#001108

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

数学实验

实验三：最佳分数近似值

翟晓雅

Email: xiaoyazhai@ustc.edu.cn
Homepage: https://xiaoyazhai.github.io/

回顾

- 微积分基础
  - 函数及图像
    - 泰勒级数
    - 函数的升降零点与极值
    - 正弦函数的叠加
    - 无极限的函数列
    - 无穷乘积
  - 数e
  - 积分与自然对数
  - 调和数列

回顾

- 圆周率的计算
  - 割圆术
  - 无穷级数或无穷乘积
  - 泰勒级数法
  - 数值积分方法
  - 蒙特卡罗法

回顾圆周率

祖冲之给出了π的前8位有效数字，这个成果保持领先了1000多年。

他还给出了π的分数近似值$\frac{355}{113}$

π 是无理数，任何一个无理数都不可能用分数$\frac{p}{q}$ 来做α 的准确表示

$$\Delta = |\pi - \frac{p}{q}|$$

回顾圆周率

用两个分数作为圆周率的近似值，

- 一个是$\frac{22}{7}$，叫“**疏率**”，约等于3.142857；
- 一个是$\frac{355}{133}$，叫“**密率**”，约等于3.1415929。

$\pi - \frac{355}{113}$ <0.0000003

1. 分数对无理数的最佳逼近

设a是给定得无理数，怎样的分数$\frac{P}{Q}$能够称为a 的最佳分数逼近?

最佳的标准是什么?

既要误差小，又要分母小

如果有一个分数$\frac{p}{q}$的分母$q < Q$并且误差$\left|a-\frac{p}{q}\right| \le \left|a-\frac{P}{Q}\right|$，或者分母$q = Q$且误差$\left|a-\frac{p}{q}\right| < \left|a-\frac{P}{Q}\right|$，那么$\frac{p}{q}$是比$\frac{P}{Q}$更佳的分数近似。

1. 分数对无理数的最佳逼近

总结：可以将误差小，分母小的两个标准综合起来，以误差$\Delta = \left|\pi - \frac{p}{q}\right|$与分母q的乘积q$\Delta$为标准来判断分数的近似值的优劣。

qΔ的值越小，$\frac{p}{q}$越优。

还可以进一步强化分母小这一要求，用$q^2\Delta$作衡量标准，$q^2\Delta$值越小越优。

1. 分数对无理数的最佳逼近

编程练习：取n=10000. 让分母q依次取遍1到n的整数值。对每一个分母q，将$q\pi$ 四舍五入得到一个整数p作为分子。从而得到分母为q的最接近π 的分数近似值$\frac{p}{q}$.

（1） 从q=1开始用打擂台的方式，决出π 的最佳近似分数

（2）将挑战成功的标准用qΔ 的值来衡量，将历届“擂主”列在一个排行榜中，显示出来。

（3）将挑战成功的标准用$q^2\Delta$ 的值来衡量,选出十个最佳分数近似值。

1. 分数对无理数的最佳逼近

实验之前:

先预测评选结果？你觉得谁将排在第一？是否是$\frac{355}{113}$？

谁将是第二？是否是 $\frac{22}{7}$？

祖冲之的约率与密率是否会脱颖而出？

1. 分数对无理数的最佳逼近

（1） 从q=1开始用打擂台的方式，决出π 的最佳近似分数

```
n=10000;
aa = 0;
for i = 1:1:n
    % i是分母
    p = i;
    % 计算分子
    q = round(p*pi,0);
    if abs(pi-aa) >=abs(pi-q/p)
        aa = q/p;
        newp = p;
        newq = q;
   end
end
```

```
aa =

   3.1416


newp =

        9944


newq =

       31240
```

MATLAB
四舍五入函数：round(x,N)

1. 分数对无理数的最佳逼近

（2）将挑战成功的标准用qΔ 的值来衡量，将历届“擂主”列在一个排行榜中，显示出来。

```
n=10000;
tt = 10;
k=1;
for i = 1:1:n
        % i是分母
        % 计算分子
        p = i;
        q = round(p*pi,0);
        % q\delta
        Qdelta = q*abs(pi-q/p);
        if tt >= Qdelta
                tt(k) = Qdelta;
                newp(k) = p;
                newq(k) = q;
                SimPi(k) = q/p;
                k=k+1;
        end
end
```

```
tt =

    0.4248    0.0278    0.0277    0.0001

newp =

     1     7   106   113

newq =

     3    22   333   355

SimPi =

    3.0000    3.1429    3.1415    3.1416
```

1. 分数对无理数的最佳逼近

（3）将挑战成功的标准用$q^2\Delta$ 的值来衡量,选出十个最佳分数近似值。

```
n=10000;
tt = 10;
k=1;
for i = 1:1:n
    % i是分母
    % 计算分子
    p = i;
    q = round(p*pi,0);
    % q\delta
    Qdelta = q*q*abs(pi-q/p);
    if tt >= Qdelta
        tt(k) = Qdelta;
        newp(k) = p;
        newq(k) = q;
        SimPi(k) = q/p;
        k=k+1;
    end
end
```

```
tt =

    1.2743    0.6120    0.0336

newp =

     1     7   113

newq =

     3    22   355

SimPi =

    3.0000    3.1429    3.1416
```

2. 实数的连分数展开

用大海捞针的“笨”方法, 对每一个分母的分数依次审查，选出最佳分数近似值之外，有没有又快又好的办法?

仍然以π 为例，$\pi = 3.141592653579 \ldots$先找到他的分母为1的最佳近似值，也就是最佳整数近似值显然是3.

已经有了3，则$\pi = 3 + x_1$。 其中$x_1 = 0.0141592653579$. 只需找到x_1 的最佳分数近似值即可。

2. 实数的连分数展开

$x_1 = 0.0141592653579.$ 只需找到x_1 的最佳分数近似值即可

$A_1 = \frac{1}{x_1} = 7.062513305931 \ldots$ 接近整数显然是7

$\pi = 3 + \frac{1}{A_1} \approx 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ ⇒ 祖冲之的约率

2. 实数的连分数展开

为了寻找比$\frac{22}{7}$误差更小的分数近似值，只需寻找比整数7更接近A_1的分数来作为A_1的近似值。由于$A_1 = 7 + x_2$, 其中$0<x_2 = 0.062513305931\ \ldots < 1.$先找$A_1 = \frac{1}{x_2} = 15.996594406685\cdots$的最佳整数近似值，显然是16。于是，

$$A_1 = 7 + \frac{1}{A_2} \approx 7 + \frac{1}{16} = \frac{113}{16}$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{A_1} = 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{A_2}}$$

$$\approx 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{16}} = 1+ \frac{16}{113}$$

$$= \frac{355}{113}$$

⇨ 祖冲之的密率

2. 实数的连分数展开

一般地，对任何一个正实数a, 都可以用同样的方法进行展开：

（1）取$a_0 = [a]$. ($[a]$表示不超过a的最大整数.) 设$x_1 = a - a_0$

当$x_1 = 0$ 时算法终止，此时$a = a_0$

否则$0 < x_1 < 1, A_1 = \frac{1}{x_1} > 1$, 此时$a = a_0 + \frac{1}{A_1}$

2. 实数的连分数展开

（2）一般地，设已经算出了非负整数a_0,正整数$a_1, \ldots, a_{k-1}$ 及实数$A_k > 1$使

$$a = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots \atop \ddots \; \ldots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{A_k}}}}$$

为了书写方便，将上式分式写为

有限连分数

$$a = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_k}$$

2. 实数的连分数展开

（3）无限连分数：如果a是无理数，则以上过程可以无限进行下去，a可以被展开成无限连分数

$$A_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_0 + \frac{1}{a_1 +}\,\frac{1}{a_2 +}\,\frac{1}{a_3 +}\cdots\frac{1}{a_{n-1} +}\,\frac{1}{a_n}\right)$$

$A_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ 称为An的一个渐进分数。

如果a是有理数，则以上过程会在某一步停止，可以被展开成有限连分数。

2. 实数的连分数展开

如果a是有理数，则以上过程会在某一步停止，可以被展开成有限连分数

$$A_{\mathrm{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(a_0 + \frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\frac{1}{a_{n-1}+}\frac{1}{a_n}\right)$$

$A_n = \frac{p_n}{q_n}$ 称为A_n的一个**渐进分数**，它们都是α的最佳分数近似值

上面所说的求α的连分数展开式的递推方法适宜用计算机进行。如果手工进行的话，就算$\frac{1}{a_k}$这一步的计算量过大！

2. 实数的连分数展开

带余除法：设a 是实数，β 是正实数，q是使$q\beta \leq \alpha$ 的最大整数，$0 \leq r = \alpha - q\beta < \beta$. 则称用$\beta$ 对α 作带余除法得到商q和余数r.

辗转相除法：约定$r_{-1} = \alpha, r_0 = 1$. 对每个非负整数k，设已经得到了$r_i(-1 \leq i \leq k)$和整数$a_i(0 \leq i \leq k-1)$. 当$r_k > 0$时，用r_{k-1}除以r_k 作带余除法，得到整数商a_k和余数$r_{k+1}, 0 \leq r_{k+1} < r_k$； 当$r_k = 0$时递推过程终止。

3. 二元一次不定方程的整数解

问题：设a, b, c 是整数，求二元一次方程$ax + by = c$的整数解。

不妨设a,b 都不为0，否则方程很容易求解。必要时交换未知数x,y,可化为$|a| \geq |b|$的情形，并可使$a > 0$

辗转相除法！

4. 乐音的频率比

声音是由振动物体发出的，振动频率越高，音调越高。比如，音乐中：

$$1(do), 2(re), 3(mi), 4(fa), 5(sol), 6(la), 7(si), \dot{1}(do)$$

这8个音（用简谱表示）一个比一个高，它们的频率一个比一个高。

4. 乐音的频率比

问题：已知高八度$\dot{1}$的频率是1的2倍，那么2，3，4，5，6，7的频率分别是1的多少倍呢？

$$1(do),2(re),3(mi),4(fa),5(sol),6(la),7(si),\dot{1}(do)$$

$$\mathbf{1},\quad \mathbf{2^{\frac{2}{12}}},\ \mathbf{2^{\frac{4}{12}}},\ \mathbf{2^{\frac{5}{12}}},\ \mathbf{2^{\frac{7}{12}}},\ \mathbf{2^{\frac{9}{12}}},\ \mathbf{2^{\frac{11}{12}}},\ \mathbf{2}$$

这样一来，各个音的频率都是无理数，但另外一方面，为了使音乐和谐，各音之间的频率比应当是最简单的分数。

4. 乐音的频率比

练习

（1）按照最佳逼近分数的算法，用适当的分数对上述各个音的频率作最佳逼近，重新确定各个音的频率比（以音1的频率为1个单位），使它们都是分母在8以内的分数。

（2）用计算机按照前面的频率($2^{1/12}$的各个次幂或者它们的分数的近似值)产生乐音并在喇叭中播放，从网上下载乐谱，用matlab演奏出来。

4. 乐音的频率比

MATLAB
声音播放函数：sound

- 音乐作为“**波**”的一种，自然可以用正弦波的叠加来模拟，不同的频率可以发出不同频率的音符，所以我们只要用MATLAB生成一系列的正弦函数。

4. 乐音的频率比

音乐主要由音调和节拍组成，所以音乐函数需要两个输入，即音调（tone）和节拍（rythm）

音阶与频率对应关系表

时间常数是按晶体频率 12MHz 计算而得 T 值，即为时间常数值

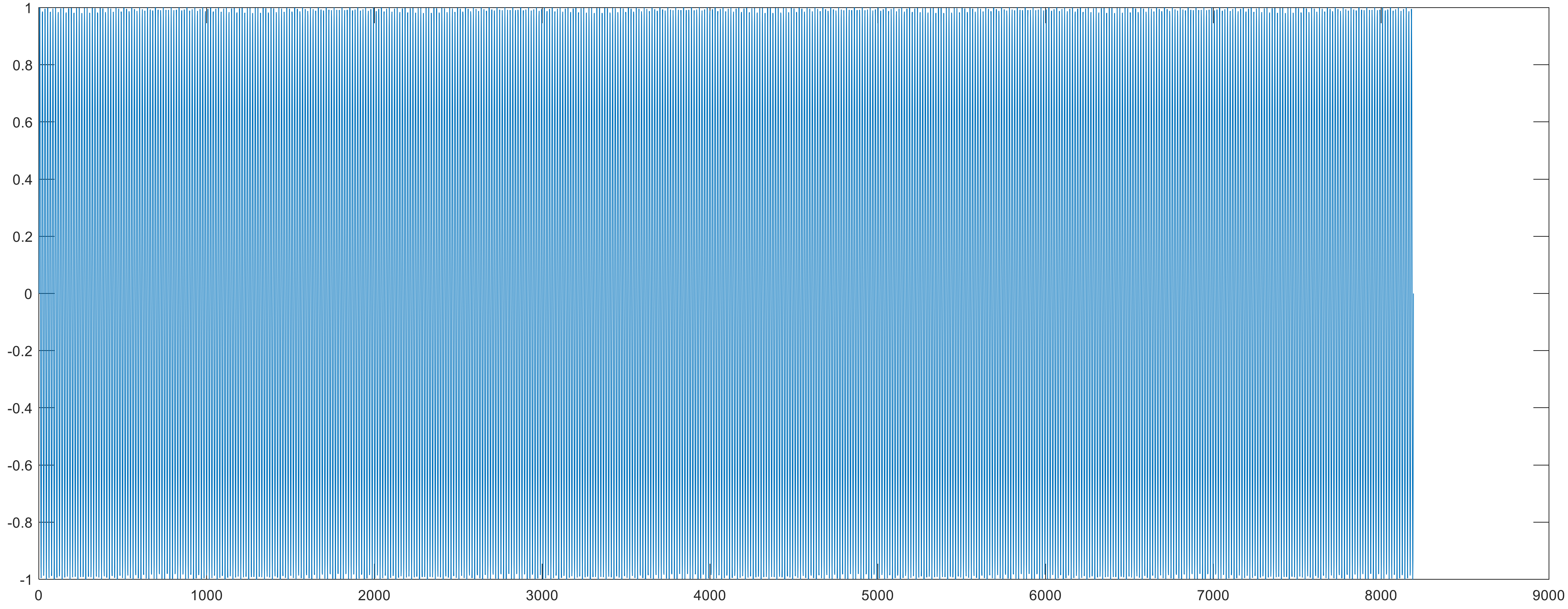
音符	频率（HZ）	简谱码（T 值）	HEX	音符	频率（HZ）	简谱码（T 值）	HEX
低 1 DO	262	63628	F88C	# 4 FA#	740	64860	FD5C
#1 DO#	277	63731	F8F3	中 5 SO	784	64898	FD82
低 2 RE	294	63835	F95B	# 5 SO#	831	64934	FDA6
#2 RE#	311	63928	F9B8	中 6 LA	880	64968	FDC8
低 3 M	330	64021	FA15	# 6	932	64994	FDE2
低 4 FA	349	64103	FA67	中 7 SI	988	65030	FE06
# 4 FA#	370	64185	FAB9	高 1 DO	1046	65058	FE22
低 5 SO	392	64260	FB04	# 1 DO#	1109	65085	FE3D
# 5 SO#	415	64331	FB4B	高 2 RE	1175	65110	FE56
低 6 LA	440	64400	FB90	# 2 RE#	1245	65134	FE6E
# 6	466	64463	FBCF	高 3 M	1318	65157	FE85
低 7 SI	494	64524	FC0C	高 4 FA	1397	65178	FE9A
中 1 DO	523	64580	FC44	# 4 FA#	1480	65198	FEAE

```
function y = gen_wave( tone, rythm )
%UNTITLED2 音乐函数 对应music2
% 音调 拍
Fs = 8192;
freqs = [523, 587, 659, 698, 783, 880, 988];
x = linspace(0, 2 * pi * rythm, floor(Fs * rythm));
y = sin(freqs(tone) * x);
end
```

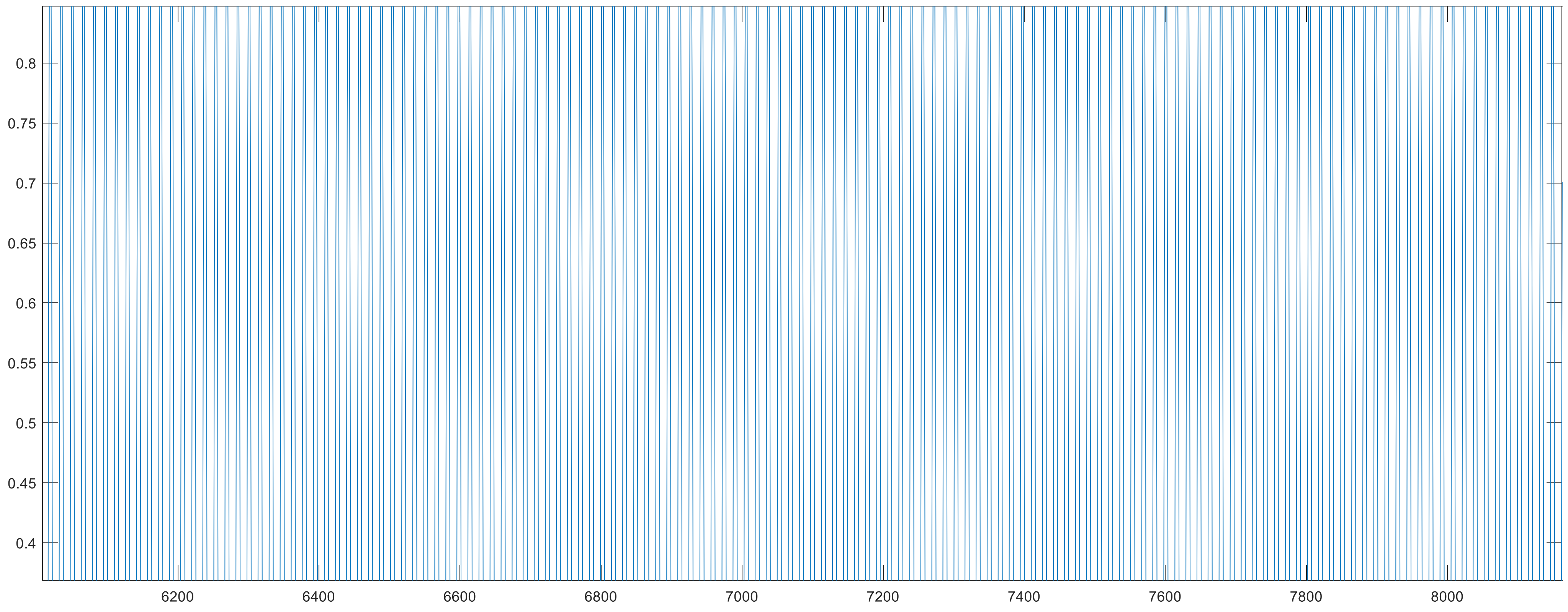
注意：播放频率应该与采样频率保持一致！！！

4. 乐音的频率比

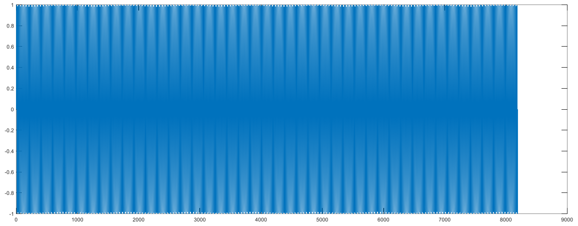
```
Fs = 8192;
y=[];
y = gen_wave1(1,1);
sound(y,Fs);
plot(1:1:Fs,y);
```



4. 乐音的频率比


0.8
0.75
0.7
0.65
0.6
0.55
0.5
0.45
0.4
6200
6400
6600
6800
7000
7200
7400
7600
7800
8000

4. 乐音的频率比



现给出函数模块:

Fs为采样频率，一般默认8192Hz，也就是一秒钟采样次数;

通过遍历音乐数组，执行子程序，我们可以生成其音阶数组

小星星

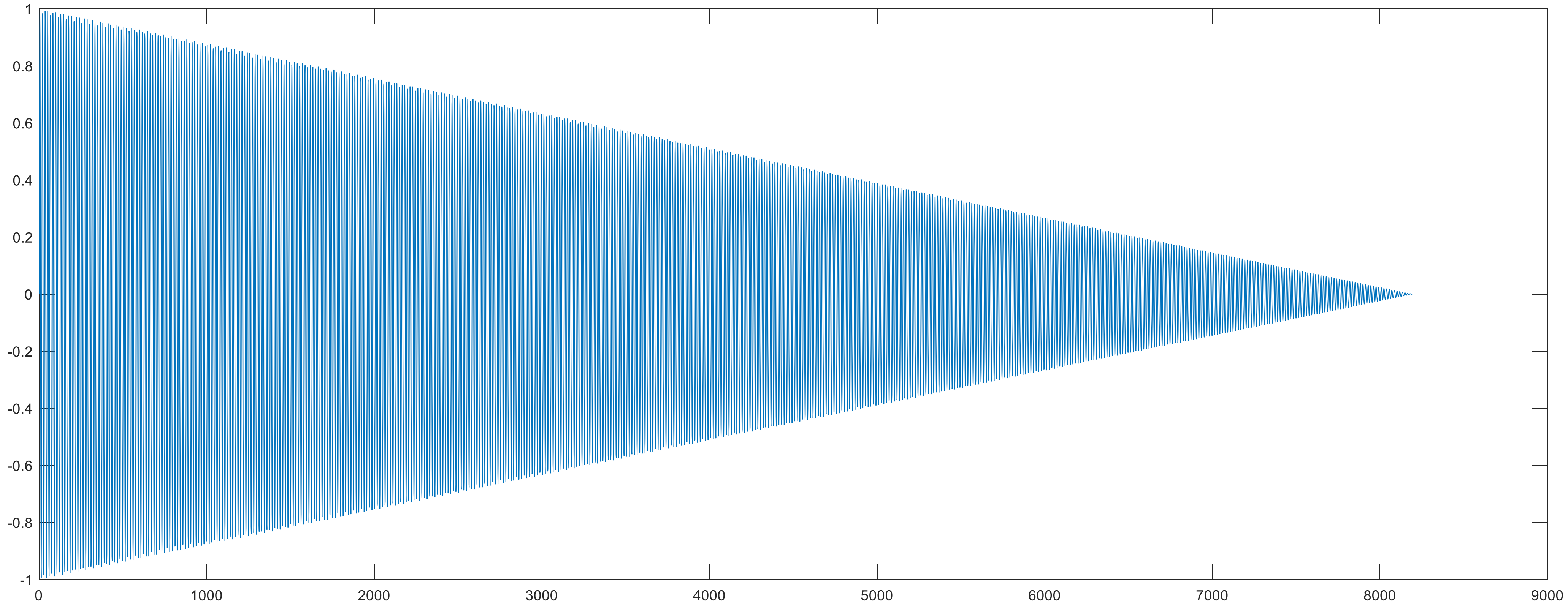
4. 乐音的频率比

- 首先可以看出放大之后，值是不连续的，然后声音一直是不变的，这和我们实际上是不太相符的，钢琴的音应该是刚按下的时候最大，后面随着时间变化，声音逐渐衰退。

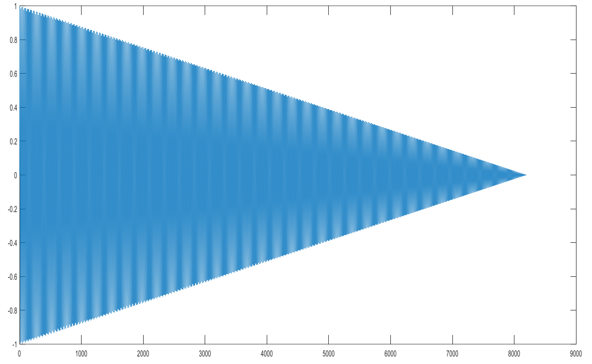
```
function y = gen_wave( tone, rythm )

% 音调 拍
Fs = 8192;
freqs = [523, 587, 659, 698, 783, 880, 988];
x = linspace(0, 2 * pi * rythm, floor(Fs * rythm));
y = sin(freqs(tone) * x) .*(1- x/(rythm * 2 *pi));
end
```

4. 乐音的频率比

振荡衰减的，当然也可以乘上一个指数衰减的函数，这样的得到的声音会更加真实。



4. 乐音的频率比



小星星


```
music = [1,1,5,5,6,6,5,...
4,4,3,3,2,2,1,...
5,5,4,4,3,3,2,...
5,5,4,4,3,3,2,...
1,1,5,5,6,6,5,...
4,4,3,3,2,2,1];
```

```
sound(y, Fs);
```

课堂总结

- 最佳分数近似值
  - 分数对无理数的最佳逼近
  - 实数的连分数展开
    - 有限连分数
    - 无限连分数
    - 带余除法
    - 辗转相除法
  - 乐音的频率比

Q&A?

下节课内容

实验四： 数列与级数

翟晓雅

Email: xiaoyazhai@ustc.edu.cn

Homepage: https://xiaoyazhai.github.io/

Lab: http://gcl.ustc.edu.cn/