#001108

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

数学实验

实验十一：线性规划与整数规划

翟晓雅

Email: xiaoyazhai@ustc.edu.cn

Homepage: https://xiaoyazhai.github.io/

实验目的

- 了解线性规划，整数规划问题

- 能用matlab方法针对优化问题进行求解

11.1 线性规划问题

在人们的生产实践中，经常会遇到如何利用现有资源来安排生产，以取得最大经济效益的问题。此类问题构成了运筹学的一个重要分支—数学规划，而线性规划(Linear Programming 简记 LP)则是数学规划的一个重要分支。

自从 1947 年 G. B. Dantzig 提出求解线性规划的单纯形方法以来，线性规划在理论上趋向成熟，在实用中日益广泛与深入。

11.1 线性规划问题

例 1 某机床厂生产甲、乙两种机床，每台销售后的利润分别为 4000 元与 3000 元。生产甲机床需用 A、B 机器加工，加工时间分别为每台 2 小时和 1 小时；生产乙机床需用 A、B、C 三种机器加工，加工时间为每台各一小时。若每天可用于加工的机器时数分别为 A 机器 10 小时、B 机器 8 小时和 C 机器 7 小时，问该厂应生产甲、乙机床各几台，才能使总利润最大？

设该厂生产x_1台甲机床和x_2乙机床时总利润最大，则 x_1, x_2应满足

（目标函数）max $\quad z = 4x_1 + 3x_2$

$$\text{s.t.（约束条件）}\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 \le 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

⇒ 线性规划问题

11.1 线性规划问题

线性规划的 Matlab 标准形式

$$\min_{x} c^T x$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax \le b \\ Aeq \cdot x = beq \\ lb \le x \le ub \end{cases}$$

其中 c 和 x 为 n 维列向量，A、Aeq 为适当维数的矩阵，b、beq 为适当维数的列向量。

例如线性规划

$$\max_{x} c^T x \quad \text{s.t.} \quad Ax \ge b$$

的 Matlab 标准型为

$$\min_{x} -c^T x \quad \text{s.t.} \quad -Ax \le -b$$

11.1 线性规划问题

一般线性规划问题的（数学）标准型为

$$
\min_{x} c^T x
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} Ax \le b \\ Aeq \cdot x = beq \\ lb \le x \le ub \end{cases}
$$

可行解：满足约束条件的解 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，称为线性规划问题的可行解，而使目标函数达到最大值的可行解叫**最优解**。

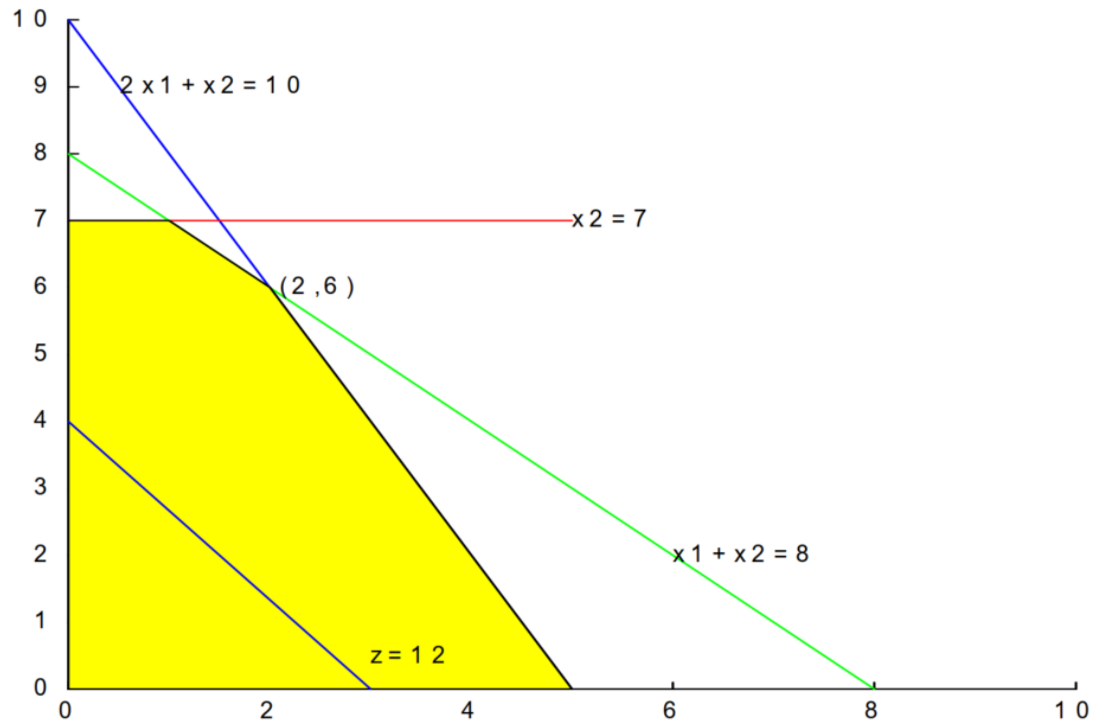
可行域：所有可行解构成的集合称为问题的可行域，记为 R。

11.1 线性规划问题

例1:

（目标函数） max $\quad z=4x_1+3x_2$

$$\text{s.t.（约束条件）}\begin{cases}2x_1+x_2\le 10\\ x_1+x_2\le 8\\ x_2\le 7\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$



11.1 线性规划问题

一些结论:

(1) 可行域 R 可能会出现多种情况。 R 可能是空集也可能是非空集合，当 R 非空时，它必定是若干个半平面的交集（除非遇到空间维数的退化）。 R 既可能是有界区域，也可能是无界区域。

(2) 在 R 非空时， 线性规划既可以存在有限最优解， 也可以不存在有限最优解（其目标函数值无界）。

(3) 若线性规划存在有限最优解，则必可找到具有最优目标函数值的可行域 R 的“顶点”。

11.1 线性规划问题

定义 **1** 称 n 维空间中的区域 R 为一凸集，若 $\forall x_1, x_2 \in R$ 及 $\forall \lambda \in (0,1)$，有$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in R$。

定义 **2** 设 R 为 n 维空间中的一个凸集， R 中的点 x 被称为 R 的一个极点，则不存在 $x_1, x_2 \in R$ 及$\lambda \in (0,1)$，使得 $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$。

定义 **1** 说明凸集中任意两点的连线必在此凸集中；
定义 **2** 说明若 $\boldsymbol{x}$ 是凸集 $\boldsymbol{R}$的一个极点，则 $\boldsymbol{x}$ 不能位于 $\boldsymbol{R}$ 中任意两点的连线上。

11.1 线性规划问题

求解线性规划的MATLAB解法：

Matlab 中线性规划的标准型为

$$\min_{x} c^T x$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax \le b \\ Aeq \cdot x = beq \\ lb \le x \le ub \end{cases}$$

基本函数形式为 linprog(c,A,b)，它的返回值是向量 x 的值。还有其它的一些函数调用形式（在 Matlab 指令窗运行 help linprog 可以看到所有的函数调用形式），如：

[x,fval]=linprog(c,A,b,Aeq,beq,LB,UB,X_0,OPTIONS)

这里 fval 返回目标函数的值，LB 和 UB 分别是变量 x 的下界和上界，x_0 是 x 的初始值，OPTIONS 是控制参数。

11.1 线性规划问题

optimoptions

创建优化选项

语法

```
options = optimoptions(SolverName)
options = optimoptions(SolverName,Name,Value)
```

```
options = optimoptions(oldoptions,Name,Value)
```

```
options = optimoptions(SolverName,oldoptions)
```

```
options = optimoptions(prob)
options = optimoptions(prob,Name,Value)
```

```
options = optimoptions('fmincon')
```

```
options =
  fmincon options:

   Options used by current Algorithm ('interior-point'):
   (Other available algorithms: 'active-set', 'sqp', 'sqp-legacy', 'trust-region-reflective')

   Set properties:
     No options set.

   Default properties:
                    Algorithm: 'interior-point'
           BarrierParamUpdate: 'monotone'
               CheckGradients: 0
          ConstraintTolerance: 1.0000e-06
                      Display: 'final'
         EnableFeasibilityMode: 0
      FiniteDifferenceStepSize: 'sqrt(eps)'
         FiniteDifferenceType: 'forward'
         HessianApproximation: 'bfgs'
                   HessianFcn: []
           HessianMultiplyFcn: []
                  HonorBounds: 1
       MaxFunctionEvaluations: 3000
                MaxIterations: 1000
               ObjectiveLimit: -1.0000e+20
          OptimalityTolerance: 1.0000e-06
                    OutputFcn: []
                      PlotFcn: []
                 ScaleProblem: 0
    SpecifyConstraintGradient: 0
     SpecifyObjectiveGradient: 0
```

```
options = optimoptions(@fmincon,'Algorithm','interior-point','Display','off');
```

11.1 线性规划问题

例2：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

$$2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 12$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

```
c=[2;3;-5];
a=[-2,5,-1;1,3,1]; b=[-10;12];
aeq=[1,1,1];
beq=7;
x=linprog(-c,a,b,aeq,beq,zeros(3,1))
value=c'*x
```

```
>> Lecture11

Optimal solution found.


x =

    6.4286
    0.5714
         0


value =

   14.5714
```

11.1 线性规划问题

例3：

$$
\min z = 2x_1 + 3x_2 + x_3
$$

$$
\begin{cases}
x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8 \\
3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{cases}
$$

```
c=[2;3;1];
a=[1,4,2;3,2,0];
b=[8;6];
[x,y]=linprog(c,-a,-b,[],[],zeros(3,1))
```

```
>> Lecture11

Optimal solution found.


x =

    2.0000
         0
    3.0000


y =

     7
```

11.1 线性规划问题

很多看起来不是线性规划的问题也可以通过变换变成线性规划的问题来解决。

$$\begin{aligned} \min \quad & |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \\ \text{s.t.} \quad & Ax \le b \end{aligned}$$

其中$x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$，　A和b为相应维数的矩阵和向量。

$$\min_{x_i}\{\max_{y_i} |\varepsilon_i|\}$$

$$\varepsilon_i = x_i - y_i$$

11.1 线性规划问题

运输问题（产销平衡问题）

某商品有 m 个产地、n 个销地，各产地的产量分别为$a_1,\cdots,a_m$，各销地的需求量分别为$b_1,\cdots,b_n$。若该商品由i 产地运到 j 销地的单位运价为c_{ij}，问应该如何调运才能使总运费最省?

➡ 引入变量x_{ij}，其取值为由i 产地运往 j 销地的该商品数量

11.1 线性规划问题

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = 1,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = 1,2,\cdots,n \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

表上作业法（由康托洛维奇和希奇柯克两人独立地提出，简称康—希表上作业法）

11.1 线性规划问题

指派问题

拟分配 n 人去干 n 项工作，每人干且仅干一项工作，若分配第i 人去干第 j项工作，需花费c_{ij}单位时间，问应如何分配工作才能使工人花费的总时间最少？

矩阵$C=(c_{ij})$，C被称为指派问题的系数矩阵。

引入变量x_{ij}，若分配i 干 j 工作，则取 $x_{ij}=1$，否则取 $x_{ij}=0$ 。

11.1 线性规划问题

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$x_{ij} = 0 \text{或} 1$$

→ 0-1整数规划问题

↓

约束方程组的稀疏矩阵十分特殊！

指派问题的可行解可以用一个矩阵表示，其每行每列均有且只有一个元素为1，其余元素均为 0；可以用$1,\ldots,n$ 中的一个置换表示。

11.1 线性规划问题

指派问题的匈牙利算法

算法主要依据以下事实：如果系数矩阵 $C = (c_{ij})$ 一行（或一列）中每一元素都加上或减去同一个数，得到一个新矩阵 $B = (b_{ij})$，则以 C 或 B 为系数矩阵的指派问题具有相同的最优指派。

11.1 线性规划问题

求解指派问题，其系数矩阵为：

$$C=\begin{bmatrix}16 & 15 & 19 & 22\\ 17 & 21 & 19 & 18\\ 24 & 22 & 18 & 17\\ 17 & 19 & 22 & 16\end{bmatrix} \Rightarrow B_2=\begin{bmatrix}1 & 0^* & 3 & 7\\ 0^* & 4 & 1 & 1\\ 7 & 5 & 0^* & 0\\ 1 & 3 & 5 & 0^*\end{bmatrix}$$

11.1 线性规划问题

求解指派问题，其系数矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 & 10 & 3 \\ 8 & 7 & 2 & 9 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 7 & 5 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 10 & 6 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

指派问题等 0 -1 整数规划问题，可以直接利用 Matlab 的函数 **bintprog** 进行求解。

```
c=[3 8 2 10 3;8 7 2 9 7;6 4 2 7 5
8 4 2 3 5;9 10 6 9 10];
c=c(:);
a=zeros(10,25);
for i=1:5
a(i,(i-1)*5+1:5*i)=1;
a(5+i,i:5:25)=1;
end
b=ones(10,1);
[x,y]=bintprog(c,[],[],a,b);
x=reshape(x,[5,5]),y
```

11.1 线性规划问题

对偶理论与参数分析

$$\text{(P)}\qquad \max\quad c^T x \qquad \text{s.t.}\quad Ax \le b,\ x \ge 0$$

$$\text{(D)}\qquad \min\quad b^T y \qquad \text{s.t.}\quad A^T y \ge c,\ y \ge 0$$

（P）为原问题，（D）为对偶问题

不太严谨地说，对偶问题可被看作是原始问题的“行列转置”：

（1）　原始问题中的第 j 列系数与其对偶问题中的第 j 行的系数相同；

（2）　原始目标函数的各个系数行与其对偶问题右侧的各常数列相同；

（3）　原始问题右侧的各常数列与其对偶目标函数的各个系数行相同；

（4）　在这一对问题中，不等式方向和优化方向相反。

11.1 线性规划问题

考虑线性规划：

$$\min \quad c^T x \qquad \text{s.t.} \quad Ax = b, x \geq 0$$

把其中的等式约束变成不等式约束，可得

$$\min \quad c^T x \qquad \text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}, x \geq 0$$

它的对偶问题是

$$\max \quad \begin{bmatrix} b^T & -b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad \text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} A^T & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \leq c$$

11.1 线性规划问题

原问题和对偶的对偶约束之间的关系：

$$
\begin{array}{llll}
 & \text{min} & & \text{max} \\
\text{变量} & \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \text{无限制} \end{cases} & \text{行约束} & \begin{cases} \leq 0 \\ \geq 0 \\ = 0 \end{cases} \\
\text{行约束} & \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \\ = 0 \end{cases} & \text{变量} & \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \text{无限制} \end{cases}
\end{array}
$$

11.1 线性规划问题

对偶问题的基本性质

1° 对称性：对偶问题的对偶是原问题。

2° 弱对偶性：若 $\bar{x}$ 是原问题的可行解，$\bar{y}$ 是对偶问题的可行解。则存在 $c^T\bar{x} \le b^T\bar{y}$。

3° 无界性：若原问题（对偶问题）为无界解，则其对偶问题（原问题）无可行解。

4° 可行解是最优解时的性质：设 $\hat{x}$ 是原问题的可行解，$\hat{y}$ 是对偶问题的可行解，当 $c^T\hat{x} = b^T\hat{y}$ 时，$\hat{x},\hat{y}$ 是最优解。

5° 对偶定理：若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解；且目标函数值相同。

6° 互补松弛性：若 $\hat{x},\hat{y}$ 分别是原问题和对偶问题的最优解，则

$$\hat{y}^T(A\hat{x}-b)=0,\quad \hat{x}^T(A^T\hat{y}-c)=0$$

11.1 线性规划问题

已知线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \omega = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \ge 4 \\
& 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \ge 3 \\
& x_j \ge 0, \quad j = 1,2,\cdots,5
\end{aligned}
$$

已知其对偶问题的最优解为 $y_1^* = \frac{4}{5}, y_2^* = \frac{3}{5}; z = 5$ 。试用对偶理论找出原问题的最优解。

11.1 线性规划问题

已知线性规划问题

$$\min \quad \omega = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\cdots,5 \end{aligned}$$

解　先写出它的对偶问题

$$\max \quad z = 4y_1 + 3y_2$$

$$y_1 + 2y_2 \leq 2 \qquad ①$$

$$y_1 - y_2 \leq 3 \qquad ②$$

$$2y_1 + 3y_3 \leq 5 \qquad ③$$

$$y_1 + y_2 \leq 2 \qquad ④$$

$$3y_1 + y_2 \leq 3 \qquad ⑤$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

将 y_1^*, y_2^* 的值代入约束条件，得②，③，④为严格不等式；由互补松弛性得 $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$。因 $y_1^*, y_2^* > 0$；原问题的两个约束条件应取等式，故有

$$x_1^* + 3x_5^* = 4$$

$$2x_1^* + x_5^* = 3$$

求解后得到 $x_1^* = 1, x_5^* = 1$；故原问题的最优解为

$$X^* = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]'; \omega^* = 5 \quad 。$$

11.1 线性规划问题

例 1 某机床厂生产甲、 乙两种机床， 每台销售后的利润分别为 4000 元与 3000 元。生产甲机床需用 A、 B 机器加工，加工时间分别为每台 2 小时和 1 小时；生产乙机床需用 A、 B、 C 三种机器加工，加工时间为每台各一小时。若每天可用于加工的机器时数分别为 A 机器 10 小时、 B 机器 8 小时和C 机器 7 小时，问该厂应生产甲、乙机床各几台，才能使总利润最大？

设该厂生产x_1台甲机床和x_2乙机床时总利润最大， 则 x_1, x_2应满足

（目标函数） $\max \quad z = 4x_1 + 3x_2$

s.t.（约束条件） $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 \le 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

⇨ 线性规划问题

11.1 线性规划问题

建模参数对模型最优解的影响

在以前讨论线性规划问题时，假定a_{ij}, b_i, c_j都是常数。但实际上这些系数往往是估计值和预测值。如市场条件一变，c_j值就会变化；a_{ij}往往是因工艺条件的改变而改变；b_i是根据资源投入后的经济效果决定的一种决策选择。因此提出这样两个问题：当这些系数有一个或几个发生变化时，已求得的线性规划问题的最优解会有什么变化；或者这些系数在什么范围内变化时，线性规划问题的最优解或最优基不变。这里我们就不讨论了。

11.1 线性规划问题

参数线性规划

参数线性规划是研究a_{ij},b_i,c_j这些参数中某一参数连续变化时，使最优解发生变化的各临界点的值。即把某一参数作为参变量，而目标函数在某区间内是这参变量的线性函数，含这参变量的约束条件是线性等式或不等式。因此仍可用单纯形法和对偶单纯形法进行分析参数线性规划问题。

11.1 线性规划问题

用 Matlab 求解下列规划问题：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = |x_1| + 2|x_2| + 3|x_3| + 4|x_4| \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\
& x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\
& x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

11.1 线性规划问题

- 线性回归是一种常用的数理统计方法，这个方法要求对图上的一系列点$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$选配一条合适的直线拟合。方法通常是先定直线方程为$y = a + bx$，然后按某种准则求定$a,b$。通常这个准则为最小二乘法，但也可用其他准则。试根据以下准则建立这个问题的线性规划模型：

$$\min \sum_{i=1}^{n} | y_i - (a + bx_i) |$$

11.2 整数规划问题

规划中的变量（部分或全部）限制为整数时，称为**整数规划**。

若在线性规划模型中，变量限制为整数，则称为**整数线性规划**。

目前还没有一种方法能有效地求解一切整数规划。

11.2 整数规划问题

- 对于整数线性规划模型大致可分为两类:

1） 变量全限制为整数时，称**纯（完全）整数规划**。

2） 变量部分限制为整数的，称**混合整数规划**。

11.2 整数规划问题

- 整数规划特点

(I)原线性规划有最优解， 当自变量限制为整数后， 其整数规划解出现下述情况：

①原线性规划最优解全是整数，则整数规划最优解与线性规划最优解一致。

②整数规划无可行解。

③有可行解（当然就存在最优解），但最优解值变差。

(II)整数规划最优解不能按照实数最优解简单取整而获得。

11.2 整数规划问题

- 求解方法分类:

（i）分枝定界法—可求纯或混合整数线性规划。

（ii）割平面法—可求纯或混合整数线性规划。

（iii）隐枚举法—求解“0-1”整数规划:

①过滤隐枚举法;

②分枝隐枚举法。

（iv）匈牙利法—解决指派问题（“0-1”规划特殊情形）。

（v）蒙特卡洛法—求解各种类型规划。

11.2 整数规划问题

分支定界法

- 对有约束条件的最优化问题（其可行解为有限数）的所有可行解空间恰当地进行系统搜索，这就是分枝与定界内容。

- 把全部可行解空间反复地分割为越来越小的子集，称为**分枝**；
- 对每个子集内的解集计算一个目标下界（对于最小值问题）称为**定界**。
- 在每次分枝后，凡是界限超出已知可行解集目标值的那些子集不再进一步分枝许多子集可不予考虑，这称**剪枝**。

11.2 整数规划问题

分支定界法

- 分枝定界法可用于解纯整数或混合的整数规划问题。

- 目前已成功地应用于求解生产进度问题、旅行推销员问题、工厂选址问题、背包问题及分配问题等。

11.2 整数规划问题

分支定界法

- 设有最大化的整数规划问题 A， 与它相应的线性规划为问题 B， 从解问题 B 开始，若其最优解不符合 A 的整数条件，那么 B 的最优目标函数必是 A 的最优目标函数 z^* 的上界，记作 z； 而 A 的任意可行解的目标函数值将是 z^* 的一个下界 z 。分枝定界法就是将 B 的可行域分成子区域的方法。逐步减小 z 和增大 z， 最终求到 z^* 。

11.2 整数规划问题

将要求解的整数规划问题称为问题 A，将与它相应的线性规划问题称为问题 B。

（i）解问题 B 可能得到以下情况之一：

（a）B 没有可行解，这时 A 也没有可行解，则停止.

（b）B 有最优解，并符合问题 A 的整数条件，B 的最优解即为 A 的最优解，则停止。

（c）B 有最优解，但不符合问题 A 的整数条件，记它的目标函数值为 $\bar{z}$。

（ii）用观察法找问题 A 的一个整数可行解，一般可取 $x_j = 0, j = 1,\cdots,n$，试探，求得其目标函数值，并记作 $\underline{z}$。以 z^* 表示问题 A 的最优目标函数值；这时有

$$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$$

进行迭代。

11.2 整数规划问题

第一步：分枝，在 B 的最优解中任选一个不符合整数条件的变量 x_j，其值为 b_j，以 $[b_j]$ 表示小于 b_j 的最大整数。构造两个约束条件

$$x_j \le [b_j] \quad 和 \quad x_j \ge [b_j]+1$$

将这两个约束条件，分别加入问题 B，求两个后继规划问题 B_1 和 B_2。不考虑整数条件求解这两个后继问题。

定界，以每个后继问题为一分枝标明求解的结果，与其它问题的解的结果中，找出最优目标函数值最大者作为新的上界 $\bar{z}$。从已符合整数条件的各分支中，找出目标函数值为最大者作为新的下界 $\underline{z}$，若无作用 $\underline{z}$ 不变。

第二步：比较与剪枝，各分枝的最优目标函数中若有小于 $\underline{z}$ 者，则剪掉这枝，即以后不再考虑了。若大于 $\underline{z}$，且不符合整数条件，则重复第一步骤。一直到最后得到 $z^* = \underline{z}$ 为止。得最优整数解 $x_j^*, j=1,\cdots,n$。

11.2 整数规划问题

分支定界法

求解下述整数规划

$$\text{Max} \quad z = 40x_1 + 90x_2$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \le 70 \\ x_1, x_2 \ge 0 \quad \text{且为整数} \end{cases}$$

11.2 整数规划问题

0-1整数规划问题

- 0 −1 型整数规划是整数规划中的特殊情形，它的变量x_j 仅取值 0 或 1。这时 x_j 称为 0 −1 变量，或称二进制变量。x_j仅取值 0 或 1 这个条件可由下述约束条件：$0 \leqslant x_j \leqslant 1$，整数所代替，是和一般整数规划的约束条件形式一致的。

11.2 整数规划问题

0-1整数规划问题

- 某公司拟在市东、西、南三区建立门市部。拟议中有 7 个位置（点）A_i $(i = 1,2,\cdots,7)$ 可供选择。规定

在东区。由 A_1, A_2, A_3 三个点中至多选两个;

在西区。由 A_4, A_5 两个点中至少选一个;

在南区，由 A_6, A_7 两个点中至少选一个。

如选用 A_i 点，设备投资估计为b_i 元，每年可获利润估计为 c_i 元，但投资总额不能超过 B 元。问应选择哪几个点可使年利润为最大?

11.2 整数规划问题

0-1整数规划问题

解题时先引入 $0-1$ 变量 $x_i (i=1,2,\cdots,7)$

令

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{当}A_i\text{点被选中,} \\ 0, & \text{当}A_i\text{点没被选中.} \end{cases} \quad i=1,2,\cdots,7.$$

$$\text{Max} \quad z=\sum_{i=1}^{7} c_i x_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{7} b_i x_i \le B \\ x_1+x_2+x_3 \le 2 \\ x_4+x_5 \ge 1 \\ x_6+x_7 \ge 1, \qquad x_i = 0\text{或}1 \end{cases}$$

过滤隐枚举法

11.2 整数规划问题

蒙特卡洛法（随机取样法）

- 当自变量维数很大和取值范围很宽情况下，企图用显枚举法（即穷举法）计算出最优值是不现实的，但是应用概率理论可以证明，在一定的计算量的情况下，完全可以得出一个满意解。

11.2 整数规划问题

蒙特卡洛方法算例

已知非线性整数规划为：

$$\text{Max} \quad z = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_5^2 - 8x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 - 2x_5$$

$$\begin{cases} 0 \le x_i \le 99 \quad (i = 1, \cdots, 5) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 400 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 \le 800 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 \le 200 \\ x_3 + x_4 + 5x_5 \le 200 \end{cases}$$

11.2 整数规划问题

非线性整数规划问题

- 分析随机取样采集106 个点计算时，应用概率理论来估计一下可信度。不失一般性，假定一个整数规划的最优点不是孤立的奇点。
- 假设目标函数落在高值区的概率分别为 0.01， 0.00001，则当计算106 个点后，有任一个点能落在高值区的概率分别为

$$1-0.99^{1000000} \approx 0.99\cdots99(100\text{多位}),$$
$$1-0.99999^{1000000} \approx 0.999954602\text{。}$$

11.2 整数规划问题

已知非线性整数规划为：

$$\text{Max}\ \ z=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_4^2+2x_5^2-8x_1-2x_2-3x_3-x_4-2x_5$$

$$\begin{cases} 0\le x_i\le 99 \quad (i=1,\cdots,5) \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\le 400 \\ x_1+2x_2+2x_3+x_4+6x_5\le 800 \\ 2x_1+x_2+6x_3\le 200 \\ x_3+x_4+5x_5\le 200 \end{cases}$$

```
function [f,g]=mengte(x);
f=x(1)^2+x(2)^2+3*x(3)^2+4*x(4)^2+2*x(5)-8*x(1)-2*x(2)-3*x(3)-...
x(4)-2*x(5);
g=[sum(x)-400
x(1)+2*x(2)+2*x(3)+x(4)+6*x(5)-800
2*x(1)+x(2)+6*x(3)-200
x(3)+x(4)+5*x(5)-200];
```

```
rand('state',sum(clock));
p0=0;
tic
for i=1:10^6
x=99*rand(5,1);
x1=floor(x);x2=ceil(x);
[f,g]=mengte(x1);
if sum(g<=0)==4
if p0<=f
x0=x1;p0=f;
end
end
[f,g]=mengte(x2);
if sum(g<=0)==4
if p0<=f
x0=x2;p0=f;
end
end
end
x0,p0
toc
```

总结

- 线性&整数规划
  - 线性规划
    - 基本定义，标准形式，可行域，可行解，凸集，极值点
    - MATLAB标准型求解
    - 运输问题/产销平衡问题
    - 指派问题 —— 匈牙利算法
    - 对偶理论与参数分析
  - 整数规划
    - 基本概念与特点
    - 求解方法
      - 分枝定界法
      - 割平面法
      - 隐枚举法
        - 过滤隐枚举法
        - 分枝隐枚举法
      - 匈牙利法
      - 蒙特卡洛法

Q&A?

下节课内容

实验十二：非线性规划问题

翟晓雅
Email: xiaoyazhai@ustc.edu.cn
Homepage: https://xiaoyazhai.github.io/
Lab: http://gcl.ustc.edu.cn/