中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

数学实验

实验一：微积分基础

翟晓雅

Email: xiaoyazhai@ustc.edu.cn
Homepage: https://xiaoyazhai.github.io/

实验目的

- 通过图形加强对函数的认识与理解
- 掌握运用函数的图形来观察和分析函数的有关特性与变化趋势
- 建立数形结合的思想
- 了解函数图形的绘制方法和原理

1. 函数及图像

- 泰勒级数
- 函数的升降，零点与极值
- 正弦函数的叠加
- 无极限的函数列

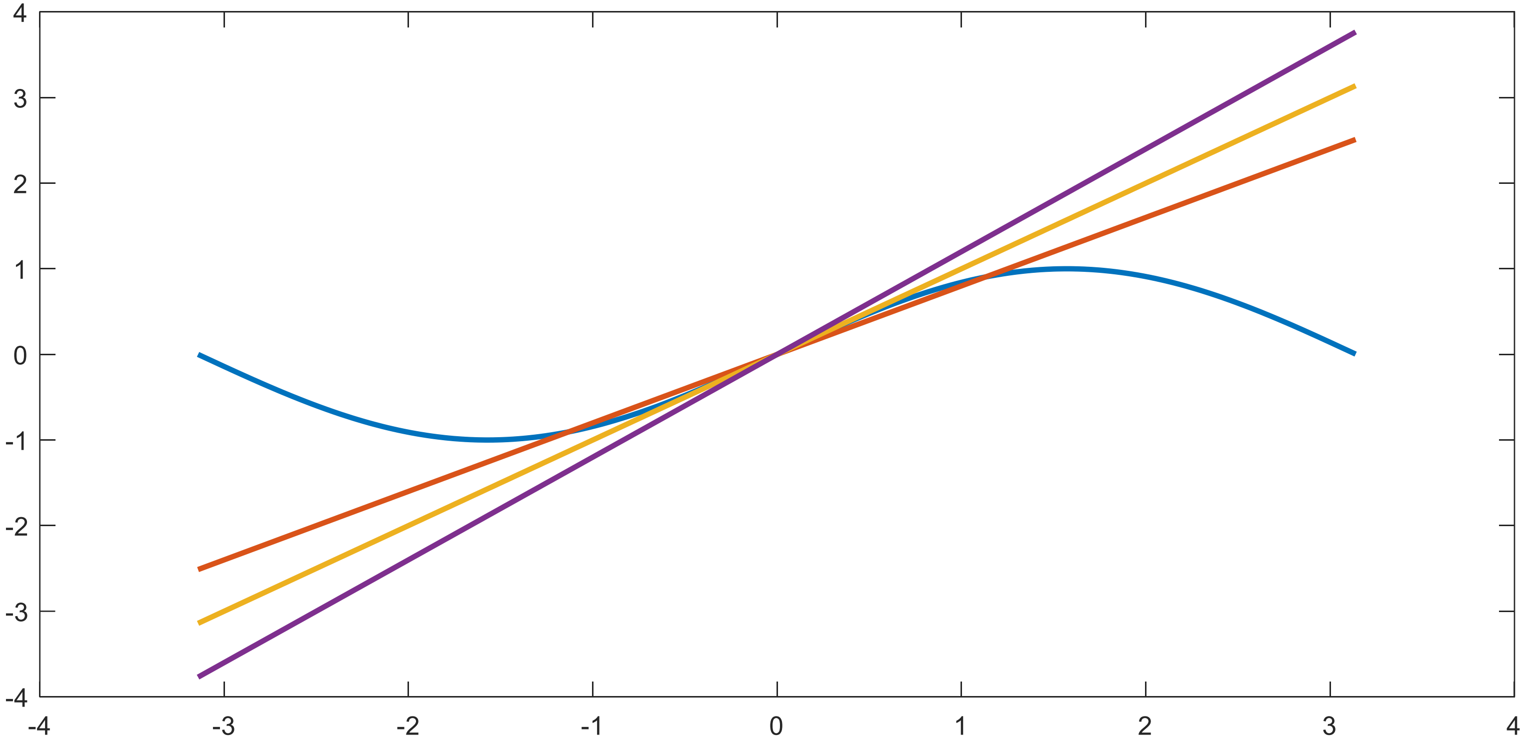
1.1. 泰勒（Taylor）级数

（1）在同一个坐标系中画出同一个区间x∈[−π, π]上的函数y=sin(x), y=0.8x, y=x与y=1.2x的图像

```
x = [-pi:0.01:pi];
y1 = sin(x);
y2 = 0.8*x;
y3 = x;
y4 = 1.2*x;

figure(1)
plot(x,y1,'LineWidth',2.0);
hold on
plot(x,y2,'LineWidth',2.0);
hold on
plot(x,y3,'LineWidth',2.0);
hold on
plot(x,y4,'LineWidth',2.0);
```

MATLAB: plot

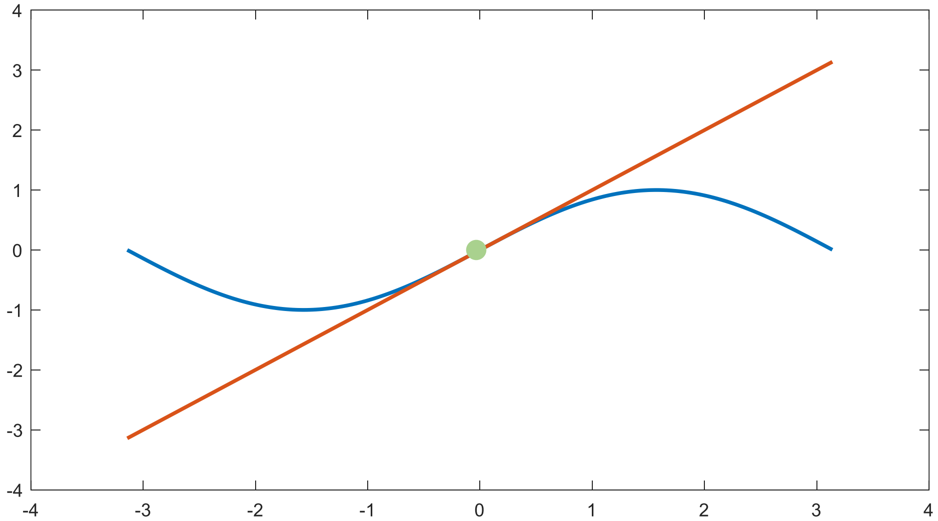


1.1. 泰勒（Taylor）级数

试验不同的k的值，在同一个坐标系内画出原点附近某一区间上的之间$y = kx$与正弦曲线$y = \sin(x)$

观察具有哪一个斜率k的直线 $y = kx$ 与 $y = \sin(x)$ 在原点的附近最接近？

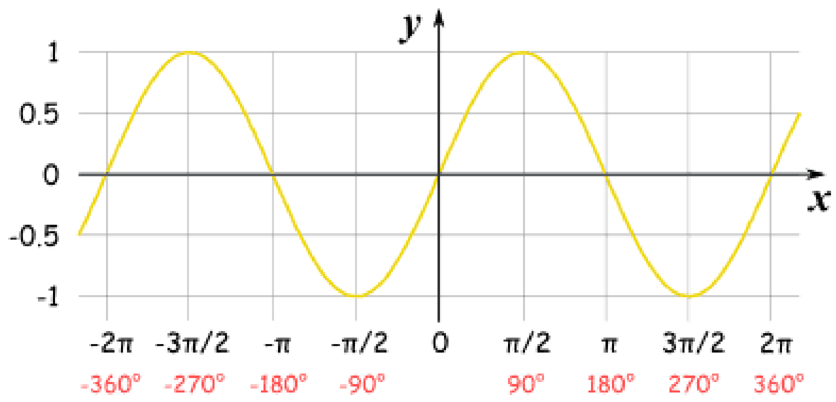
这个k值就是$y = \sin(x)$在$x = 0$时的导数。



1.1. 泰勒（Taylor）级数

- 能不能用二次函数的图像去跟着正弦曲线转弯，比直线能更好的逼近正弦曲线？ ❌

- 能不能用3次？5次？7次？函数的图像去跟着正弦曲线转弯，比直线能更好的逼近正弦曲线？

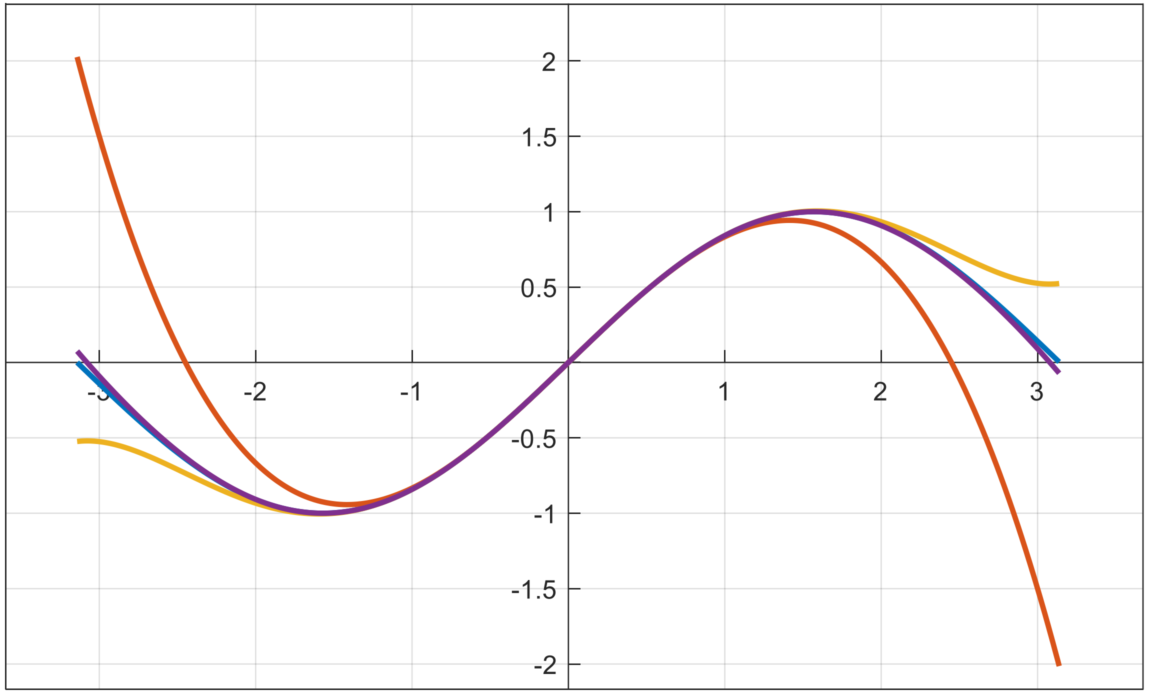


1.1. 泰勒（Taylor）级数

（2）在区间x∈[$-\pi$, π]上的函数

正弦函数: $$y = \sin(x)$$

多项式函数:
$$y = x - \frac{x^3}{6}$$
$$y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$
$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$



MATLAB: factorial(n)

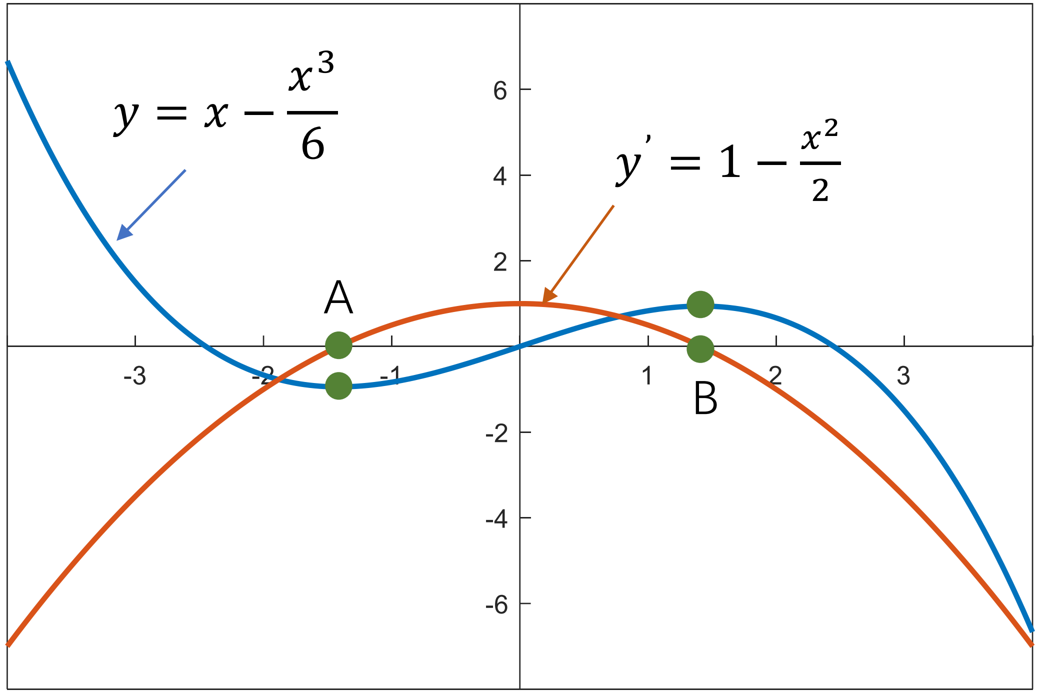
$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ \ldots$$

MATLAB: for循环使用

1.2.函数的升降、零点与极值

(1) 绘制$y=x-\frac{x^3}{6}$ 及其导数 $y'=1-\frac{x^2}{2}$ 的图像

- y'>0 ,y' < 0时的图像升降情况？
- 当y'上升或者下降时y的图像的凹凸情况



1.2.函数的升降、零点与极值

（2）计算$y = x - \frac{x^3}{6}$的根，极小值点，极大值点

MATLAB: roots(n) ->多项式求根

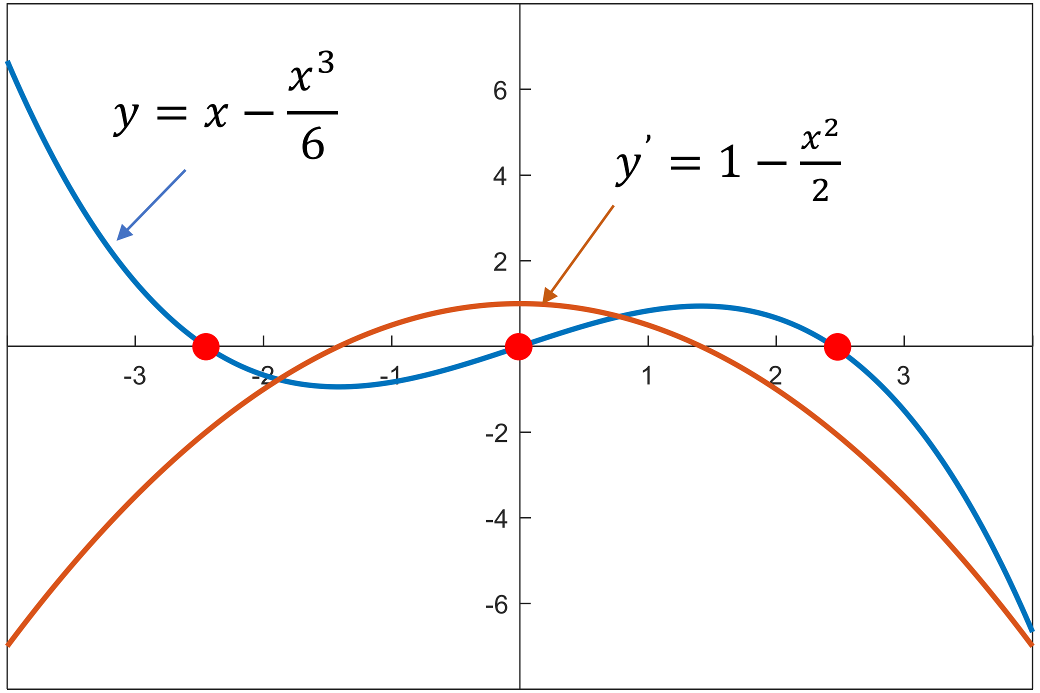
```
p = [-1/6,0,1,0];
roots(p)

ans =

         0
    2.4495
   -2.4495
```

迭代原理：牛顿切线法

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$



MATLAB: roots(n) -> fminbnd, fminsearch

语法：

[x,y]=fminbnd(h_fun,x1,x2,options)

[x,y]=fminbnd(‘funname’,x1,x2,options)

作业1.1：

- 设$f_k(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.对n = 3,4,5,6,7,依次实现牛顿切线法求出$f_k(x)$ 在$x = 3$附近的零点。并观察随着n的增加，所求出的零点有何变化趋势？有何道理？

1.3.正弦函数的叠加

（1）分别绘制区间x∈[−π, π] 上的函数:

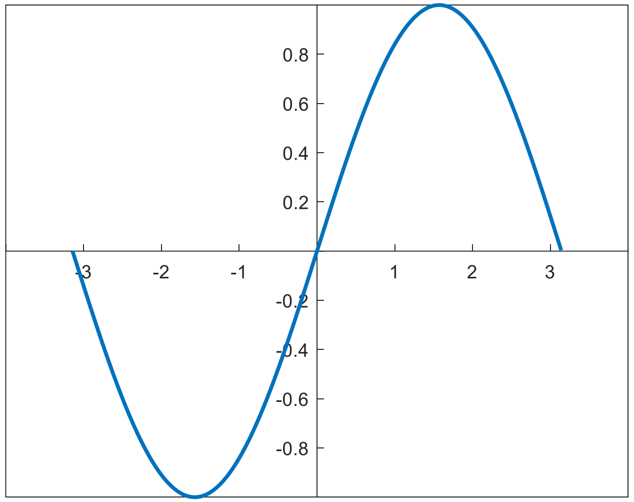
y=sinx $+\frac{1}{3}\sin 3x$ ， … ，$y=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)\,x, \ldots$

$$y=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 9x}{9}+\cdots$$

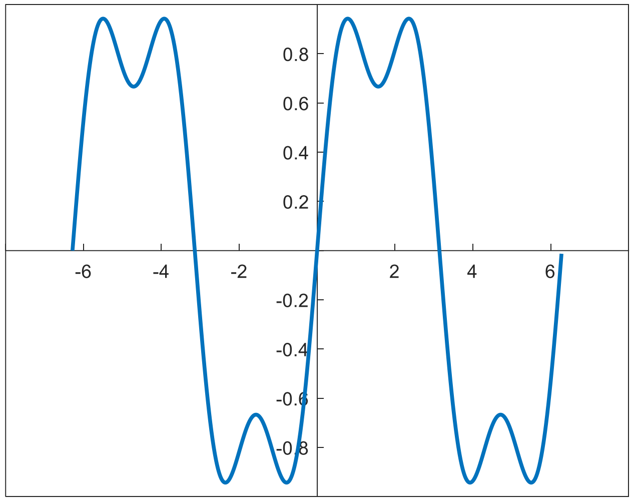
不断增加m的上限，观察所得的函数的图像随着这个m值得增加得变化情况和变化趋势。

1.3.正弦函数的叠加

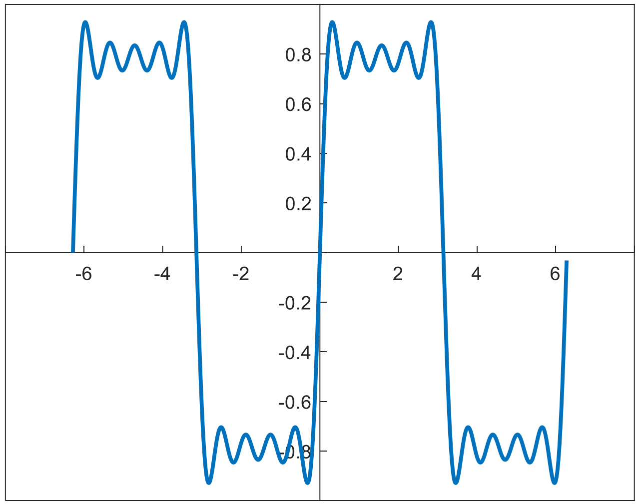
由于每一项$\frac{\sin kx}{k}$都以2π周期，经过求和之后得函数还是以2π为周期。



k=1



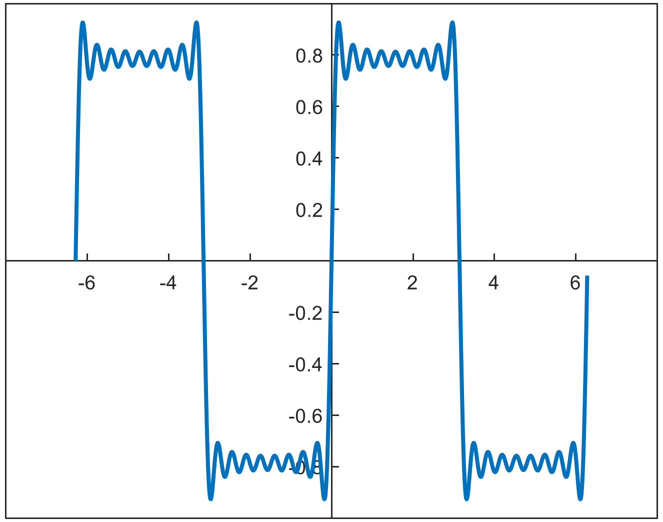
k=2

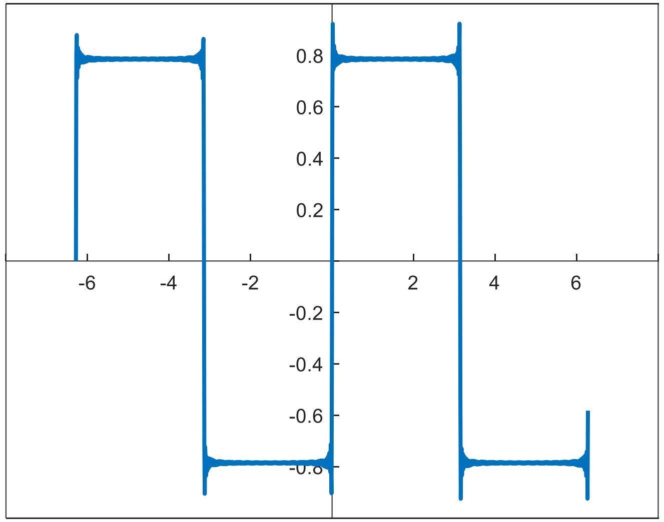


k=5

1.3.正弦函数的叠加

由于每一项$\frac{\sin kx}{k}$都以2π周期，经过求和之后得函数还是以2π为周期。

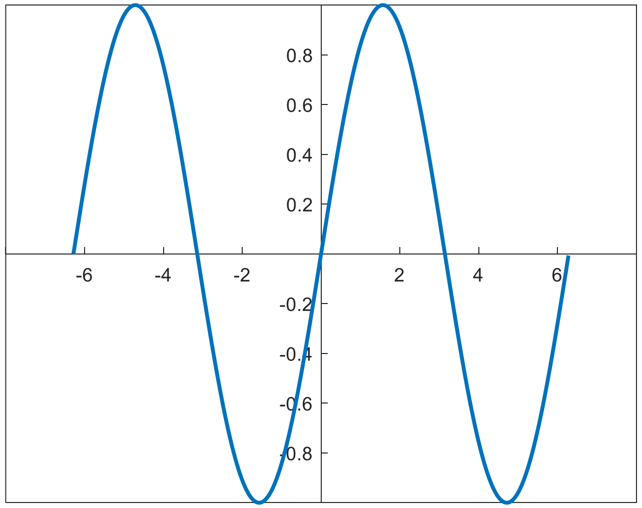




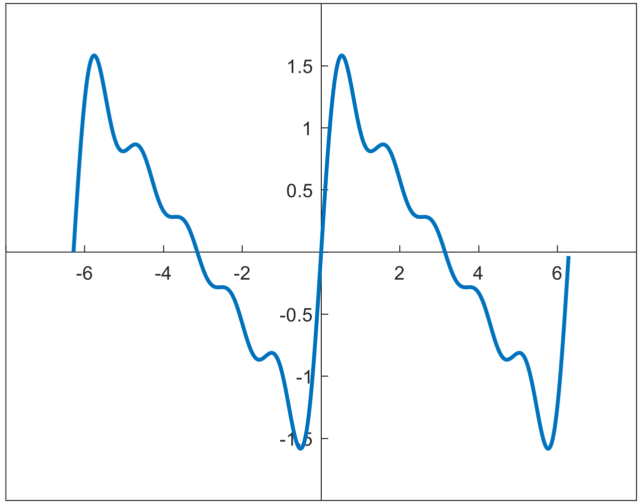
当n值很大时，图像越来越接近于“方形”波。

1.3.正弦函数的叠加

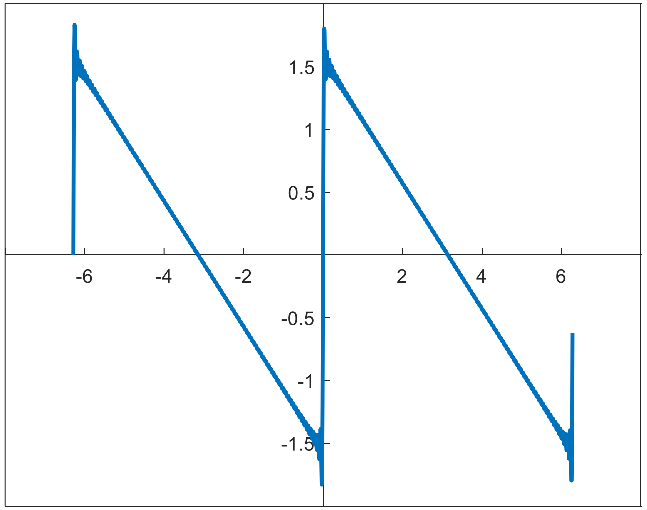
$$y = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots$$



k=1



k=5



k=100

1.3.正弦函数的叠加

由于函数1，$\sin(kx), \cos(kx)\ (k = 1,2,3, \ldots)$都以2π为周期，他们的实系数的线性组合也是以2π为周期的，其函数表示形式为：

$$f(x) = b_0 + a_1 \sin(x) + b_1 \cos(x) + \cdots$$

改变各个系数就得到各种不同形状的图像，那能不能得到所有的以2π为周期的图像?

结论：只要f(x)不要不连续，都可以！

1.3.正弦函数的叠加

将以2π为周期的函数$f(x)$展开如下形式：

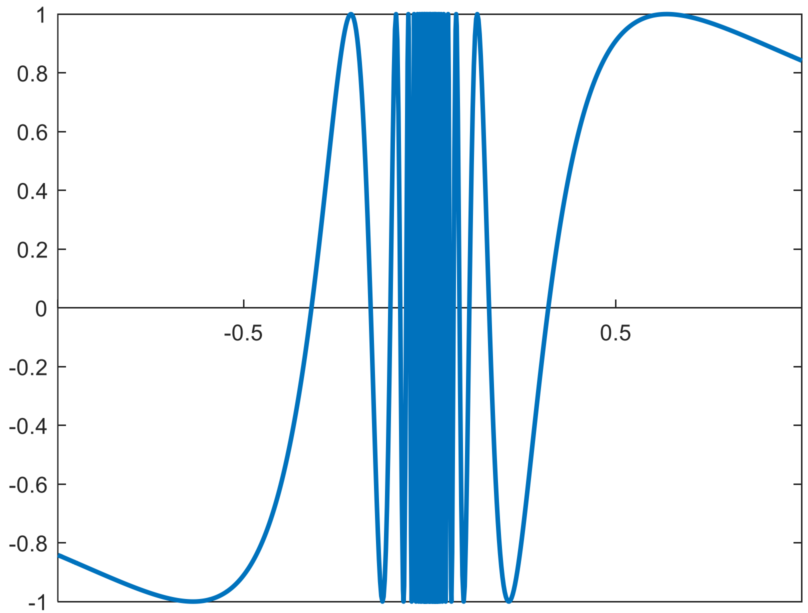
$$f(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin(kx) + b_k\, cos(kx))$$

的无穷级数形式，成为Fourier级数。

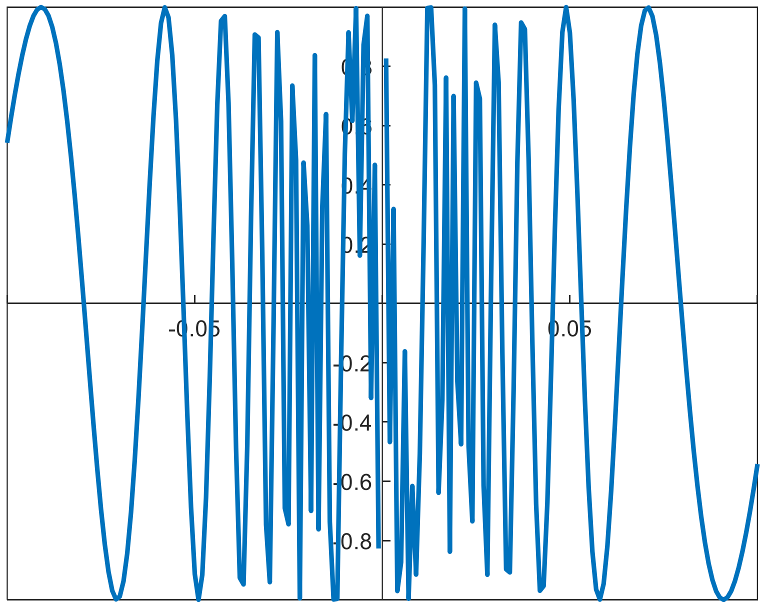
一个简单的例子：声音由震动产生。乐音也可以用周期函数来描述，并且也可以作Fourier分解。

1.4.无极限的函数列

（1）在区间[-1,1]上作出函数$y=\sin(\frac{1}{x})$的图像，观察当x→0时的图像



[-1,1]



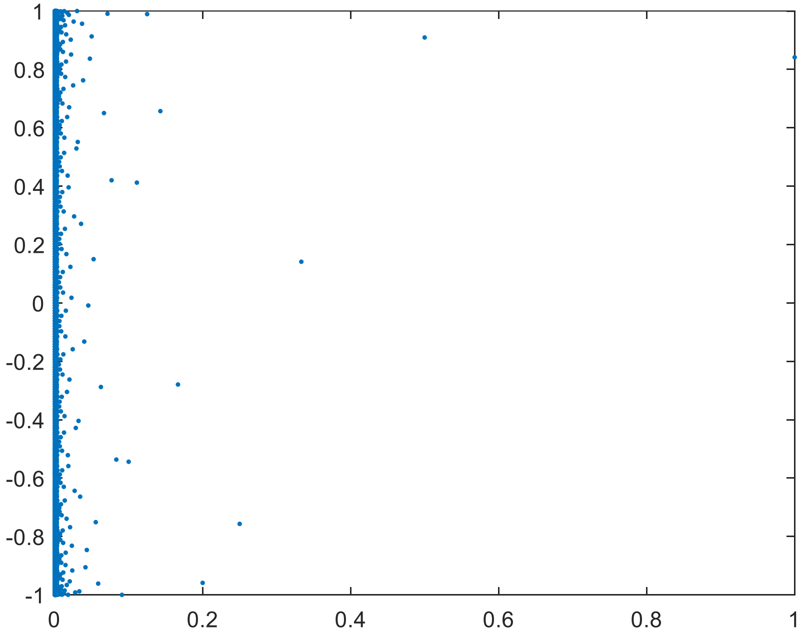
[-0.1,0.1]

```
>> x=0;
>> y = sin(1./x);
```

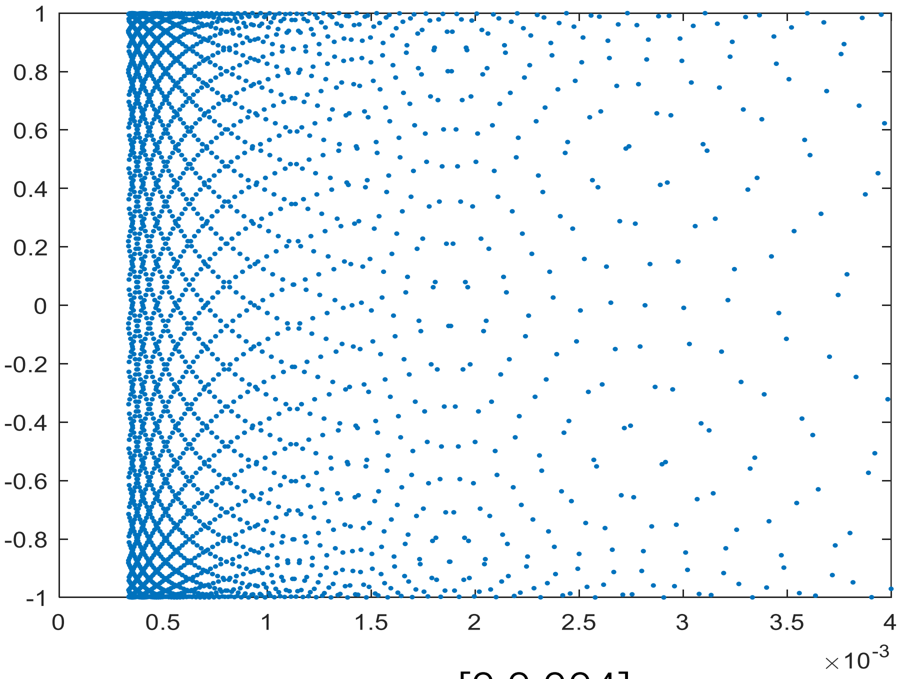
y = NaN!

1.4.无极限的函数列

（2）从以上曲线选取3000个点，并将其绘制在同一个坐标系中。



[0,1]

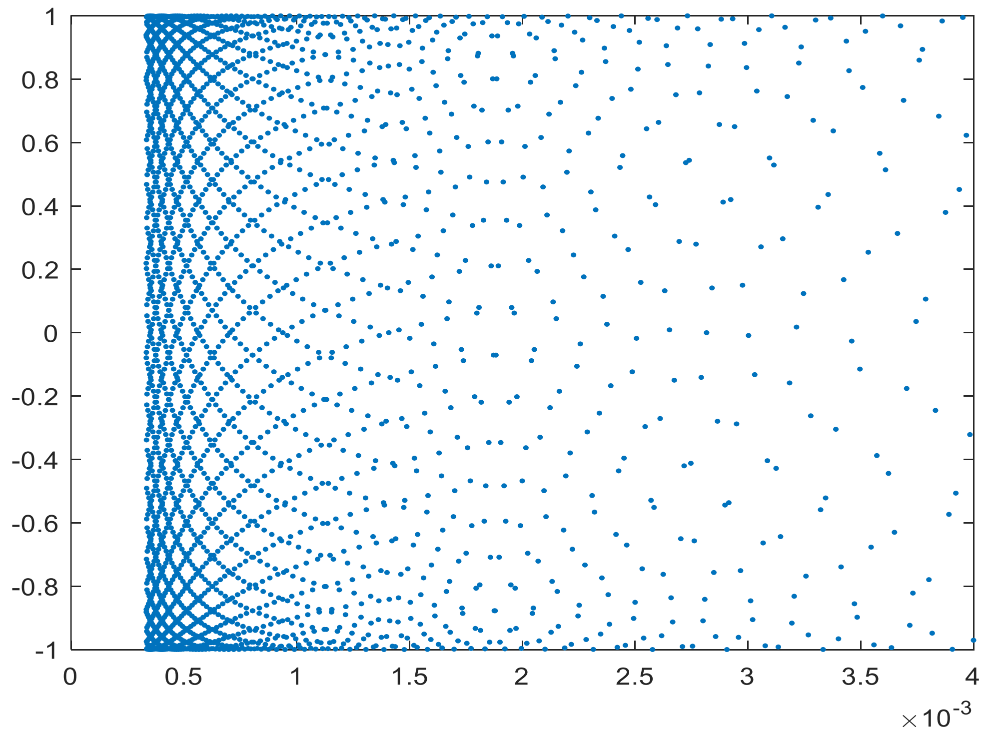


[0,0.004]

1.4.无极限的函数列

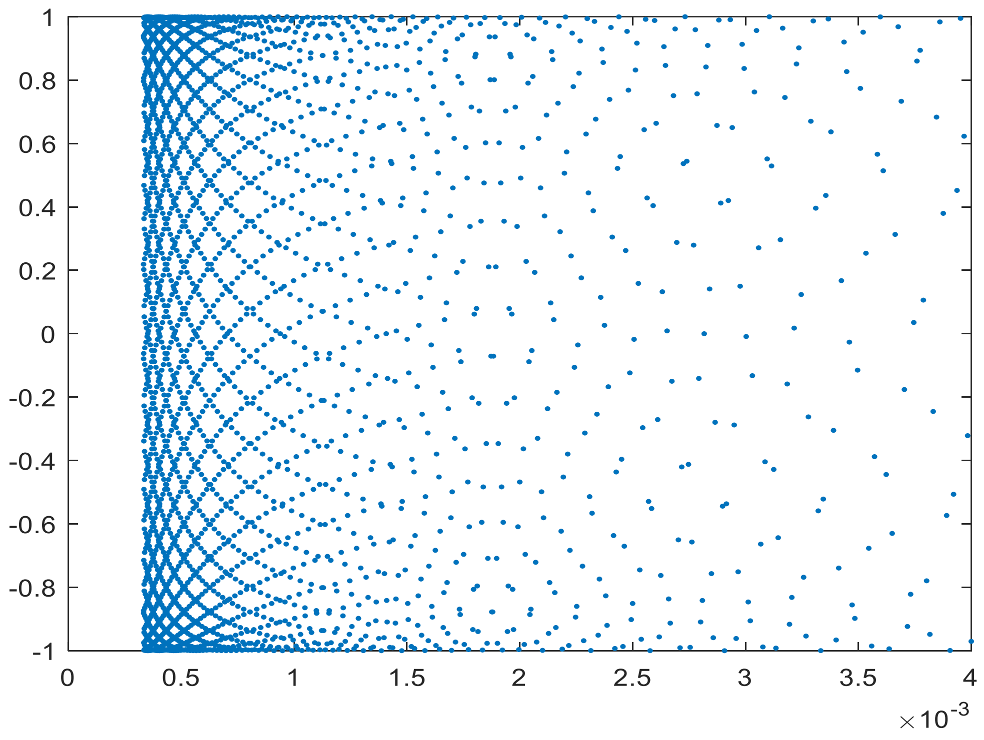
一些问题:

- 该图呈现出来的是什么曲线?
- 能写出函数关系式吗?
- 即使不能写出关系式，能否把某一条先单独列出来?
- 哪些点组成了一条线?



1.4.无极限的函数列

判断一点$A_k(\frac{1}{k},\sin k)$距离最近的是哪一点？



- 距离$A_k(\frac{1}{k},\sin k)$最近的是不是$A_{k+1}\left(\frac{1}{k+1},\sin(k+1)\right)$?

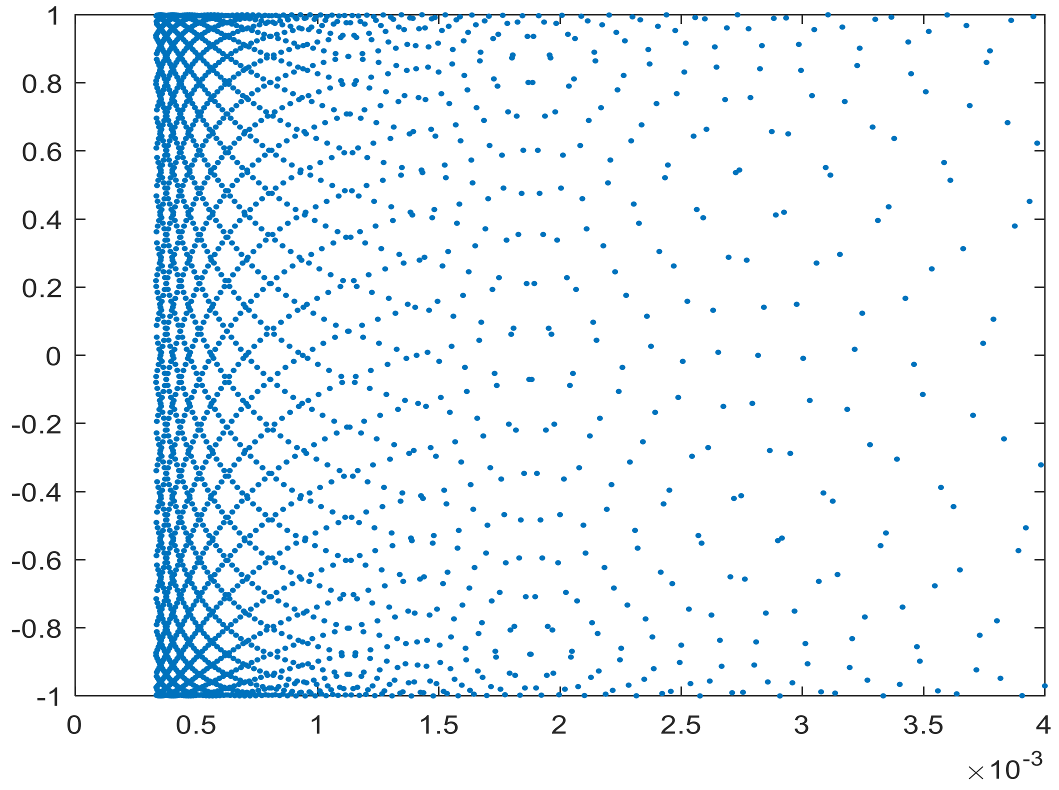
- 计算$A_k(\frac{1}{k},\sin k)$与$A_m\left(\frac{1}{m},\sin(m)\right)$的距离

$$d(k,m)=\sqrt{(\frac{1}{k}-\frac{1}{m})^2+(\sin k-\sin m)^2}$$

$A_{k\pm 44}$与A_k接近!

作业1.2：

- 判断一点$A_k(\frac{1}{k}, \sin k)$距离最近的是哪一点？
- 根据最近点绘制一系列的曲线



1.5.无穷乘积

若知道一个多项式$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$的全部n个根$x_1, \ldots, x_n$，则$f(x)$可以分解为一次因式的乘积形式：

$$f(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

Sin(x) 全部跟$k\pi$ $(k \in \pi)$都知道，能不能将sin(x)写成

$$\sin(x) = ax(x - \pi)(x + \pi)(x - 2\pi)(x + 2\pi) \ldots (x - kx)(x + k\pi)$$

1.5.无穷乘积

假如从$\sin(x)$的所有根中取出有限个：$0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \ldots, \pm n\pi$
以这些数为根构建一个多项式$f_n(x)$使它的一次项系数为1：

$$f_n(x) = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

令$n \to \infty$，变成一个无穷乘积

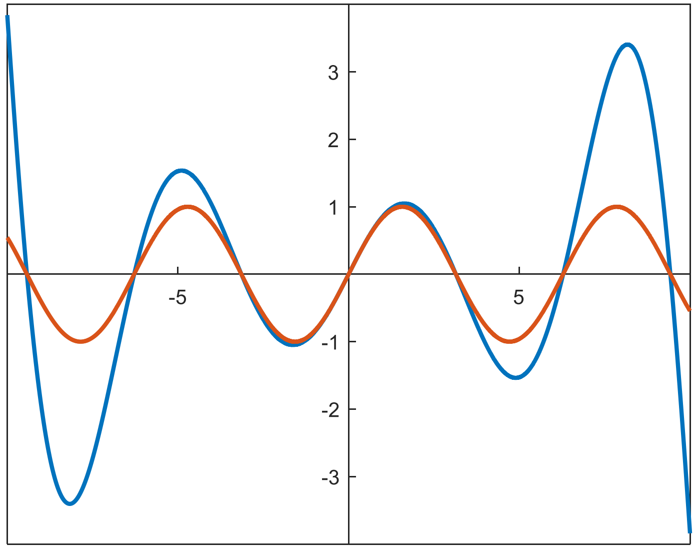
$$f_n(x) = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots$$

1.5.无穷乘积

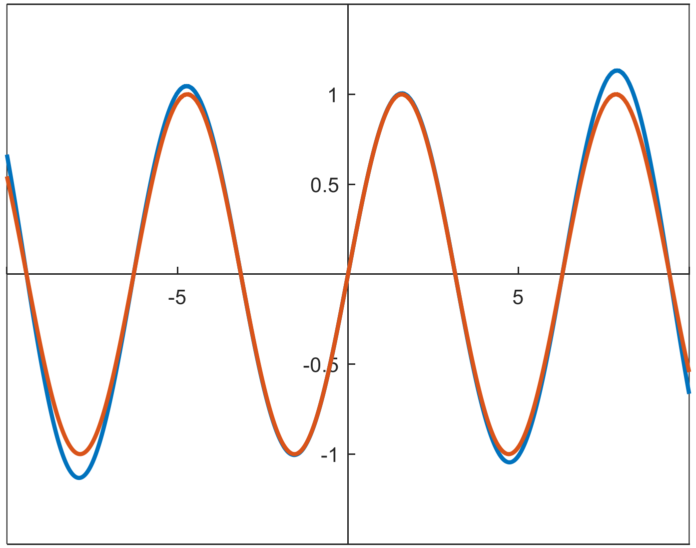
绘制下述函数，观察n逐渐增大时的

$$f(x) = \sin(x)$$

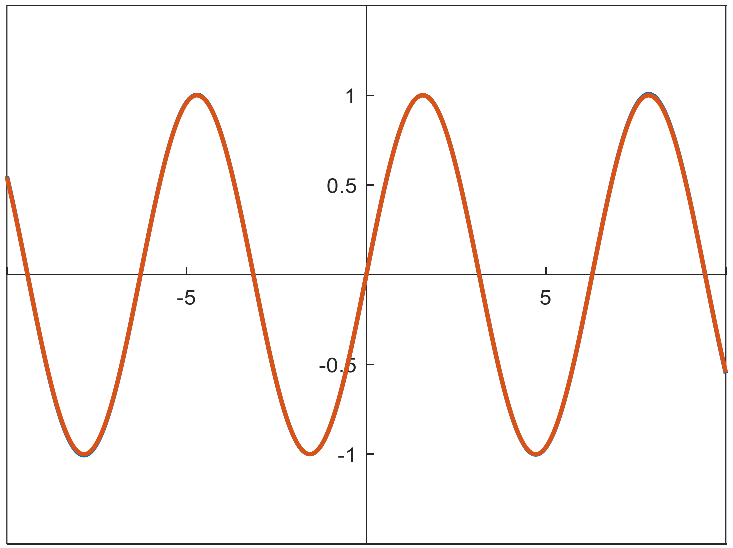
$$f_n(x) = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$



n = 5



n = 50



n = 1000

2.数e

- 常数对数 （lg N）& 自然对数 （ln N e=2.71828…）
  指数函数，对数函数，双曲函数都离不开e

- 早在15，16世纪，随着天文和航海等技术研究的广泛开展，解决天文计算的困难成了当时最紧迫的任务。

如何把大数的乘、除、乘方、开方运算转化为加减运算?

2.数e

- 1544年，德国数学家斯菲尔德《整数算数》中列出了等差数列和等比数列的关系：

$$x = \ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots$$

$$y = \ \ldots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1,2,4,8,16,32,64, \ldots$$

上行的加，减，乘，除，分别对应着下行的乘，除，乘方和开方

但是该列表只能做偶数及$\frac{1}{2}$的整数幂有关的计算

2.数e

- 对数→ 公元17世纪苏格兰数学家纳皮尔(J. Napier)为了简化天文数据的计算，历史上第一个给对数命名并公布对数表
- 假如以10为底，则对数表为（$a^x = y$, a= 10）

幂（真数）y	1	10	100	1000	…
指数（对数/假数）x	0	1	2	3	…

真数之间的差距太大！导致过多数无法查表！

2.数e

MATLAB
以e为底：log(N)
以10为底：log10(N)
以2为底：log2(N)

- 为了克服上述缺点，使表中相邻的两个真数尽量接近，取对数的底尽量接近1.
- $a^x = y, \mathrm{a} = 1.001$

幂（真数）y	1	1.001	1.002	1.003	…
指数（对数/假数）x	0	1	2	3	…

如何计算以10为底2的对数，lg(2)?

瑞士钟表制造商比尔吉于1620年《算数与几何级数表》公布了对数表

2.数e

$$a^x = y$$

比尔吉取 $a = 1.0001$, 对应于两个相邻指数y和y+1的真数的值为：

$$x = (1.0001)^y \text{ 和} x + \Delta x = (1.0001)^{y+1}$$

$$\Rightarrow \Delta x = (1.0001)^{y+1} - (1.0001)^y = \frac{x}{10^4}$$

算出对应于y的x值后，要计算对应于y+1的值，只要加上$\frac{x}{10^4}$，也就是 $y = 10^4 \tilde{y}$

$$x = (1.0001)^y = [(1.0001)^{10^4}]^{\tilde{y}}$$

此时，对数的底数取 $(1.0001)^{10^4}$

2.数e

$$a^x = y\ ,\ a = 1.0001$$

$$x = (1.0001)^y = [(1.0001)^{10^4}]^{\tilde{y}}$$

在比尔吉的对数底数中，以n代替10^4，并令n趋于无穷大，得到微积分中一个重要的极限：

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

一个有理数列的极限可以是一个无理数

1683年，瑞士数学家雅各·伯努利考察了连续复利问题考察了上式的极限，利用二项式定理，指出这个极限值介于2与3之间。

这是对e的近似值的首次估计。

2.数e

1683年，瑞士数学家雅各·伯努利是数学史上第一次用极限定义一个数。

1731年，欧拉给哥德巴赫的一封信中首次公开了常数e。

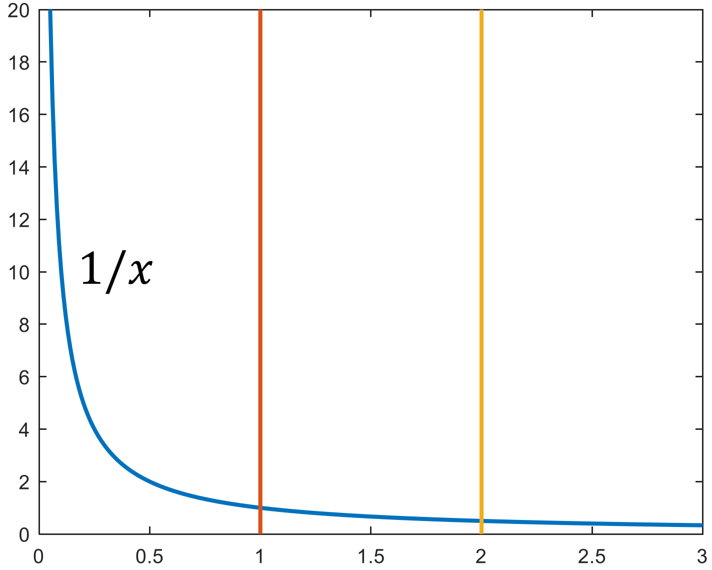
欧拉还发现数学上一个重要的公式：$\boldsymbol{e^{\pi i}=-1}$

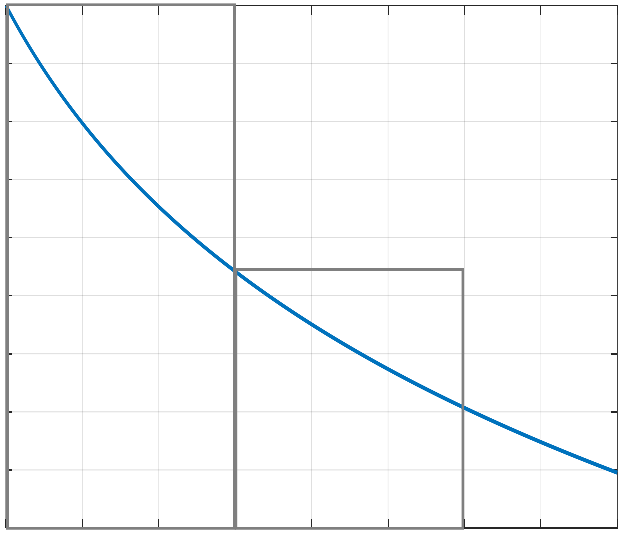
常数e被广泛用在复利问题，人口增长问题，放射性物质衰变问题等

3. 积分与自然对数

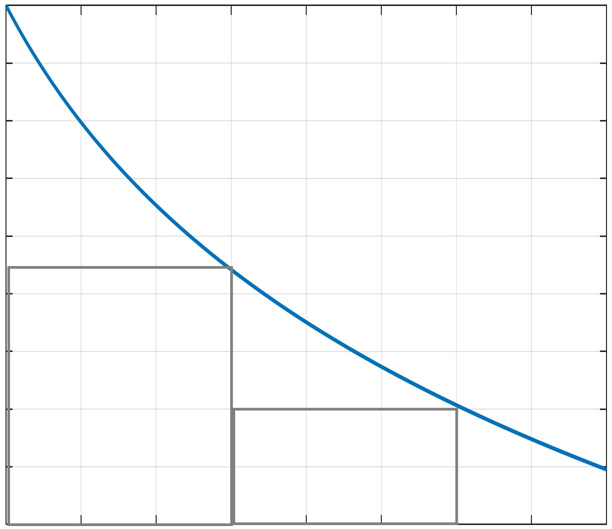
$y=f(x)=1/x$ 图像与x轴，$x=1, x=a$ 所围的面积$S(a)$，即定积分$\int_1^a \frac{1}{x}\,dx$

当$a=2$时，将自变量区间分成n等分，每份长度为$\frac{1}{n}$，插入的分点是$x_k=1+\frac{k}{n}\ (1\le k\le n-1)$。





面积积分上限

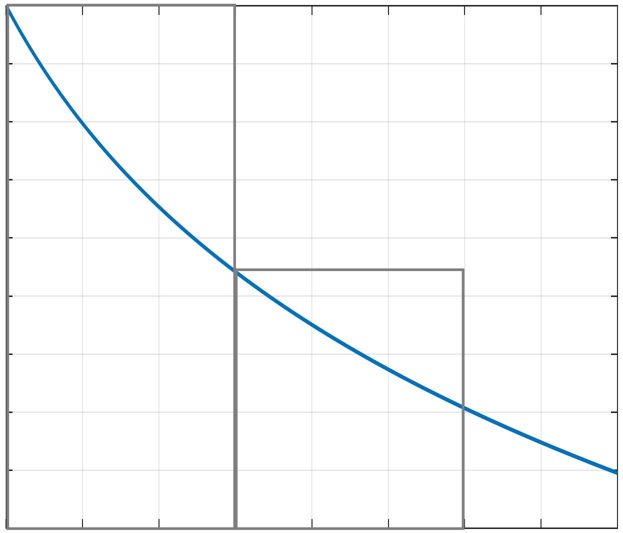


面积积分下限

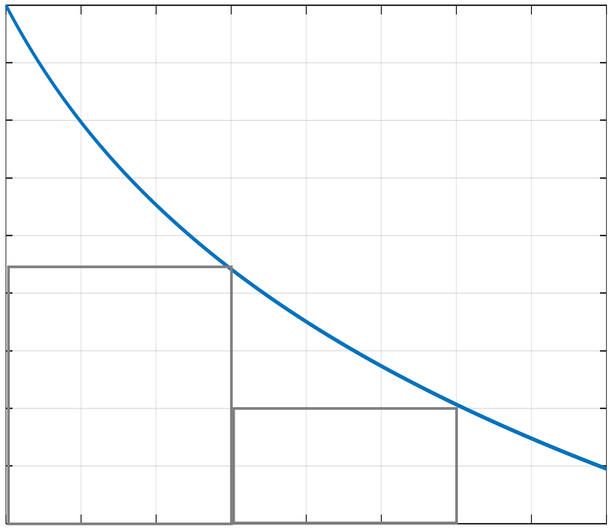
3. 积分与自然对数

S_k的上边界曲线$y=\frac{1}{x}$在区间$[x_{k-1},x_k]$. 最大高度为$\frac{1}{x_{k-1}}=\frac{\mathrm{n}}{n+\mathrm{k}-1}$， 最小高度为$\frac{1}{x_k}=\frac{n}{n+k}$，因此：

$$\sum\nolimits_{\mathrm{n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1}>S(2)>\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \Rightarrow \sum\nolimits_n-\sigma_n=\frac{1}{2n}$$



面积积分上限



面积积分下限

Σ_n称为 大和

σ_n 成为小和

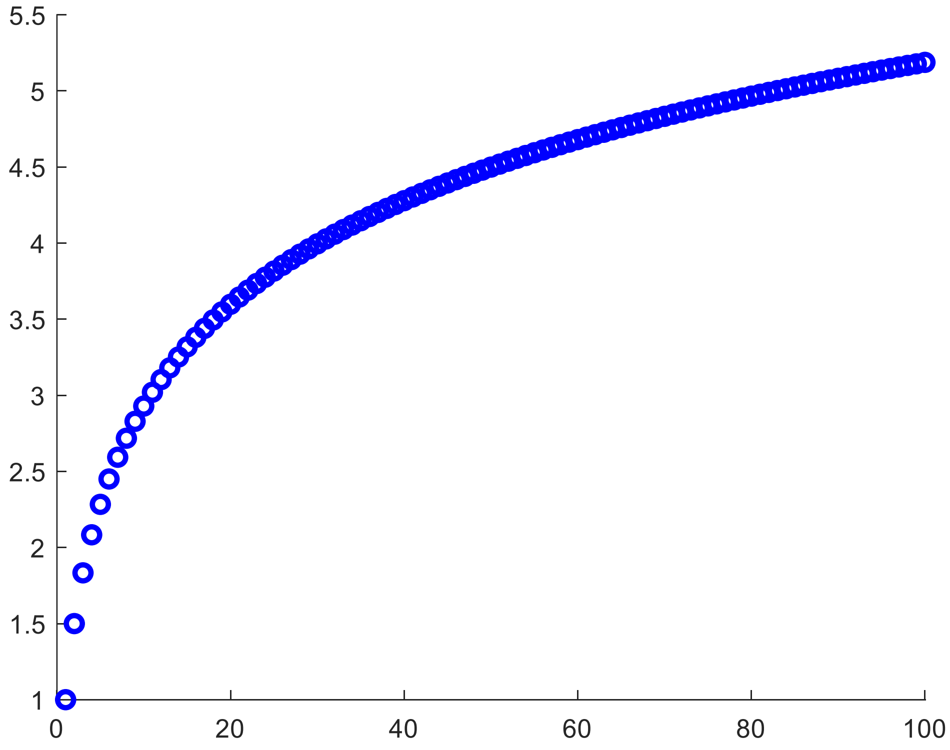
作业1.3：

（1）对$n = 10^m$ $(m = 3,4,5,6)$ 用MATLAB中的sum语句计算“大和” Σ_n 与小和σ_n 以及他们的平均值，观察他们的变化趋势，得出S(2)的近似值。再用求积分语句计算S(2), 将两者的结果进行比较。

（2）画出函数$S(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ 在区间$[0.1, 10]$上的图像，并利用牛顿切线法求解该函数的根，观察与自然对数有何关系？

4.调和数列

自然数的倒数组成的数列：$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ ➡ $H(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$



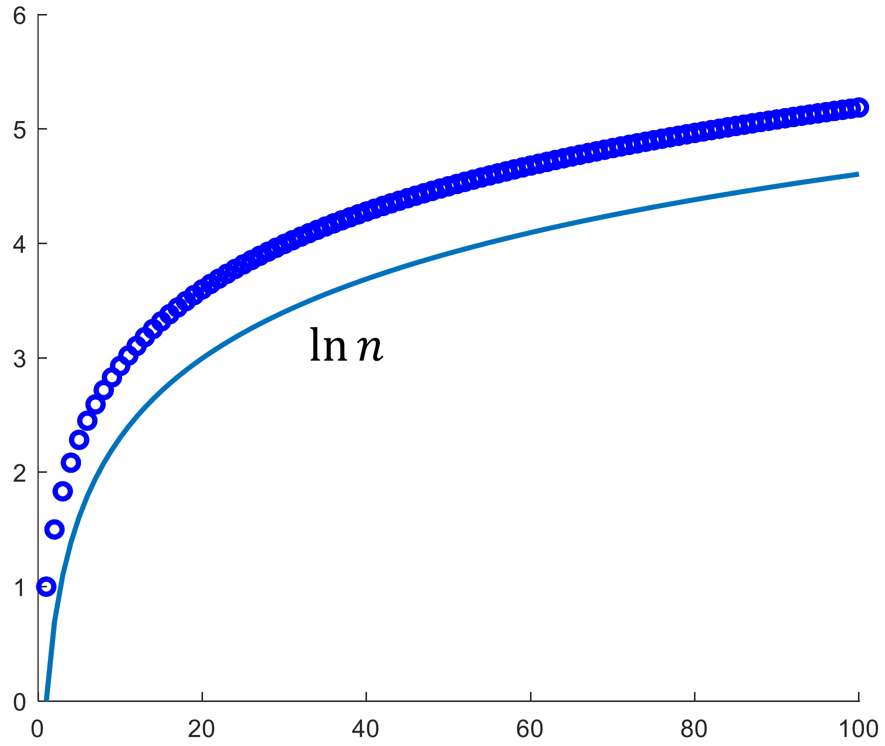

```
figure(1)
n = 100;
a = 0;
for i = 1:1:n
    a = a+1/i;
    hold on
    plot(i,a,'bo',LineWidth=2.0);
end
```

假如将它们依次连接成光滑曲线，像是什么函数图像？

4.调和数列

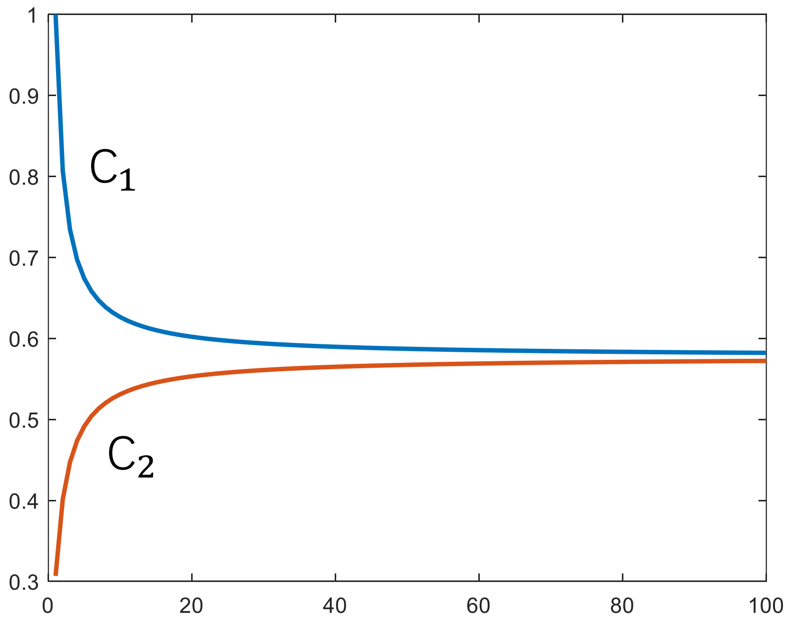
观察发现点集$t = \big(n, H(n)\big)(1 \le n \le 100)$连成的曲线与 $y = \ln(x)$ 的曲线

并不重合，但是趋于平行?



$C(\mathrm{n}) = H(n) - \ln n$

$\mathrm{C}_1 = (n, H(n) - \ln n)$ $\mathrm{C}_2 = (n, H(n) - \ln(n+1))$

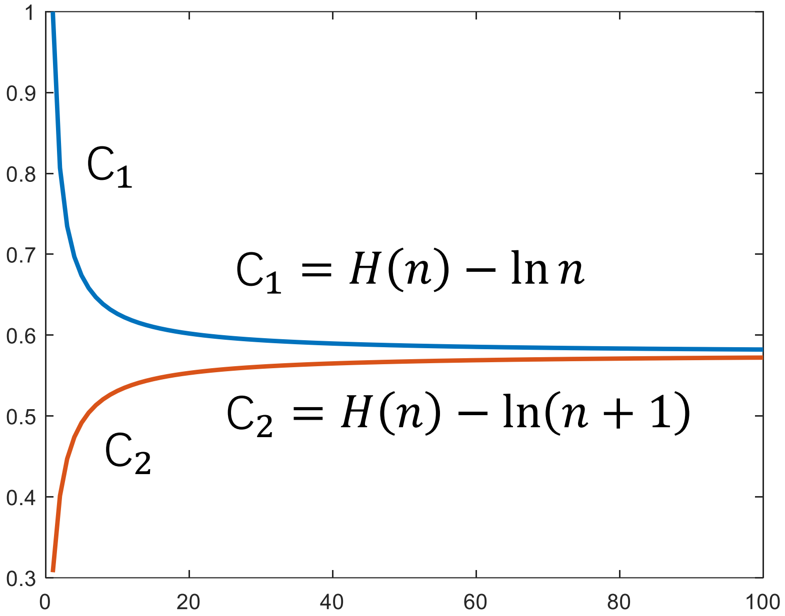


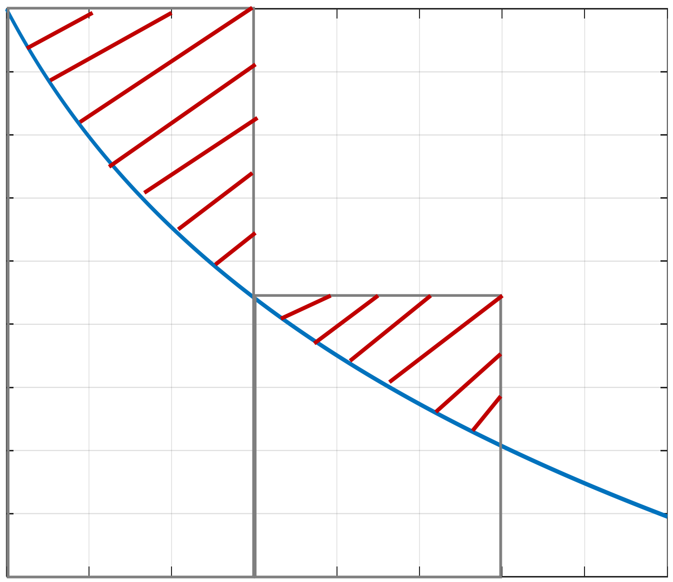
欧拉常数

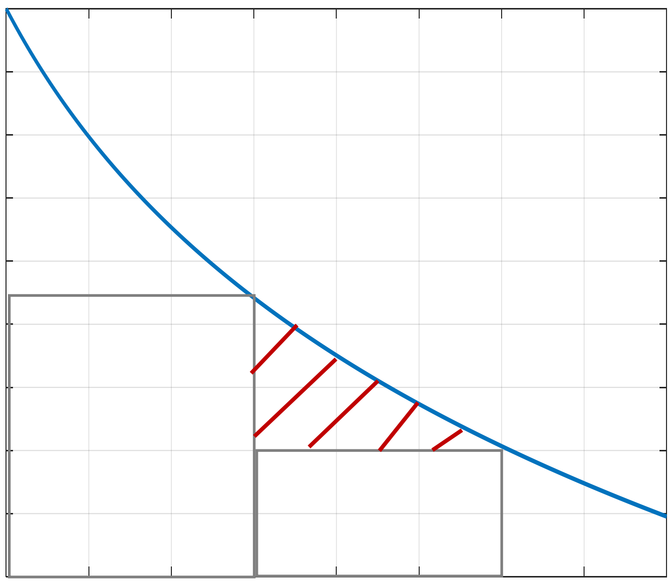
4.调和数列

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$ =0.5772156649

由于当$n\to\infty$时，$C_1 - C_2 = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$趋于0，因此$C_1, C_2$趋于同一个极限。







总结

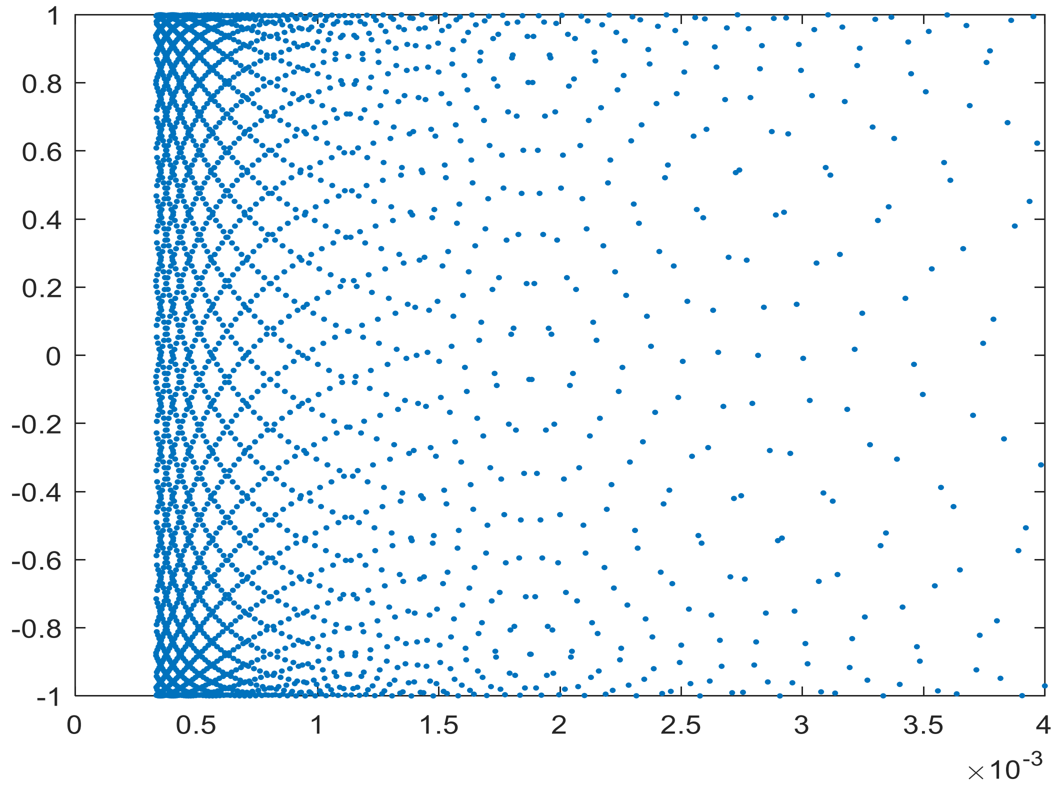
- 微积分基础
  - 函数及图像
    - 泰勒级数
    - 函数的升降零点与极值
    - 正弦函数的叠加
    - 无极限的函数列
    - 无穷乘积
  - 数e
  - 积分与自然对数
  - 调和数列

作业1.1：

- 设$f_k(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.对n = 3,4,5,6,7,依次实现牛顿切线法求出$f_k(x)$ 在$x = 3$附近的零点。并观察随着n的增加，所求出的零点有何变化趋势？有何道理？

作业1.2：

- 判断一点$A_k(\frac{1}{k}, \sin k)$距离最近的是哪一点？
- 根据最近点绘制一系列的曲线



作业1.3：

（1）对$n = 10^m$ $(m = 3,4,5,6)$ 用MATLAB中的sum语句计算“大和” Σ_n 与小和σ_n 以及他们的平均值，观察他们的变化趋势，得出S(2)的近似值。再用求积分语句计算S(2), 将两者的结果进行比较。

（2）画出函数$S(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ 在区间$[0.1, 10]$上的图像，并利用牛顿切线法求解该函数的根，观察与自然对数有何关系？

Q&A?

下节课内容

实验二： 圆周率π的计算

翟晓雅

Email: xiaoyazhai@ustc.edu.cn

Homepage: https://xiaoyazhai.github.io/

Lab: http://gcl.ustc.edu.cn/