中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

数学实验

实验四：数列与级数

翟晓雅

Email: xiaoyazhai@ustc.edu.cn
Homepage: https://xiaoyazhai.github.io/

实验目的

- 进一步理解极限概念
- 探索发现数列与级数的规律及其极限状态的性质

无穷数列&无穷级数

- 无穷数列：按照一定的顺序排列的一串数字

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \qquad (1)$$

- 无穷级数：用无穷项数字构成的和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad (2)$$

无穷数列&无穷级数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \qquad (1)$$

$$S_M = \sum_{n=1}^{M} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_M \qquad (2)$$

- 给定一个无穷级数(2),它唯一确定了一个无穷数列

$$S_1, S_2, S_3, \cdots$$

- 反过来，给定一个无穷数列（1），它也唯一确定了一个无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$b_n = a_1, b_n = a_n - a_{n-1}$$

无穷数列&无穷级数

对于给定的无穷数列$\{a_n\}$，大家比较关心的问题有哪些?

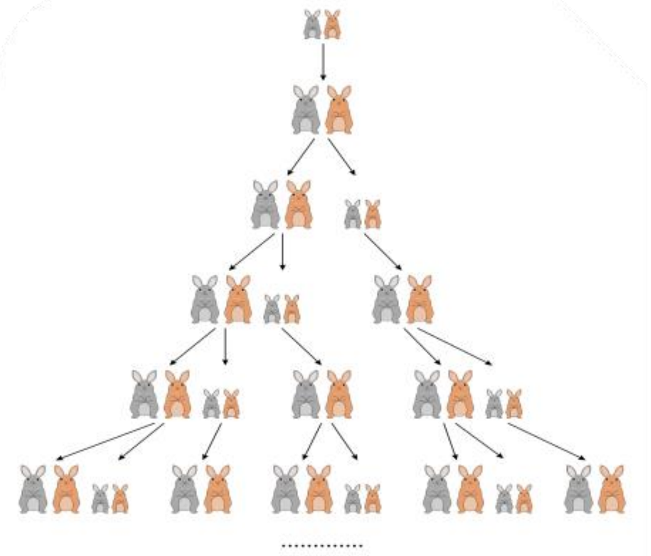
- 数列有什么规律和性质?
- 数列的极限是什么?
- 极限是否是一个有限的数字? 还是无穷大? 抑或根本不存在?
- 如果极限是无穷大，无穷大的阶数是多少?
- 如果数列的极限根本不存在，那它在无穷大的极限状态是怎么样的?

1. Fibonacci数列

- Fibonacci数列经常以著名的养兔子问题提出来。

某人养了一对兔子（公母各一只）。一个月后，这对兔子生了一对小兔子。以后每月，每对成熟（一个月以上）的兔子都生育一个小兔子。假设兔子不会死亡，问一年后有多少对兔子？（**兔子数列**）

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144…



十一月二十三日是斐波那契日

1. Fibonacci数列

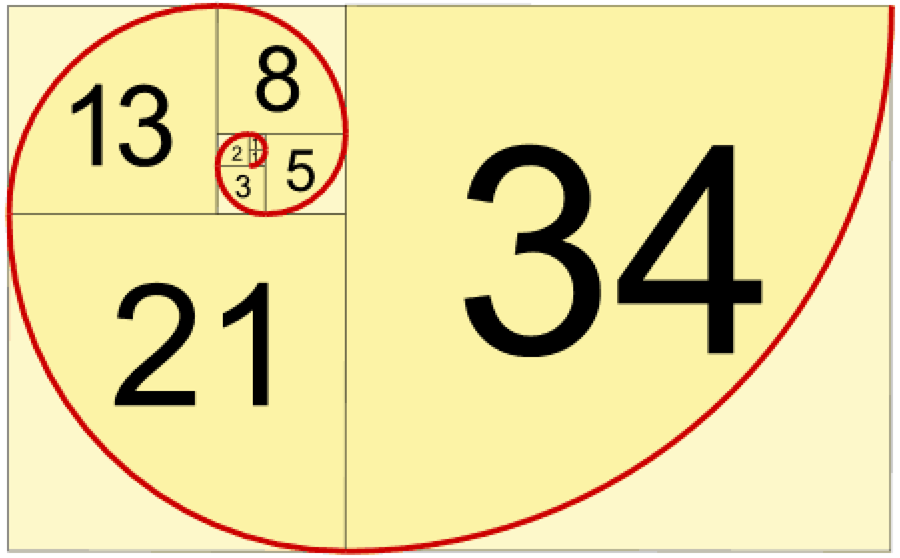
- Fibonacci不是第一个发现这数列的人，很久以前印度已经知道这个数列了!
- Fibonacci的真名是列奥纳多，公元 1170 到 1250 活于意大利。

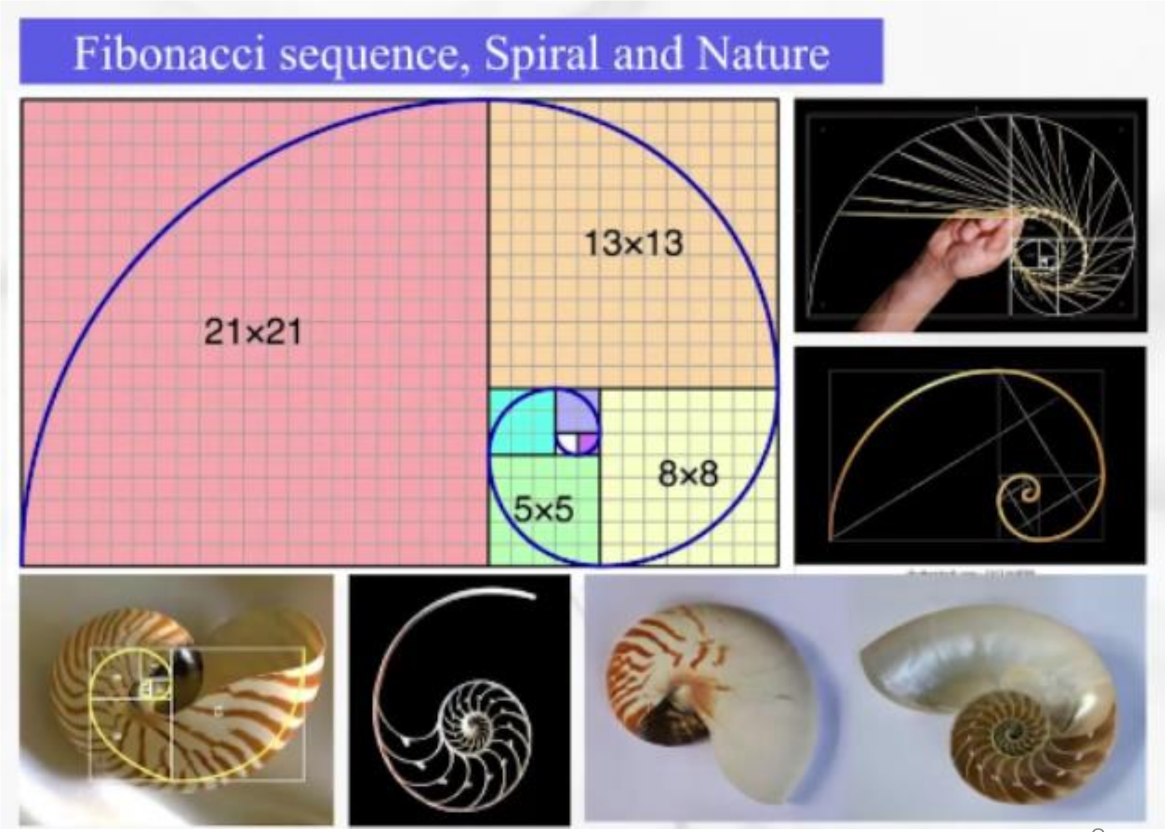
"斐波那契" 是别名，意思是 "波那契的儿子"。

- 除了斐波那契数列以外，他也在欧洲广泛推广使用阿拉伯数字（就像我们想在用的数字 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9）来代替罗马数字（I、II、III、IV、V 等等）。这样以后写数字就简单多了!

1. Fibonacci数列

- 用这些数作为边长来画正方形，就得到漂亮的螺旋图象：

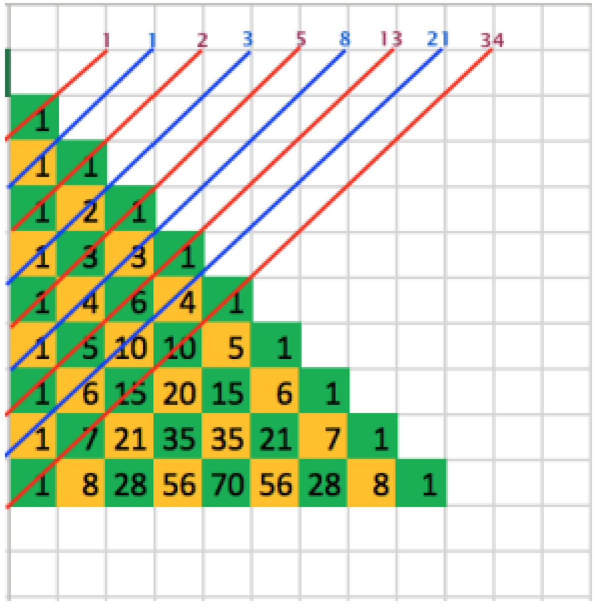




1. Fibonacci数列

- 杨辉三角形是出现在概率论、组合学和代数中的二项式系数的三角形数组。

斐波那契数列与杨辉三角形（即，帕斯卡三角形）有关联：杨辉三角形中的对角线之和，是斐波那契数



1. Fibonacci数列

- 给定如下的序列：

n =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	......
x_n =	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	......

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89⋯

- 写出递推关系式：

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

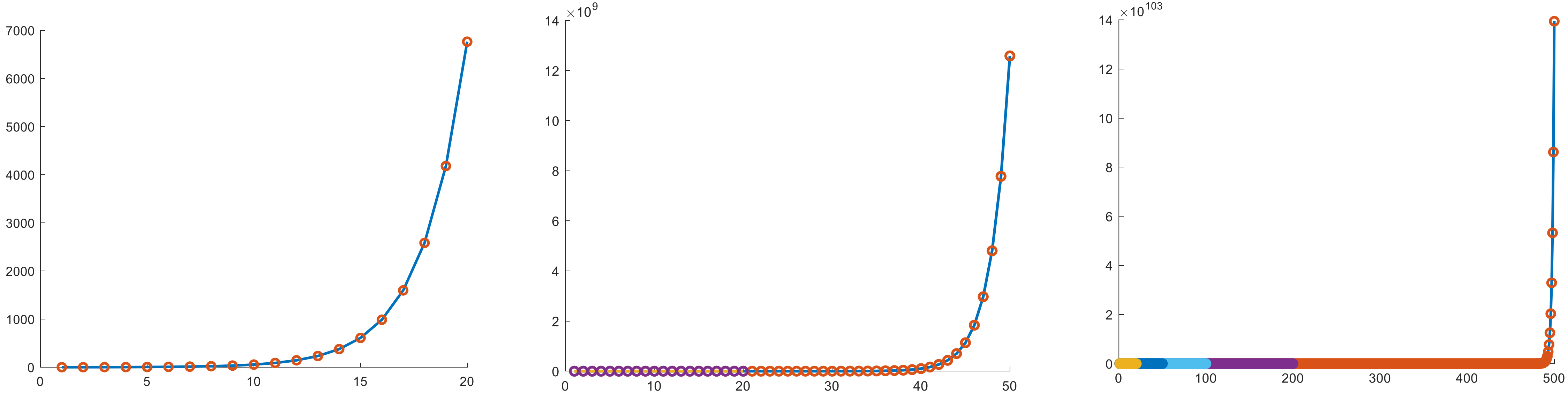
$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 1$$

1. Fibonacci数列

MATLAB
fibonacci(N)

分别取N = 20，50，100，200，500。观察Fibonacci数列的折线图。Fabonacci数列是否单调递增？是否趋于无穷？增加的速度是变化了还是变慢了？怎么证实你的观察？



1. Fibonacci数列

利用公式 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ 容易得到

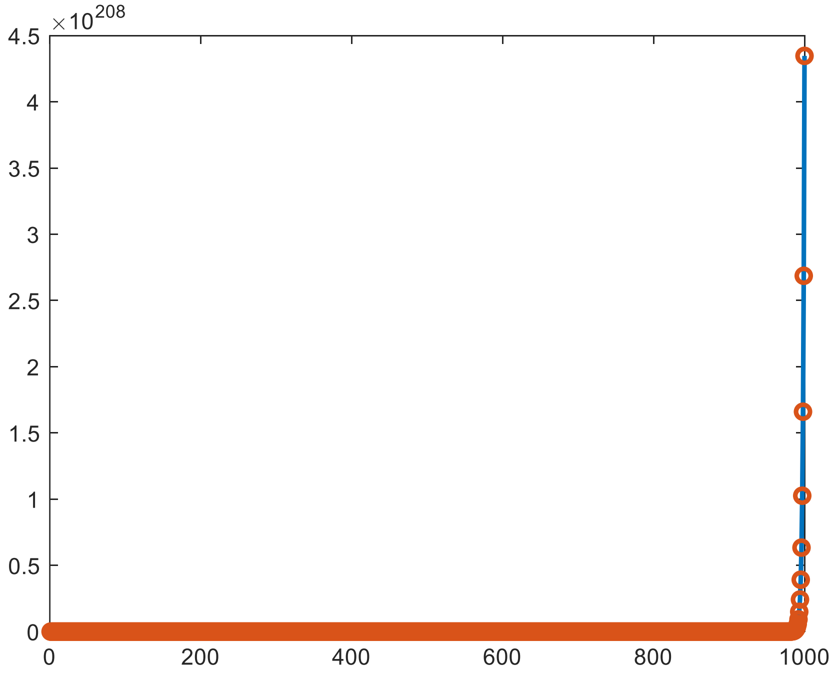
$$3/2F_{n+1}<F_{n+2}=F_{n+1}+F_n<2F_{n+1}$$

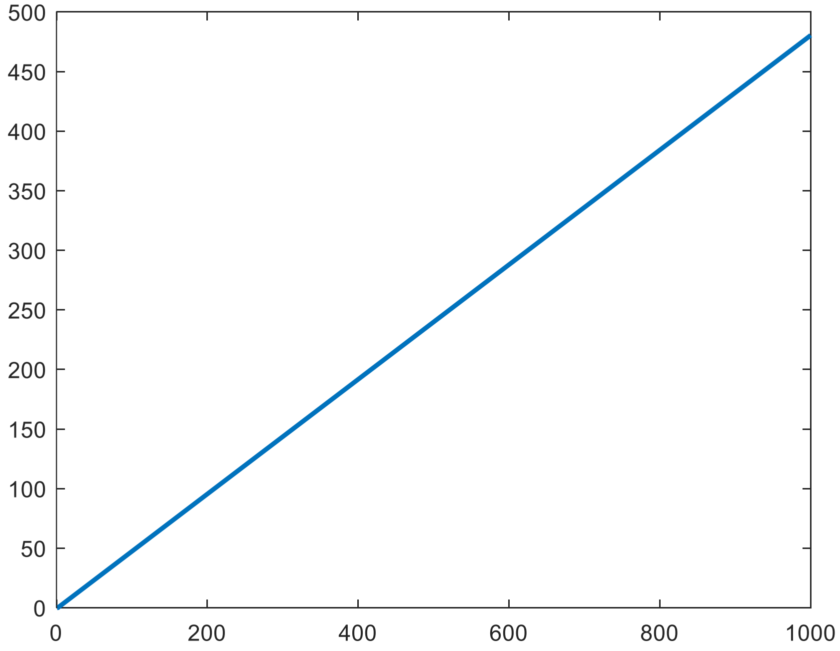
因此， F_n的阶应该在$\left(\frac{3}{2}\right)^n$与$2^n$之间。为进一步研究Fibonacci数列$F_n$ 的特性，我们将F_n 取对数（指自然对数），在直角坐标系中画出顺次连接点$(n,\ln(F_n))$.

1. Fibonacci数列

分别取N = 1000, 2000， 5000， 10000， 用直线去拟合数据$(n, \log(F_n))$, n=1,2,⋯,N。

注意观察$\log(F_n)$ 的线性项的系数，他与黄金分割有何联系？



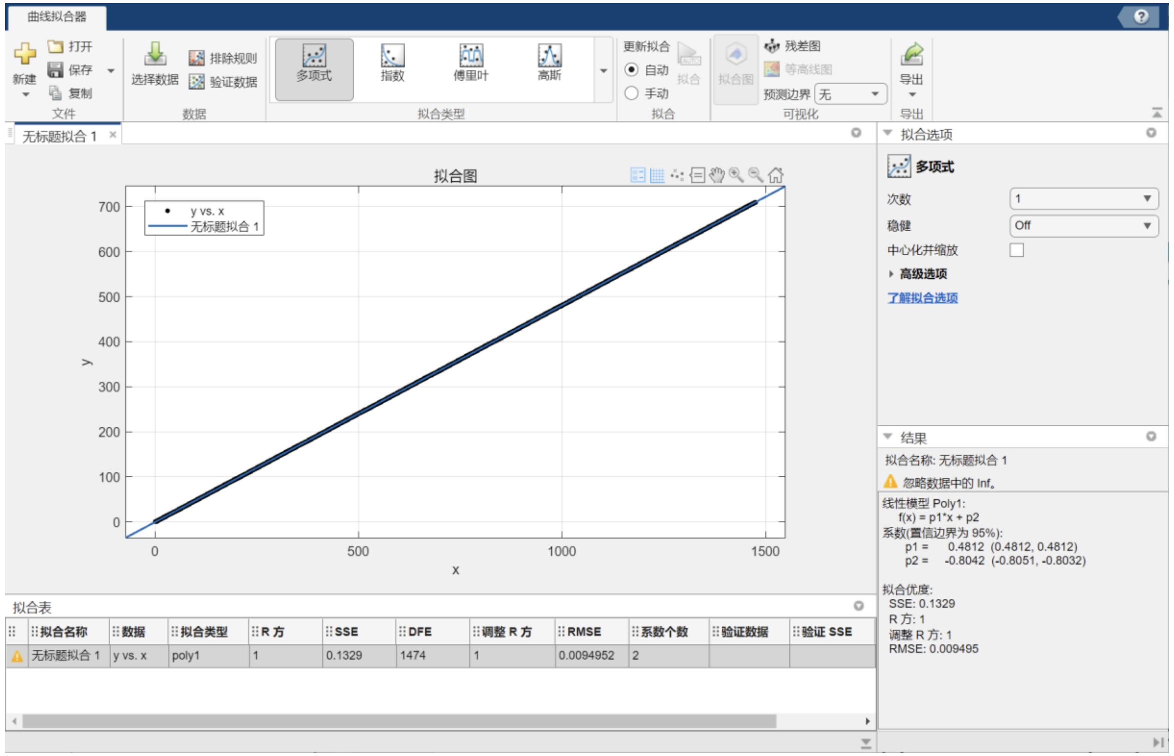


1. Fibonacci数列

MATLAB
cftool

$$cftool([1\!:\!n], \log(Fabonacci))$$

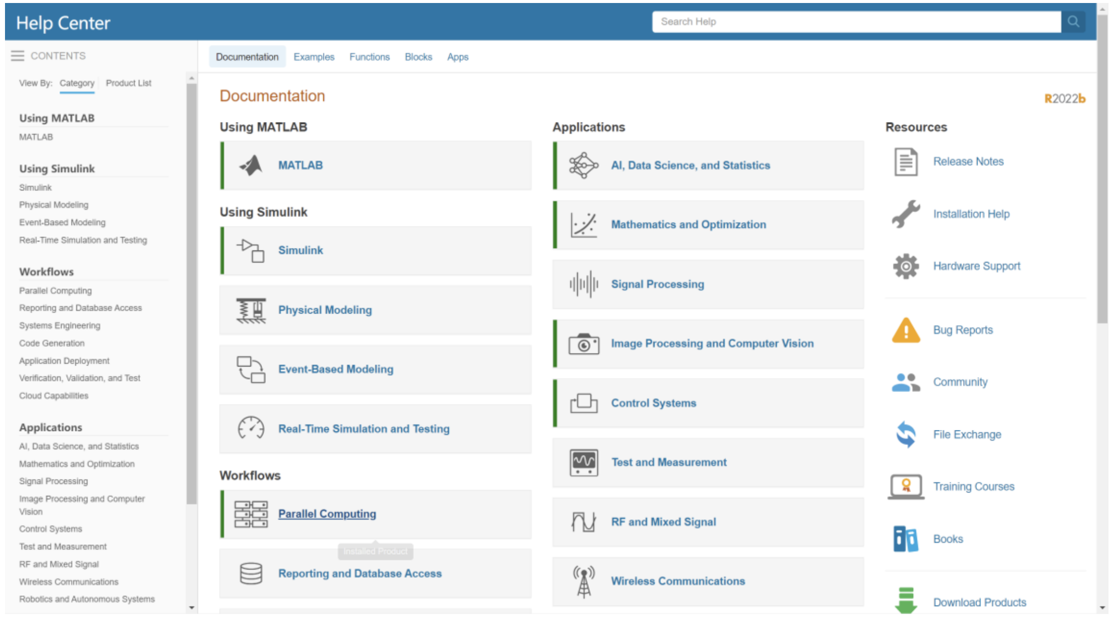
```matlab
%% 1 Fabonacci 数列
n=2000;
a = 1;
c = 0;
Fabonacci = zeros(n,1);
Fabonacci (1) = 1;
Fabonacci (2) = 1;
for i=3:1:n
        Fabonacci(i) = Fabonacci(i-1)+Fabonacci(i-2);
end
figure(1)
plot([1:n],Fabonacci,'LineWidth',2.0);
hold on
plot([1:n],Fabonacci,'o','LineWidth',2.0);

figure(2)
plot([1:n],log(Fabonacci),'LineWidth',2.0);
```



1. Fibonacci数列

分别取N = 1000, 2000， 5000， 10000， 用直线去拟合数据$(n, \log(F_n))$, n=1,2,⋯,N。

注意观察$\log(F_n)$ 的线性项的系数， **他与黄金分割有何联系**？



MATLAB中的拟合函数:

(1) 线性拟合函数： regress()

(2) 多项式曲线拟合函数： polyfit()

(3) 多项式曲线求和函数： polyval()

(4) 多项式曲线拟合的评价与置信区间函数： polyconf()

1. Fibonacci数列

- 1611年，著名天文学家开普勒在《Strena seu de Nive Sexangula (六角雪花) 》一书中指出：斐波那契数列收敛于黄金分割数：

$$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

当数列趋于无穷大时，两个连续的斐波那契数的比无限接近黄金分割比，即1.6180339887498948482...

1. Fibonacci数列

- 两个连续的斐波那契数越大，它们的比就越接近黄金比例：

以1，1为初始：

A	B	B / A
2	3	1.5
3	5	1.666666666......
5	8	1.6
8	13	1.625
......	......	......
144	233	1.618055556......
233	377	1.618025751......
......	......	......

随机以192，16为初始：

A	B	B / A
192	**16**	0.08333333......
16	208	13
208	224	1.07692308......
224	432	1.92857143......
......	......	......
7408	11984	1.61771058......
11984	19392	1.61815754......
......	......	......

有科学家推测，斐波那契斜列螺旋是圆锥面上全同单元的密堆积，这样有利于植物种子堆积、繁衍后代。所以，大自然中蕴含着无穷的奥秘，要学会用数学、物理的眼光去看她。洞察自然的奥秘，是人类对自然的礼赞。

1. Fibonacci数列

Fibonacci数列的通项

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)$$

Fibonacci数列趋于无穷的阶为$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

1. Fibonacci数列

这是斐波那契数列：

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	……
$x_n =$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	……

这是个有趣的规律：

- 留意 $\mathbf{x_3 = 2}$。每 **3**个数是 **2** 的倍数（2、8、34、144、610 ……）
- 留意 $\mathbf{x_4 = 3}$。每 **4**个数是 **3** 的倍数（3、21、144 ……）
- 留意 $\mathbf{x_5 = 5}$。每 **5**个数是 **5** 的倍数（5, 55, 610 ……）

依此类推。（每 **n**个数是 $\mathbf{x_n}$ 的倍数）。

1. Fibonacci数列

1/89 = 0.011235955056179775......

留意头几个小数位（0、1、1、2、3、5）就是斐波那契数列。

其实所有**的小数位**都是，不过多于一个数位的数（13、21 等等）是**重叠**的，像这样：

0.0
0.01
0.001
0.0002
0.00003
0.000005
0.0000008
0.00000013
0.000000021
...... 等等 ......

0.011235955056179775...... = 1/89

1. Fibonacci数列

练习：取一整数m（如m=51），将Fibonacci数列模m得到一周期数列，将该周期数列的值作为高音，编程演奏它，取不同的m，或将几段合并，感受旋律的变化。

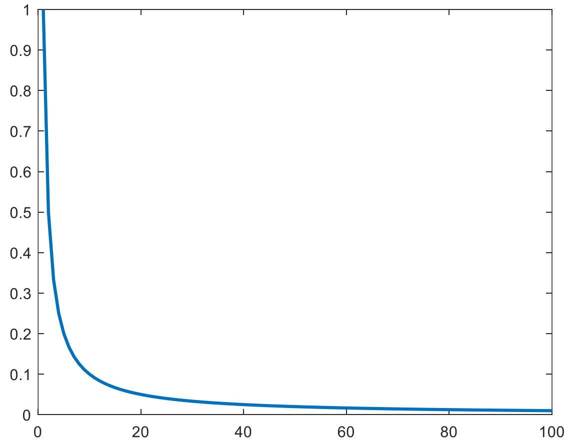
2. 调和级数

无穷级数，当a>1时收敛，当$a \leq 1$时发散。特别地，当a=1时，为调和级数。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

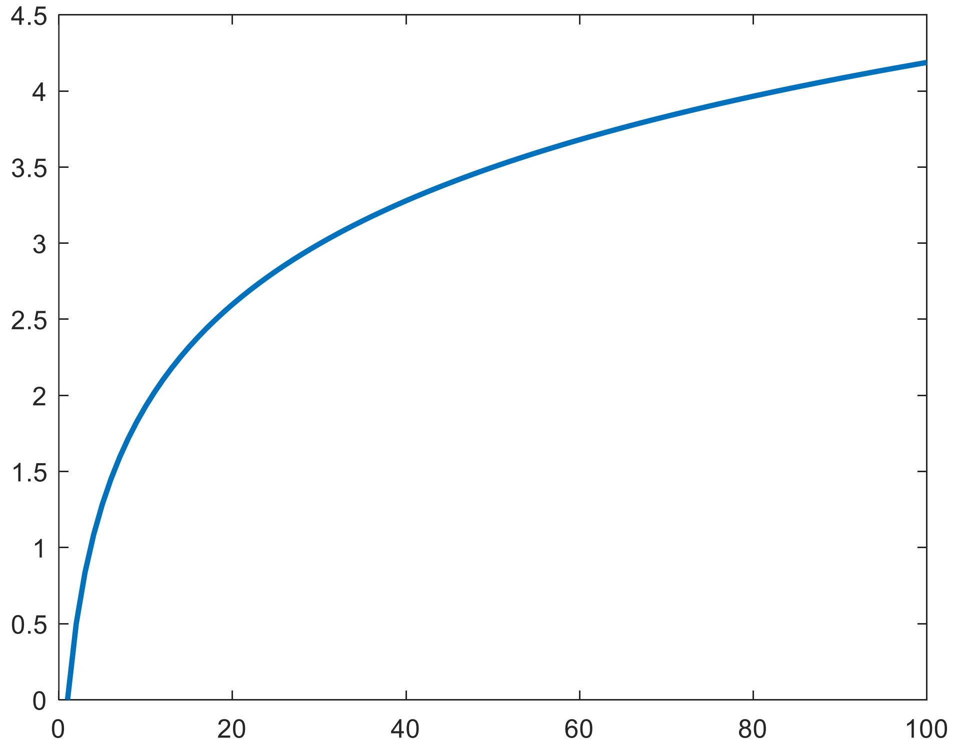
思考：调和级数发散到无穷的速度有多快？或者说以下数列趋于无穷的速度有多快？

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$



2. 调和级数

为了验证其趋于无穷的速度，一个直观的方法画出由点(n, S_n)构成的折线图

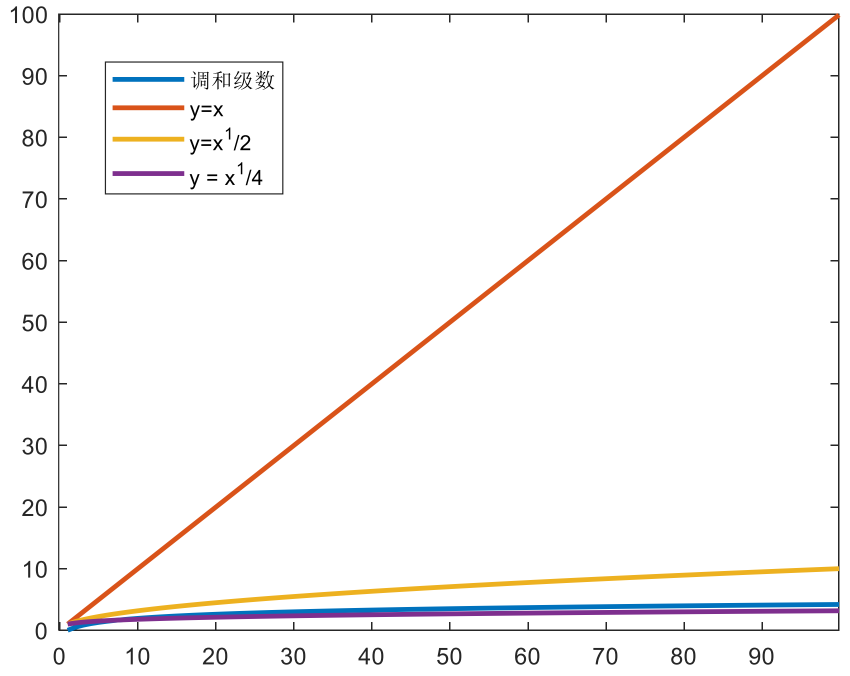


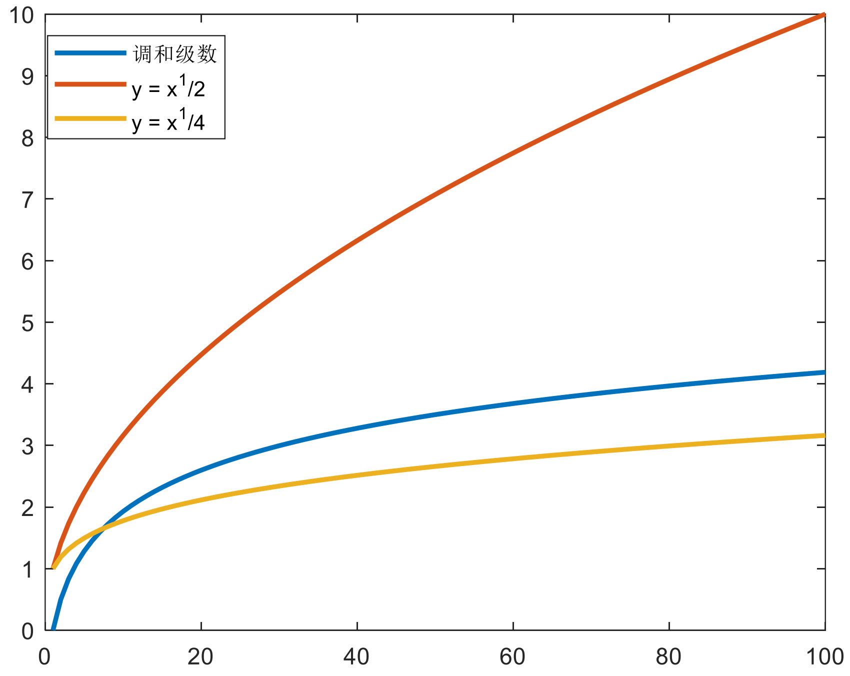

```
% 2. 调和级数
n = 100;
sum(1) = 0;
for i=2:1:n
    sum(i) = sum(i-1)+1./i;
end
figure(1)
x = [1:n];
plot(x,sum,'LineWidth',2.0);
```

2. 调和级数

MATLAB
sqrt
nthroot

将上述的图形与$y = x, y = \sqrt{x}, y = \sqrt[4]{x}$做比较，谁发散的比较快？





思考：到底以什么样的速度发散？

2. 调和级数

对于充分大的一系列n, 计算$S_{2n}-S_n$,你能否猜出其当n趋于无穷的极限?

更一般地， $S_{2^k n}-S_n$趋于无穷的极限是什么?

反过来，固定n, 让k趋于无穷，$S_{2^k n}$趋于无穷的速度是什么？能否由此写出S_n当n趋于无穷的收敛阶?

3. 3n+1问题

3n+1问题： 任给自然数n，如果n是偶数，则将n除以2； 如果n是奇数，则将n乘以3加1。则得到一个无穷数列：

5→16→8→4→2→1

上述数列可递归定义为：

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2}, & \text{如果}n\text{为偶数}\\ 3a_n+1, & \text{如果}n\text{为奇数}\end{cases}$$

3. 3n+1问题

对于初始值n=1,2,3,4,5, 相应的数列是

1→4→2→1→4→2→1→…

2→1→4→2→1→4 →2→1→…

3→10→5→16→8→4 →2→1→…

4→2→1 →4→2→1→ …

5→16→8 →4→2→1→ …

对于任意的初值n， 情况会如何?

3. 3n+1问题

编写一个数列a_n的程序，对任意输入的初值n，观察从n开始产生的数列最后是否都落于4→2→1的循环中？在落于4→2→1的循环之前有什么规律？

3n+1问题起源于20世纪50年代，又被称为Syracuse猜想，角谷猜想，Collatz问题，Hasse问题，Ulam问题，Thwaites猜想等等。

对于$n \leq 137 \times 2^{50}$，猜想仍然成立

3. 3n+1问题

编写一个数列a_n 的程序，对任意输入的初值n，观察从n开始产生的数列最后是否都落于4→2→1的循环中？在落于4→2→1的循环之前有什么规律？

```
%% 3n+1问题
iMax = 100;
n = randi(iMax)
vec(1) = n;
i=1;
while vec(i)~=1
    if mod(vec(i),2)==0
        vec(i+1) =vec(i)/2;
    else
        vec(i+1) = 3*vec(i)+1;
    end
    i = i+1;
end
```

```
n =

   17


ans =

  列 1 至 11

   17    52    26    13    40    20    10     5    16     8     4

  列 12 至 18

    2     1     4     2     1     4     2
```

3. 3n+1问题

对于$n = 2^k$有

$$2^k \to 2^{k-1} \to \cdots \to 4 \to 2 \to 1$$

对于$n = 2^k l$有

$$2^k l \to 2^{k-1} l \to \cdots \to 2l \to l$$

一个有意义的观察：如果对于每个n，数列中某一项小于n，则猜想成立

3. 3n+1问题

对n=4k+1, 4k+3, 8k+1, 8k+3, 8k+5⋯等奇数，观察数列中是否会出现小于n的项?

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2}, & \text{如果}n\text{为偶数}\\ 3a_n+1, & \text{如果}n\text{为奇数}\end{cases}$$

为了具象化上述问题，我们引入一些启发式论证……

3. 3n+1问题

将a_n比喻成一个航程，引进一些概念：

航班：从n开始迭代产生的数列（直至1为止）	**航班**：5→16→8→4→2→1
航程：航班的长度	**航程**：5
最大飞行高度：一个航班中的最大数字	**最大飞行高度**：16
保持高度航程：从起点起连续不小于起点的数字的个数	**保持高度航程**：2
航程记录航班：航程大于它前面的航班的航程	**航程记录航班**：$7 \to 16$

$$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

3. 3n+1问题

航程记录航班：航程大于所有它前面的航班的航程

1→4→2→1

2→1→4→2→1

3→10→5→16→8→4 →2→1

4→2→1

5→16→8 →4→2→1

6→3→10 →5→16→8 →4 →2 →1

7 → 22 → 11 → 34 → 17 → 52 → 26 → 13 → 40 → 20 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1

8 → 4→2→1

3. 3n+1问题

奇变换，偶变换：

对于一个固定航班n, 考虑它着陆前的表示状态。

除以2的变换称为偶变换$E(n)$；乘3加1的变换称为奇变换$O(n)$；

7 → 22 → 11 → 34 → 17 → 52 → 26 → 13 → 40 → 20 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1

发现：每一次的奇变换后一定是偶变换，偶变换后不一定是奇变换也可能是偶变换。

3. 3n+1问题

3n+1问题与下列问题等价：

(1) 所有航班的航程有限；

(2) 所有航班的保持高度航程有限

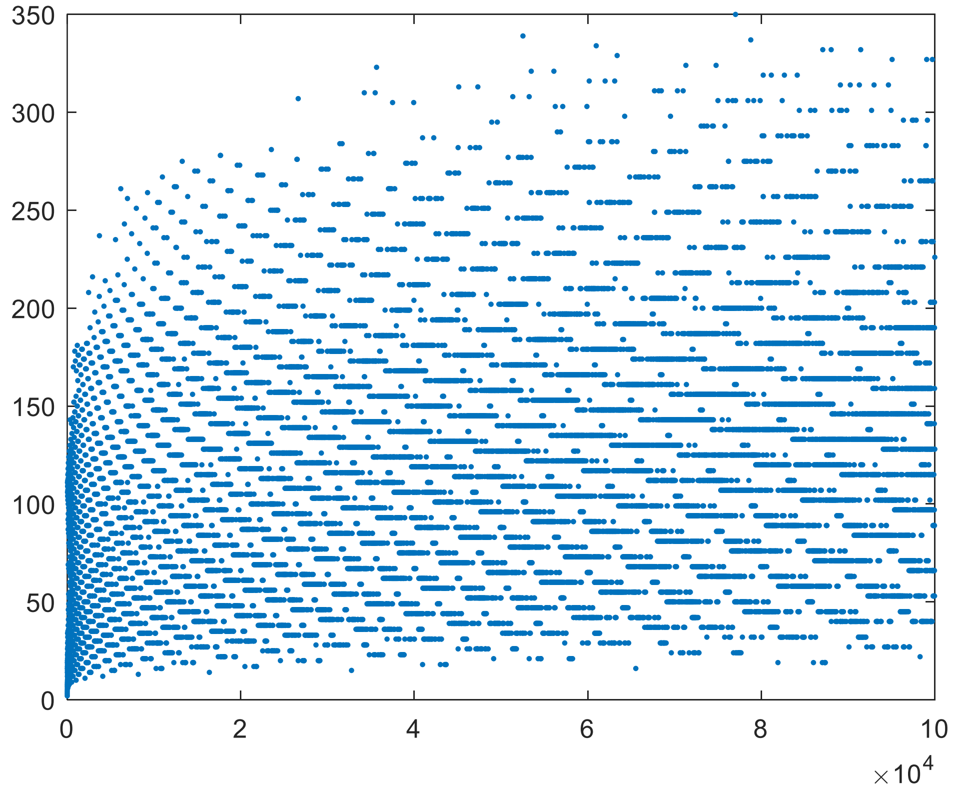
(3) 对所有的n, E(n) 有限

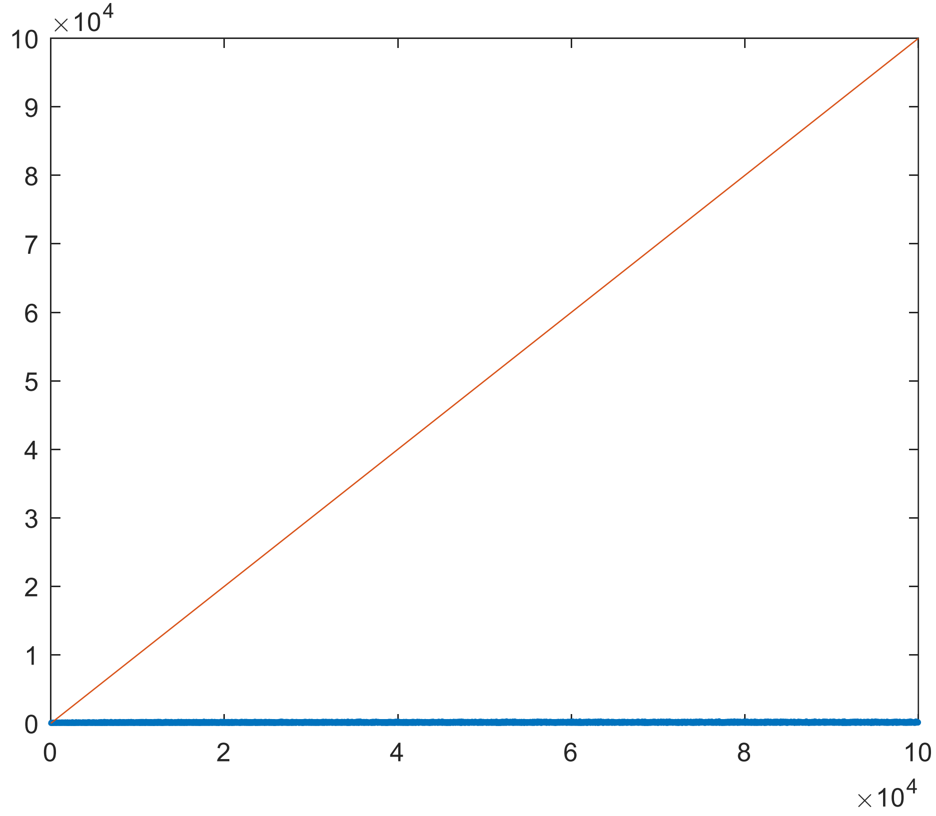
(4) 对所有的n, O(n)有限

3. 3n+1问题

用F(n)表示航班n的航程，F(n) 的上界，与n存在什么样的关系？

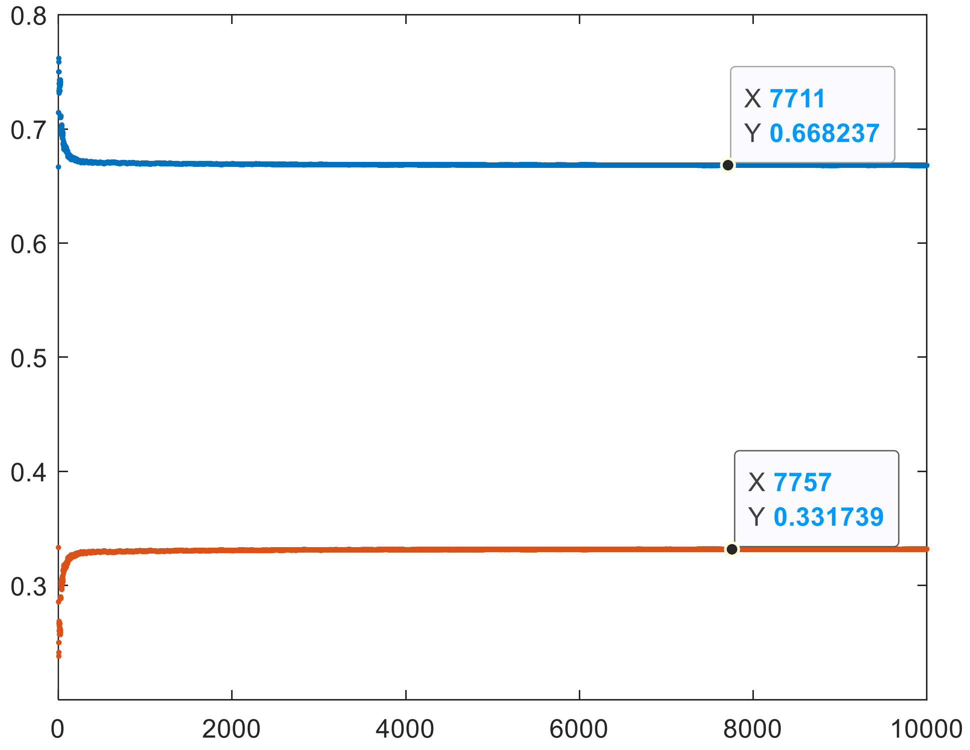
例如：当n适当增大的时候，是否有F(n)<n?





3. 3n+1问题

$O(n)/E(n)$的上界是什么？当n趋于无穷时，$O(n)/E(n)$的极限是否存在？




```
n = 10000;
index_1 = zeros(n,1);
index_2 = zeros(n,1);
m_1 = 0;
m_2 = 0;
for k=1:1:n
    vec(1) = k;
    i=1;
    while i<= 2 || vec(i)~=1
        if mod(vec(i),2)==0
            vec(i+1) =vec(i)/2;
            m_1 = m_1+1;
        else
            vec(i+1) = 3*vec(i)+1;
            m_2 = m_2+1;
        end
        i = i+1;
    end
    index_1(k) = m_1/(m_1+m_2);
    index_2(k) = m_2/(m_1+m_2);
end
plot([1:n],index_1,'.')
hold on
plot([1:n],index_2,'.')
```

3. 3n+1问题

练习1：用G(n)表示航班n的保持高度航程。G(n)的上界是否是clog(n)？其中c是一个常数。

练习2：用T(n)表示航班的最高的飞行高度。T(n)与n的关系如何？例如，是否有$T(n) < Kn^2$？其中K为常数。

3. 3n+1问题

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2}, & \text{如果}n\text{为偶数}\\ 3a_n+1, & \text{如果}n\text{为奇数}\end{cases}$$

发现：每次奇变换之后一定是偶变换，但是每一次偶变换后，可以是奇变换也可以是偶变换。假设这种可能性是一样的（用MATLAB统计实验验证假设是否成立？）

当从某一个n开始，我们考察航班的高度的变化：

（1）奇变换后做偶变换的结果为奇数，可能性为**1/2**, 高度变化为**3/2**

（2）奇变换后做偶变化的结果为偶数，可能性为**1/4**, 高度变化为**3/4**

（3）奇变换后再作三次偶变换，可能性为**1/8**，高度变化为**3/8**

3. 3n+1问题

当从某一个n开始，我们考察航班的高度的变化：

（1）奇变换后做偶变换的结果为奇数，可能性为1/2, 高度变化为3/2

（2）奇变换后做偶变化的结果为偶数，可能性为1/4, 高度变化为3/4

（3）奇变换后再作三次偶变换，可能性为1/8，高度变化为3/8

因此，总的平均高度变化为

$$h = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{3}{4}\right)^{1/4}\left(\frac{3}{8}\right)^{1/8}\ldots = {}^{3}/_{4}$$

因此，航班高度是下降的！

3. 3n+1问题

关于3n+1问题的研究，得到了一些理论结果：

（1）R.Terra和C.Evertt证明了：几乎所有的航班都会下降到起点一下。

（2）存在常数c，当n足够大时，在比n小的航班中，能够在1上着陆的航班个数大于或等于n^c。如果c=1，猜想得到证明。

3. 3n+1问题

3n+1问题有各种变化与推广

（1）推广到负数，迄今发现了三个不同的循环：

$$-1 \to -2 \to -1$$

$$-5 \to -14 \to -7 \to -20 \to -10 \to -5$$

$$-17 \to -50 \to -25 \to -74 \to -37 \to -110 \to -55 \to -164 \to -82 \to -41$$
$$\to -122 \to -61 \to -182 \to -91 \to -272 \to -136 \to -68 \to -34 \to -17$$

是否有更多的循环？

3. 3n+1问题

5n+1问题有各种变化与推广

发现了三个不同的循环:

$$6 \to 3 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \to 6$$

$$13 \to 66 \to 33 \to 166 \to 83 \to 416 \to 208 \to 104 \to 52 \to 26 \to 13$$

$$17 \to 86 \to 43 \to 216 \to 108 \to 54 \to 27 \to 136 \to 68 \to 34 \to 17$$

练 习

设$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n},a_1=1$，研究数列$a_n$的极限行为。

(1)在平面上顺次连接点$(n,a_n),n=1,2,\ldots,2000$的折线图

(2)根据上述图形，你认为数列a_n的极限是什么?

(3)用一个恰当的函数y=f(x)去拟合上述图形

作业4.1

研究数列$a_n = \sin n$ 的极限状态的规律

(1) 在平面上画出点列$(n, a_n), n = 1,2, \dots, N$; (如$N = 5000$) ; 根据该图形，你认为数列$a_n$ 的极限是否存在?

(2) 能否从上述图形中观察到点列的分布有什么规律?

(3) 任取区间$[a, b] \subset [-1,1]$，画出数列中落在区间[a,b]中的点，将区间[a,b]放大并取不同的N，观察落在区间[a,b]中的点集有何变化?

课堂总结

- 数列与级数
  - 无穷数列&无穷级数
  - Fibonacci数列
    - 黄金分割
    - 杨辉三角
    - 自然与分形
  - 调和级数
  - 3n+1问题

Q&A?

下节课内容

实验五： 素数

翟晓雅

Email: xiaoyazhai@ustc.edu.cn

Homepage: https://xiaoyazhai.github.io/

Lab: http://gcl.ustc.edu.cn/