#001108

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

数学实验

实验二：Π的计算

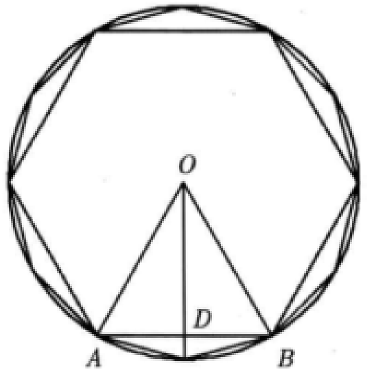
翟晓雅

Email: xiaoyazhai@ustc.edu.cn
Homepage: https://xiaoyazhai.github.io/

圆周率-无限不循环小数

平面上圆的周长与直径之比是一个常数，称为圆周率，记作π

- 在三千多年以前的周朝，在数学著作《周髀算经》就有“周三径一”的记载
- 西汉末年，数学家刘歆提出把圆周率定为3.1547
- 东汉，张衡(发明候风地动仪的天文学家)，把圆周率定为3.1622
- 公元263年，三国时期魏国的刘徽创立了割圆术→ 3.14、3.1416



割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。

圆周率-无限不循环小数

- 又过了大约200年，到了南北朝的时候→祖冲之

圆的内接12288边形，推算出圆周率应该在3.1415926到3.1415927之间

用两个分数作为圆周率的近似值，

- 一个是$\frac{22}{7}$，叫“**疏率**”，约等于3.142857；
- 一个是$\frac{355}{133}$，叫“**密率**”，约等于3.1415929。

祖冲之对圆周率的计算，开创了一项世界纪录，比欧洲早了一千多年。

国际上为了纪念这位伟大的中国数学家，把3.1415926称为“祖率”，并把月球上的一座环形山命名为“祖冲之山”。

圆周率-无限不循环小数

- 1593年，荷兰数学家**罗梅**，用割圆术把圆周率算到了小数点后**15**位，虽然打破了祖冲之的纪录，但是已时隔1133年。
- 1610年，德国数学家卢道夫，用割圆术使π值精确到小数点后第35位，几乎耗费了他一生的大部分心血。
- 1761年兰伯特证明了圆周率是无理数
- 1882年林德曼证明了圆周率是超越数后，圆周率的神秘面纱就被揭开了。

1. 传统割圆术

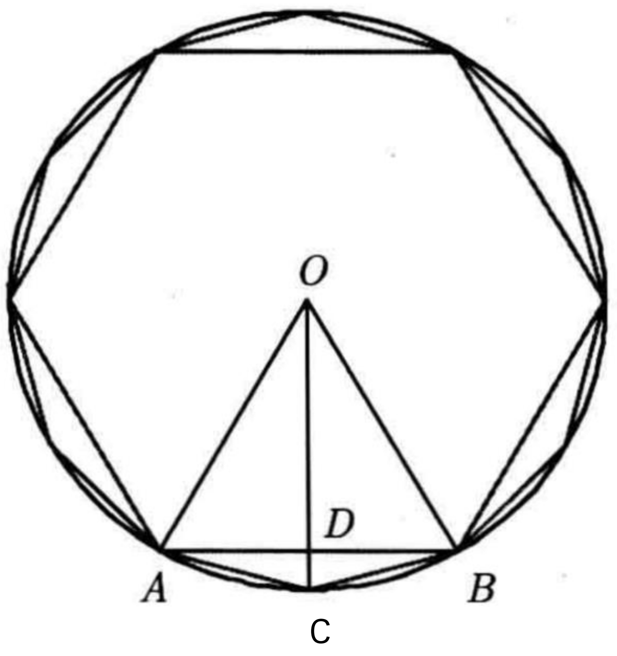
- 核心思想：圆内接正多边形的面积逼近圆的面积

在一个半径为1的圆中作圆内接六边形，其边长为$a_0 = 1$，再在该正六边形的基础上作内接12边形….

设 6×2^{n} 为圆内接正边形的边长，为圆内接正 6×2^{n}边 形的面积，就得到了一系列的正多边形的面积：

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_{\mathrm{n}},\ \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \pi$$



1. 传统割圆术

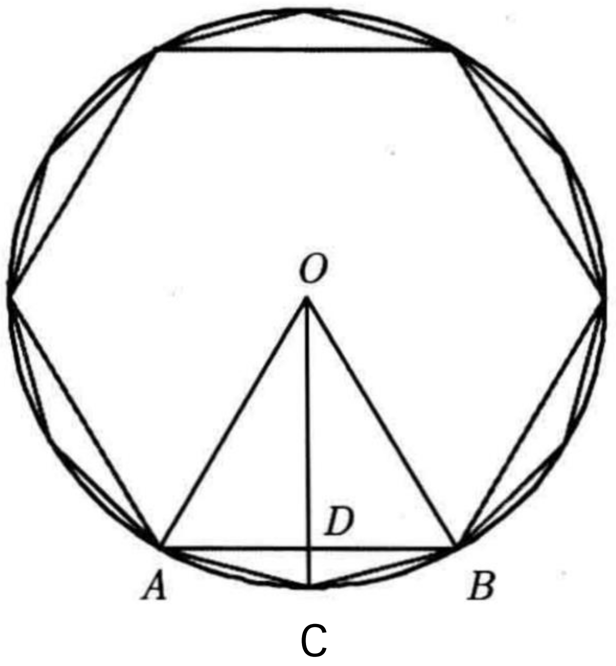
由右图可知：

$$a_n = \sqrt{BD^2 + [1 - \sqrt{1 - BD^2}]^2} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{a_{n-1}}{2}\right)^2}},$$

$$S_n = 6 \cdot 2^n \cdot S_{\triangle OBC} = 3 \cdot 2^{n-1} \cdot a_{n-1}.$$

设S为单位圆的面积，则

$$S_n < S = \pi < S_n + (S_n - S_{n-1}).$$



- 刘徽从正六边形开始计算，算到了$6 \times 2^9 = 3072$边形
- 祖冲之算到了$6 \times 2^{12} = 24576$边形

1. 割圆术-外推加速计算

$$a_n = \sqrt{BD^2 + [1 - \sqrt{1 - BD^2}]^2} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{a_{n-1}}{2}\right)^2}},$$

$$S_n = 6 \cdot 2^n \cdot S_{\triangle OBC} = 3 \cdot 2^{n-1} \cdot a_{n-1}.$$

$$S_n = 6 \cdot 2^n \cdot S_{\triangle OBC} = 3 \cdot 2^{n-1} \cdot \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

根据重要极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 知, $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \pi$. 记 $b_0 = S_0, b_n = S_n - S_{n-1}(n = 1, 2, \cdots)$, 则

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} b_n,$$

其中 S_n 是该级数的部分和. 下面分析该级数通项的渐近性态. 令 $x_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, 则

$$b_n = S_n - S_{n-1} = x_n \left(\sin \frac{\pi}{x_n} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{x_n} \right) = x_n \sin \frac{\pi}{x_n} \left(1 - \cos \frac{\pi}{x_n} \right) \sim \frac{\pi^3}{2} \frac{1}{x_n^2} = \frac{2\pi^3}{9} \left(\frac{1}{4} \right)^n, \quad n \to \infty.$$

1. 割圆术-外推加速计算

下面再分析级数的余项. 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=1$ 知, 当 $x\to 0$ 时, $x-\sin x\sim x^3$, 所以当 $n\to\infty$ 时, 有

$$r_n = S - S_n = \pi\left(1-\frac{\sin\dfrac{\pi}{x_n}}{\dfrac{\pi}{x_n}}\right)\sim\frac{\pi^3}{6}\frac{1}{x_n^2}=\frac{2\pi^3}{27}\left(\frac{1}{4}\right)^n. \tag{7.6}$$

首先, 由 (7.6) 式知, $r_{n+1}\approx\dfrac{1}{4}r_n$; 其次, 比较 (7.5) 式与 (7.6) 式得到 $r_n\sim\dfrac{1}{3}b_n$. 于是, 有

$$\pi = S_n + r_n \approx S_n + \frac{1}{3}b_n = S_n + \frac{1}{3}(S_n - S_{n-1}) = S_{n-1} + \frac{4}{3}(S_n - S_{n-1}). \tag{7.7}$$

1. 割圆术-Borwein迭代算法

1984年，Borwein提出了一个计算π的近似值的**二阶迭代算法**：

$$y_0=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \alpha_0=\frac{1}{2},\quad y_{n+1}=\frac{1-\sqrt{1-y_n^2}}{1+\sqrt{1-y_n^2}},\quad \alpha_{n+1}=(1+y_{n+1})^2\alpha_n-2^{n+1}y_{n+1},$$

当 $n\to\infty$ 时, $\alpha_n\to\frac{1}{\pi}$.

1984年，Borwein提出了一个计算π的近似值的**四阶迭代算法**：

$$y_0=\sqrt{2}-1,\quad \alpha_0=6-4\sqrt{2},$$

$$y_{n+1}=\frac{1-\sqrt[4]{1-y_n^4}}{1+\sqrt[4]{1-y_n^4}},\quad \alpha_{n+1}=(1+y_{n+1})^4\alpha_n-2^{2n+1}y_{n+1}(1+y_{n+1}+y_{n+1}^2)$$

当 $n\to\infty$ 时, $\alpha_n\to\frac{1}{\pi}$.

作业2.1：

3.1 用割圆术迭代公式计算π的值，根据不同的迭代步数得到下述表格统计结果

分割数	边数	下界	上界

3.2 利用外推公式进行割圆术的迭代加速求解，并统计每步迭代结果

分割数	边数	外推近似值

3.3 利用Borwein 二阶迭代算法计算圆周率

分割数	边数	近似值

2. 无穷级数或无穷乘积

1553年，韦达给出了计算π的公式：

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots.$$

1665年，沃尔斯给出了计算π的公式：

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\cdots.$$

1665年，沃尔斯给出了计算π的公式：

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

2. 无穷级数或无穷乘积

1995年，由David Bailey, Peter Borwein 和Simon Plouffe 共同发表了BBP公式：

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{2}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right)$$

该公式经过变形后可以计算圆周率任意指定的第n位数，不需要计算第n-1位！

1997年，Fabrice Bellard发表了一个比BBP公式更快的公式：

$$\pi = \frac{1}{64} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{1024} \right)^n \left(-\frac{32}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} + \frac{256}{10n+1} - \frac{64}{10n+3} - \frac{4}{10n+5} - \frac{4}{10n+7} + \frac{1}{10n+9} \right).$$

3.泰勒级数法

1706年，英国天文学家John Machin 利用反正切函数的泰勒展开式：

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

将$x = 1$ 代入上面的级数得到：

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$$

当n=20000计算π 的近似值，花费时间很长，精度却很差！上述收敛很慢。

3.泰勒级数法

将$x = \frac{1}{2}$代入上面的级数得到：

$$\arctan\frac{1}{2} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}(\frac{1}{2})^{2n-1}$$

$\arctan\frac{1}{2}$ 与π值有什么关系？

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

同样的，也可以考虑$\arctan\frac{1}{5}$ 来计算得到 **Maqin 公式**

$$\pi = 16\arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{239}$$

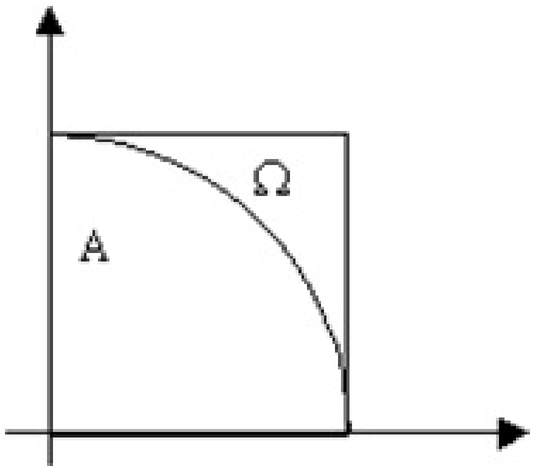
3.数值积分方法

半径为1 的圆成为单位圆，它的面积就等于π .

$$A = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$$

梯形法$\Rightarrow$ $A = \frac{2}{n}[2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) + y_0 + y_n]$

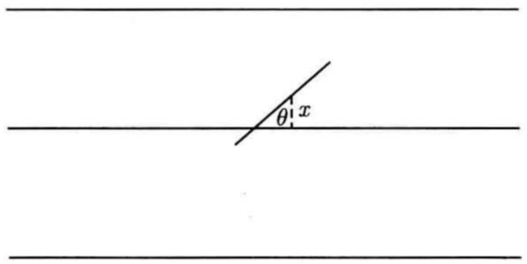
Simpson法$\Rightarrow$ $A = \frac{1}{3m}[(y_0 + y_{2m}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1})]$



矩形法 （左端点，右端点）→ 梯形法→ 抛物线法→ Simpson法（辛普森法）→ 龙贝格法

4. 蒙特卡罗法

$0 \leqslant x \leqslant d, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$

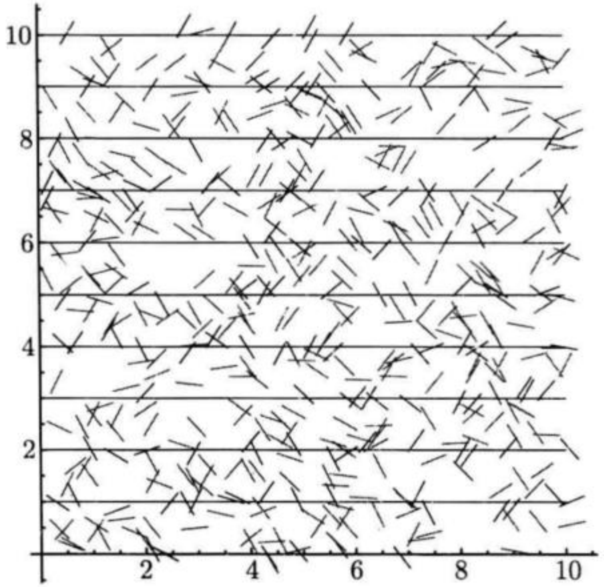


- 1777年，法国数学家浦丰(Bufon)提出用投针实验的方法计算圆周率：

(a) 在平面上画满了相互距离是d的平行线

(b) 将一长度L(L<d)的针任意地投在这个平面上，一共n次，观察针和直线相交的次数m次

(c) 针与这些平行线相交地概率是多少？



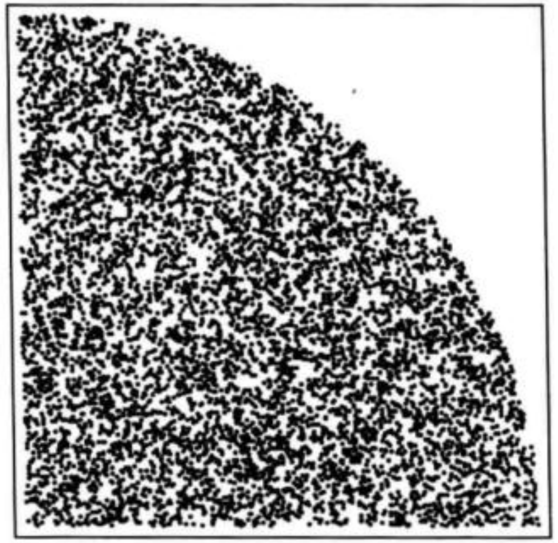
思考：随机整数互素的概率是多少？

MATLAB: G = gcd(A,B)

4. 蒙特卡罗法

- 怎样求出扇形面积在正方形面积中所占的比例k?

一个办法是在正方形中随机投入很多点，使所投的每个点落在正方形中每一个位置均等，看有多少点落入扇形内。



计算四分之一圆面积的蒙特卡洛法

这种随机模拟的实验方法简单易行，尽管用来计算π的效率不高，但有很大实用价值，由此已发展出当今一个重要的计算方法：**蒙特卡罗方法**

作业2.2：

- 在三维空间中，由三个圆柱面$x^2+y^2=1, x^2+z^2=1, y^2+z^2=1$围成一个立体，利用蒙特卡罗方法计算其体积。

总结

圆周率的计算

- 割圆术
- 无穷级数或无穷乘积
- 泰勒级数法
- 数值积分方法
- 蒙特卡罗法

作业2.1：

1 用割圆术迭代公式计算π的值，根据不同的迭代步数得到下述表格统计结果

分割数	边数	下界	上界

2 利用外推公式进行割圆术的迭代加速求解，并统计每步迭代结果

分割数	边数	外推近似值

3 利用Borwein 二阶迭代算法计算圆周率

分割数	边数	近似值

作业2.2：

- 在三维空间中，由三个圆柱面$x^2+y^2=1, x^2+z^2=1, y^2+z^2=1$围成一个立体，利用蒙特卡罗方法计算其体积。

Q&A?

下节课内容

实验三： 最佳分数近似值

翟晓雅

Email: xiaoyazhai@ustc.edu.cn

Homepage: https://xiaoyazhai.github.io/

Lab: http://gcl.ustc.edu.cn/