



数学实验

实验九：分形

翟晓雅

Email: xiaoyazhai@ustc.edu.cn

Homepage: <https://xiaoyazhai.github.io/>

实验目的

- 了解分形几何的起源与必要性
- 以迭代的观点了解分形的基本特性以及生成分形图形的基本方法
- 了解分形的应用与相关科研成果

9.1 分形背景

- 历史

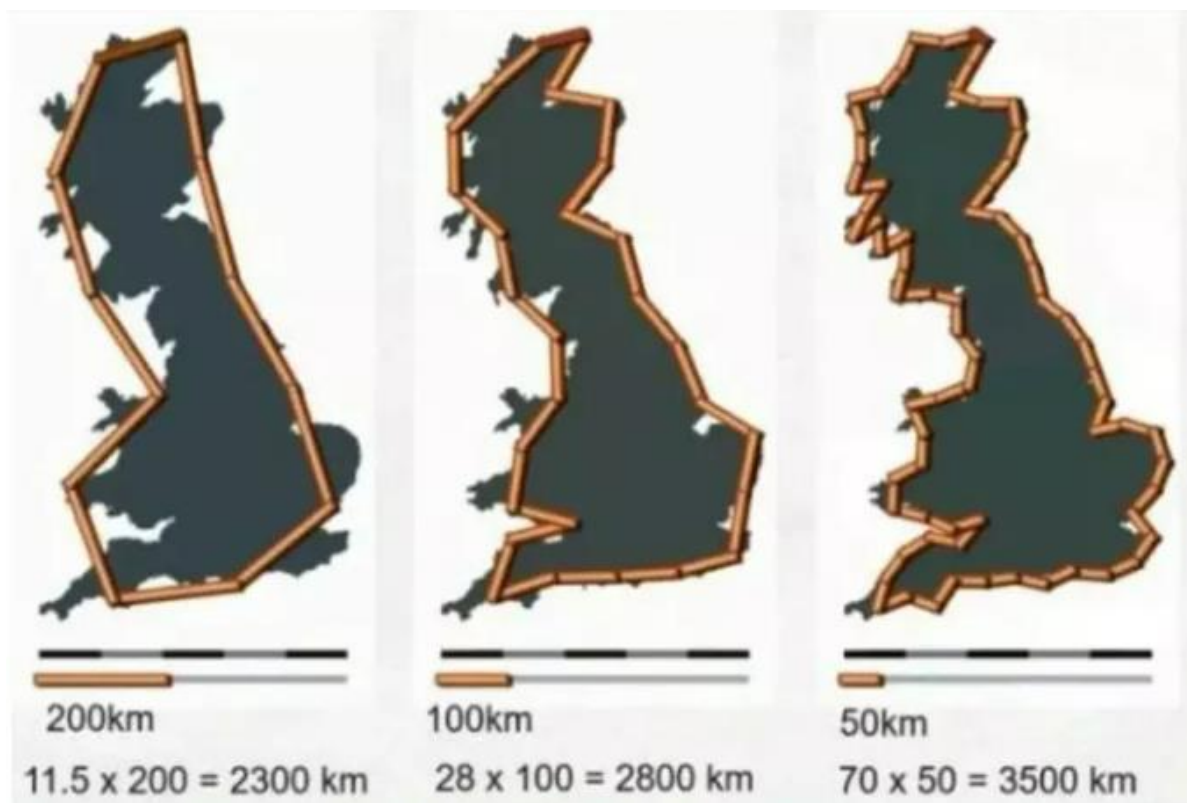
欧几里德几何，解析几何，微分几何
微积分，复变函数

➡ 如何求解一下问题？

- 如何度量海岸线的长度？
- 如何度量Cantor集？
- 如何看待Weierstrass函数？

9.1 分形背景

□ 如何度量海岸线的长度？



Size: 200km length: 2300km

Size: 100km length: 2800km

Size: 50km length: 3500km

Size: ... length: ...

9.1 分形背景

Cantor 集

$$C_0 := [0, 1]$$

$$C_n := \frac{C_{n-1}}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3} \right) = \frac{1}{3} (C_{n-1} \cup (2 + C_{n-1}))$$

➡ $\mathcal{C} := \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=m}^{\infty} C_n \text{ for any } m \geq 0.$



- ❑ 德国数学家康托（1845-1918）在1883年构造出康托中间三分集，又称为康托点集，简称为康托集。
- ❑ 它是在单位长度直线段 $[0,1]$ 的基础上，将其分成三等分，去掉中间的 $1/3$ 线段，剩下两端的 $1/3$ 线段，即 $[0,1/3]$ 和 $[2/3,1]$ 这两个线段；
- ❑ 照此无限分割下去。

经无数次操作，达到极限时所得到的离散点集称之为Cantor三分集



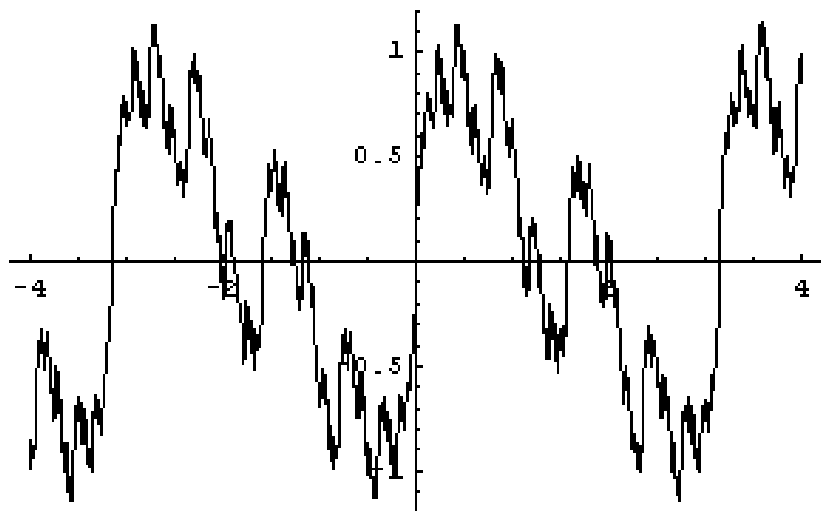
不可数的无穷集

9.1 分形背景

Weierstrass 函数:

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} \sin(\lambda^n x)$$

Where $1 < s < 2$ and $\lambda > 1$, $W(x)$ is continuous but not differentiable.



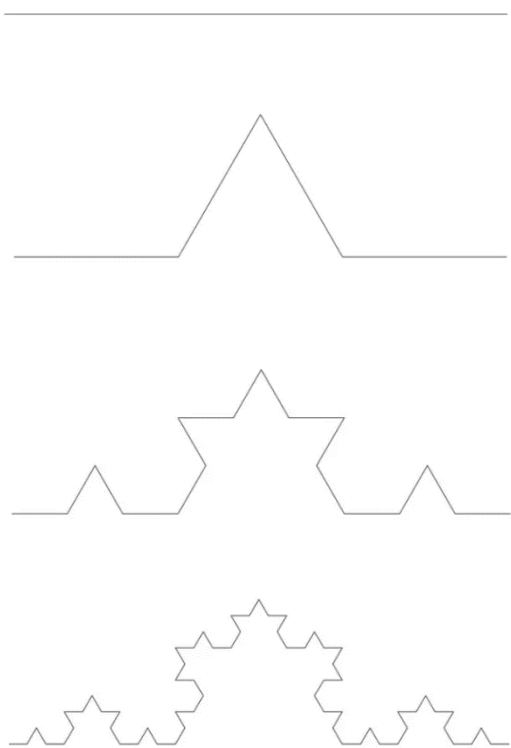
$s=1.4$

$\lambda = 2$

- 处处连续而处处不可导的实值病态函数
- 魏尔施特拉斯函数并不是连续函数中的少数几个特例之一。尽管它是“病态”函数的一种，但可以证明，这种病态的函数事实上不在“少数”，甚至比那些“规则”的函数“多得多”。

9.1 分形背景

Koch 曲线



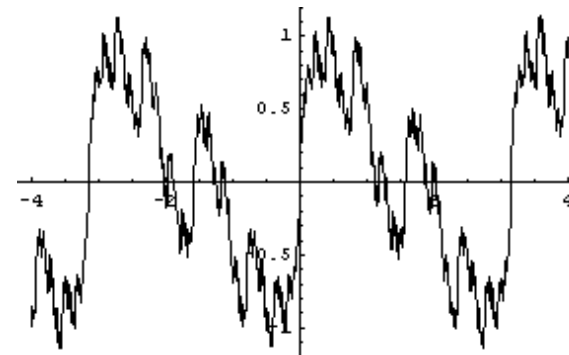
对于像科赫曲线这样奇怪的无限曲线，我们应该用什么样的尺子呢？



分形！



9.1 分形背景 - 生成元



- 生成元

早在19世纪末20世纪初的时候，一些数学家就构造除了一些边界形状极不光滑的图形。

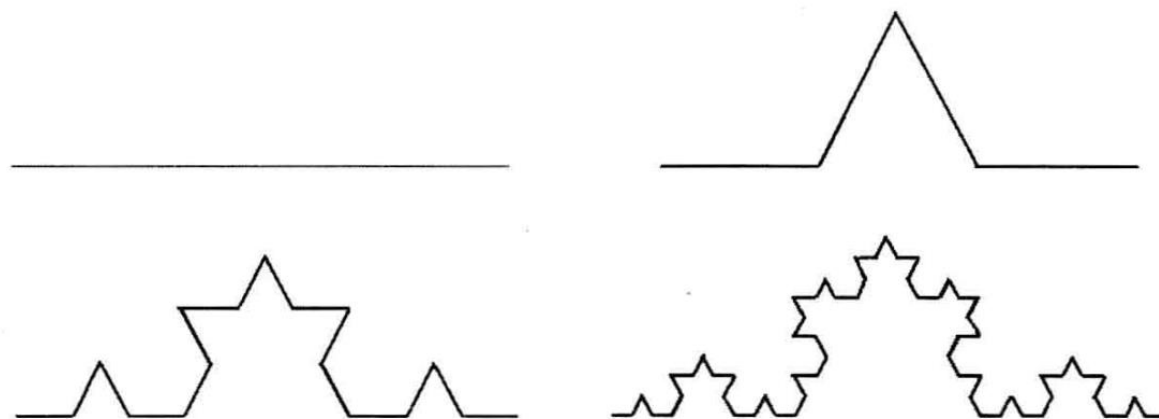
由于这类图形长期以来被视为“不可名状的”或“病态的”，因而只有当人们需要反例的时候才会想起它。

这类图形都有一个共同点：最终的图形F都是按照一定的规则R通过对初始图形F不断修改得到的。

9.1 分形背景 -Koch曲线

- Koch曲线的构造过程:

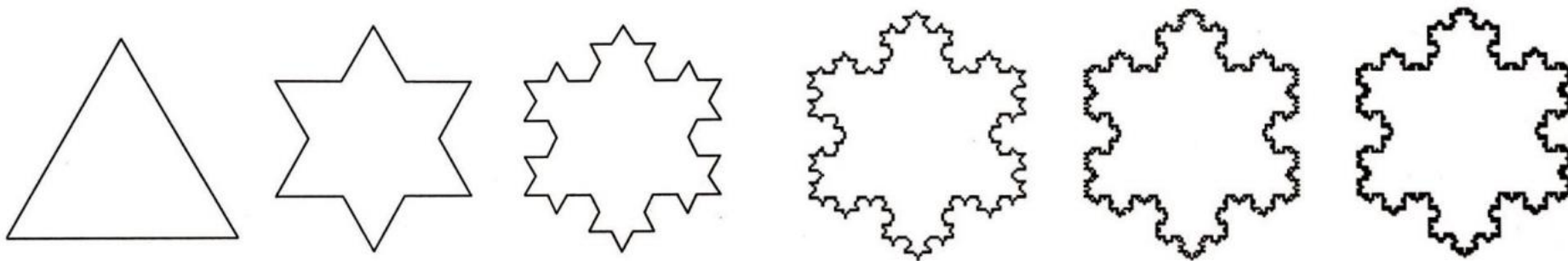
给定一条直线段 F_0 ,将该直线三等分,并将中间的一段用以该线段为边的等边三角形的另外两条边替代,得到图形 F_1 ,然后再对图形 F_1 中的每一小段都按上述方式修改,以至无穷,最后得到极限曲线 $F = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k$



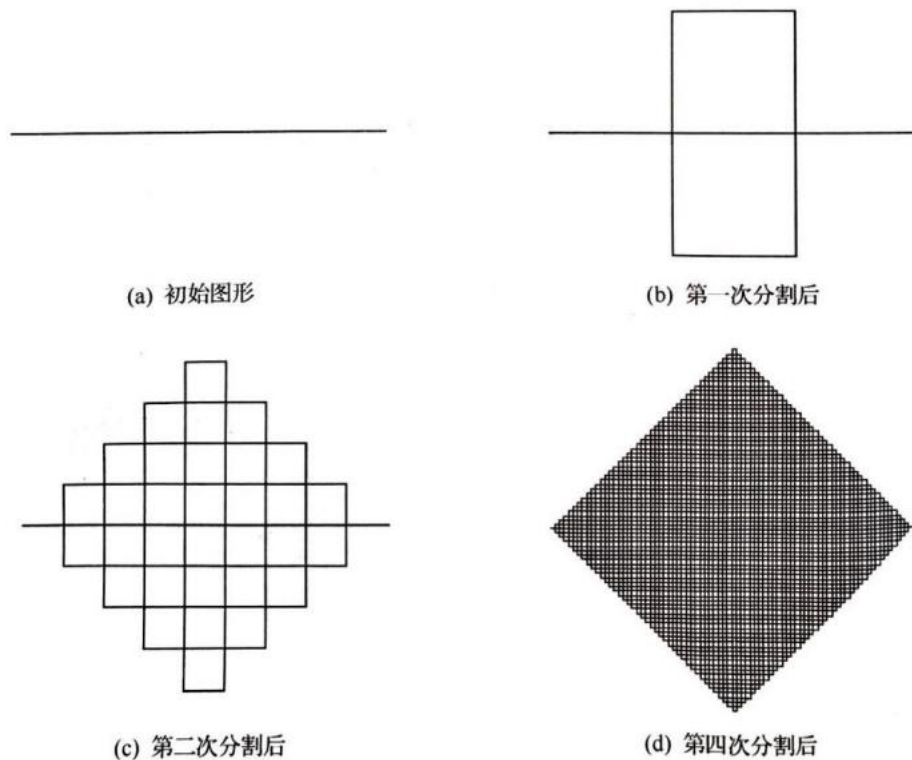
9.1 分形背景 - 雪花曲线

分形的基本特性由**生成元**决定，如果给定一个生成元，就可以生成各式各样的分形图案。

从一个**正三角形**出发，用Koch曲线的生成元迭代得到的极限图形称为Koch雪花曲线。



9.1 分形背景 - 皮亚诺曲线



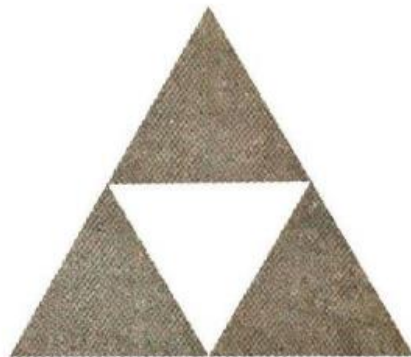
- 意大利数学家皮亚诺（1858-1932）与德国数学家希尔伯特（1862-1943）分别于1890年和1891年发现了能够填满平面的曲线。
- 首先将一条单位长度的直线段三等分，然后在其中间部分构造一个“日”字型折线框，每条折线的长度都是 $1/3$ ；
- 首先将一条单位长度的直线段三等分，然后在其中间部分构造一个“日”字型折线框，每条折线的长度都是 $1/3$ ；

由于皮亚诺曲线最终可以穿行（遍历）一个平面上的每一个点，因此它也被称作空间填充曲线。

9.1 分形背景 - 谢尔宾斯基三角垫



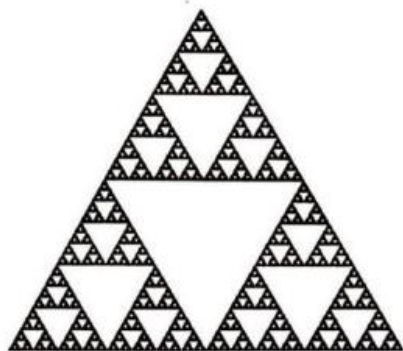
(a) 初始图形



(b) 第一次分割后



(c) 第二次分割后



(d) 多次分割后

- 以波兰数学家谢尔宾斯基（1882-1969）命名的谢尔宾斯基三角垫的构造过程：
- 先将一个单位边长的实心等边三角形的三条边分别二等分，将三条边的中点相连形成一个等边三角形；然后将其剔除，剩下3个边长为 $1/2$ 的实心小三角形；
- 再对剩下的3个小三角形重复上述操作一次，便得到9个边长为 $1/4$ 的实心小三角形；

9.1 分形背景 - L系统

- 生物学家Lindenmayer提出。一个L系统可表示为一个有序的三元素集合：

$$G = \langle V, w, P \rangle$$

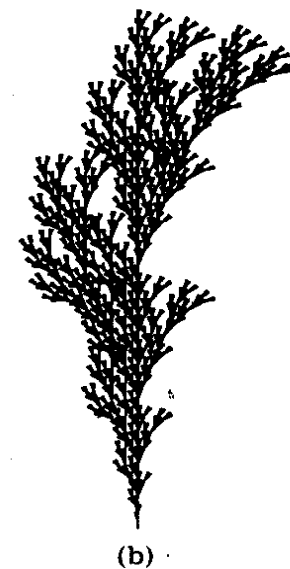
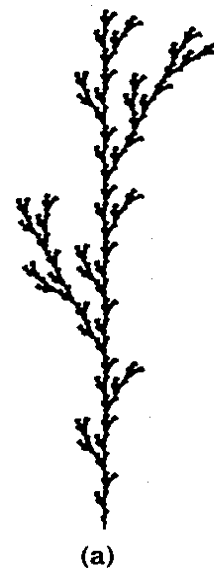
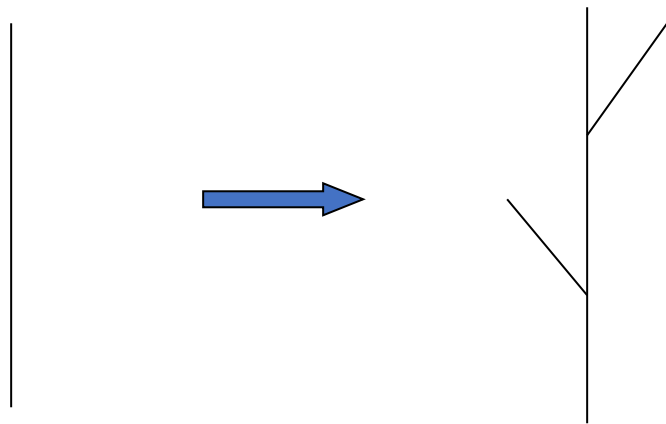
其中：V是一些运动过程集合，
w是初始形状，
P是生成式。

9.1 分形背景 - L系统

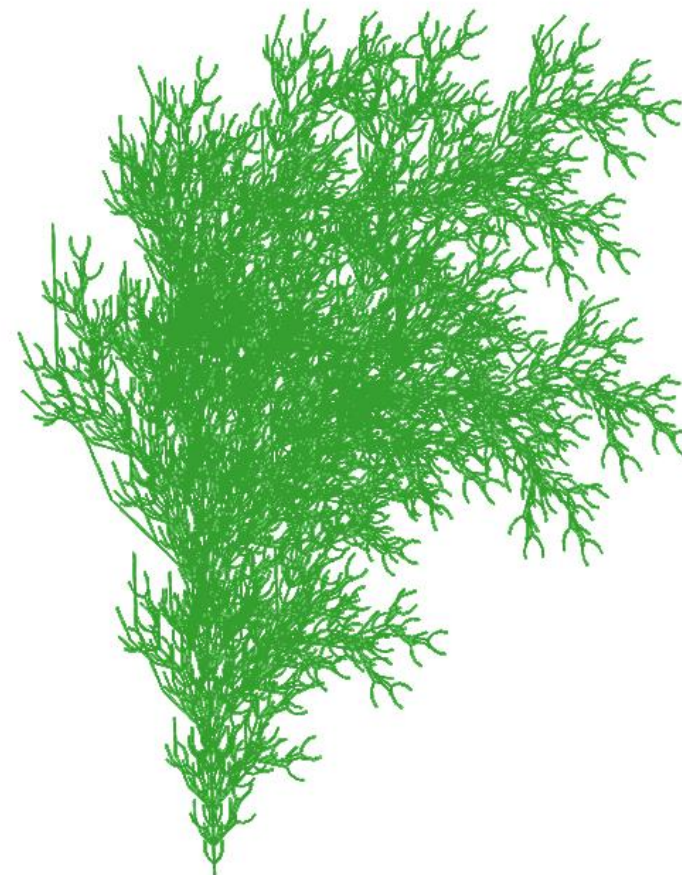
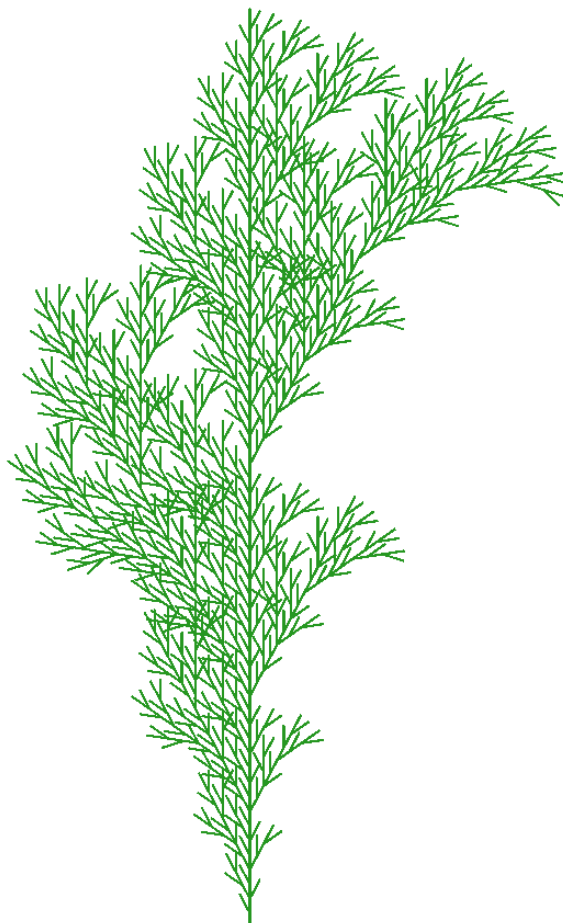
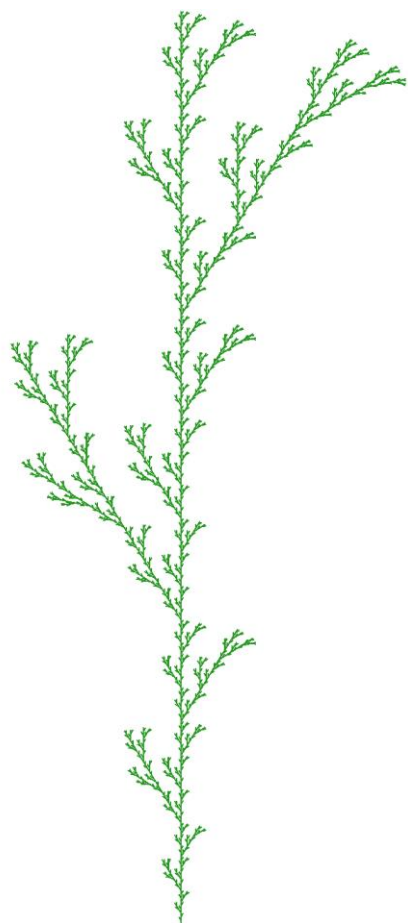
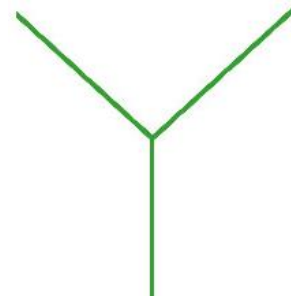
- 例如，F表示向前距离d，+表示左转弯a，-表示右转弯，[表示压栈，]表示出栈。

$$V = \{F, +, -, [,]\}, \quad w = F,$$

$$P: F \rightarrow F[+F]F[-F]F$$



9.1 分形背景 - 分形树



作业9.1

自定义L系统的三种规则，生成三种形态不同的分形树。

要求 (1) 给出每个自定义的L系统的三元素集合

(2) 迭代不同次数的分形树的截图

9.2 分形的定义

分形（Fractal）的原意是不规则的、分数的、支离破碎的，它是一种具有自相似特性的图形、现象或者物理过程等。



定义1：(Mandelbrot,1986) 部分以某种形式与整体相似的形状叫分形

定义2：分形比传统几何学研究的所有集合还更加不规则(irregular)无论是放大还是缩小，甚至进一步缩小这种集合的不规则性仍然是明显的

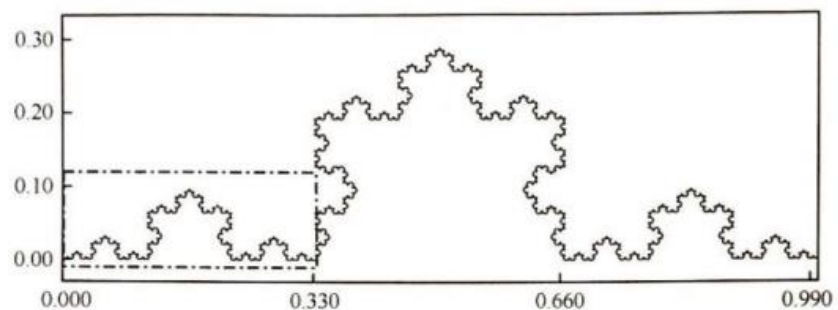
9.2 分形的定义

福尔克纳（Falconer）的定义

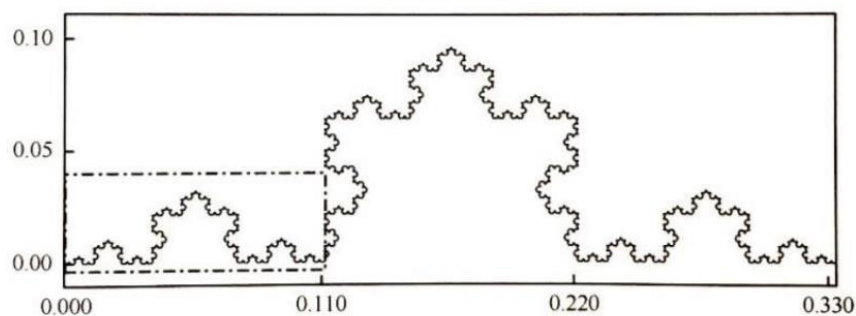
- 它具有精细的结构，在任意小的尺度下，它可以有更小的细节；
- 它是如此的不规则，无论从局部还是从整体看，它都无法用微积分或传统的几何语言来描述；
- 它本身的结构通常在大小尺度上有着某种自相似的性质；
- 它的分形维数大于它的拓扑维数；
- 在许多情况下，它可以由迭代方法产生；
- 它通常具有“自然”的外貌；

如果具有上述所有或大部分的性质，那么它就是分形。

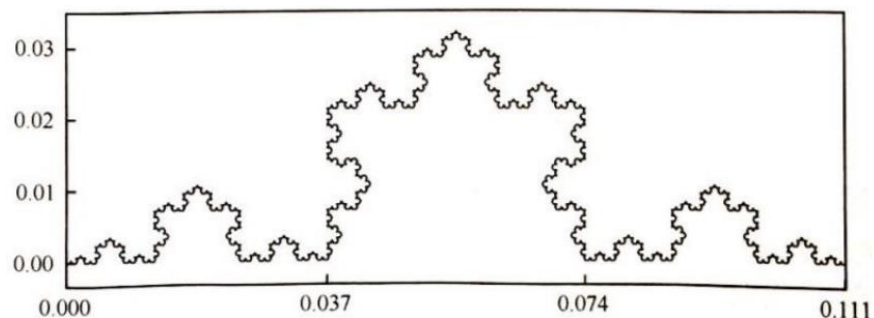
9.2 分形的定义



(a) 原始Koch曲线



(b) 第一次局部放大后

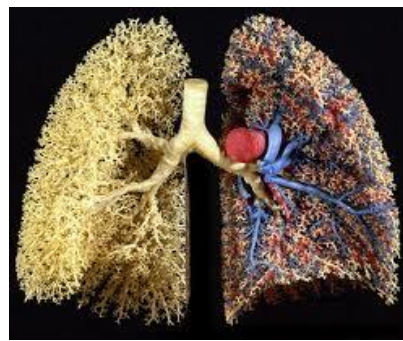
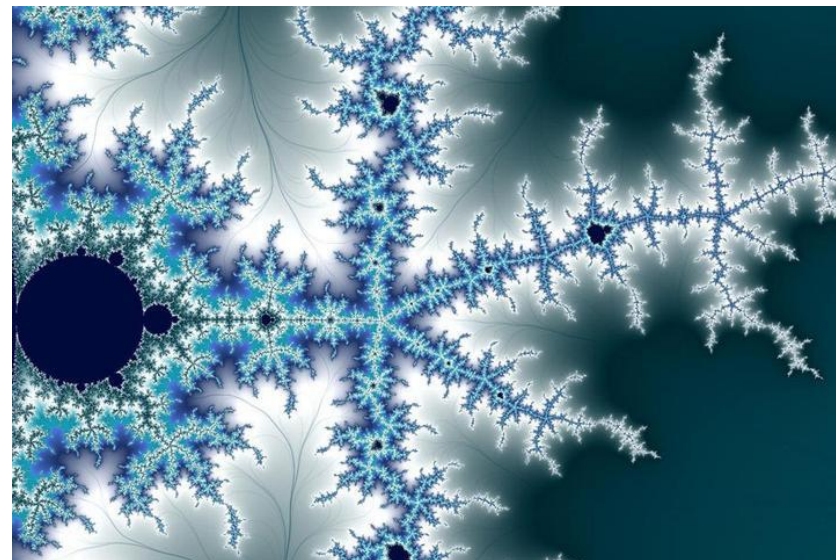


(c) 第二次局部放大后

- 它具有精细的结构。它包含有任意小 ($1/3$ 的 n 次方) 比例的细节。
- 它非常的不规则。虽然它是一条曲线, 但其大小不合适用传统欧氏几何的长度来度量。
- 它处处连续但又处处不可微分。
- 它具有自相似性。
- 它是由迭代过程得到的, 且具有自然的外貌。

9.2 分形的定义

- 有一个无限精细的结构
- 局部与整体的相似性。
- 随机
- 在大多数情况下，分形可以用简单的方法确定，可以通过迭代生成。



9.2 分形的定义

□ 自相似性

▣ 精确自相似性

- 通常只存在于由数学方程产生的规则分形图形中

▣ 近似自相似性

- 仅存在于一定的尺度范围之内，超出这个范围自相似性就不复存在了

▣ 统计自相似性

- 视觉上并不明显
- 统计参数一致，如分形维数随着放大而保持常数

□ 无标度性

- ▣ 在分形对象上任选一个局部区域对其进行放大或缩小，它的形态、复杂程度、不规则性等均不发生变化，也称作伸缩对称性。
- ▣ 无标度性与自相似性有相同之处，具有标度不变性的对象，必须满足自相似性质。也可以认为，这类研究对象没有特征尺度，无法用空间中的长度、面积、体积和时间中的秒、分、时来描述。

□ 自仿射性

- ▣ 自仿射性是自相似性的一种拓展和延伸，如果局部到整体在各个方向上的变换比率是相同的，那么就是自相似性变换；而当局部到整体在不同方向上的变换比率不一定相同时，就称为自仿射性变换。自相似性变换是自仿射性变换的特例。

9.2 分形的定义

两种几何学	描述对象	层次性、自相似性	特征尺度	描述方式	维数
欧氏几何	人类创造的简单标准物体（连续、光滑、规则、可微）	常无	有	数学语言	0、1、2、3
分形几何	大自然创造的复杂的真实物体（不连续、粗糙、不规则、不可微）	有	无	迭代语言	一般是分数

整数维数只能描述几何图形的静态特征，而分数维数描述的是几何图形的动态变化

9.3 分形维数

- 豪斯多夫 (Hausdorff) 维数
- 相似维数
- 盒计数维数
- 容量维数
- 关联维数
- 信息维数

我们把通常Euclid的整数维亦称之为拓扑维。

9.3 分形维数-Hausdorff 维数

从直觉上来说一个集合的维数是描述这个集合中一点所需的独立参数的个数。

比如要描述一个平面里的一点我们需要两个坐标 x 和 y ，那么平面的维数便是2。最接近这个想法的数学模型是拓扑维度。

可以预见拓扑维度必然是一个自然数。

但是拓扑维度在描述某些不规则的集合比如分形的时候遭遇到了困难，而豪斯多夫维数则是一个描述该种集合的恰当工具。

9.3 分形维数-Hausdorff 维数

设想有一个由三维空间内具有有限大小的点组成的集合， N 是用来覆盖这个集合内所有点所需的半径为 R 的球体的最少个数，则这个最小数 N 是 R 的一个函数，记作 $N(R)$ 。显然 R 越小则 N 越大，假设 $N(R)$ 和 R^d 之间存在一个反比的关系，我们把这个关系记作

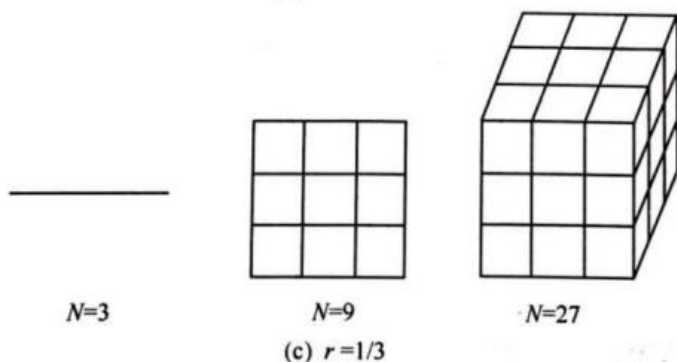
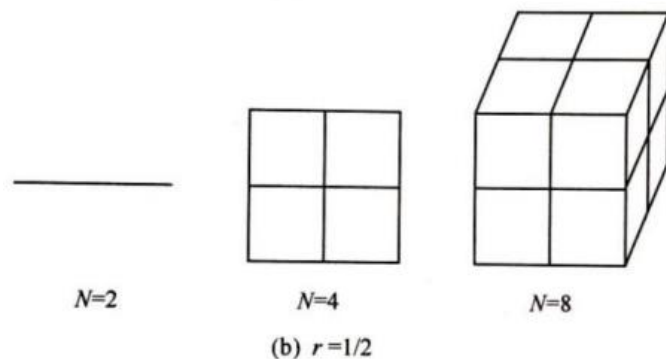
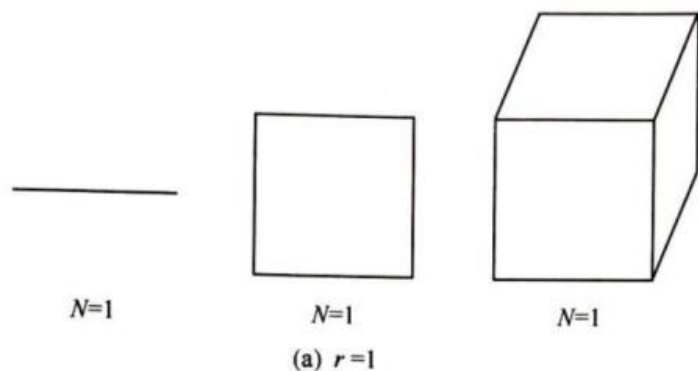
$$N(R) \sim \frac{1}{R^d}$$

当 R 趋向于0时，我们得到

$$d = - \lim_{R \rightarrow 0} \log_R N$$

这里的 d 就是这个集合的豪斯多夫维数

9.3 分形维数-相似维数



- 对于一条单位长度线段 ($D_T=1$)
 - 等分成 $N=2$ 段, 则每段长度为 $r=1/2$;
 - 等分成 $N=3$ 段, 则每段长度为 $r=1/3$
 - $N \times r = 1$
 - 从测量角度理解, 相当于用长为 r 的尺子去测量线段的长度, 那么测得的尺度数 $N(r)$ 与尺度之间的关系为: $N(r)=r^{-1}$
- 对于一块单位面积的正方形平面 ($D_T=2$)
 - 等分成 $N=4$ 份, 则分割的小正方形面积为 $r^2=1/4$
 - 等分成 $N=9$ 份, 则分割的小正方形面积为 $r^2=1/9$
 - $N \times r^2 = 1$
 - 小正方形测量数目 $N(r)=r^{-2}$
- 对于一个单位立方体 ($D_T=3$)
 - 等分成 $N=8$ 份, 则分割的小立方体体积为 $r^3=1/8$
 - 等分成 $N=27$ 份, 则分割的小正方体体积为 $r^3=1/27$
 - $N \times r^3 = 1$
 - 小正方体的测量数目为 $N(r)=r^{-3}$

9.3 分形维数-相似维数

□ 线、面、体的维数为1、2、3，归纳为 $N(r) = r^{-D}$

□ 两边取对数 $D = \frac{\log N(r)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$

□ 相似维数的定义：如果一个分形对象 A（整体）可以划分为 $N(A,r)$ 个同等大小的子集（局部单元），每个子集以相似比 r 与原集合相似，则分形集 A 的相似维数 D_s 定义为

$$D_s = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(A,r)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(A,r)}{\log r}$$

相似维数主要用于具有自相似性质的规则分形

9.3 分形维数-相似维数



□ 在每一步分割之后，原来的直线段都将被两段新的直线段所取代

□ 新直线段数为 $N=2$

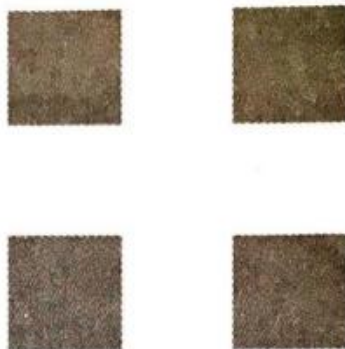
□ 新直线段与原直线段的尺度比为 $r=1/3$

$$D_s = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.63093$$

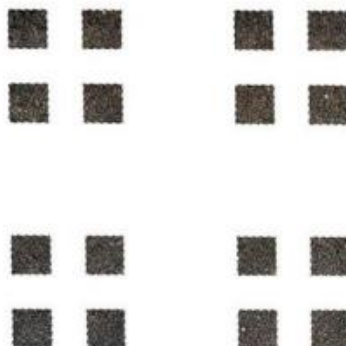
9.3 分形维数-相似维数



(a) 初始图形



(b) 第一次分割后



(c) 第二次分割后



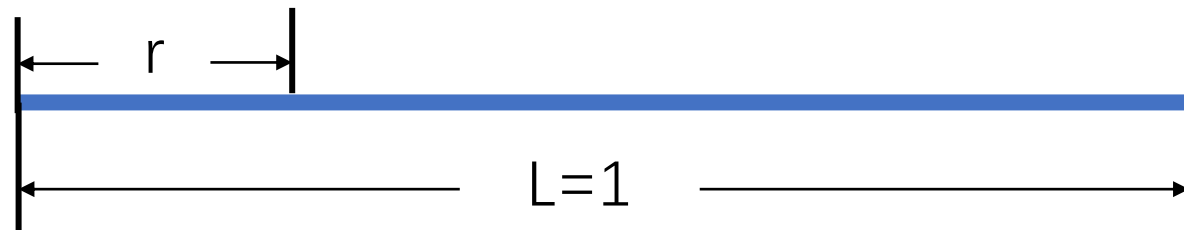
(d) 多次分割后

- 在每一部分割之后，原来的正方形都将被4个新的子正方形所取代
- $N=4$
- 子正方形与原来正方形的边长比为 $r=1/3$
- 它的分形维数为

$$D_s = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26186$$

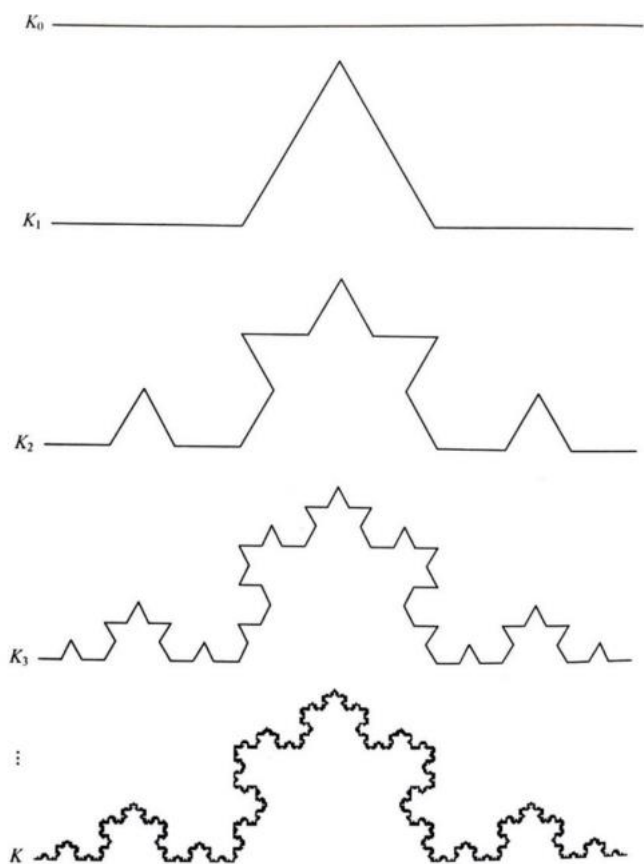
9.3 分形维数-再谈海岸线

海岸线是一个十分具体的实际问题又 是一个分形几何的孕育地。很值得我们研究。最简的海岸线是一条长度 $L=1$ 的线段。那么，不管我们用的尺寸去测量，它总是1。



L 的长度不随 r 变化而变化, $L = r^0 = 1$

9.3 分形维数-再谈海岸线



进一步，我们假设海岸线有Koch曲线的形状，
这种情况下，设海岸线 L 与尺寸 r 的关系是：

$$L = r^p = N(r)r$$

- $N(r)$ 使用尺寸 r 去测量海岸线时所测得长度 r 的段数

- $r = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ 测得 $L = \left(\frac{3}{4}\right)^n$

9.3 分形维数-再谈海岸线

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]^p$$

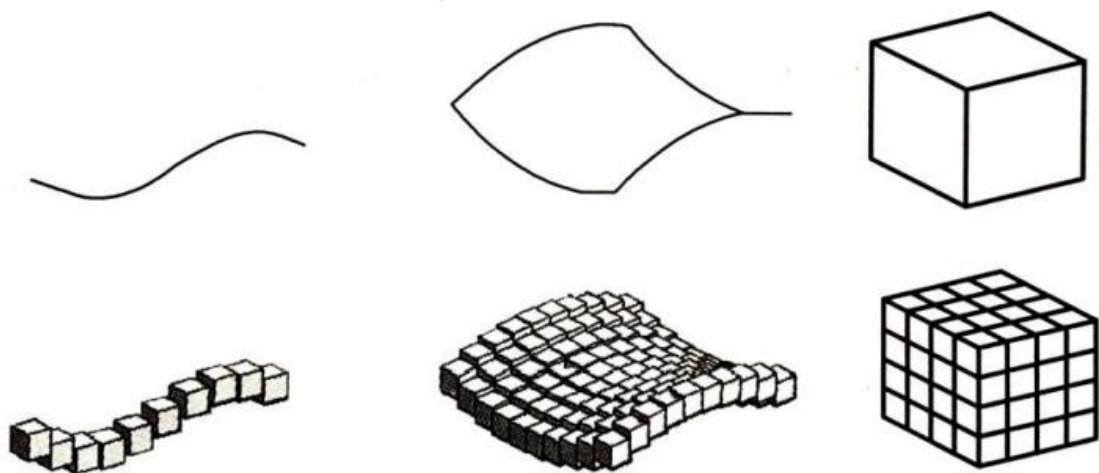
取对数，得到p:

$$p = 1 - \ln 4 / \ln 3 = 1 - D$$

Koch海岸线 $D=1.2618$ ，此时有 $L = r^{1-D} = r^{-0.2618}$

尺寸 r 越小，则海岸线长度 L 越长。在本质上说明它比直线复杂度高。
从这个意义上来说，分形的维数是对复杂性的一种度量。

9.3 分形维数-盒计数维数



- 用边长为 r 的小正方体（盒子）：
- 覆盖单位长度的线段，需要 $1/r$ 个小正方体
- 覆盖单位边长的正方形，需要 $1/r^2$ 个小正方体
- 覆盖单位边长的立方体，需要 $1/r^3$ 个小立方体
- 可以用“盒子”来覆盖任意形状的图形

9.3 分形维数-盒计数维数

在实际计算中，可以根据需要使用一些边长为 r 的 n 维立方体（盒子）来计算出不同 r 值的盒子覆盖 A 的个数 $N_r(A)$ ，然后在以 $-\log r$ 为横坐标、以 $\log N_r(A)$ 为纵坐标的双对数坐标系中描出点 $(-\log r_i, \log N_{r_i}(A))$ ，最后由这些分布点的斜率便可以估计出集合 A 的盒维数。斜率的估计常采用最小二乘法。

盒计数维数的定义：

- 设 A 是 \mathbb{R}^n 空间的任意非空有界子集，对于任意 $r > 0$ ， $N_r(A)$ 表示用来覆盖 A 所需边长为 r 的 n 维立方体（盒子）的最小数目。若存在 d ，使得当 $r \rightarrow 0$ 时，有

$$N_r(A) \propto 1/r^d$$

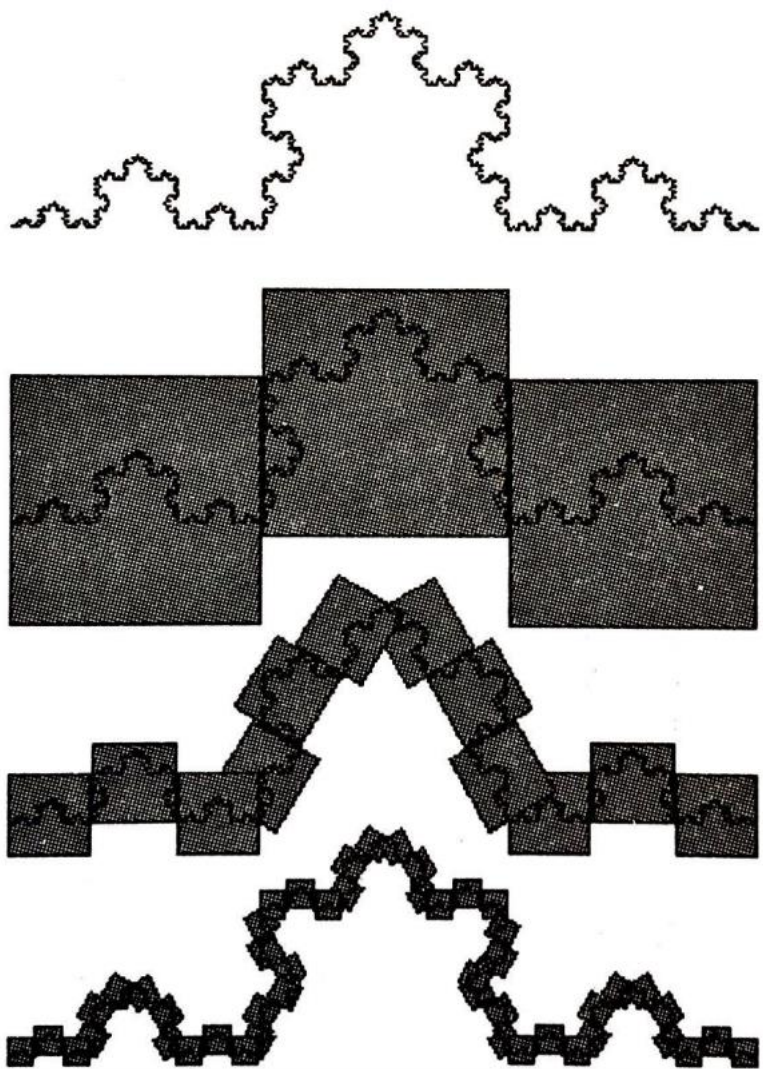
则称 d 为 A 的盒计数维数

- 盒维数为 d ，当且仅当存在一个正数 k 使得 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{N_r(A)}{\frac{1}{r^d}} = k$

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\log N_r(A) + d \log r) = \log k$$

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log k - \log N_r(A)}{\log r} = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N_r(A)}{\log r}$$

9.3 分形维数-盒计数维数



将每个盒子的尺寸大小和与其对应的盒子数目转化为双对数坐标中的点

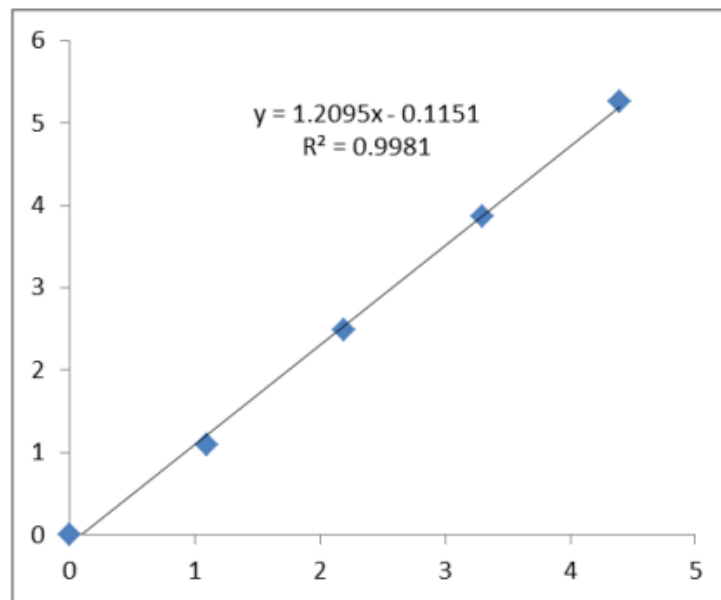
$$(\log(1/r_0), \log N(r_0)) = (\log 1, \log 1) = (0, 0)$$

$$(\log(1/r_1), \log N(r_1)) = (\log 3, \log 3) = (1.0986, 1.0986)$$

$$(\log(1/r_2), \log N(r_2)) = (\log 9, \log 12) = (2.1972, 2.4849)$$

$$(\log(1/r_3), \log N(r_3)) = (\log 27, \log 48) = (3.2958, 3.8712)$$

$$(\log(1/r_4), \log N(r_4)) = (\log 81, \log 192) = (4.3944, 5.2575)$$



9.4 分形生成-复变函数迭代

早在19世纪就有一些数学家对复变函数的迭代进行研究。

直到20世纪80年代，Mandelbrot才将复变函数的迭代与分形联系起来，并绘制了第一张以他的名字命名的引人入胜的分形图形。

9.4 分形生成-复变函数迭代

给定初始复数 Z_0 , 考虑如下迭代:

$$Z_{k+1} = Z_k^2 + \mu, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

其中 $Z_k, k = 1, 2, \dots$ 为复数, μ 为 (复) 常数。

9.4 分形生成-复变函数迭代

给定初始点 Z_0 ,迭代序列 $\{Z_k\}_{k=0}^{\infty}$ 有可能有界, 也可能发散到无穷。令 J_μ 是使得迭代序列 $\{Z_k\}_{k=0}^{\infty}$ 有界的所有初值 Z_0 构成的集合, 即:

$$J_\mu = \{Z_0 \mid \text{迭代序列}\{Z_k\}_{k=0}^{\infty} \text{ 有界}\},$$

称 J_μ 在复平面上构成的集合为Julia集。对于不同的参数 μ , Julia集的形状也会不同。特别地, $\mu = 0$ 对应的Julia集为单位圆盘。

$$Z_{k+1} = Z_k^2 + \mu, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

9.4 分形生成-复变函数迭代

如果固定初值 z_0 , 则不同的参数 μ , 迭代序列 $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的有界性也不相同。

令 M_{z_0} 是使得迭代序列 $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ 有界的所有参数值 μ 构成的集合, 即

$$M_{z_0} = \{\mu \mid \text{迭代序列}\{z_k\}_{k=0}^{\infty} \text{ 有界}\},$$

则称 M_{z_0} 在复平面上构成的集合为Mandelbrot集。

$$z_{k+1} = z_k^2 + \mu, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

9.4 分形生成-复变函数迭代

- 为了便于在计算机上绘制Julia集与Mandelbrot集, 令 $Z_k = x_k + iy_k$, $\mu = p + iq$, 则原迭代函数可以写为:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k^2 - y_k^2 + p, \\ y_{k+1} = 2x_k y_k + q, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

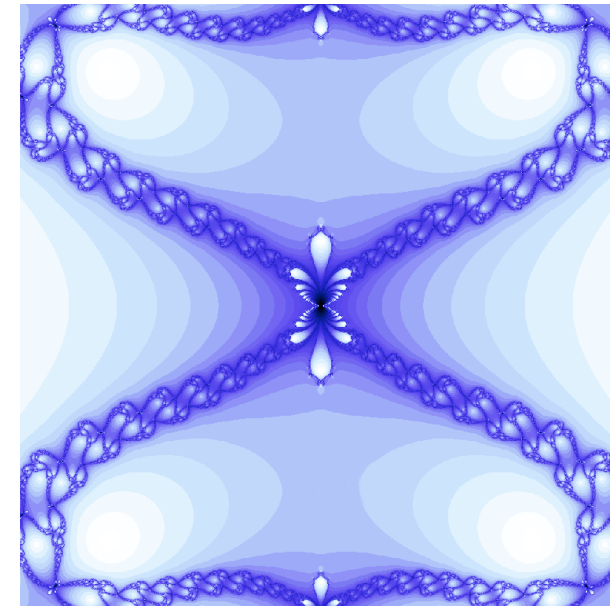
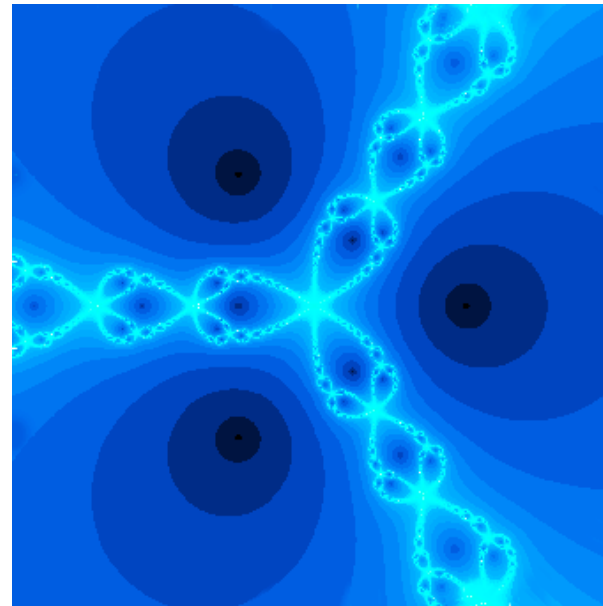
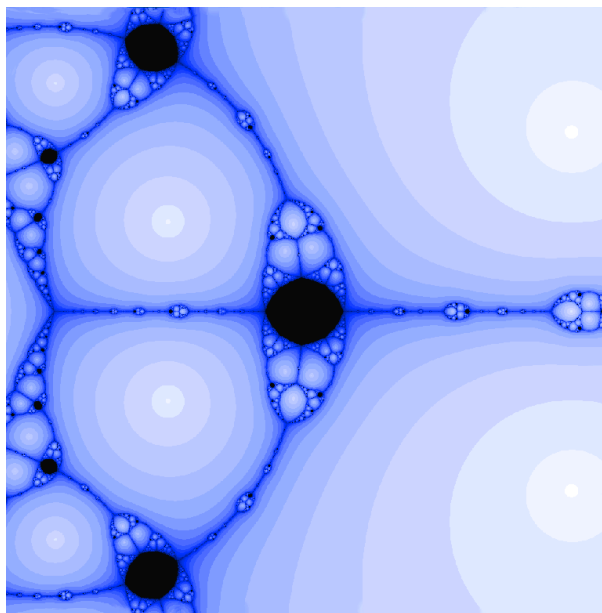
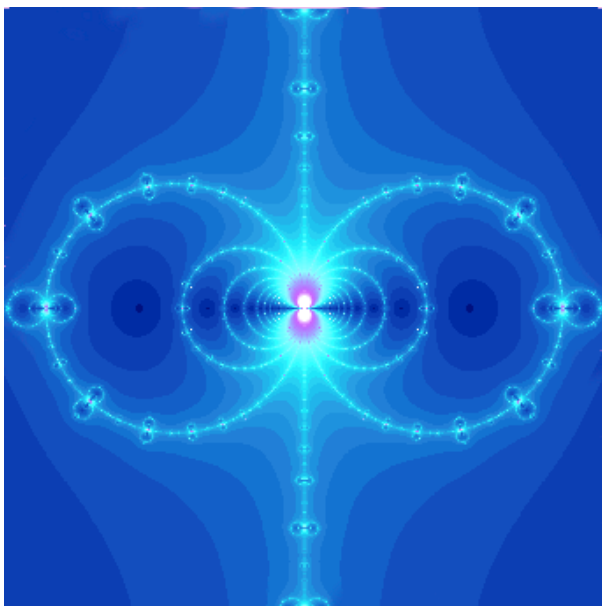
记 $r_k = x_k^2 + y_k^2$, 则Julia集为使得 $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ 有界的初始点 (x_0, y_0) 的集合。

Mandelbrot集为使得 $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ 有界的参数 (p, q) 的集合。

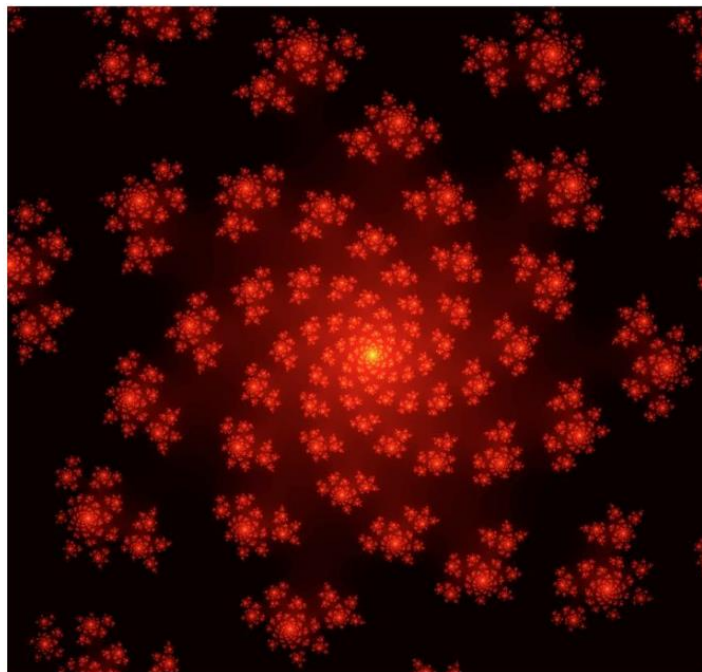
9.4 分形生成-Julia集绘制方法

- (1) 设定初值 p, q , 一个最大迭代次数 N , 图片的分辨率的大小 a, b 和使用的颜色数 K (如 $K=16$) (或者给定灰度级 L)
- (2) 设定一个上界值 $M \geq \max(2, \sqrt{p^2 + q^2})$
- (3) 将矩形区域 $R := \{(x, y) | -M \leq x, y \leq M\}$ 分成 $a \times b$ 的网格, 分别以每个网格点为初值 (x_0, y_0) 利用(3)做迭代如果对所有的 $n \leq N$ 都有 $x_n^2 + y_n^2 \leq M^2$, 则将像素 (i, j) 置为黑色。如果从某一步 n 开始, $x_n^2 + y_n^2 > M^2$, 则将像素 (i, j) 置为颜色 $n \bmod K$ 。

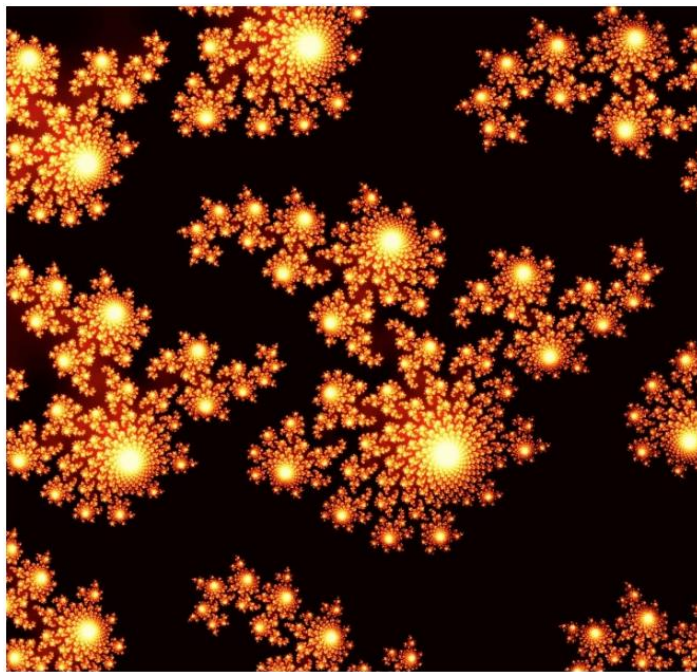
9.4 分形生成-复变函数迭代



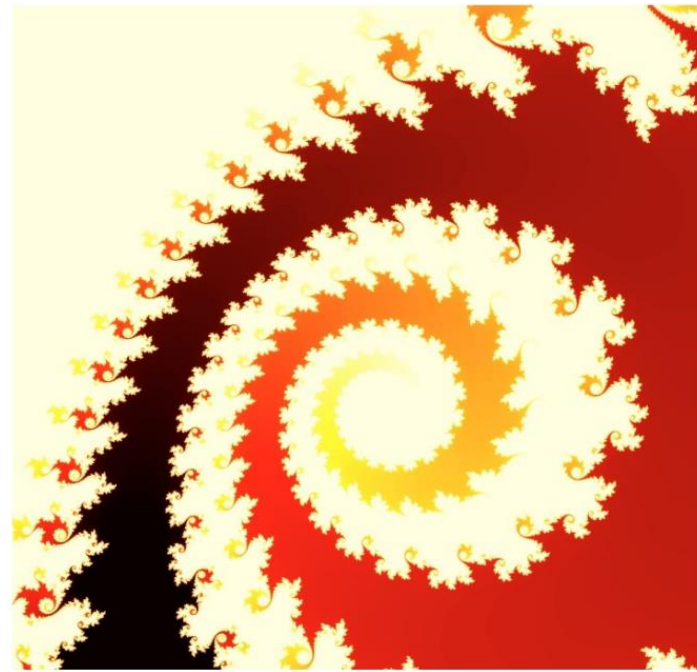
9.4 分形生成-复变函数迭代



$$c=0.092+0.642i$$

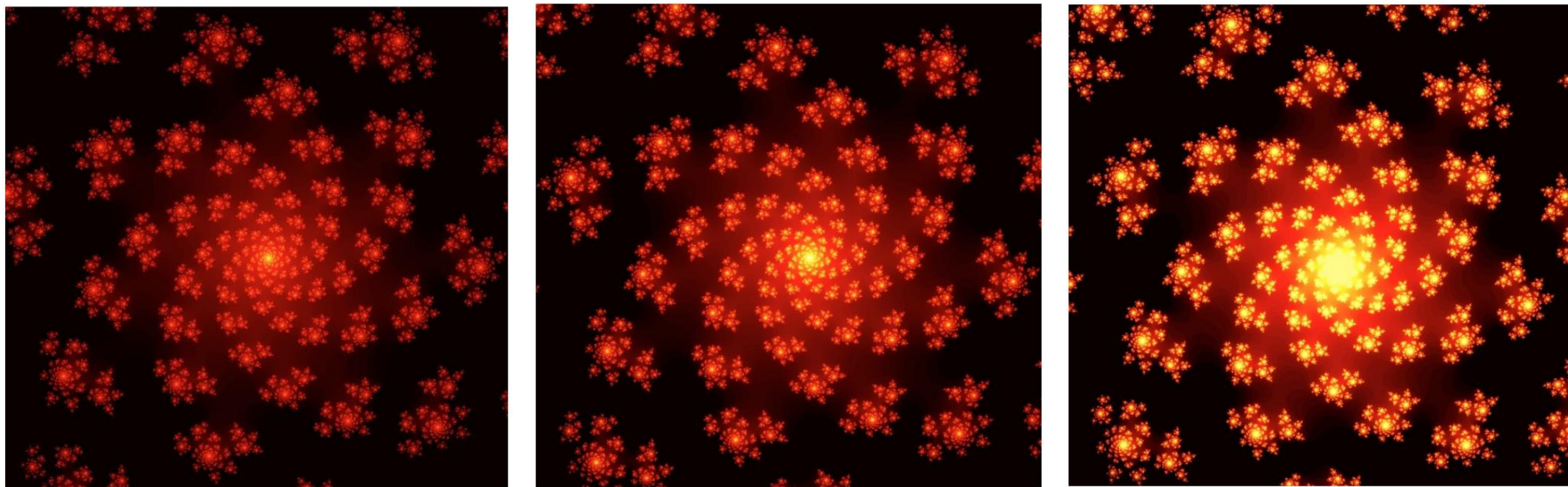


$$c=0.206+0.548i$$



$$c=0.2592+0.4909i$$

9.4 分形生成-复变函数迭代

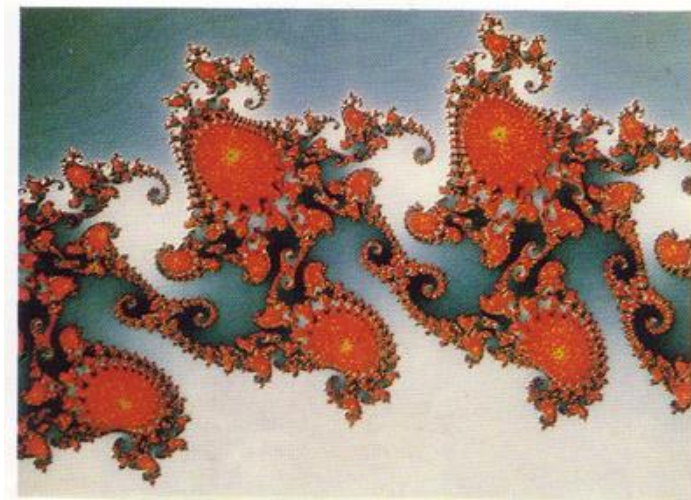
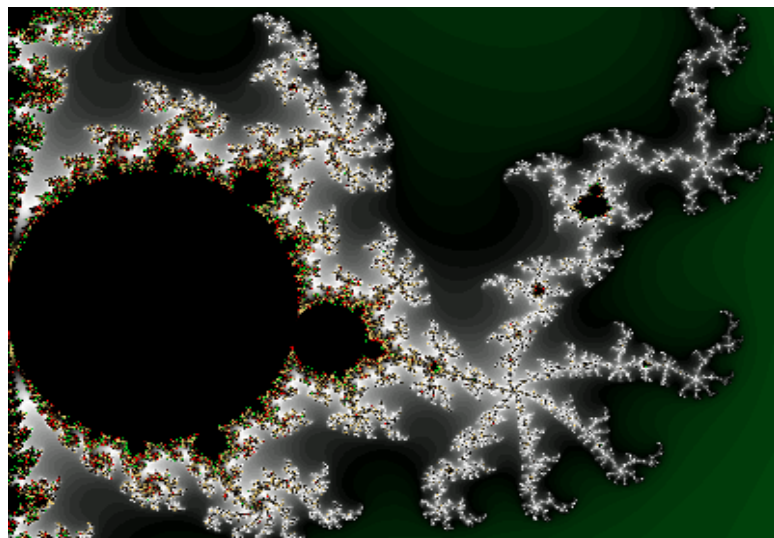
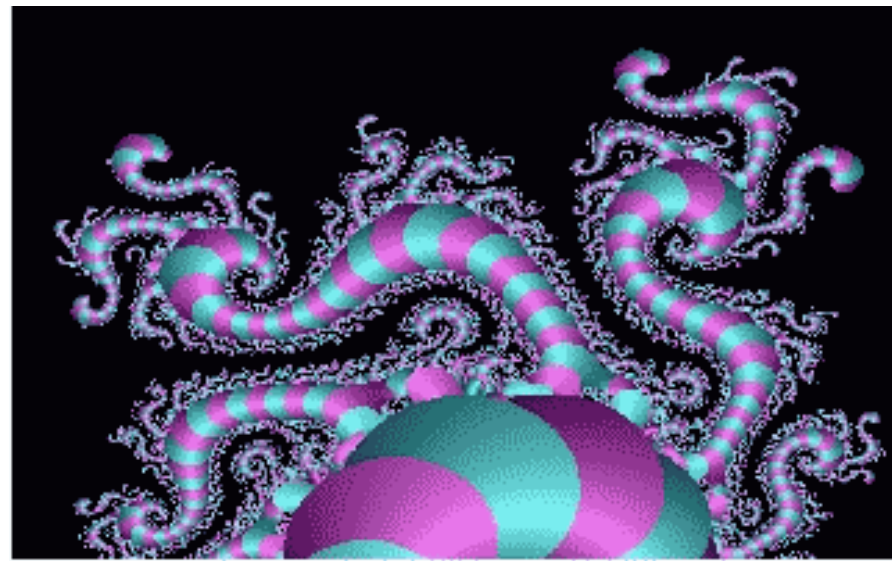
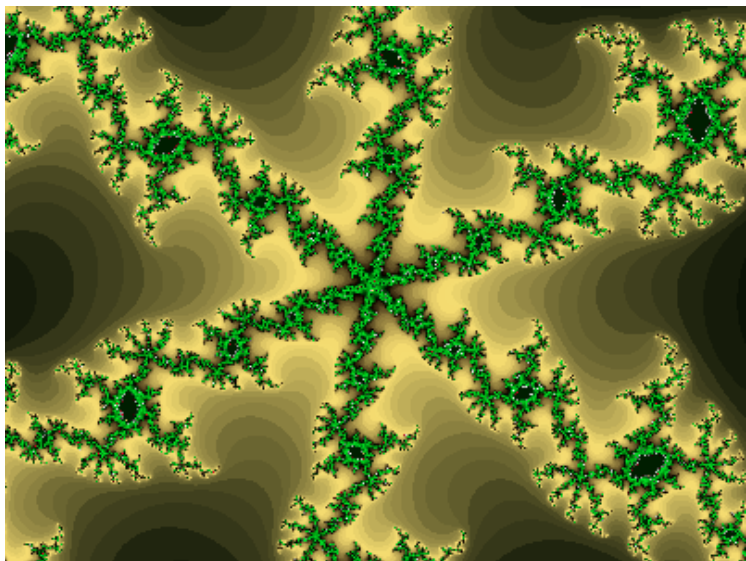


放大10倍



放大10倍

9.4 分形生成-复变函数迭代



2. Julia 集

作业9.2

编写绘制Julia集的程序。对不同的参数 (p,q) : $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0.11, 0.66)$, $(-0.10281, 0.95723)$, $(-1.25, -0.01)$ 观察Julia集的变化。取Julia集的不同局部放大, 能否看到某种自相似现象?

9.5 分形生成-IFS迭代

混沌游戏

在平面上任取三个不共线的三点A,B和C，并确定三个相应的概率 $p_A = 0.50, p_b = 0.47, p_C = 0.03$ 。任取一个点 Z_0 ，按下述步骤在平面上画出新的点列 $Z_n, n = 1, 2, \dots, Z_{n+1}$ 以概率 p_A 选定为A与 Z_n 的重点，以概率 p_B 选定为B与 Z_n 的中点，以概率 p_C 选定为C与 Z_n 的中点，即

$$Z_{n+1} = \begin{cases} \frac{Z_n + A}{2}, & \text{以概率 } p_A; \\ \frac{Z_n + B}{2}, & \text{以概率 } p_B; \\ \frac{Z_n + C}{2}, & \text{以概率 } p_C; \end{cases}$$

9.5 分形生成-IFS迭代

按照上述步骤迭代下去，最终得到的图形会使什么样子？



混沌游戏

当迭代次数在一百万次以上时，图形渐渐清晰。其实产生的图形是Sierpinski三角形的逼近图形！

9.5 分形生成-IFS迭代

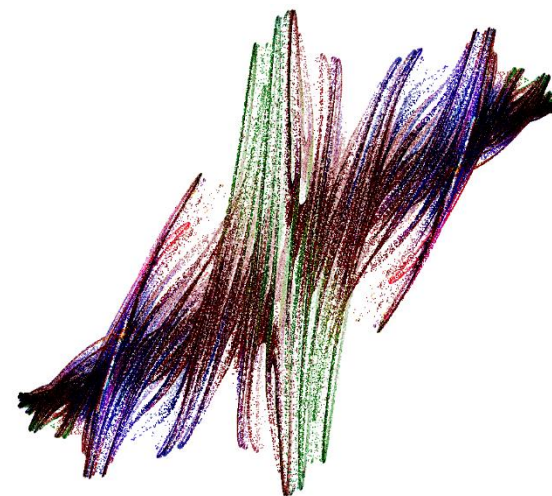
- IFS迭代(IFS--Iterated Function System)

取定 n 个仿射变换 $w_i(Z) = a_i Z + b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ 以及 n 个概率 p_1, p_2, \dots, p_n ($p_1 + \dots + p_n = 1$)

任给初值 Z_0 , 以概率 p_i 选取变换 w_i 进行迭代

$$Z_{k+1} = w_i(z_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

则点集 $\{Z_k\}$ 的聚点集合称为一个IFS吸引子。



9.5 分形生成-IFS迭代

1、设图形可视区域为

$$V = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$$

假设采用L级灰度的图像绘制，总迭代次数为N。

2、将V分成 $a \times b$ 的网格，格点为 (x_i, y_i) 用 $V_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ 表示矩形区域。用 μ_{ij} 表示在N次迭代中落入 V_{ij} 中点的个数。记 $\mu = \max \mu_{ij}$ 则像素 (i, j) 的灰度为

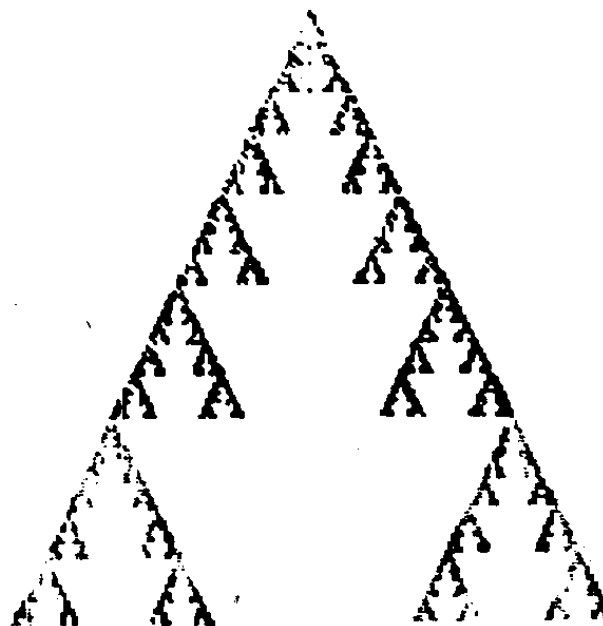
$$G(i, j) = \mu_{ij} / \mu \times L$$

9.5 分形生成-IFS迭代

Cantor 树

$$w_j(Z) = (Z + 2Z_j)/3, \quad j = 1, 2, 3$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$$



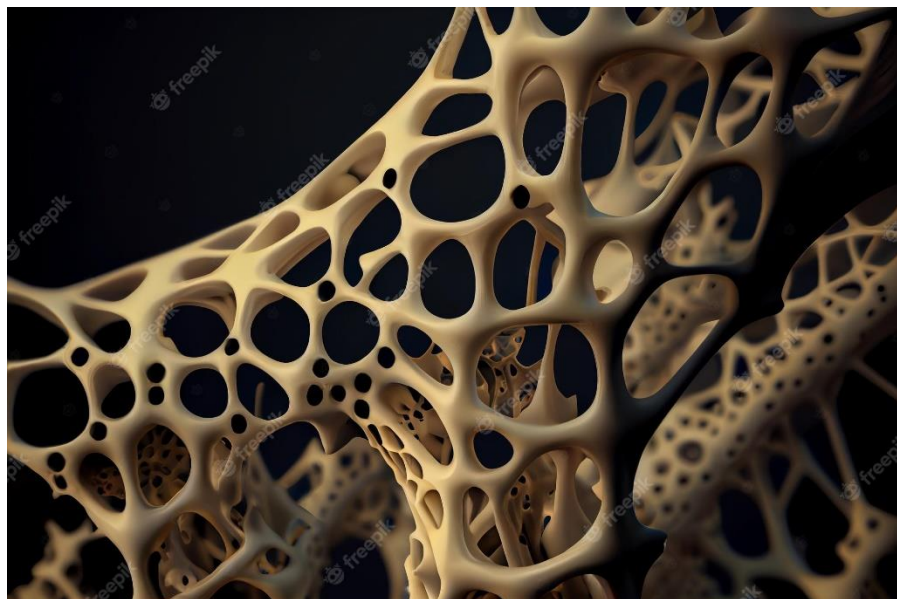
作业9.3

给定仿射变换 $\omega_1(Z) = sZ + 1$, $\omega_2(Z) = sZ - 1$, 以及相应的概率 $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, 其中 s, Z 均为复数。取 $s = 0.5 + 0.5i$, 绘制相应IFS的吸引子的图形。取不同的 s , 观察图形的变化。

9.6 分形应用

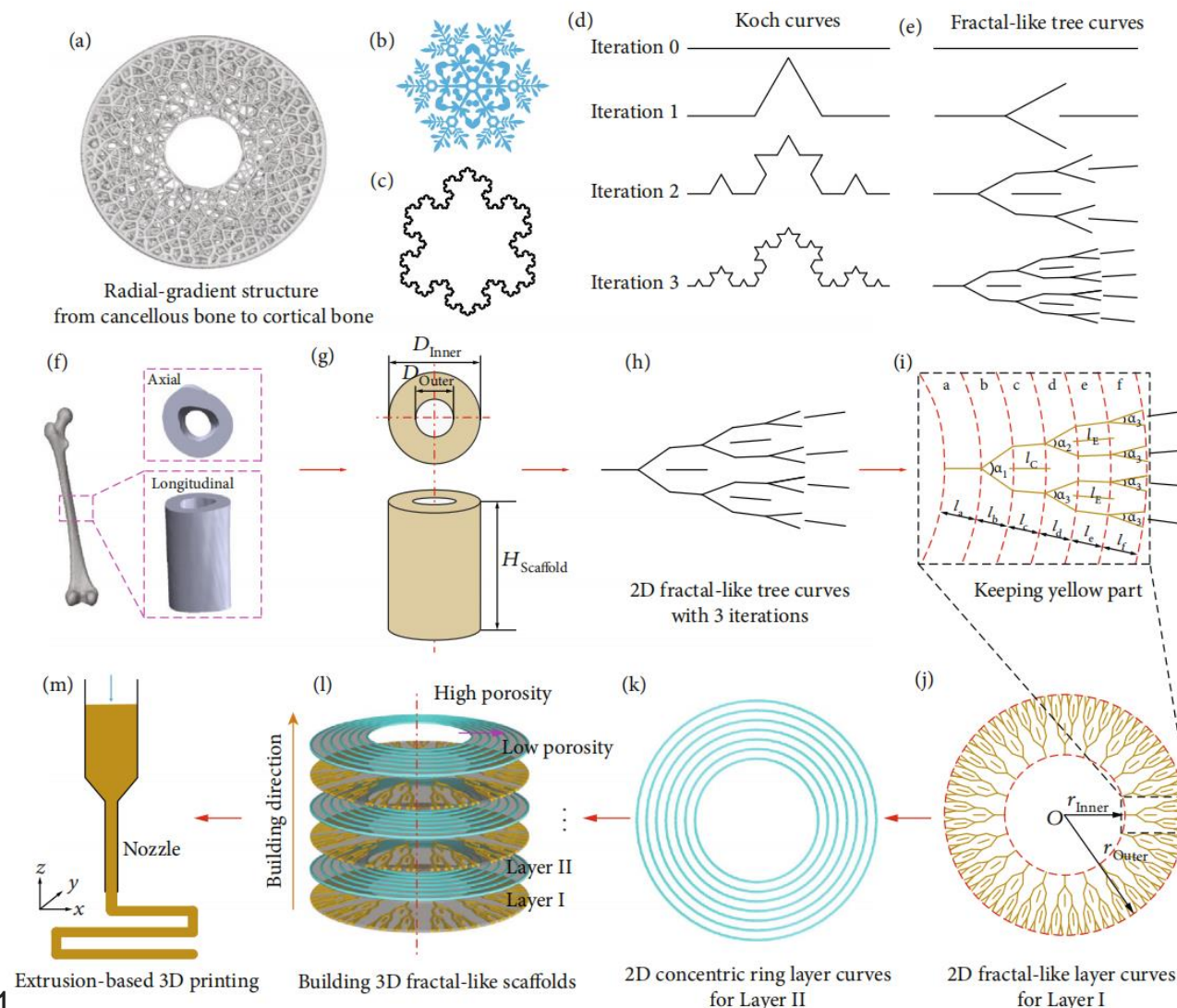
- 分形的应用领域
 - 1、数学：动力系统
 - 2、物理：布朗运动，流体力学中的湍流
 - 3、化学：酶的构造，
 - 4、生物：细胞的生长
 - 5、地质：地质构造
 - 6、天文：土星上的光环
- 其他：计算机，经济，社会，艺术等等

9.6 分形相关科研

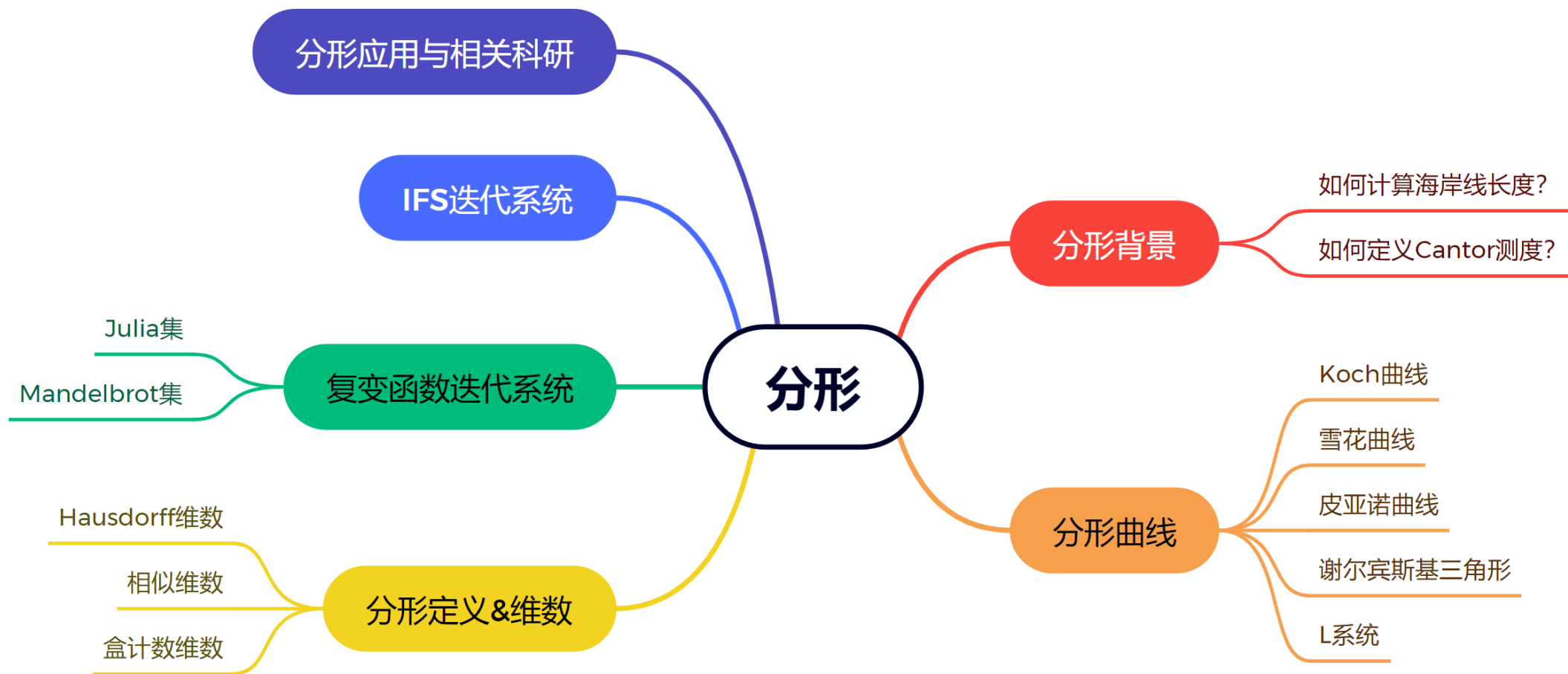


分形有机骨骼形状

Qu H, Han Z, Chen Z, et al. Fractal design boosts extrusion-based 3D printing of bone-mimicking radial-gradient scaffolds[J]. Research, 2021



总结



作业9.1

自定义L系统的三种规则，生成三种形态不同的分形树。

要求 (1) 给出每个自定义的L系统的三元素集合

(2) 迭代不同次数的分形树的截图

作业9.2

编写绘制Julia集的程序。对不同的参数 (p,q) : $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0.11, 0.66)$, $(-0.10281, 0.95723)$, $(-1.25, -0.01)$ 观察Julia集的变化。取Julia集的不同局部放大, 能否看到某种自相似现象?

作业9.3

给定仿射变换 $\omega_1(Z) = sZ + 1$, $\omega_2(Z) = sZ - 1$, 以及相应的概率 $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, 其中 s, Z 均为复数。取 $s = 0.5 + 0.5i$, 绘制相应IFS的吸引子的图形。取不同的 s , 观察图形的变化。



Q&A?

下节课内容 实验十：混沌

翟晓雅

Email: xiaoyazhai@ustc.edu.cn

Homepage: <https://xiaoyazhai.github.io/>

Lab: <http://gcl.ustc.edu.cn/>

