中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

数学实验

实验六：几何变换

翟晓雅

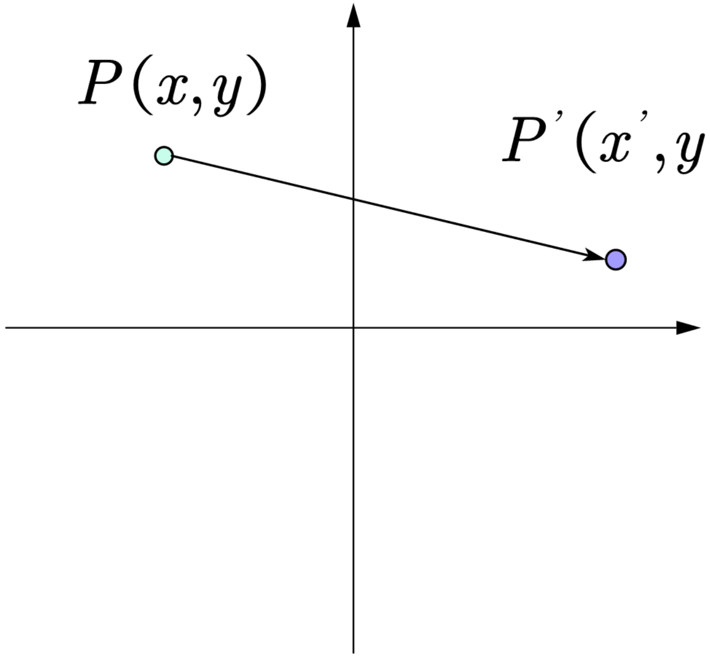
Email: xiaoyazhai@ustc.edu.cn
Homepage: https://xiaoyazhai.github.io/

实验目的

- 观察在几种重要的几何变换下图形的变化情况
- 观察在这些变换下哪些性质保持不变

基本定义

- 将平面Π上的每个点A对应于唯一的一个点$\phi(A)$, 则ϕ称为平面上的变换，$\phi(A)$称为A的象。



$$P \to P'$$
$$(x,y) \to (x',y')$$

$$\begin{cases} x' = f_1(x,y) \\ y' = f_2(x,y) \end{cases}$$

f_1, f_2就决定了一个几何变换ϕ

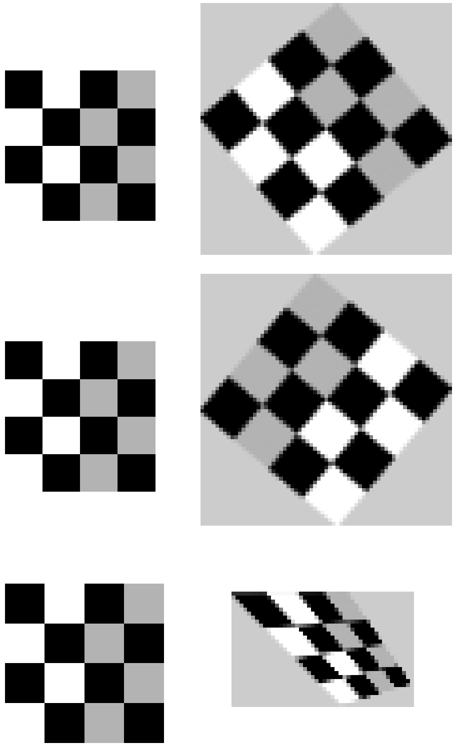
基本定义

- 将平面Π上的每个变换ϕ将每个图形C变到某个图形$\phi(C)$，$\phi(C)$称为C的象。

$$x=x(t), y=y(t), \mathrm{t}\in \mathrm{T}$$

$$\begin{cases} x=f_1(x(t),y(t)) \\ y=f_2(x(t),y(t)) \end{cases} \quad t\in T$$

f_1, f_2就决定了一个几何变换ϕ



基本定义

- 德国数学家克莱因：

几何学的任务就是研究在一定的几何变换下图形的不变性质。

↓

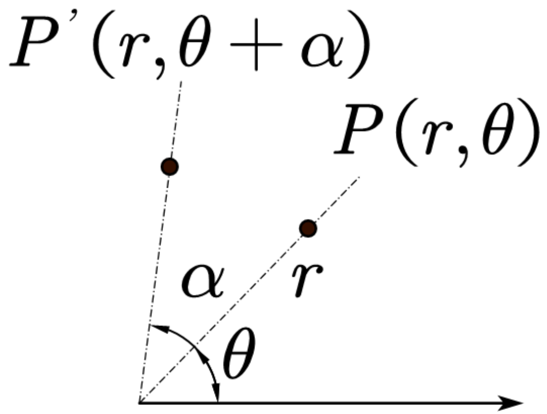
爱尔兰根纲领

比如：欧几里得平面几何学里的变换是平面图形的平移，转动，轴对称，在这些变换下长度角度保持不变。

6.1 线性变换与仿射变换

旋转变换

设变换ϕ将平面上所有点绕原点旋转α角（以逆时针方向为正）



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = r\cos(\theta+\alpha) \\ y' = r\sin(\theta+\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\theta + y\cos\alpha \end{cases}$$

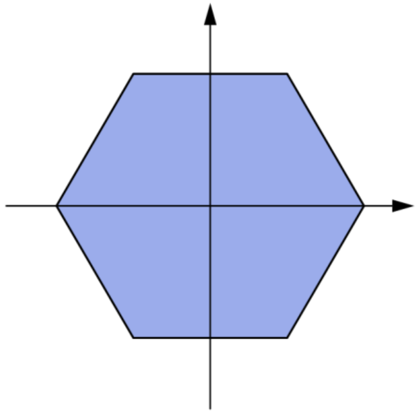
$x'y'$都是x,y的一次齐函数，即线性函数。

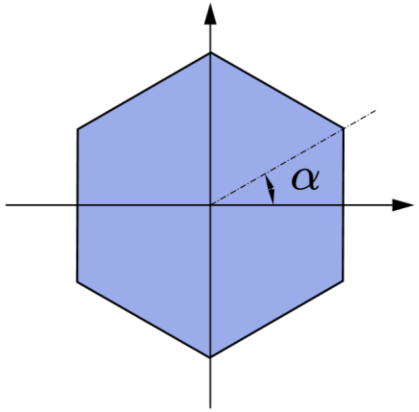
6.1 线性变换与仿射变换

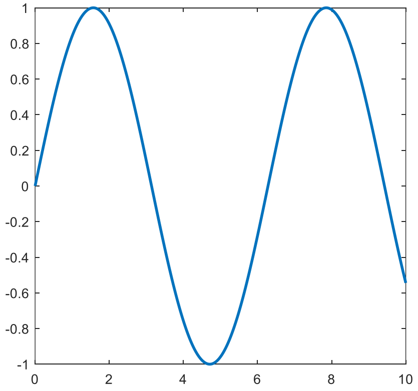
- 任选一个角度α，决定一个线性变换$\phi = (x, y) \to (x', y')$使得

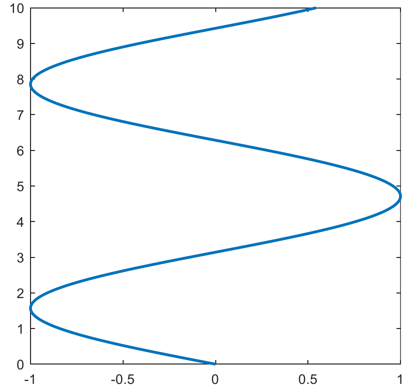
$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\theta + y\cos\alpha \end{cases}$$

- 画一个由平面直线段或者曲线段组成的图形C，再画出它在上述变换下的像$\phi(c)$。



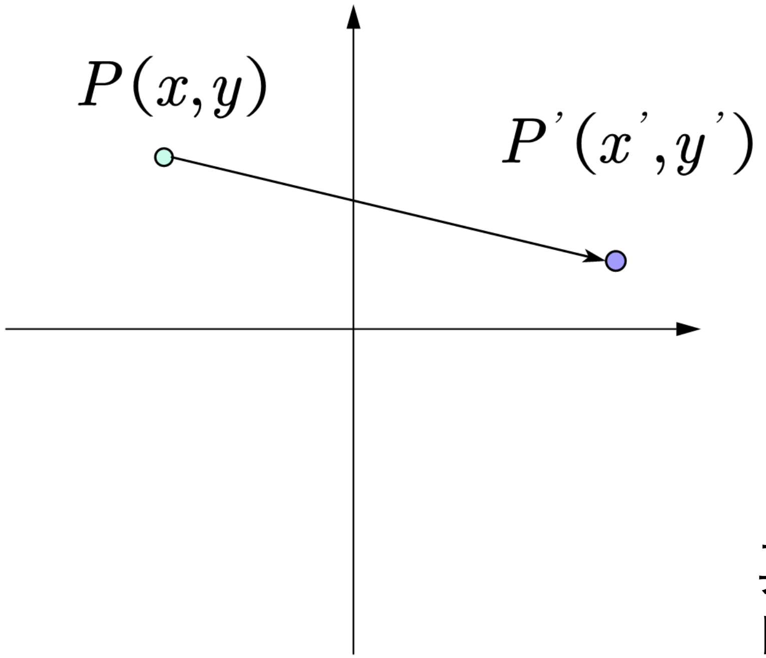






6.1 线性变换与仿射变换

- 线性变换：



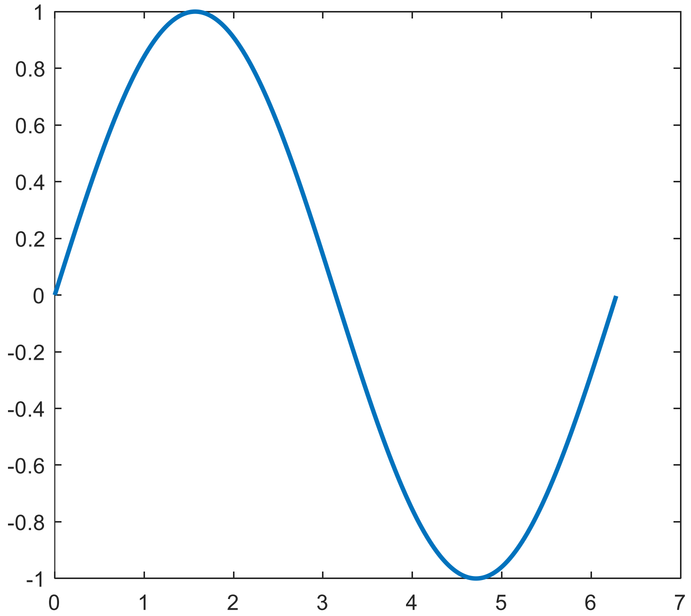
$$P \to P'$$
$$(x, y) \to (x', y')$$

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y \\ y' = a_2 x + b_2 y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \overset{A}{\boxed{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

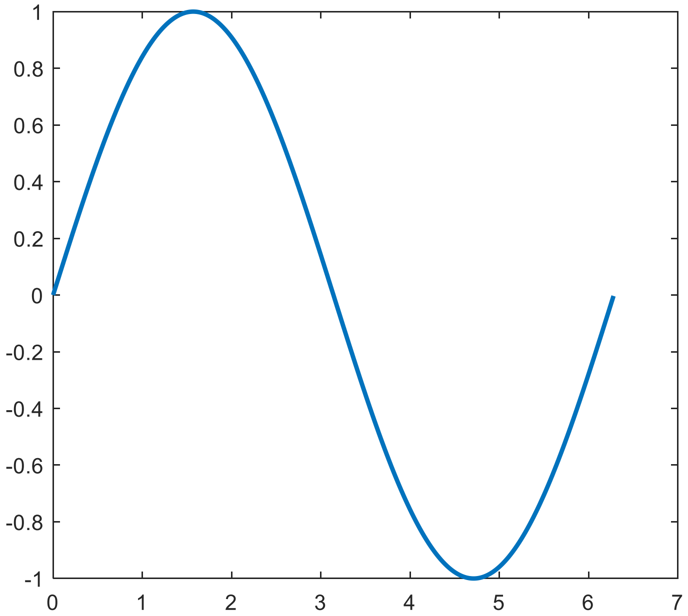
其中a_1, a_2, b_1, b_2与x,y无关的常数，
则称ϕ为线性变换。

6.1 线性变换与仿射变换

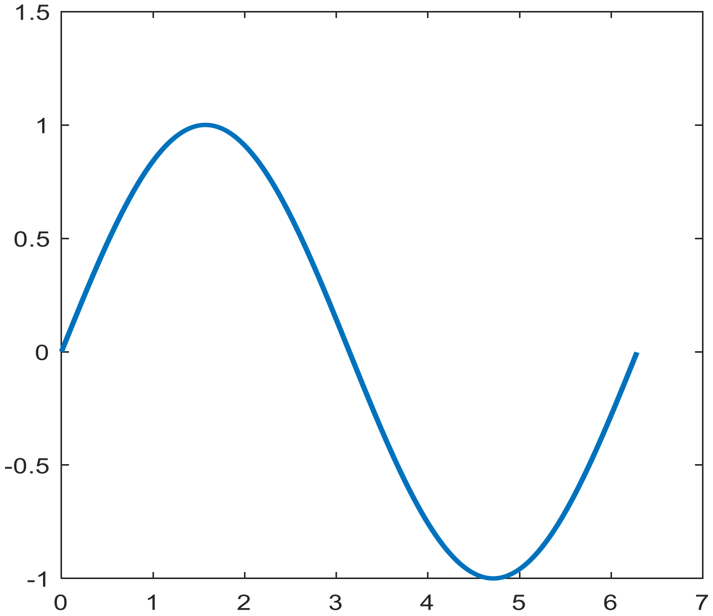
- 线性变换： $A = \begin{pmatrix} 1+\epsilon_1 & \epsilon_1 \\ \epsilon_1 & 1+\epsilon_1 \end{pmatrix}$



原图

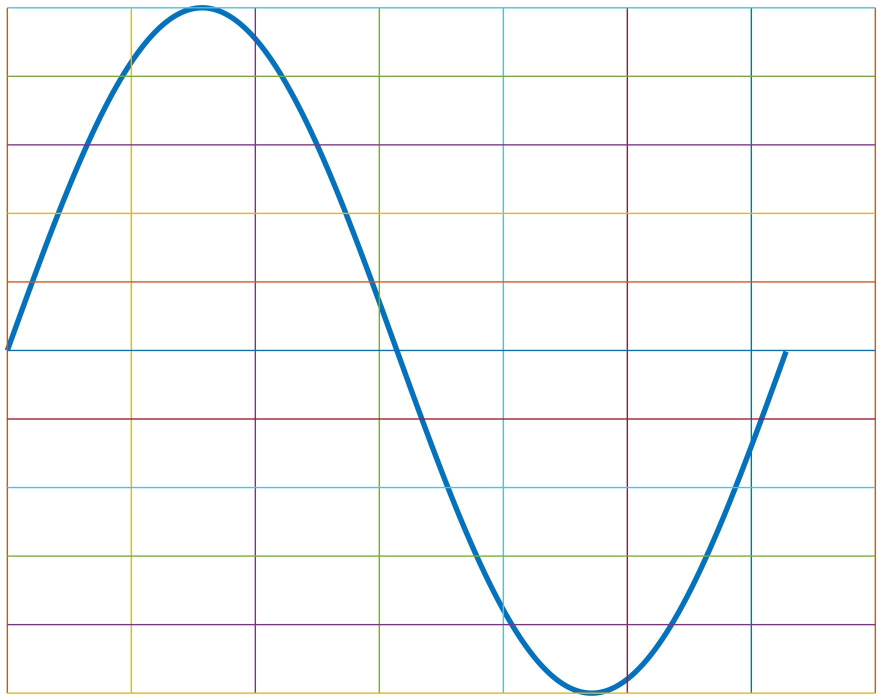


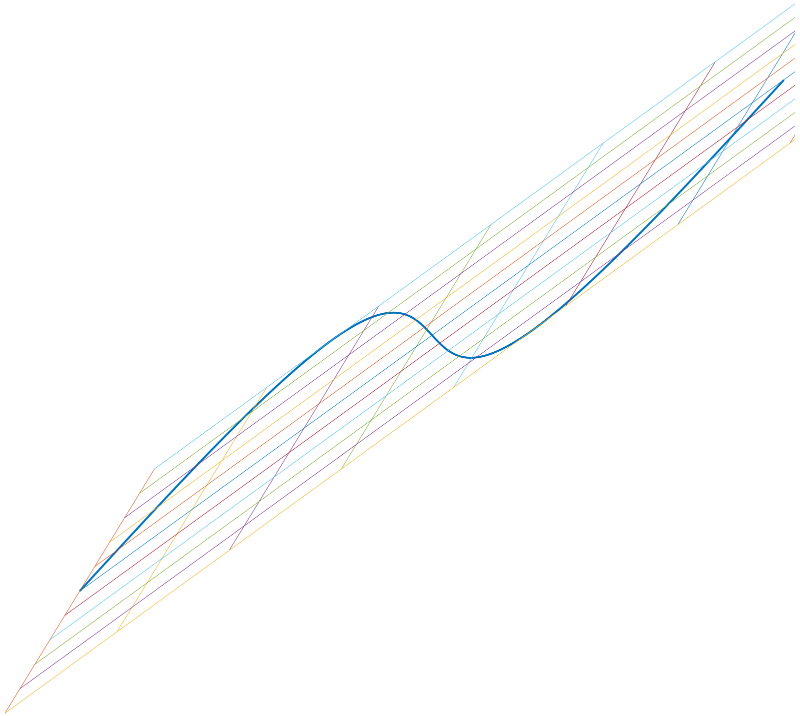
$\epsilon_1 = 1e-9$



$\epsilon_1 = 0.001$

6.1 线性变换与仿射变换





$\epsilon_1 = 2$

6.1 线性变换与仿射变换

- 仿射变换：

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c \\ y' = a_2 x + b_2 y + c \end{cases}$$

仿射变换可以看成是先做一个线性变换，再做一次平移$(x, y) \rightarrow (x + c_1, y + c_2)$得到的变换。

6.1 线性变换与仿射变换

- 常见的几种线性变换:

平移变换: 沿某一方向平移一定单位
伸缩变换: 将原始形状压缩或伸长，改变水平或者竖直轴的刻度单位
旋转变换: 关于某一定点旋转固定角度
对称变换: 关于某一对称轴进行对称变换

6.1 线性变换与仿射变换

- 通过更改不同的变换中的矩阵，观察以下现象：

（1）直线是否仍为直线？平行直线是否仍为平行直线？
（2）两点之间的距离是否保持不变？如果变了，是否所有的距离按同一比例放大或者缩小？
（3）角度大小是否保持不变？
（4）圆形变成什么图形？是否仍为圆形？

6.1 线性变换与仿射变换

- 查看matlab文档：https://www.mathworks.com/help/images/matrix-representation-of-geometric-transformations.html

- 学习matlab中的2D/3D仿射变换，自己实现一些仿射变换并与matlab中imwarp等函数的结果进行比较

6.1 线性变换与仿射变换

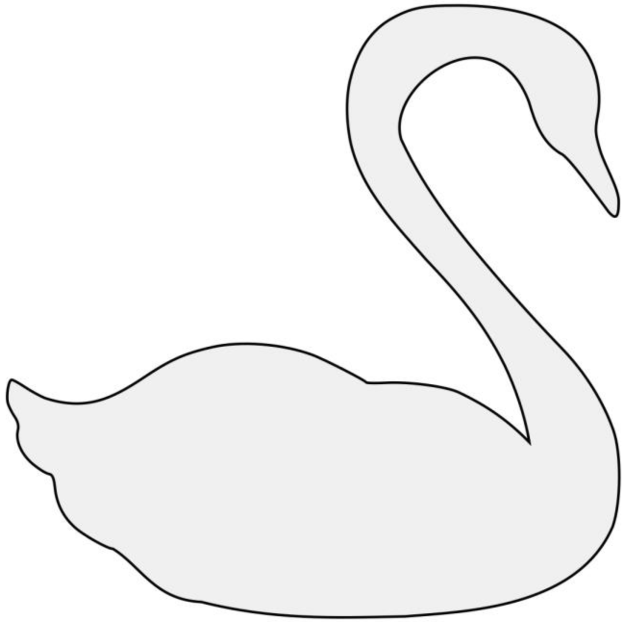
分别该图形做以下二维变换:

1.宽度缩小为1/2，高度放大为2倍，设为T1
2.顺时针旋转30度，设为T2
3.沿x轴做错切，错切系数d为1/2，设为T3

$$T1=T^*\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

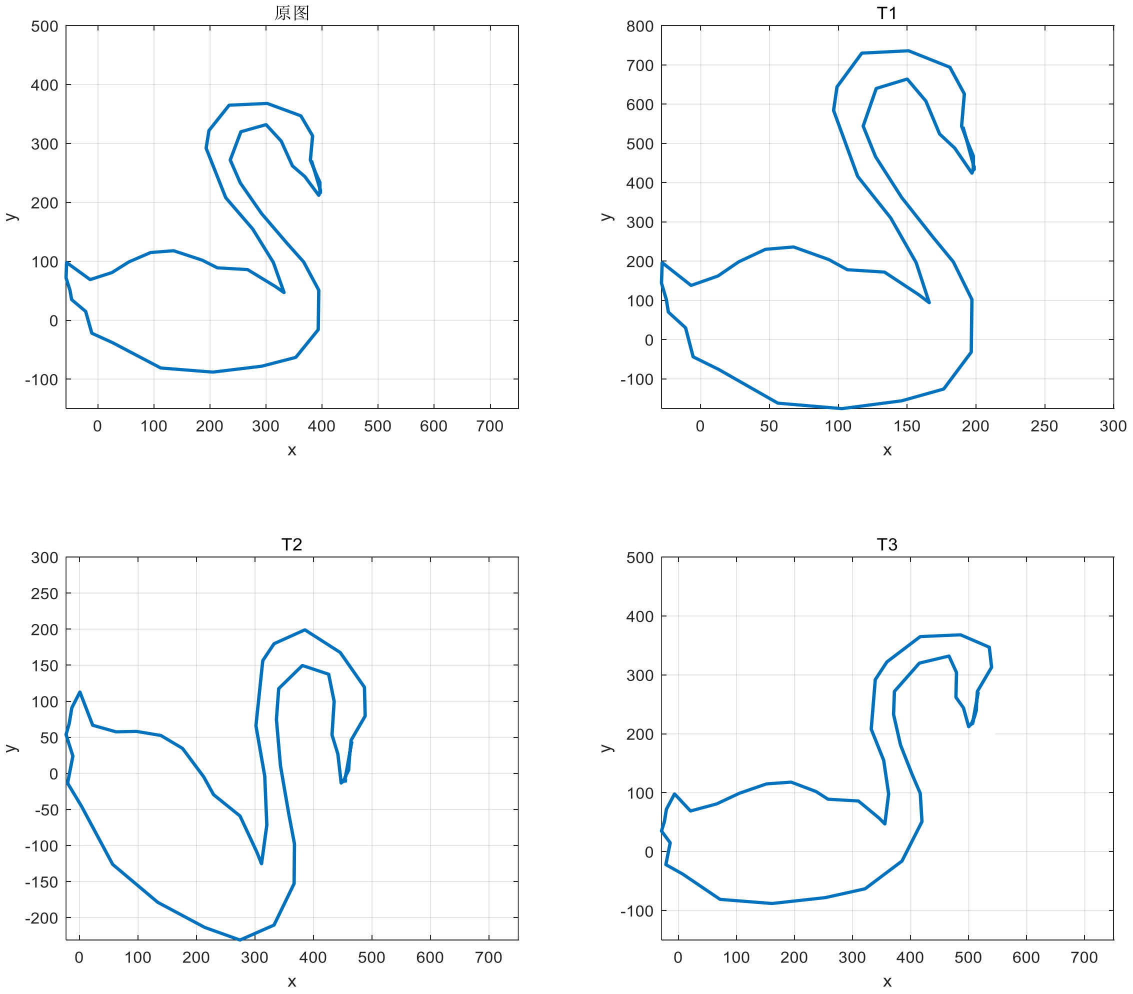
$$T2=T^*\begin{bmatrix}\cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) & 0\\ \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$T3=T^*\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



6.1 线性变换与仿射变换

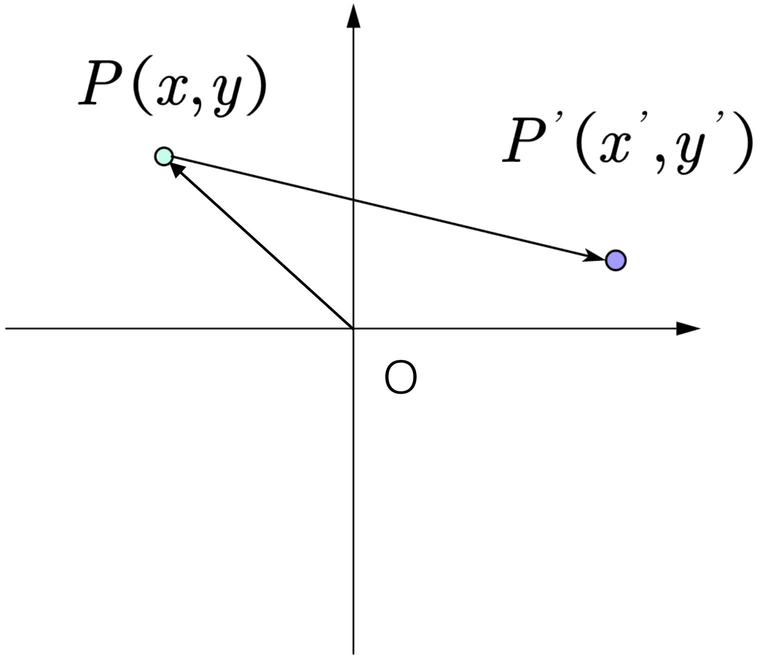
```
% swan
I=imread('swan.jpg');
figure(1);imshow(I);
%输入50个点
[x,y] = ginput(50);
figure(2);plot(x,y,'linewidth',3);
%建立50行2列的全1矩阵
T=ones(50,2);
%把x、y赋值给T的第1、2列
T(:,1)=x;T(:,2)=y;

%调整下图片位置
T(:,1)=T(:,1)-100;
T(:,2)=T(:,2)-100;

%三种图形变换
T1=T*[0.5 0 ;0 2];
%cos()默认是弧度制，角度用cosd()
T2=T*[cosd(30) -sind(30) ;sind(30) cosd(30) ];
T3=T*[1 0 ;0.5 1];
```



... plot(T(:,1),T2(:,2),'linewidth',2);...

6.2 线性变换的特征向量

- 通过画图来研究向量的方向的变化情况。看哪些向量的方向经过变换之后向逆时针方向偏移，哪些向量的方向保持不变？

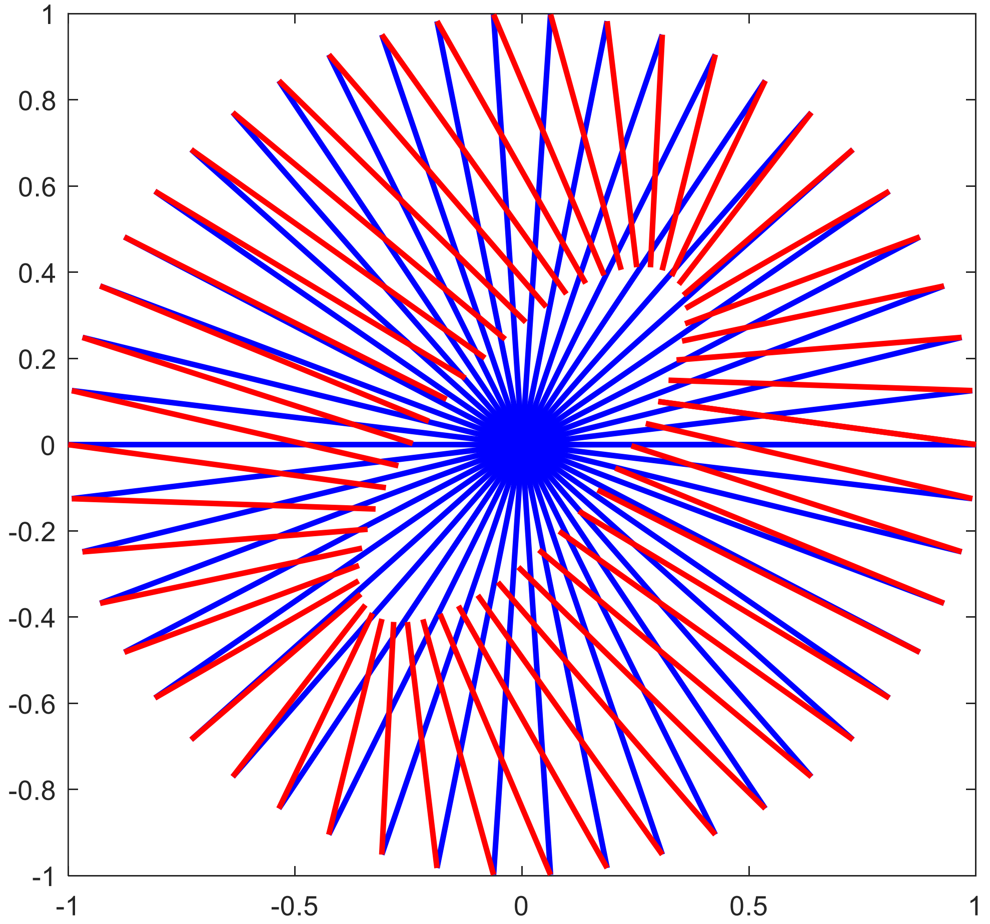


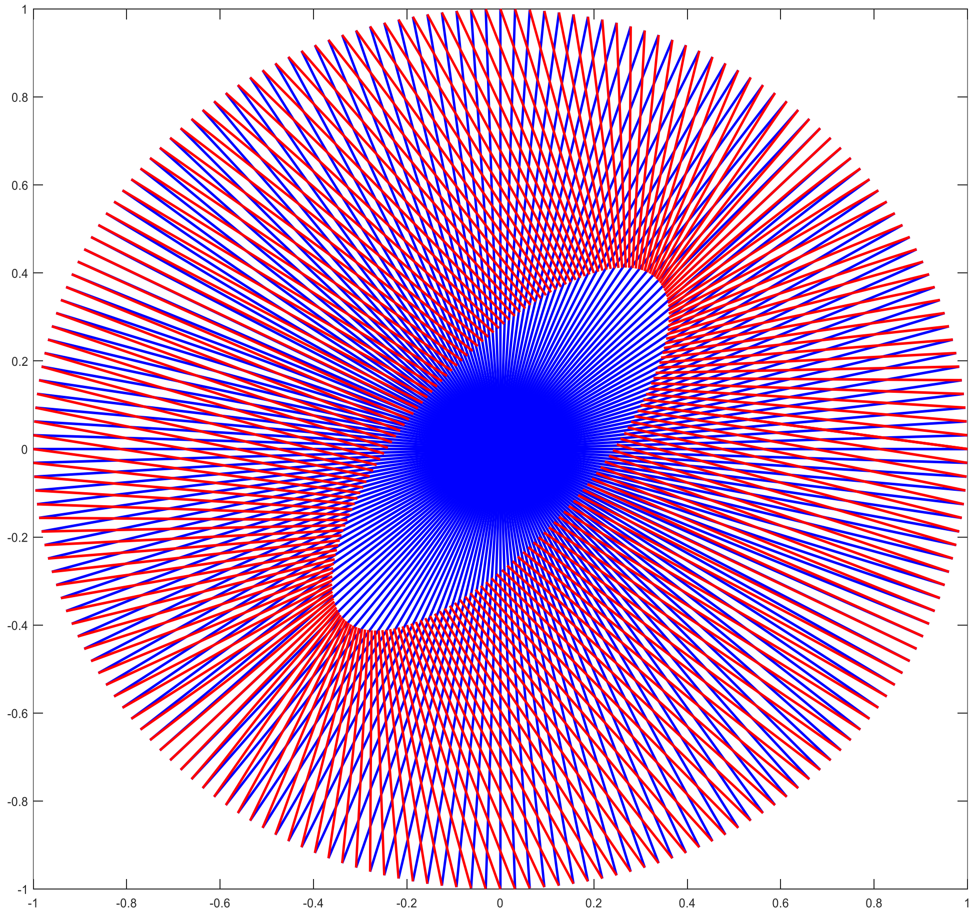
6.2 线性变换的特征向量

- 选取自然数n，在单位圆周上依次取n个点$P_i\left(\cos\frac{2k\pi}{n},\sin\frac{sk\pi}{n}\right)(0\leq k\leq n-1)$. 设$P_i'$是$P_i$在变换A下的象。用蓝色画出从原点O到每个$P_i$的线段，用红色画出每个$P_i$到$P_i'$的线段。观察比较向量$\overrightarrow{OP_i}$与$\overrightarrow{P_iP_i{}'}$方向的差异，是否存在方向一致的向量？如果有，有几个？

6.2线性变换的特征向量

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$$





6.2 线性变换的特征向量

MATLAB
eig计算特征根与特征向量

- 如果非零向量$u = \overrightarrow{OP}$在线性变换ϕ的作用下的像$\overrightarrow{OP'} = Au$与 u的方向平行（方向相同或相反或等于0）即

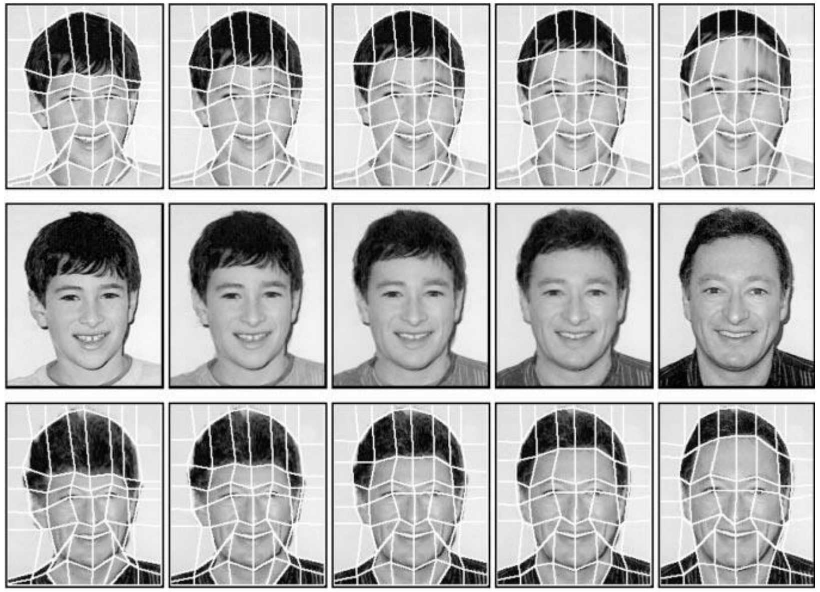
$$Au = \lambda u$$

对某个数λ成立，则u称为ϕ的特征向量，λ称为特征根或特征值。

6.2线性变换的特征向量

- 如果发现线性变换ϕ有两个相互不平行的特征向量，想一想，线性变换的作用是否可以想象成分别与两个特征向量平行的方向上按不同的比例的伸缩变换？

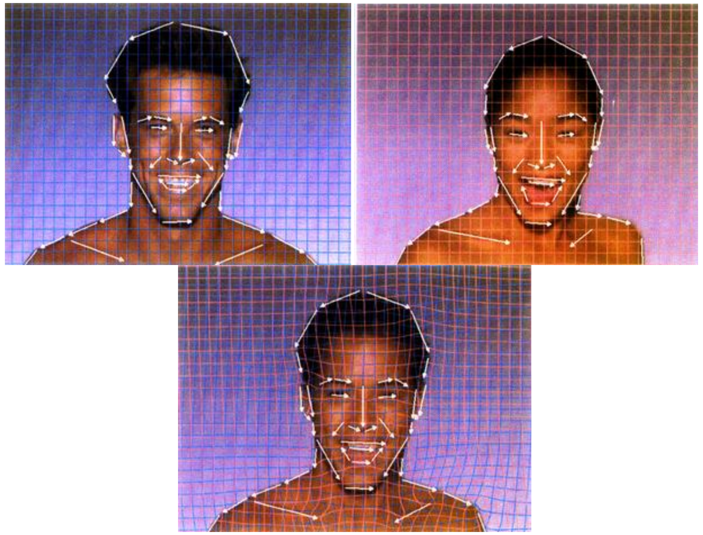
6.3 图像变形



基于网格

Triangular mesh [Goshtasby 1986, Tal 1999]

Quadrilateral [Smyth 1990, Nishita 1993, Wolberg 1990]



基于线

[Beier 1992, Lee 1998]

基于点

Radial basis function [Arad 1994]

Thin plate spline [Lee1994, Lee 1996, Litwinowicz 1994]

MFFD [Lee 1995]

Mass-spring system [Choi 2011]

6.3图像变形

Regenerative M [Shechtman 2010]

Structural Similarity [Liao2014]

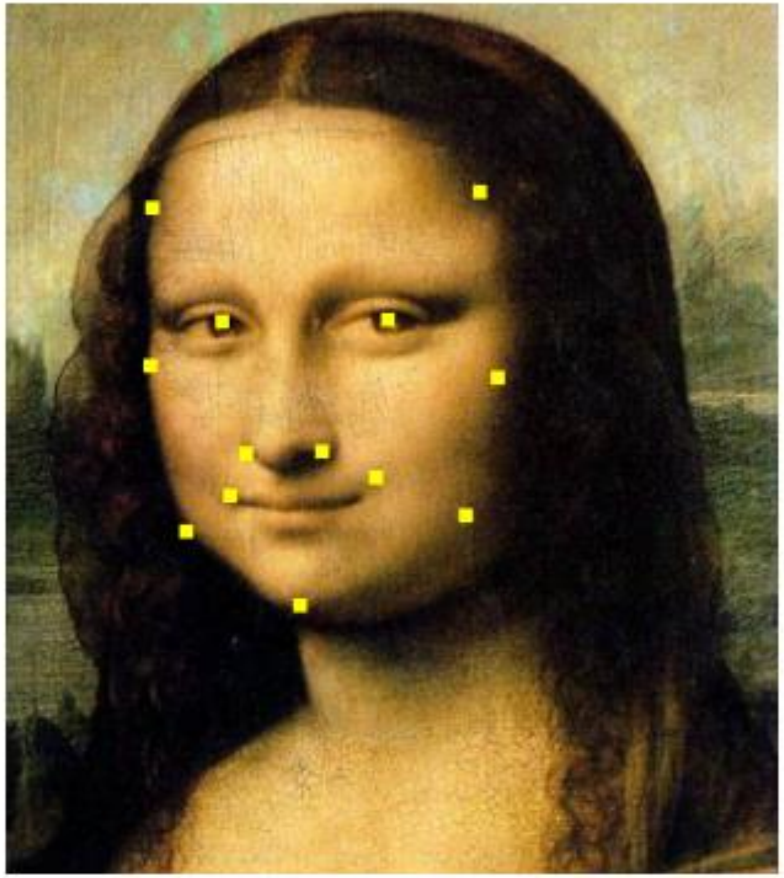
Color/intensity [Gao1998, Wu2012]

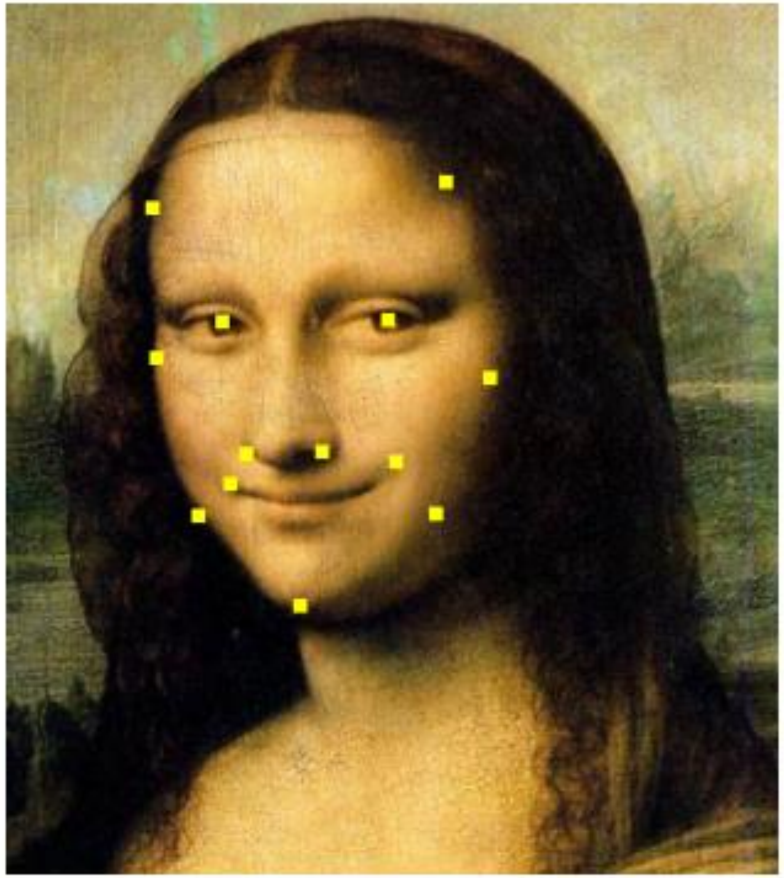
MUNIT [Huang2018]

Facial Model [Yang 2012]

DRIT [Hsin-Ying Lee2018]

6.3图像变形





6.3 图像变形

移动最小二乘法来实现图像变形的方法

假设p为原图像中控制点的位置，q为拖拽后控制点的位置，利用移动最小二乘法来为原图像上的每个像素点v构建相应的仿射变换l_v，并通过该变换来计算得到图像变形后的位置.

$$\sum_i w_i \left| l_v(p_i) - q_i \right|^2$$

其中 $w_i = \dfrac{1}{|p_i - v|^{2\alpha}}$

Image Deformation Using Moving Least Squares, TOG, 2006

6.3图像变形

- 移动最小二乘法并未对转换矩阵M进行条件限制，如果添加其他限制条件后，能得到不同形式的转换矩阵M，文章根据不同的转换矩阵M提出了三种变形方法：

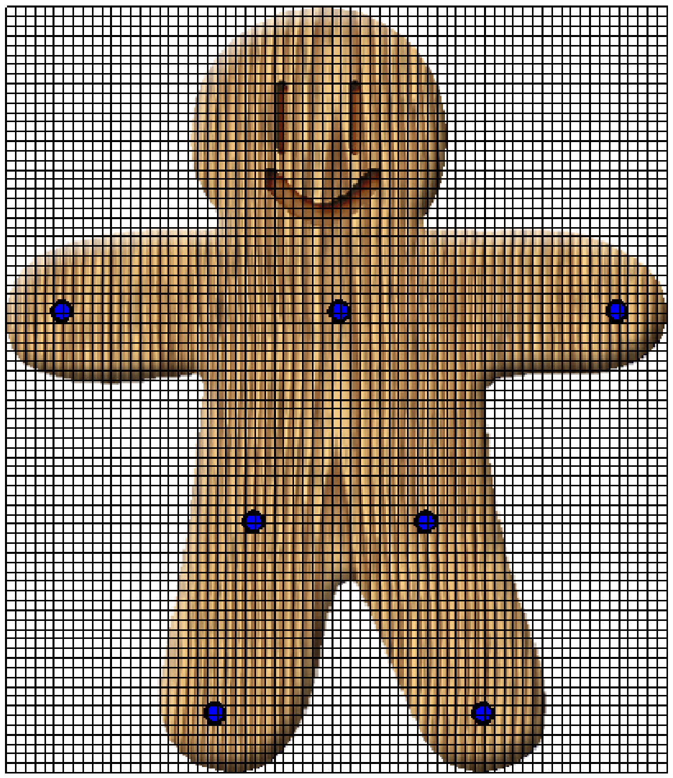
仿射变形（Affine Deformation）

相似变形（Similarity Deformation）

刚性变形（Rigid Deformation）

6.3图像变形

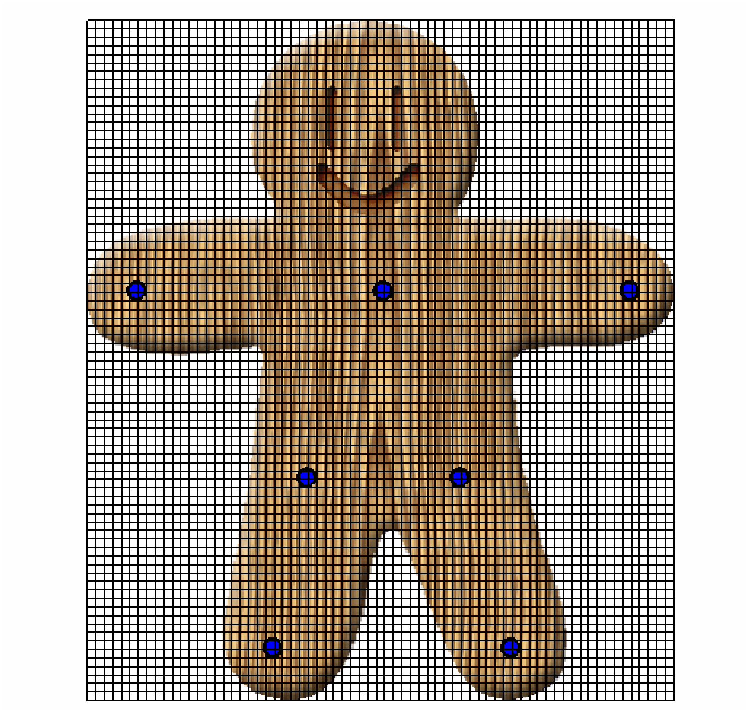
- 仿射变形，利用最小化表达式直接求解：



6.3 图像变形

- 相似变形:

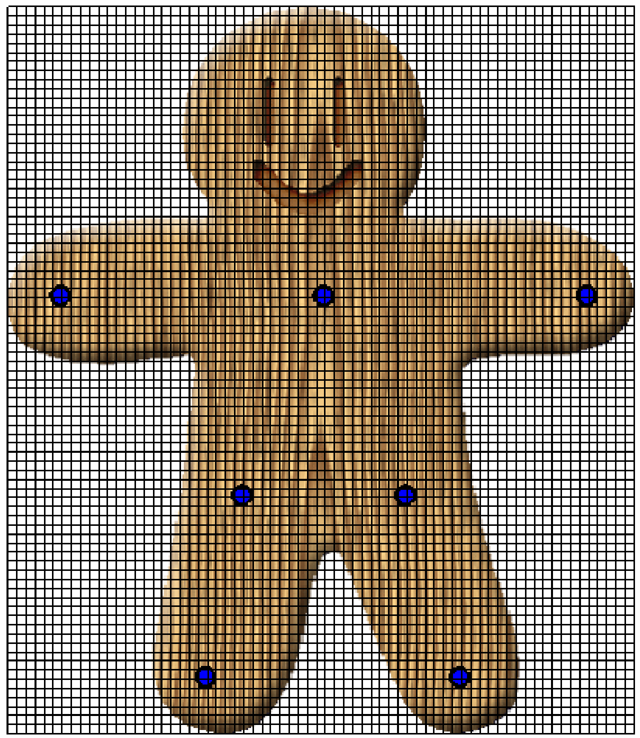
由于仿射变形包含非均匀缩放，因此其变形效果不是很好。相似变形是仿射变形的一个特殊子集，它的变形效果只包含平移、旋转和均匀缩放



6.3 图像变形

- 刚性变形:

变形不含任何缩放效果



作业6.1

- Mobius带的生成

在空间直角坐标系O-xyz中，一段平行于z轴且其中点位于XOY平面上以原点为圆心的圆周上，该线段沿圆周移动的同时也绕z轴旋转，当回到出发位置时，线段正好改变上下端的位置。

要求：生成形成Mobius带的动画

课堂总结

几何变换

- 基本定义
- 线性变换与仿射变换
- 线性变换的特征向量
- 图像变形

Q&A?

下节课内容

实验七：摆线

翟晓雅

Email: xiaoyazhai@ustc.edu.cn

Homepage: https://xiaoyazhai.github.io/

Lab: http://gcl.ustc.edu.cn/