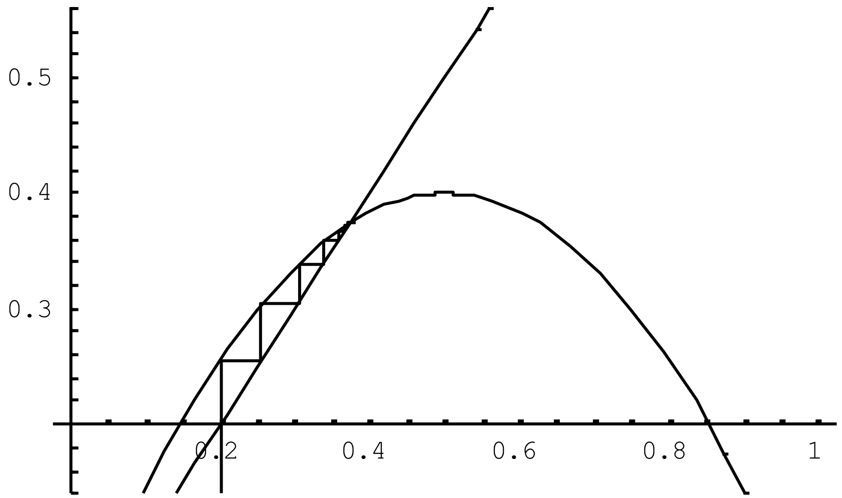
练习 2 取参数 a=0.8，用不同的初值做迭代。你能找到一个吸引的不动点吗？一个排斥的不动点吗？哪些初值收敛到吸引的不动点？哪些初值使序列发散？取不动的参数 a=1,1.6,2回答同样的问题。

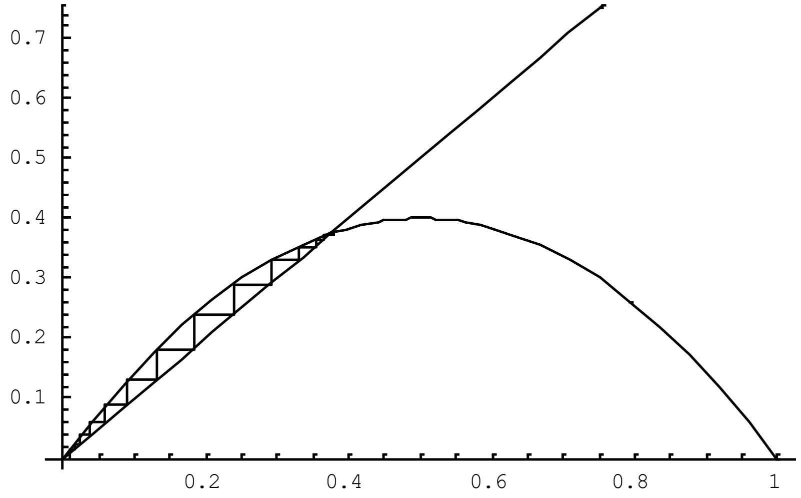


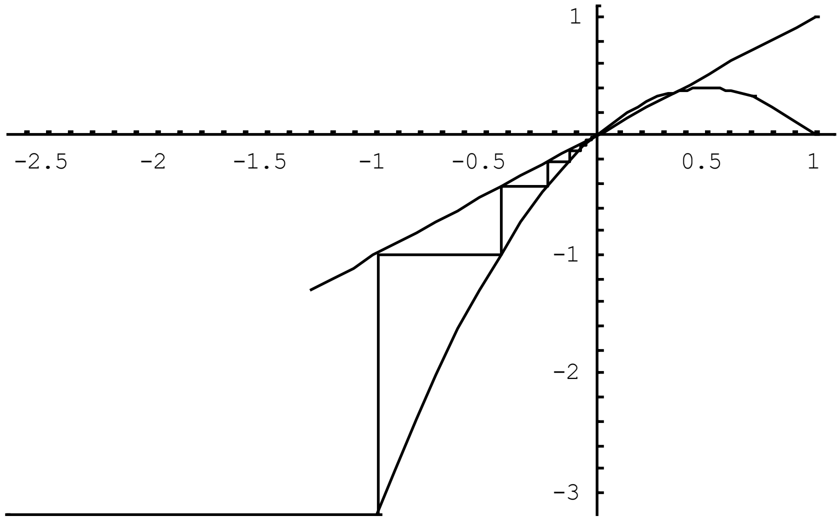
$a = 0.8$

10.4 二次函数的迭代

练习 2 取参数 a=0.8，用不同的初值做迭代。你能找到一个吸引的不动点吗？一个排斥的不动点吗？哪些初值收敛到吸引的不动点？哪些初值使序列发散？取不动的参数 a=1,1.6,2回答同样的问题。







$a = 1.6$

10.4 二次函数的迭代

- **不动点的计算**：$x = a\,x\,(1-x)$ 即可得：$x=0 \quad x=(a-1)/a$

- **吸引的不动点与排斥的不动点**

定理 设x是$f(x)$的不动点，如果在x_0附近有$|f'(x_0)|<1$，则x_0是$f(x)$的吸引的不动点；否则，x_0是$f(x)$的排斥的不动点。

由于 $f'(0)=a, \quad f'((a-1)/a)=2-a$

故当 0<a<1时，0 为吸引点，(a-1)/a为排斥点。当1<a<3，0 为排斥点，(a-1)/a为吸引点。

10.4 二次函数的迭代

周期点的计算

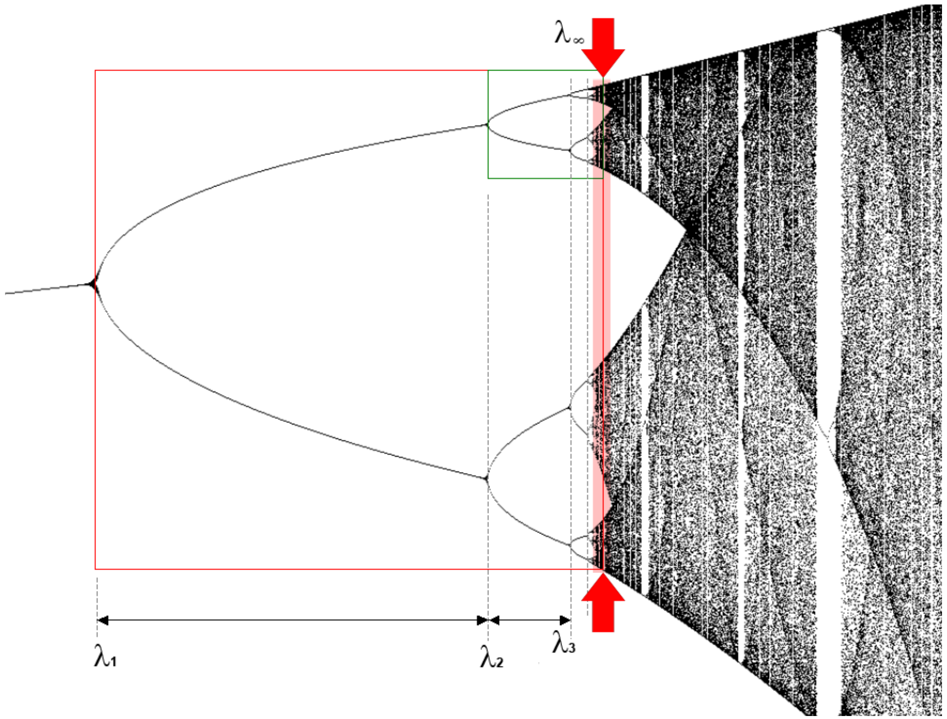
$$x = f(f(x)) = a^2 x(1-x)(1-ax(1-x))$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = (a-1)/a,$$

$$x_{3,4} = (1+a \pm \sqrt{a^2-2a-3})/2a, \quad a \geq 3$$

10.5 Feigenbaum图

将区间（0, 4] 以某个步长Δa（如$\Delta a = 0.04$）离散化。对每个离散的a值做迭代。忽略前50个迭代值，而把点 $(a, x_{51}), (a, x_{52}), \cdots, (a, x_{100})$ 显示在坐标平面上，最后形成的图形称为 Feigenbaum图。



作业10.1

观察Feigenbaum图。

（1）它的左部有一条曲线，这表示什么意义？

（2）从某一点开始，这条曲线分成两支，这说明了迭代的什么性质？迭代的点是如何运动的？

（3）再在下一个分支点，曲线分成几支？这说明迭代的什么性质？相应的点是如何运动的？

（4）上述分支过程是否一直进行下去？是否存在一个极限的分支点？在极限分支点之后，Feigenbaum图是否显得很混乱？

10.6 初值敏感性

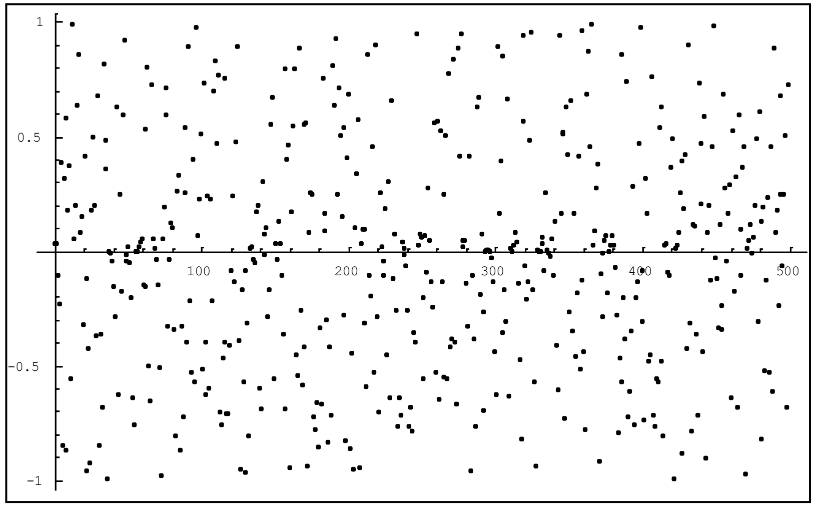
对初值的敏感性

$$x_{k+1} = 4x_k(1 - x_k), \quad k = 0,1,\cdots$$

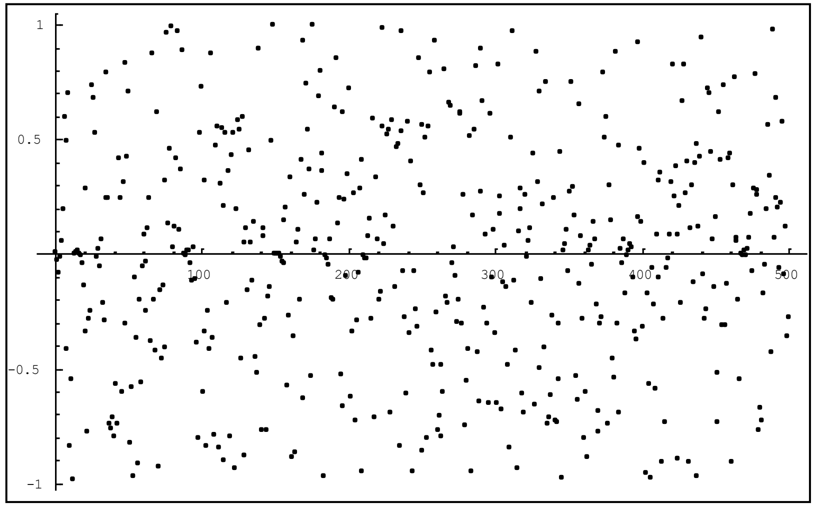
任取两个初值使它们之间的差的绝对值不超过 0.1, 在迭代他们是否逐渐分开?如果两个初值的差的绝对值不超过0.01, 0.001, 0.0001 结果如何? 由此得出迭代对初值是否敏感?

10.6 初值敏感性

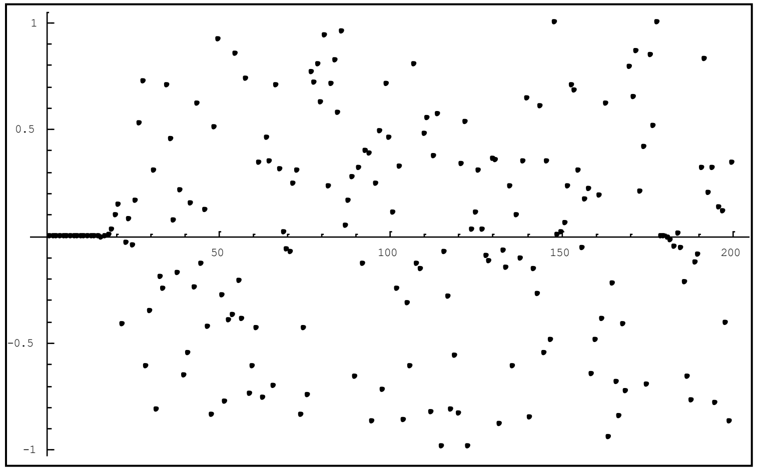
$x_0 = 0.4$



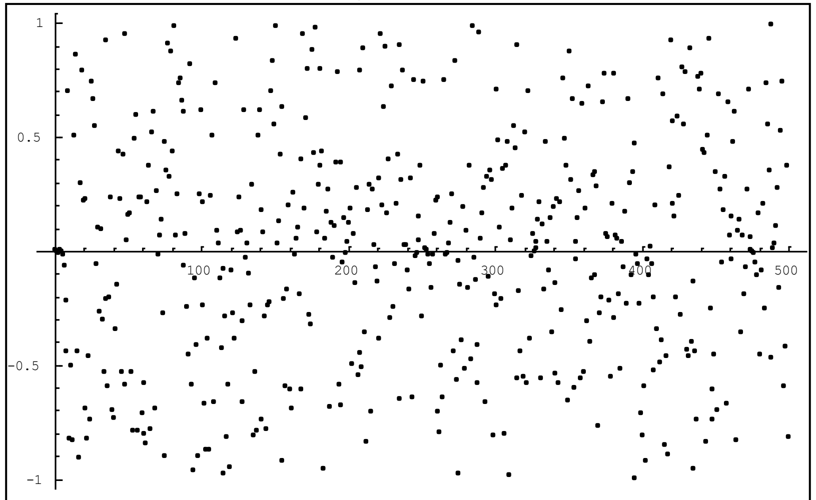
$x_0 = 0.41$



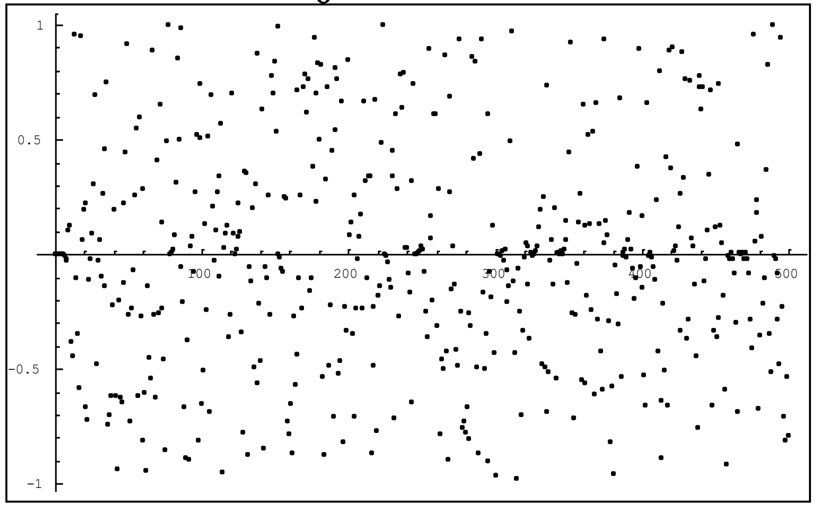
$x_0 = 0.4000001$



$x_0 = 0.401$



$x_0 = 0.4001$



10.6混沌-特性

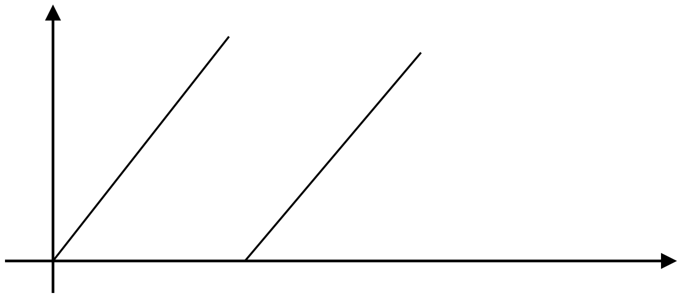
混沌的性质:

- 遍历性: 点 $x0$的轨道不趋向任何稳定的周期轨道, 它的轨道在(0,1)(或其中某些区间)内的任何一个子区间(a,b)内都会出现无数次.
- 敏感性: 轨道表现出对初始条件的强烈敏感性,即不同初始值, 即使它们离得非常近, 它们的轨道也终将以某种方式分离.
- 存在周期小窗口: 浑沌区域内某些地方仍有倍周期分叉, 例如$a = 3.835$附近

10.7其它函数的迭代

- 锯齿函数

$$S(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1/2\\ 2x-1 & 1/2<x\le 1\end{cases}$$

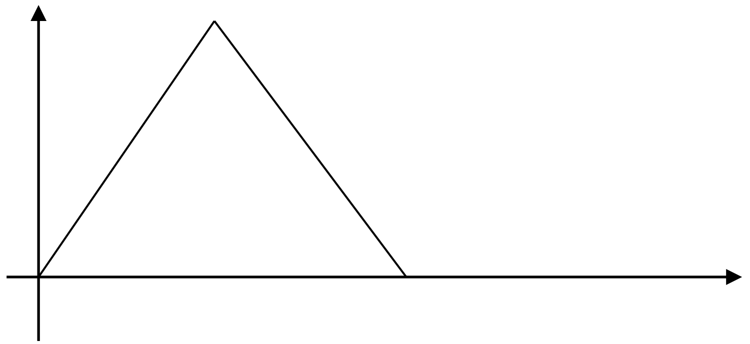


- 锯齿函数的迭代对初值是否敏感？ 找出锯齿函数的周期点。

10.7其它函数的迭代

帐篷函数

$$T(x)=\begin{cases} 2x & 0\le x\le 1/2 \\ 2(1-x) & 1/2<x\le 1 \end{cases}$$



帐篷函数的迭代对初值是否敏感？ 找出帐篷函数的周期点。

10.7其它函数的迭代

- **其它函数的迭代**

对以下函数的迭代行为做探讨，并与函数 $f(x)=a\,x\,(1-x)$ 的迭代行为相比较。

1. $f(x)=a-(x-\sqrt{a})$
2. $f(x)=x^2-2$
3. $f(x)=a\sin(x)$
4. $f(x)=x^4-a$

总结

混沌

- 混沌的起源
- 混沌的定义与特征
- 函数迭代
  - 二次函数迭代
  - 其他函数迭代
- Feigenbaum图
- 初值敏感性

作业10.1

观察Feigenbaum图。

（1）它的左部有一条曲线，这表示什么意义？

（2） 从某一点开始，这条曲线分成两支，这说明了迭代的什么性质？迭代的点是如何运动的？

（3）再在下一个分支点， 曲线分成几支？这说明迭代的什么性质？相应的点是如何运动的？

（4）上述分支过程是否一直进行下去？是否存在一个极限的分支点？在极限分支点之后，Feigenbaum图是否显得很混乱？

Q&A?

下节课内容

实验十一：方程求解

翟晓雅

Email: xiaoyazhai@ustc.edu.cn

Homepage: https://xiaoyazhai.github.io/

Lab: http://gcl.ustc.edu.cn/