中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

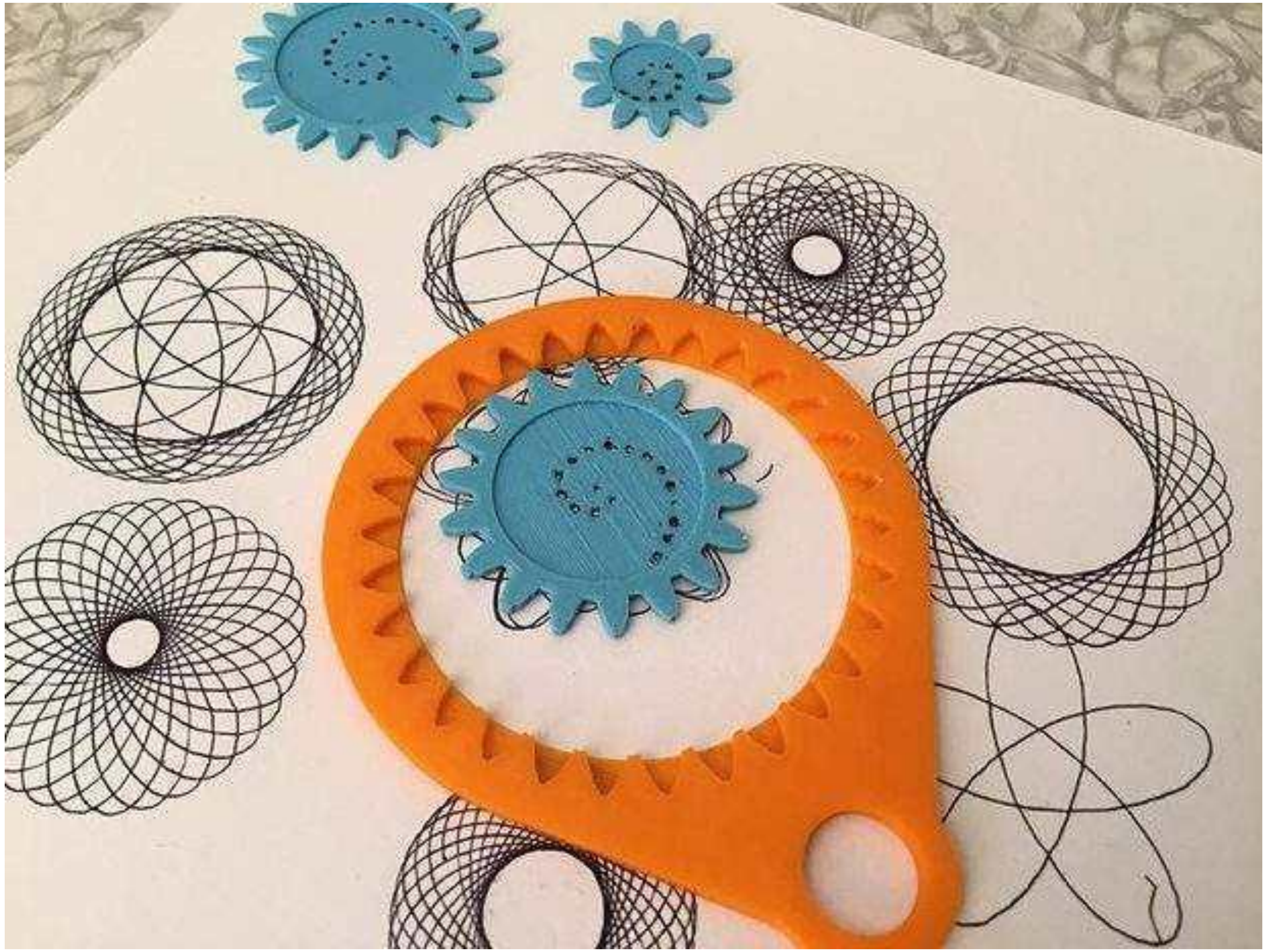
数学实验

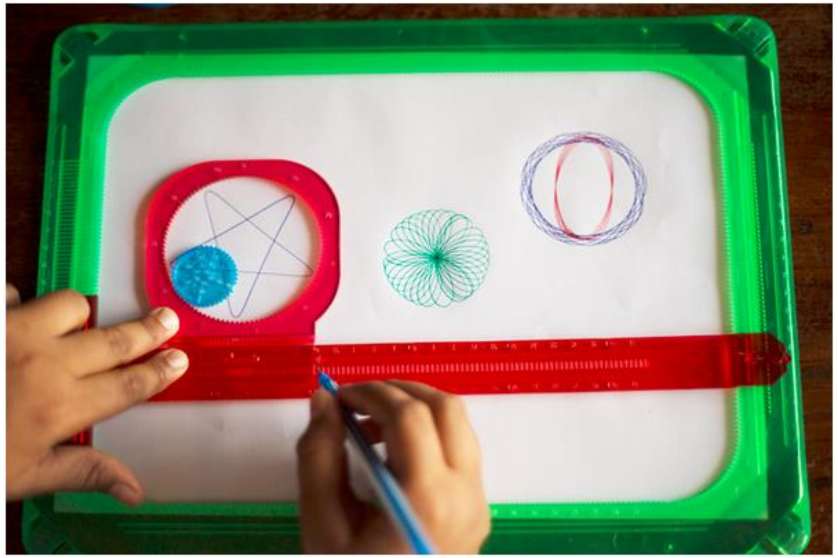
实验七：摆线

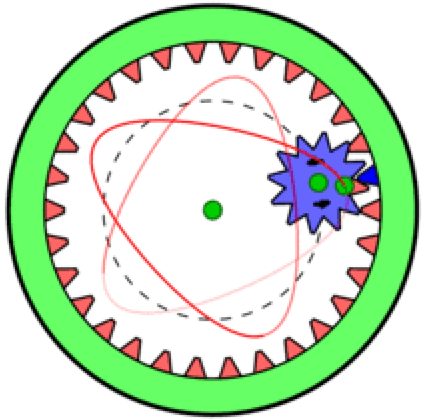
翟晓雅

Email: xiaoyazhai@ustc.edu.cn
Homepage: https://xiaoyazhai.github.io/

从数学建模的角度来探究图形的生成过程

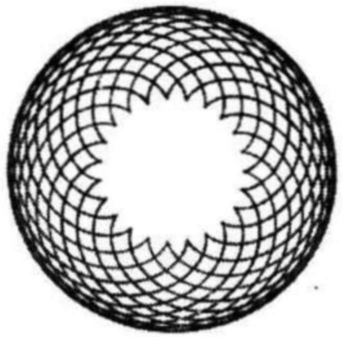
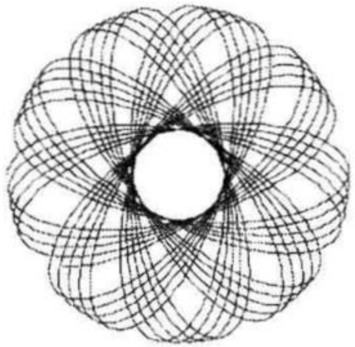




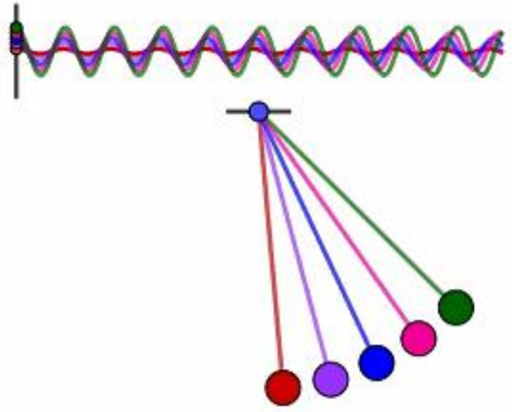


实验目的

- 本实验研究当圆沿着不同曲线滚动时，相对于圆位置固定的点生成的轨迹曲线，给出方程，绘制图形
- 选择不同的图案，不同的曲线，不同的位置，观察得到不同的曲线形状
- 动画的绘制

7.1摆线的由来

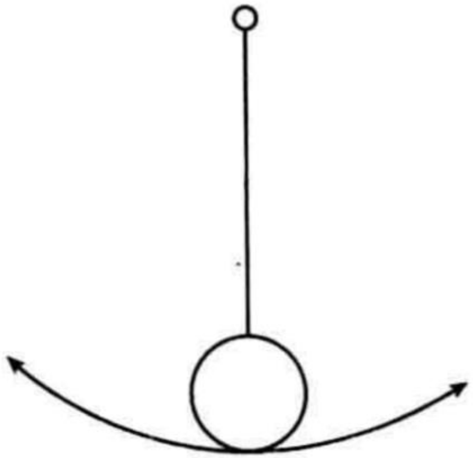


- 如何准确计时?

意大利科学家伽利略1630年通过观察教堂吊灯的来回摆动

是否可以利用单摆来制作精确的时钟?

伽利略研究的单摆是在一段圆弧上摆动的，也称为圆周摆。



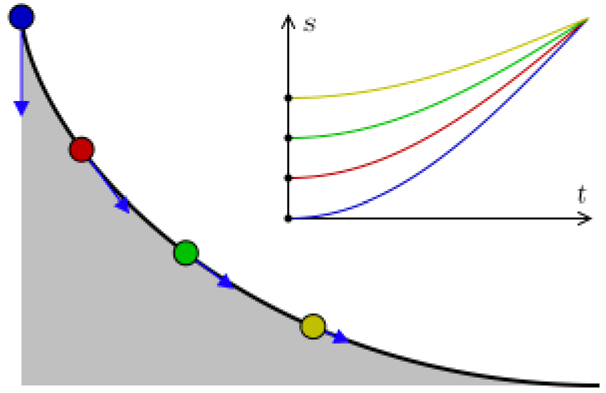
荷兰科学家希望找出一条曲线，使摆沿着曲线摆动时，摆动周期完全与摆幅无关。在研究过程中，专注于纯粹的数学曲线，把符合要求的曲线称为“**摆线**”或“**等时曲线**”或“**旋轮线**”

7.1摆线的由来

- 约翰伯努利在1696年提出最速降线问题

在一个斜面上，同时摆两条轨道，一条是直线，一条是曲线，起点高度以及终点高度都相同。两个质量大小一样的小球，同时从起点向下滑落（忽略摩擦力），哪条轨道上的小球先到达终点？

7.1摆线的由来

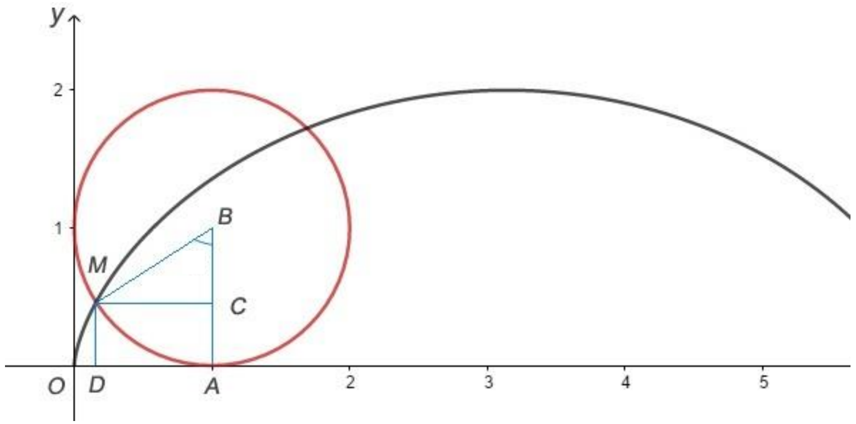


- 另外一个有意思的问题

一颗珠子从摆线上的任何位置滚动到摆线底部所用的时间是否是相等的?

答案是：是的！摆线的等时性。

7.2绘制不同的摆线



- 摆线参数方程的推导:

设点 M 的坐标为 (x,y) , 取 t (**弧度制**)为参数，那么只要求出 x 和 y 就能得到这个摆线的参数方程。根据点M 满足的几何条件，设开始时定点M在原点，圆滚动t角后与 X轴相切于点 A， 圆心在点 B。

$$\boxed{\begin{aligned} x &= OD = OA - DA = OA - MC = Rt - R\sin t = R(t - \sin t), \\ y &= DM = AC = AB - CB = R - R\cos t = R(1 - \cos t). \end{aligned}}$$

7.2绘制不同的摆线

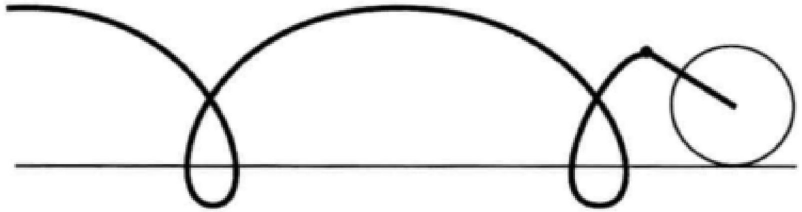
- 设动圆的半径为R，圆心至定点M的距离为d，通过建立适当的直角坐标系，可得定点随着圆滚动生成的曲线参数方程为：

$$\begin{cases} x = Rt - d\sin t\,, \\ y = R - d\cos t\,. \end{cases}$$

根据R和d的大小关系的不同，生成的图形有不同的名称。

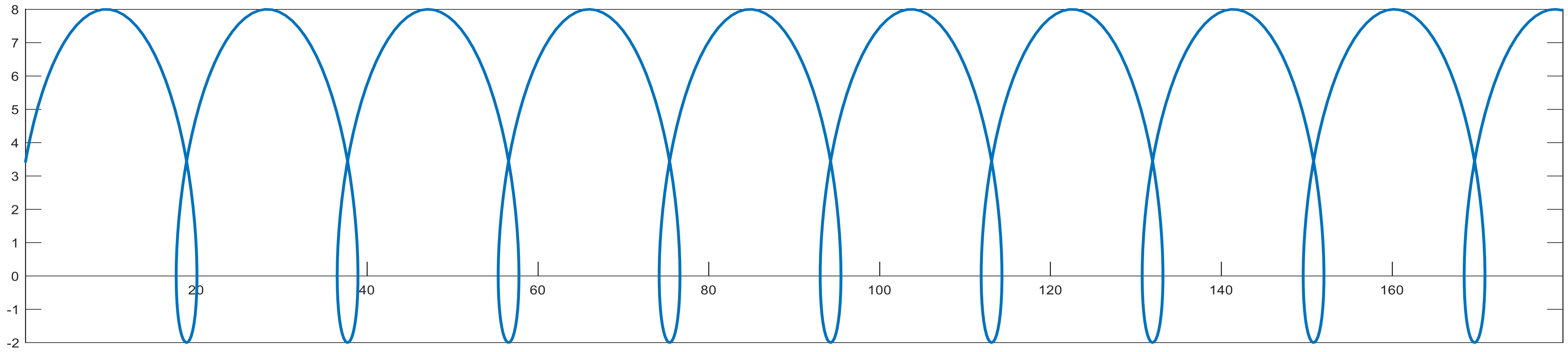
$$\begin{cases} \text{当}d>R\text{时，定点在圆外点随圆滚动生成的曲线为}\textbf{长幅旋轮线}\text{（}\textbf{长摆线}\text{）} \\ \text{当}d<R\text{时，定点在圆内点随圆滚动生成的曲线为}\textbf{短幅旋轮线}\text{（}\textbf{短摆线}\text{）} \\ \text{当}d=R\text{时，定点在圆上点随圆滚动生成的曲线为}\textbf{旋轮线}\text{（}\textbf{摆线}\text{）} \end{cases}$$

7.2绘制不同的摆线

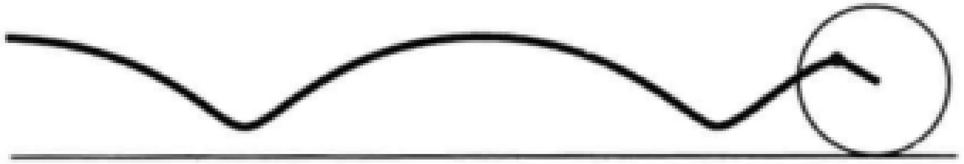


- 通过更改不同的R和d的数值，观察三种摆线形成过程

当d = 5, R = 3时

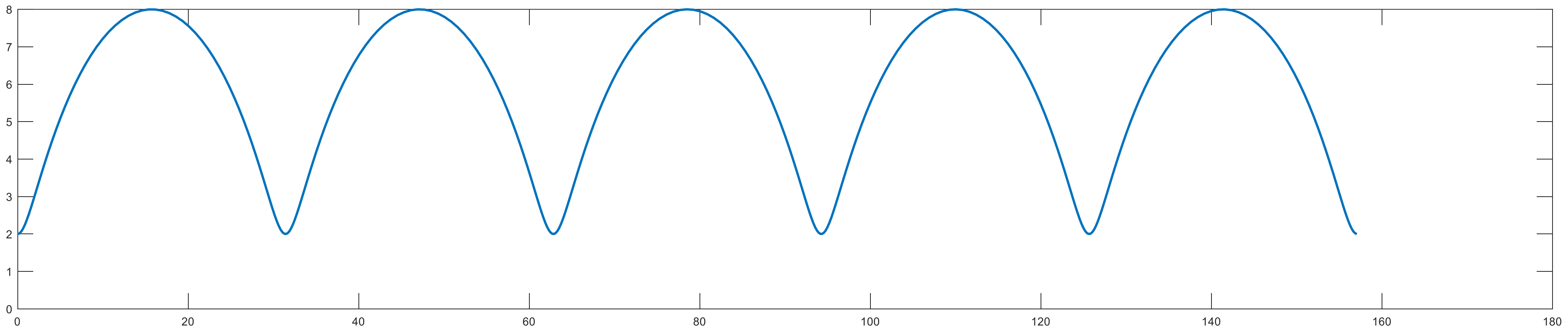


7.2绘制不同的摆线

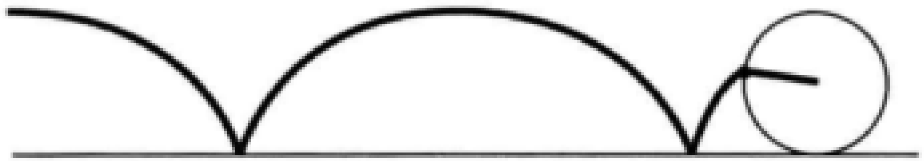


- 通过更改不同的R和d的数值，观察三种摆线形成过程

当d = 3, R = 5时

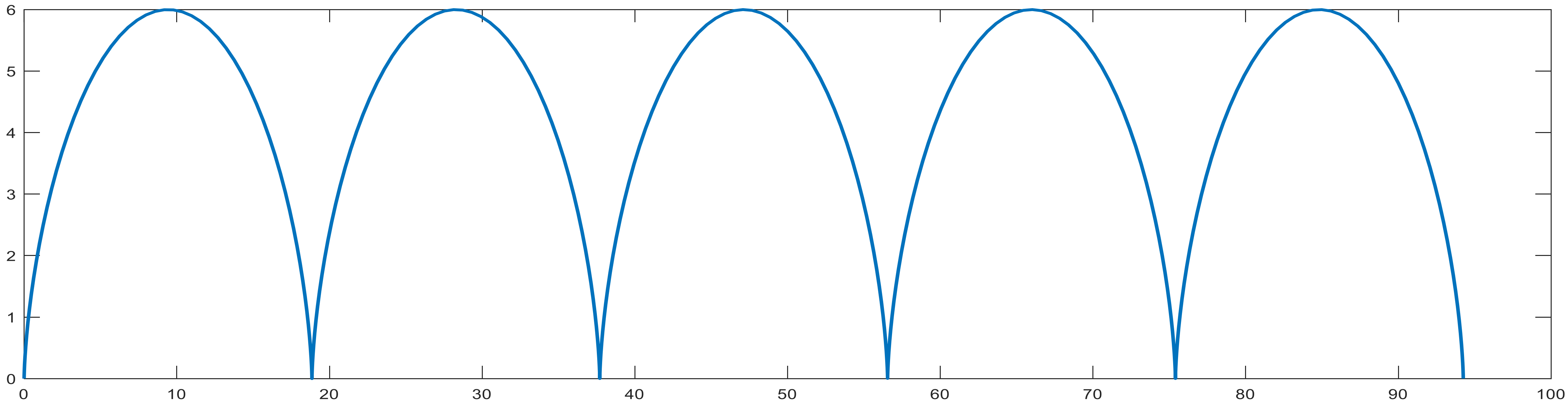


7.2绘制不同的摆线



- 通过更改不同的R和d的数值，观察三种摆线形成过程

当d = 5, R = 5时



7.2绘制不同的摆线

观察圆内旋轮线的生成过程

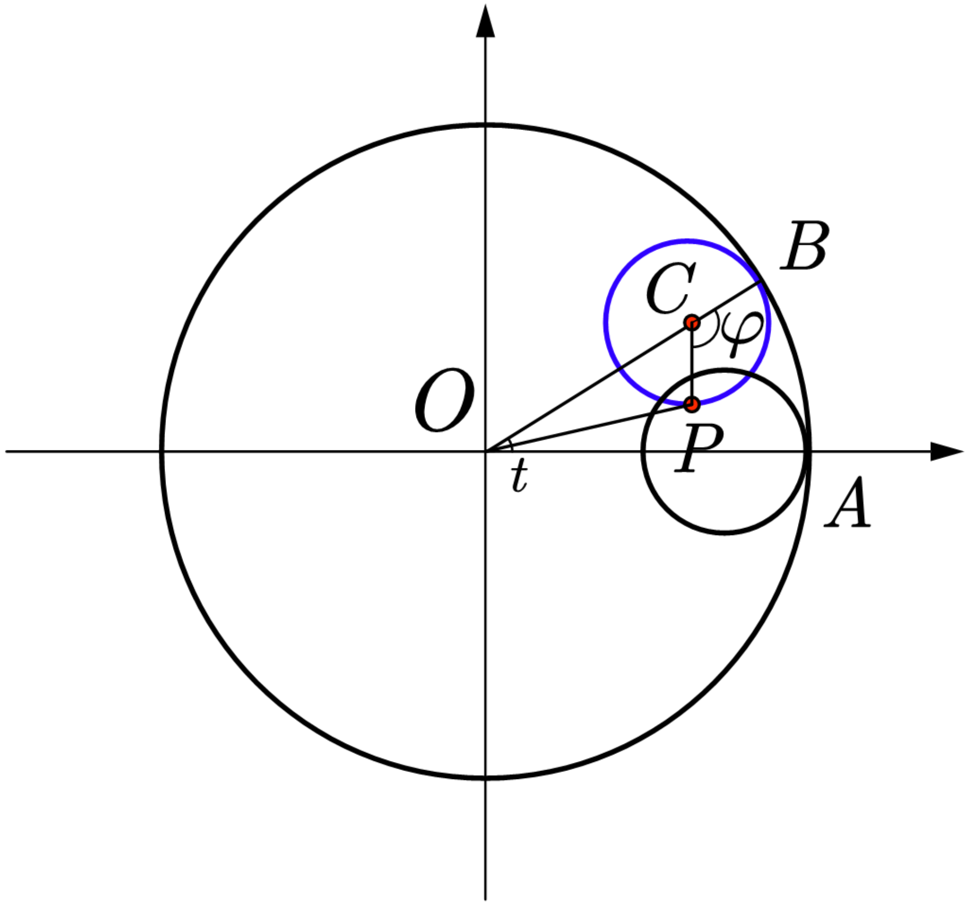
- 设定圆的半径为R，动圆半径为r，定点M到动圆圆心的距离为d，当动圆沿着定圆内侧滚动时，点M生成的曲线参数方程为：

$$\begin{cases} x = (R-r)\cos t + d\cos[\left(\frac{R}{r}-1\right)t] \\ y = (R-r)\sin t - d\sin[\left(\frac{R}{r}-1\right)t] \end{cases}$$

其中参数t为旋转角度，当d=r时为**内摆线**，R=2r时为**椭圆**。

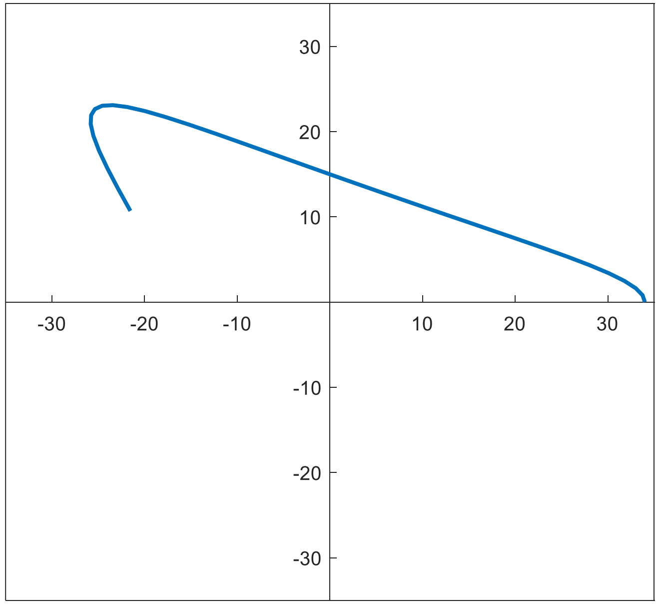
7.2绘制不同的摆线

- 圆内旋轮线的曲线参数方程的推导

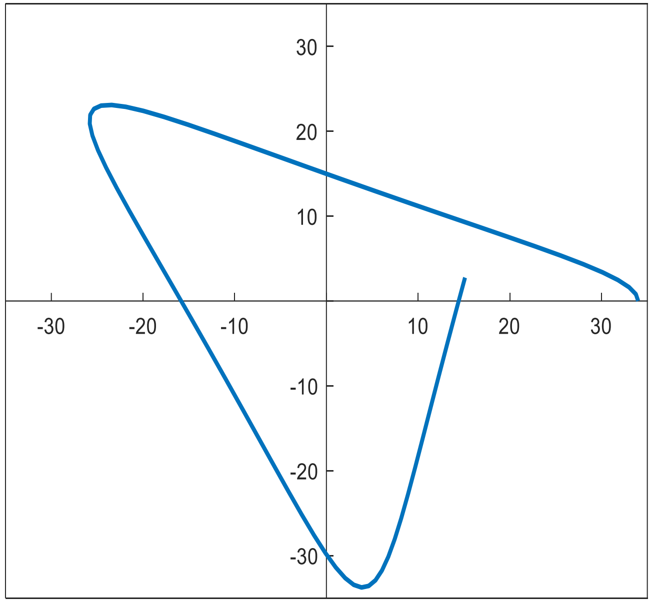


7.2绘制不同的摆线

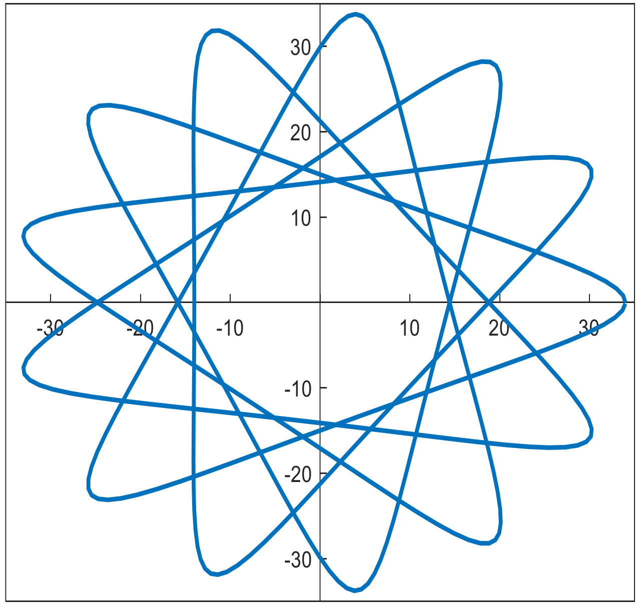
- 观察圆内旋轮线的生成过程



t=0:pi



t=0:2*pi



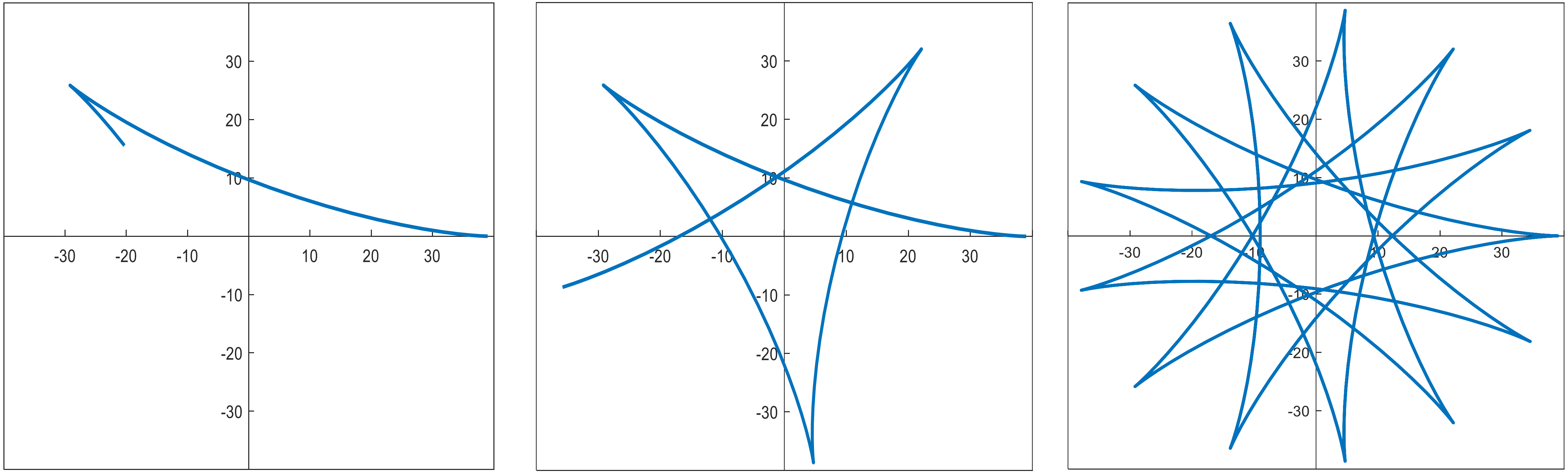
t=0:10*pi

R=39;　r=15; d = 10; n = 10;

7.2绘制不同的摆线

- 观察圆内旋轮线的生成过程

R=39;　r=15; d = 15; n = 10;

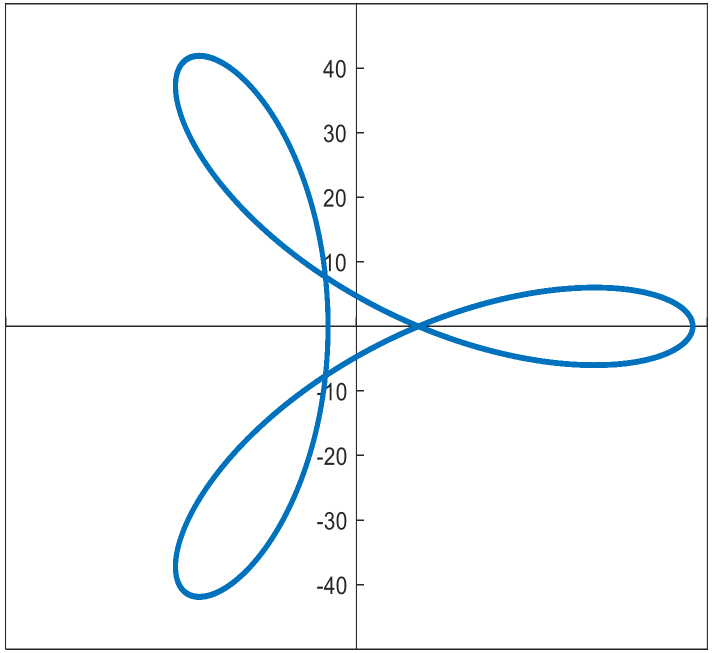


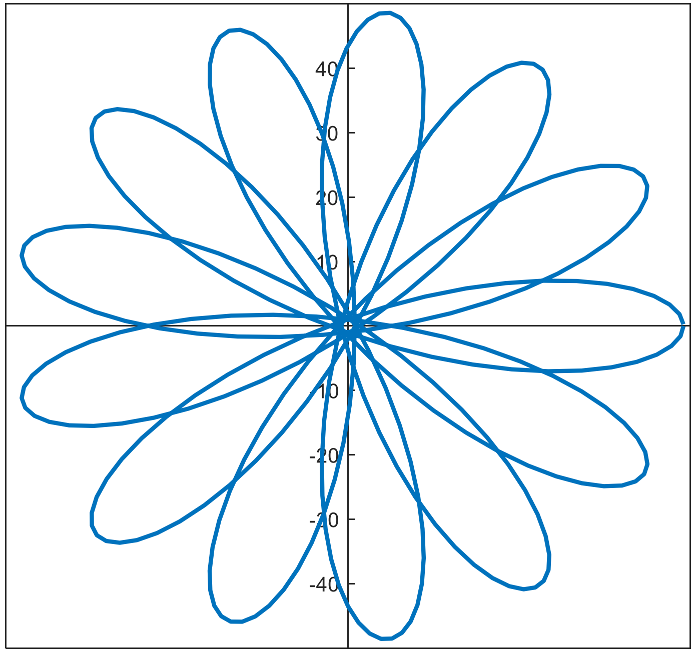
t=0:1*pi　　t=0:3*pi　　t=0:10*pi

7.2绘制不同的摆线

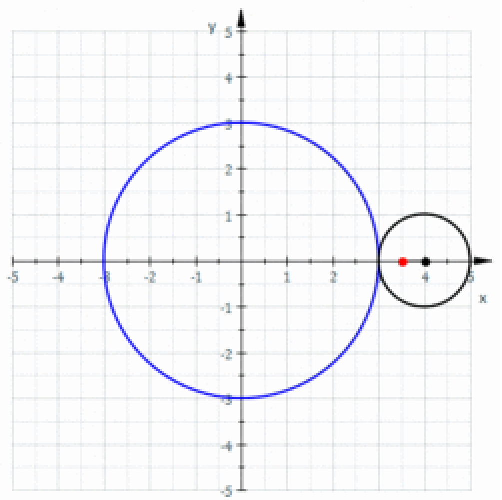
- 观察圆内旋轮线的生成过程

```
R = 39;
r = 13;
d = 22;
n = 10;
m = 1;

figure
for t = 0:0.1:50*pi
x(m) = (R-r)*cos(t)+d*cos((R/r-1)*t);
y(m) = (R-r)*sin(t)-d*sin((R/r-1)*t);
m = m+1;
end

plot(x,y,'LineWidth',2.0);
xlim([-50,50])
ylim([-50,50])
ax = gca;
ax.XAxisLocation = 'origin';
ax.YAxisLocation = 'origin';
```





7.2绘制不同的摆线



观察圆外旋轮线的生成过程

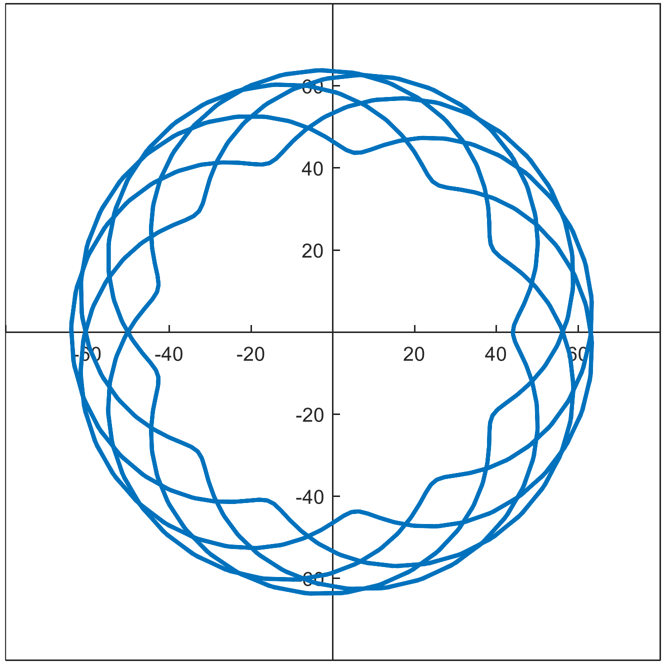
- 设定圆的半径为R，动圆半径为r，定点M到动圆圆心的距离为d，当动圆沿着定圆外侧滚动时，点M生成的曲线参数方程为：

$$\begin{cases} x = (R+r)\cos t - d\cos\left(\dfrac{R}{r}+1\right)t, \\ y = (R+r)\sin t - d\sin\left(\dfrac{R}{r}+1\right)t, \end{cases}$$

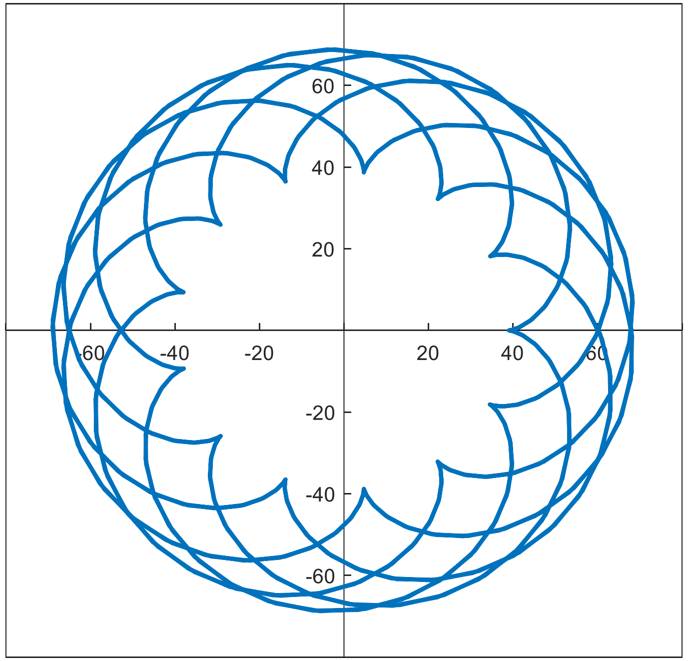
其中参数t为旋转角度，当R=r时为**蜗牛线**。

7.2绘制不同的摆线

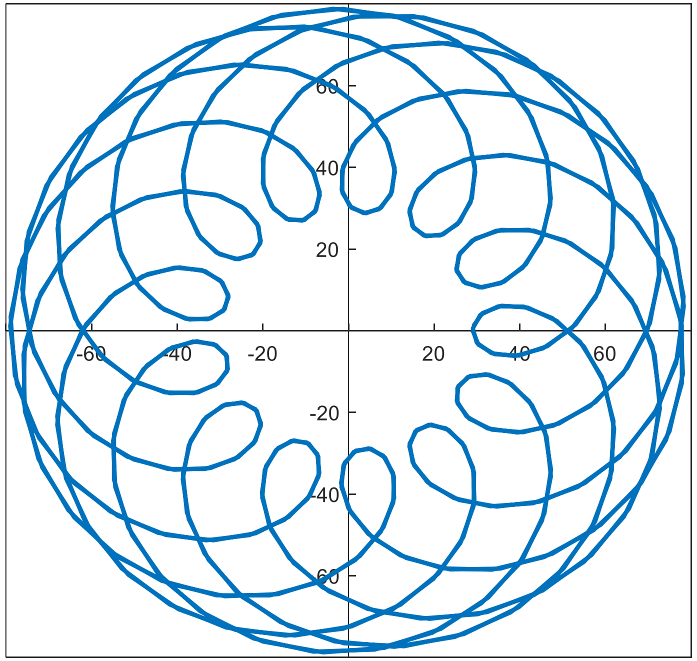
- 观察圆外旋轮线的生成过程



R=39;　r=15; d = 10; n = 10;



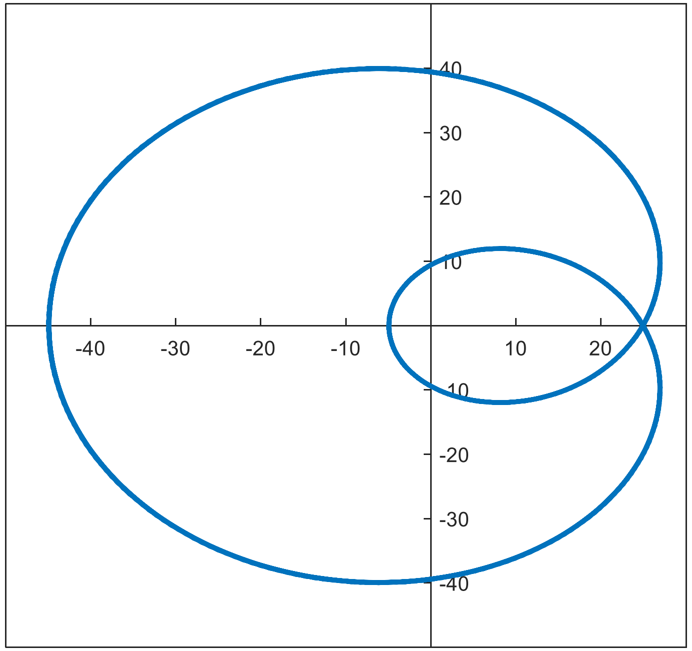
R=39;　r=15; d = 15; n = 10;



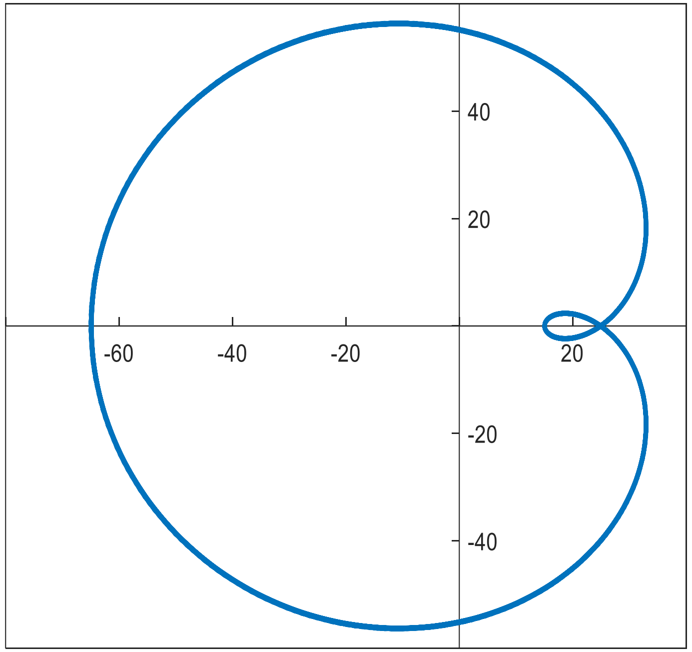
R=39;　r=15; d = 25; n = 10;

7.2绘制不同的摆线

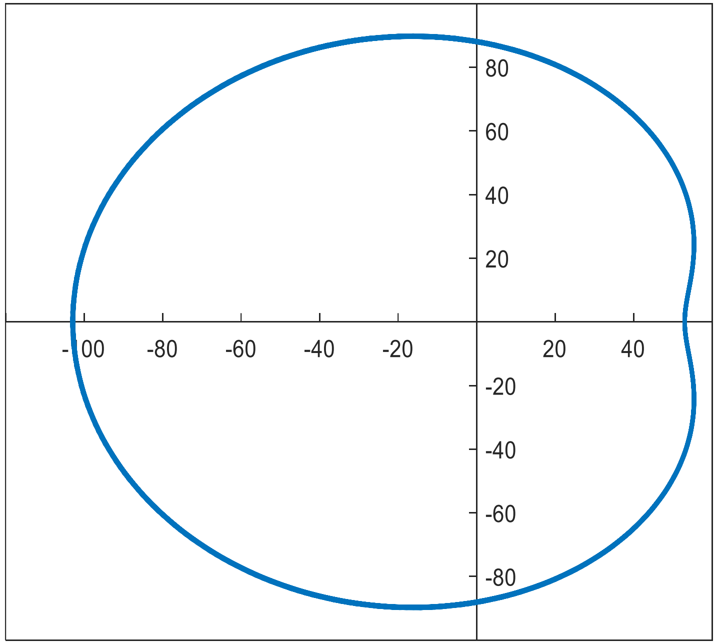
- 观察圆外旋轮线的生成过程



R=10； r=10； d = 15; n = 10;

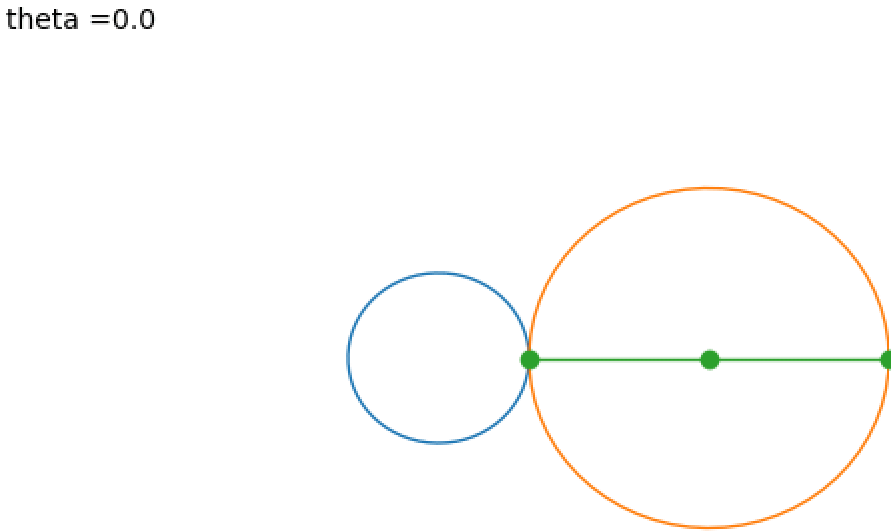


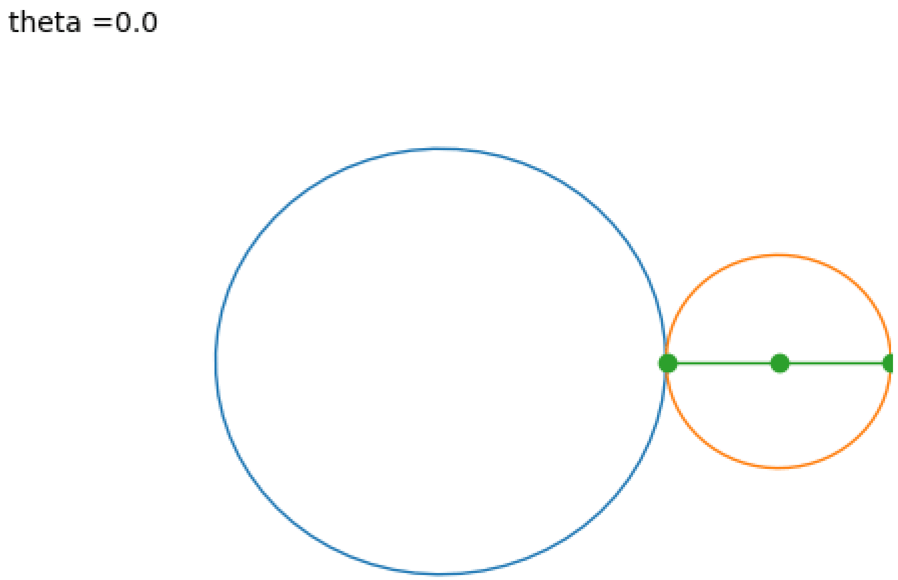
R=20； r=20； d = 15; n = 10;



R=39； r=39； d = 15; n = 10;

7.2绘制不同的摆线

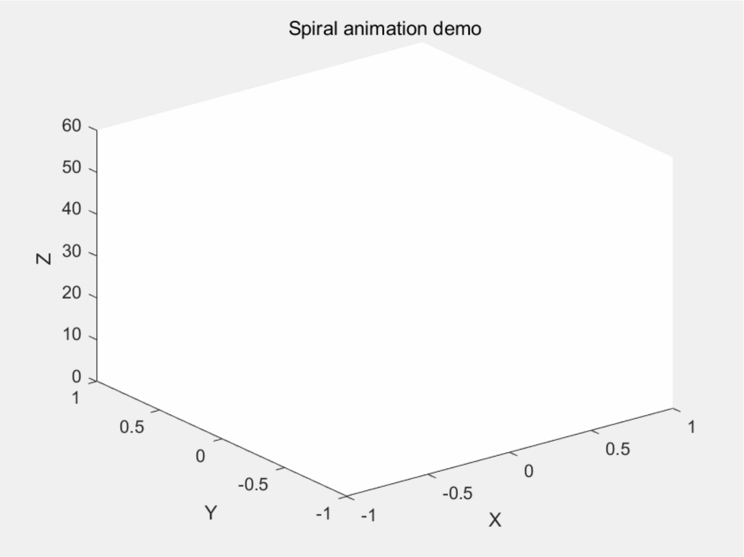




7.2绘制不同的摆线

```
close all;clc;clear;
dt=0:0.3:7*pi;
lent = length(dt);
x = zeros(1,lent);
y = zeros(1,lent);
z = zeros(1,lent);
plot3(x(1),y(1),z(1),'b');
hold on;
xlabel('X ');
ylabel('Y ');
zlabel('Z ');
xlim([-1 1]);
ylim([-1 1]);
zlim([0 60]);
```

```
title('Spiral animation demo');
mark= 1;
for k = 1:lent
x(k) = cos(dt(k));
y(k) = sin(dt(k));
z(k) = 2*dt(k);
plot3(x(1:k),y(1:k),z(1:k),'b-');
pause(0.05);
F = getframe(gcf);
im = frame2im(F);
[I,map] = rgb2ind(im,256);
if mark == 1
imwrite(I,map,'Spiral.gif','GIF', 'Loopcount',inf,'DelayTime',0.1);
mark = mark + 1;
else
imwrite(I,map,'Spiral.gif','WriteMode','append','DelayTime',0.1);
end
end
```



作业7.1

- 分别在正方形内，边框线上和正方形外取一相对于正方形位置固定的点，当正方形沿着直线，圆周滚动时，定点会生成什么样的曲线？分别建立定点轨迹对应的参数方程和通过Matlab模拟其形成过程并观察最终的曲线形状与特征。

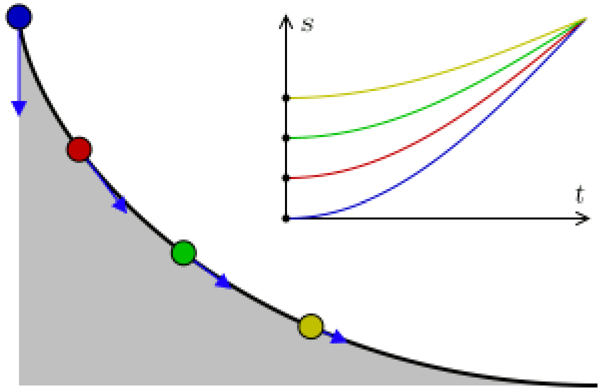
- 绘制类似于如下轨迹生成的动态动画(gif格式)

7.3 摆线的性质讨论

- 在垂直平面内的不在同一水平线上的两点A,B（位于A点的下方），某初速度为0的质点M由A在重力作用下沿光滑曲线L无摩擦地自由下滑到B。当该曲线为摆线弧时，时间最短。

- 摆线也称为最速下降曲线，该性质为最速下降性质。

7.3 摆线的性质讨论

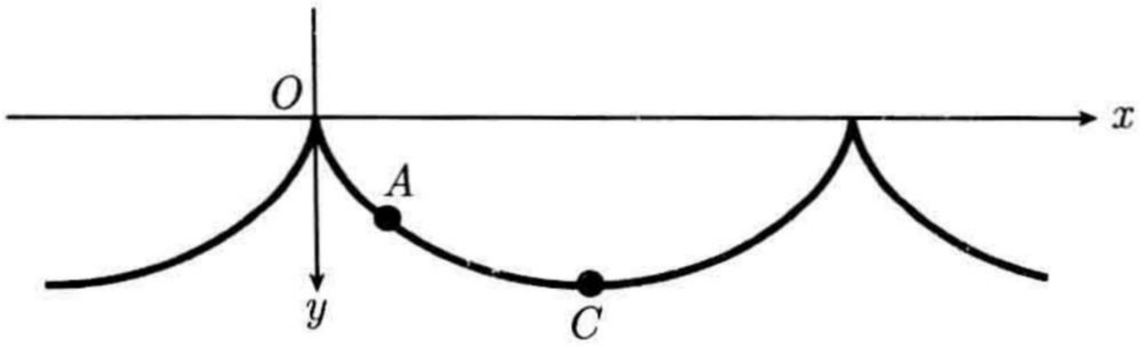


等时性

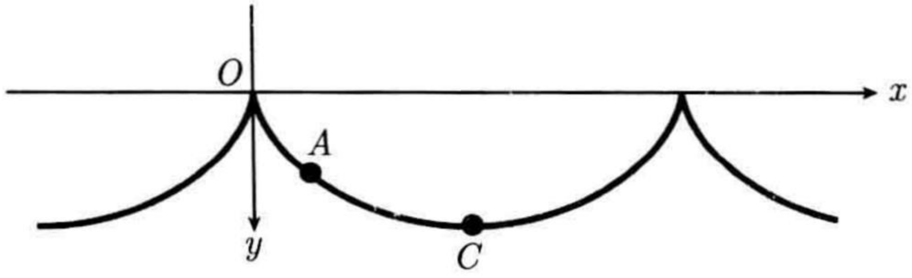
- 对于动圆沿着直线运动，动圆圆周上一点形成的摆线：$\begin{cases} x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1 - \cos\theta) \end{cases}$

具有一个有趣的性质：将摆线倒过来，此时方程为：$\begin{cases} x=r(\theta-\sin\theta), \\ y=-r(1-\cos\theta), \end{cases}$

一颗珠子从摆线上任何位置滚动到摆线底部所用的时间是相等的。



7.3 摆线的性质讨论



设 C 点是摆线一拱的最低点, 对应参数为 $\theta=\pi$, $A(x_0,y_0)$ 点是该拱上任意点, 对应的参数为 $\theta=\theta_0$. 珠子的质量为 m, 初速度为 v_0, 则珠子滚动到点 A 和点 C 之间某点 (x,y) 处有速度为 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, 根据能量守恒定律有

$$mg(y_0-y)=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2,$$

即

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2g(y_0-y)}}=\frac{\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}}{\sqrt{2g[y(\theta_0)-y(\theta)]}}\mathrm{d}\theta.$$

7.3 摆线的性质讨论

设珠子从 A 到 C 点滚动需要的时间为 T. 上式两边关于各自变量从 A 到 C 点求积分, 则

$$T=\int_0^T \mathrm{d}t=\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}}{\sqrt{2g[y(\theta_0)-y(\theta)]}}\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{\sqrt{r^2(1-\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta}}{\sqrt{2g(r\cos\theta_0-r\cos\theta)}}\mathrm{d}\theta$$

$$=\sqrt{\frac{r}{g}}\int_{\theta_0}^{\pi}\sqrt{\frac{2-2\cos\theta}{2(\cos\theta_0-\cos\theta)}}\mathrm{d}\theta=\sqrt{\frac{r}{g}}\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2\left(\dfrac{\theta_0}{2}\right)-\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}}\mathrm{d}\theta$$

$$=2\sqrt{\frac{r}{g}}\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\cos\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta_0}{2}}\right)^2}}\mathrm{d}\left(\frac{\cos\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta_0}{2}}\right)=-2\sqrt{\frac{r}{g}}\arcsin\left(\frac{\cos\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta_0}{2}}\right)\Bigg|_{\theta_0}^{\pi}=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

7.3 摆线的性质讨论

- 通过论证发现沿着摆线滚动的珠子，不论在摆线的任何位置，达到最低点的时间与起始位置无关。

- 可被广泛地应用于钟表制造业。

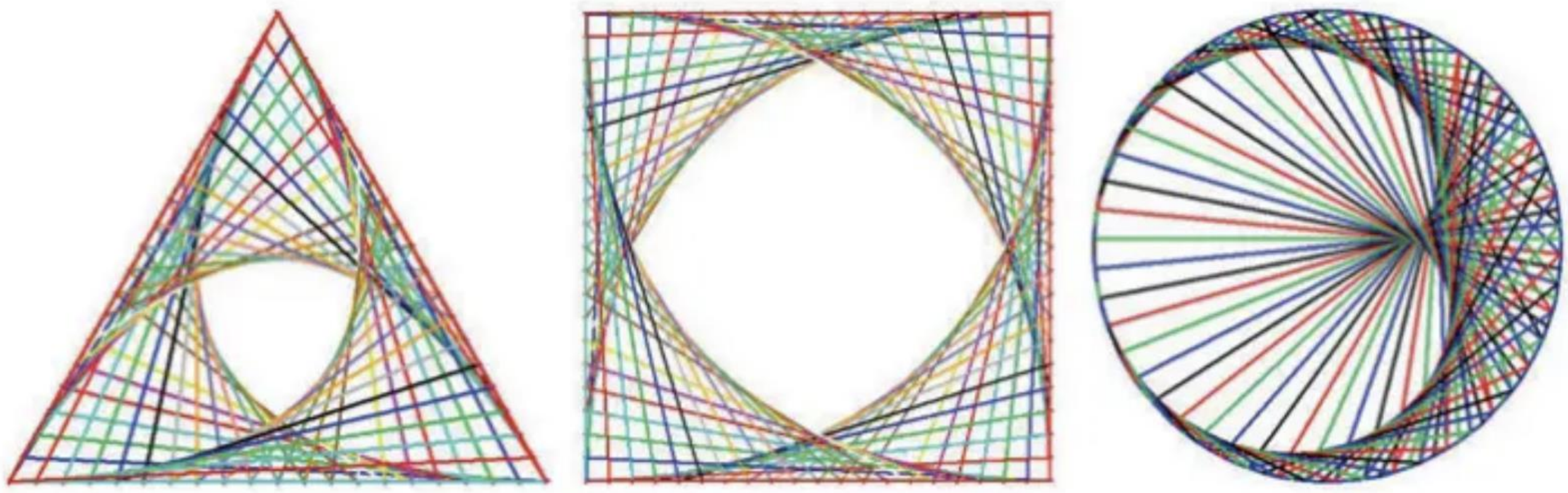
7.3 摆线的性质讨论

- 摆线一拱的长度约等于旋转圆直径的4倍，并且长度是一个不依赖于π的有理数。

- 摆线一拱的弧线下的面积是旋转圆面积的3倍。

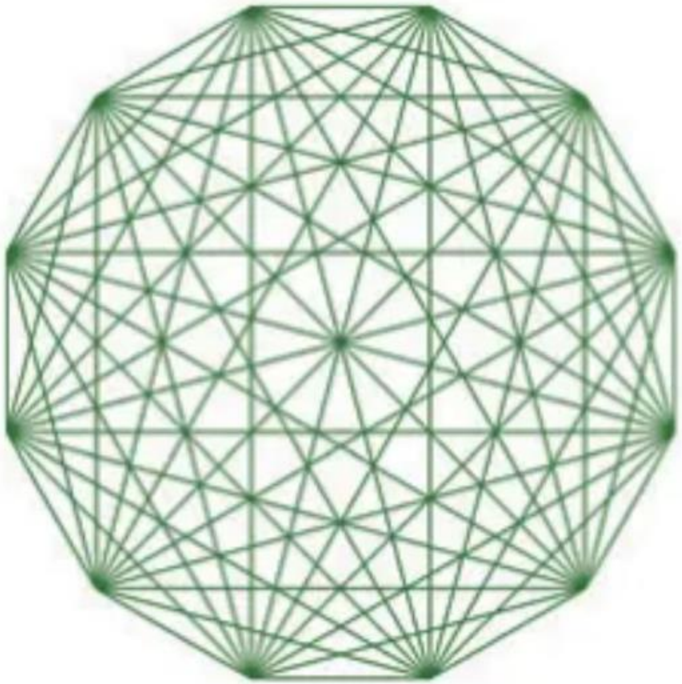
7.4 曲线的缝合艺术

用直线创造曲线很容易。要做到这一点，你需要在木板上画一个基本的图形(圆、等边三角形、正方形、正多边形)，按一定的间隔钉上钉子，然后按照一定的规则将它们连接在一起。

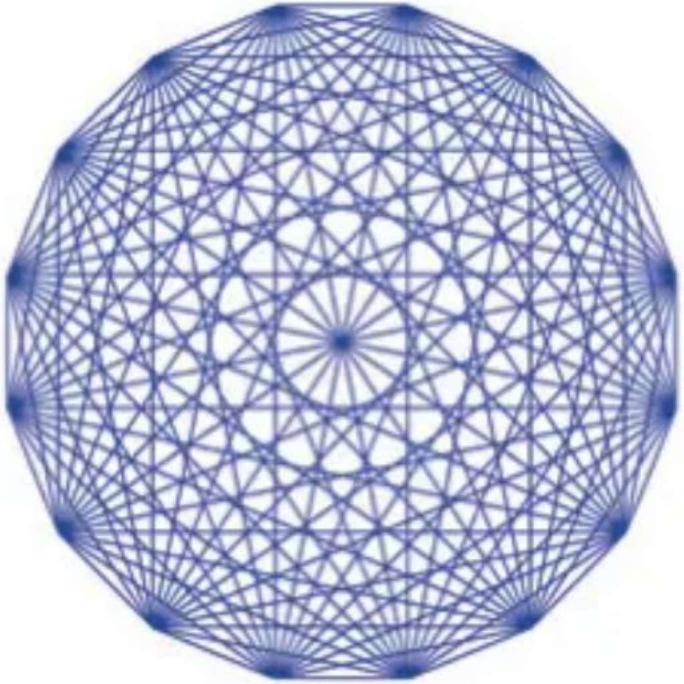


7.4 曲线的缝合艺术

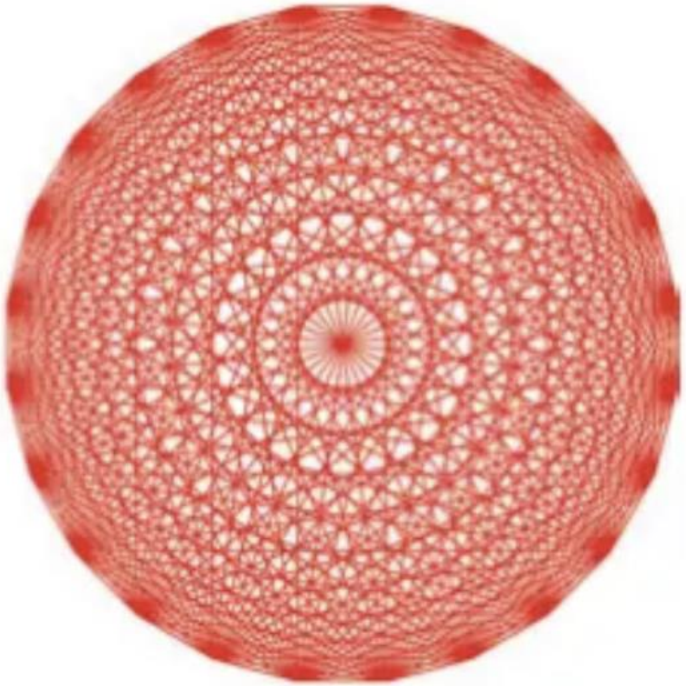
如果钉子以n个规则间隔钉在一条圆形线上，并且每个钉子都与所有其他钉子连接，则形成一个规则的正n边形，有n条边和0.5n(n-3)条对角线。



正12边形，54条对角线

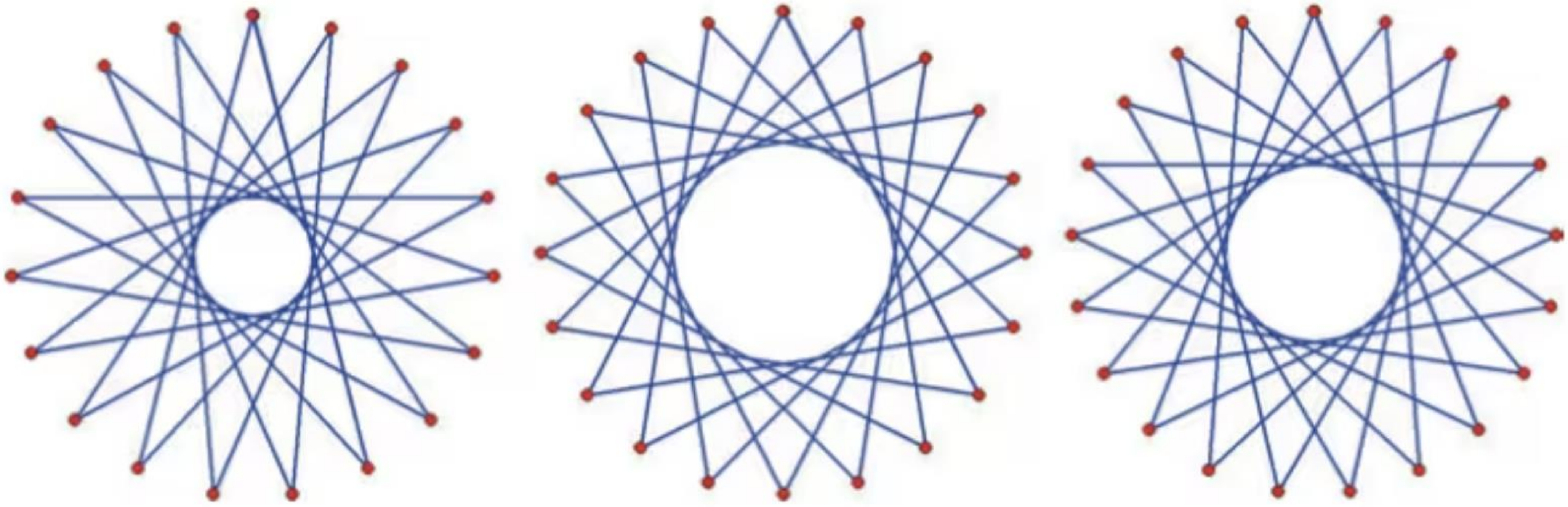


正16边形，104条对角线



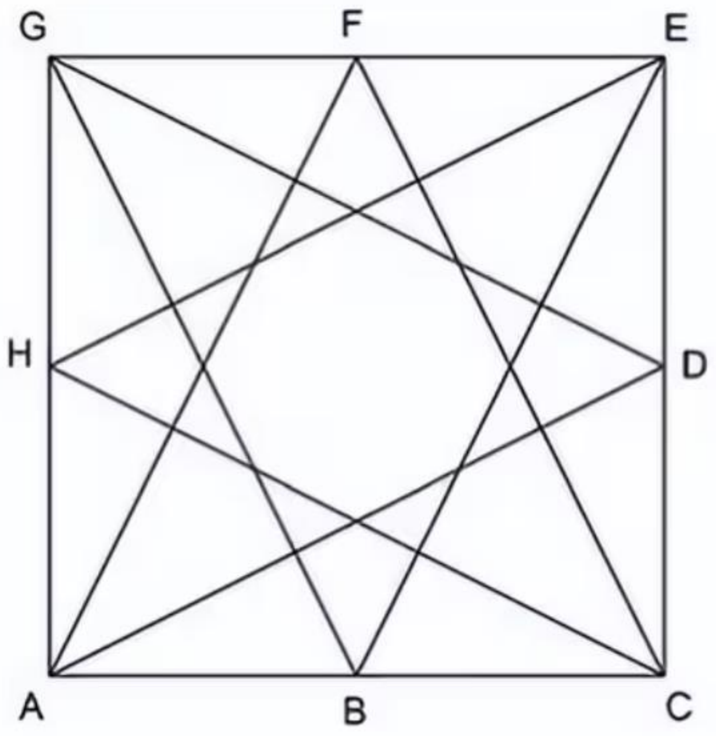
正24边形，252条对角线

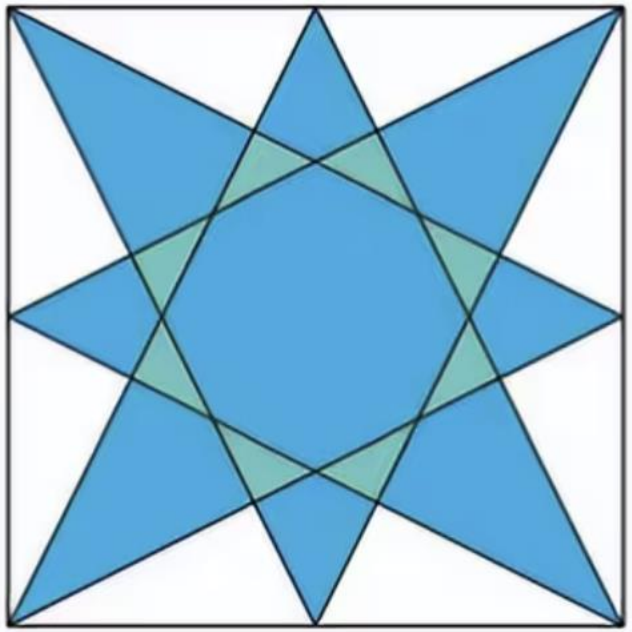
7.4 曲线的缝合艺术

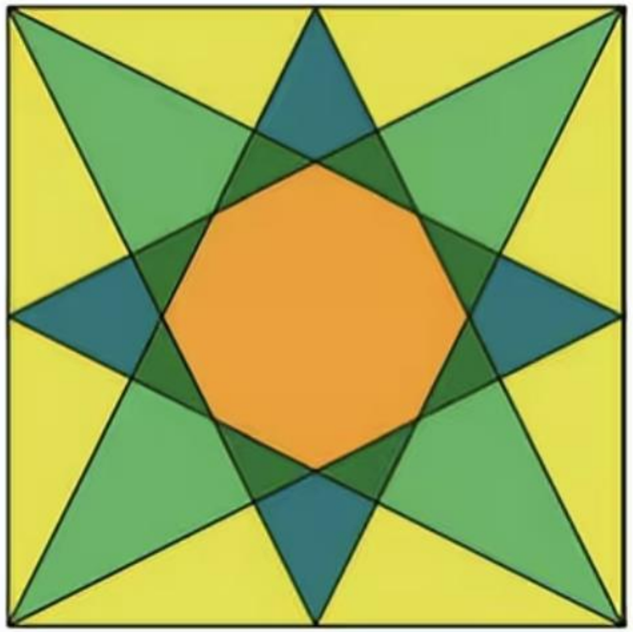


7.4 曲线的缝合艺术

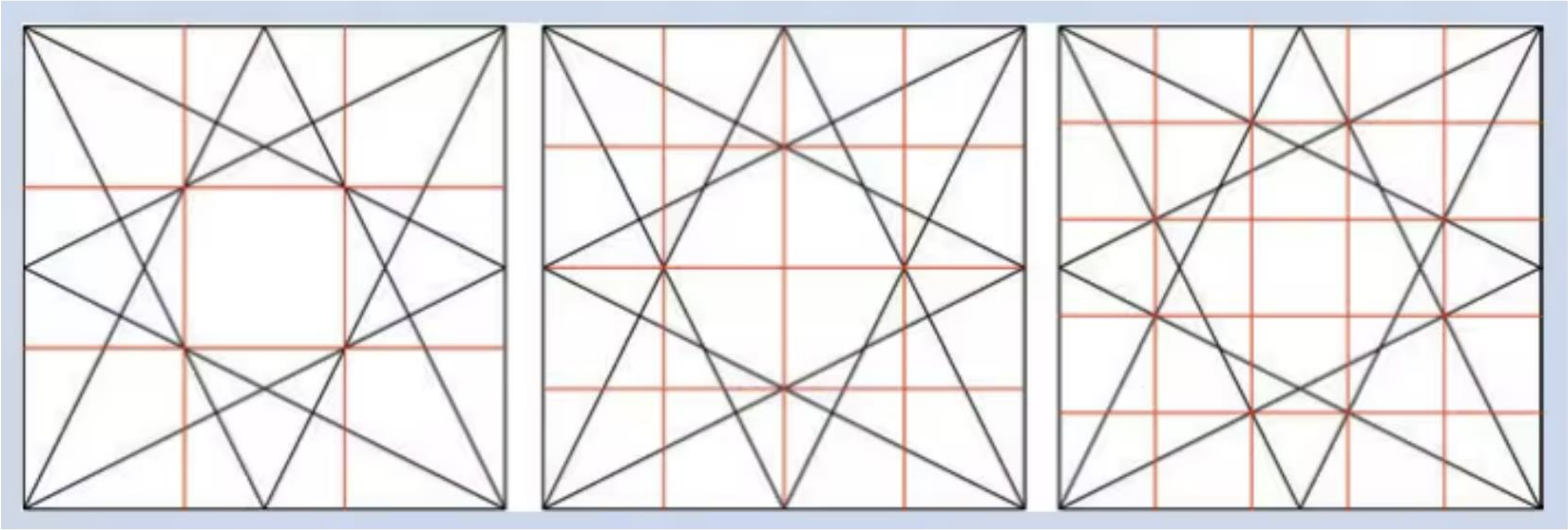
正方形中的特殊星形图



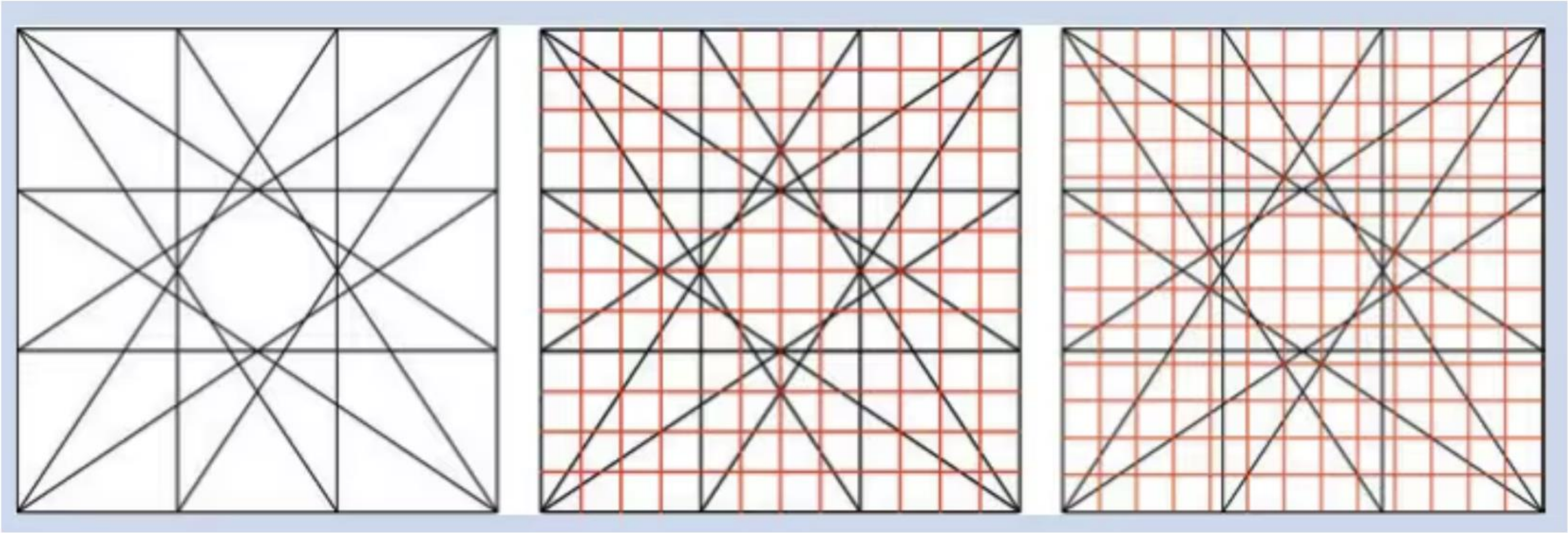




7.4 曲线的缝合艺术

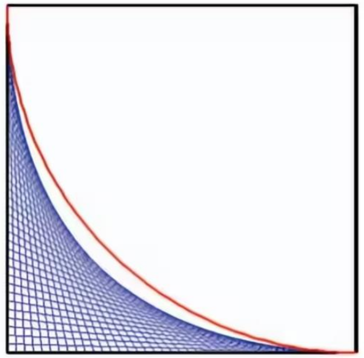


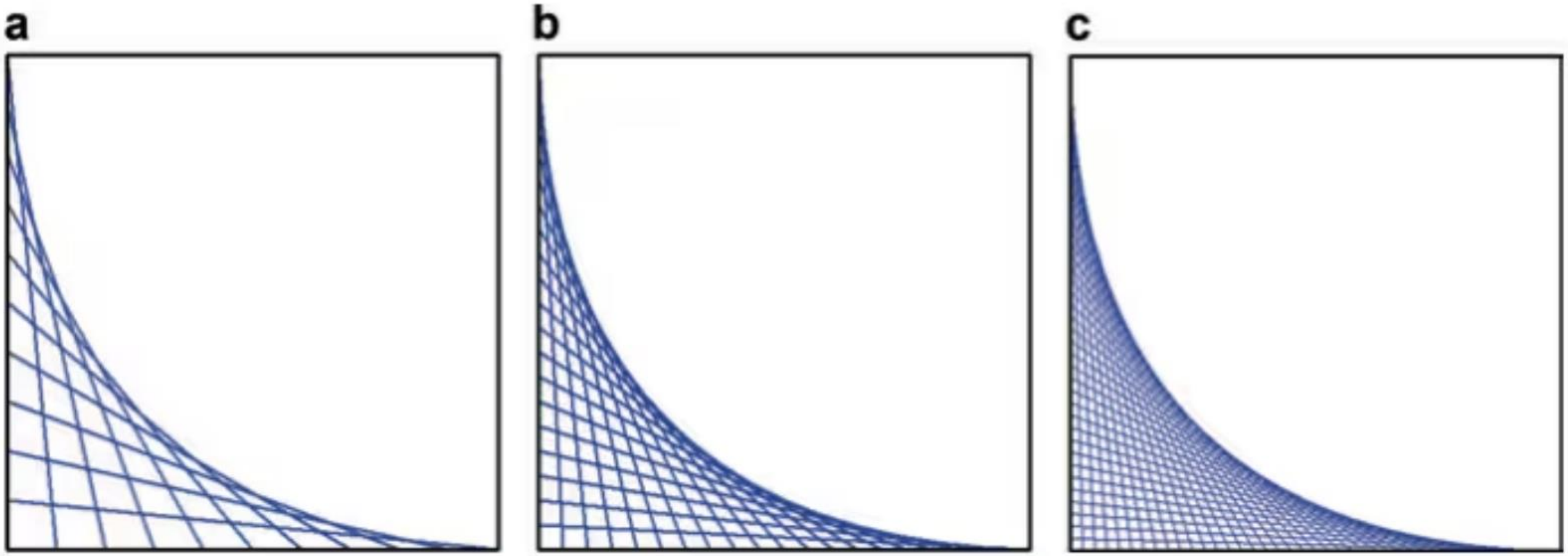
7.4 曲线的缝合艺术



7.4 曲线的缝合艺术

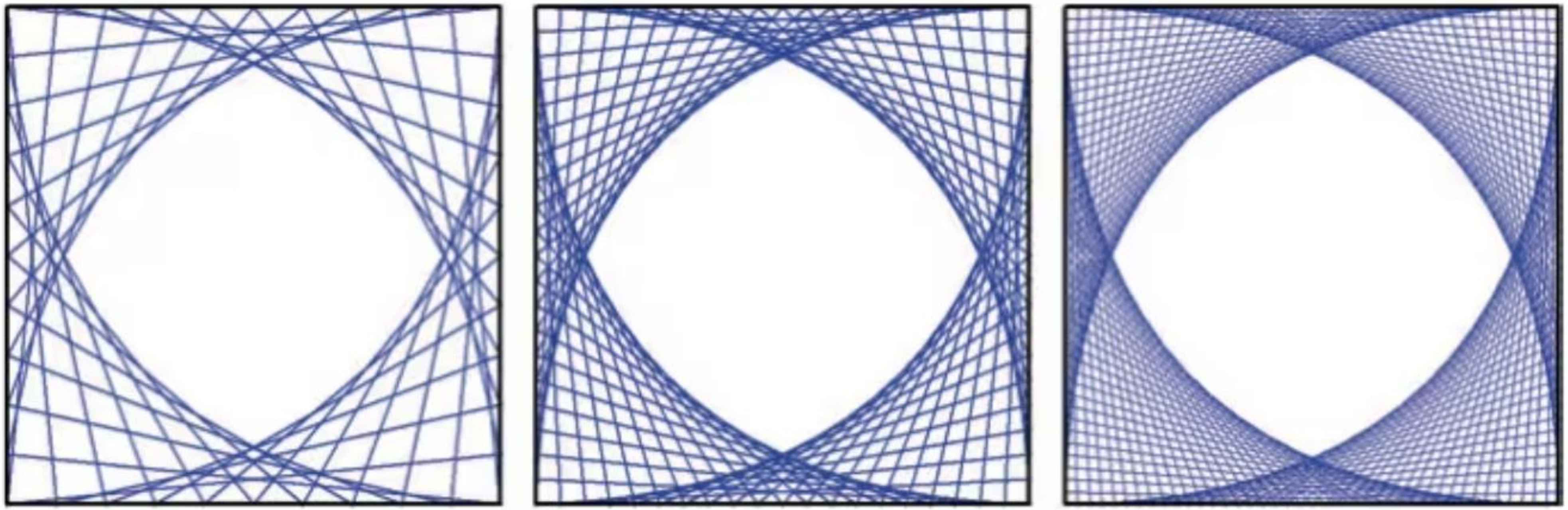
正方形中的抛物线





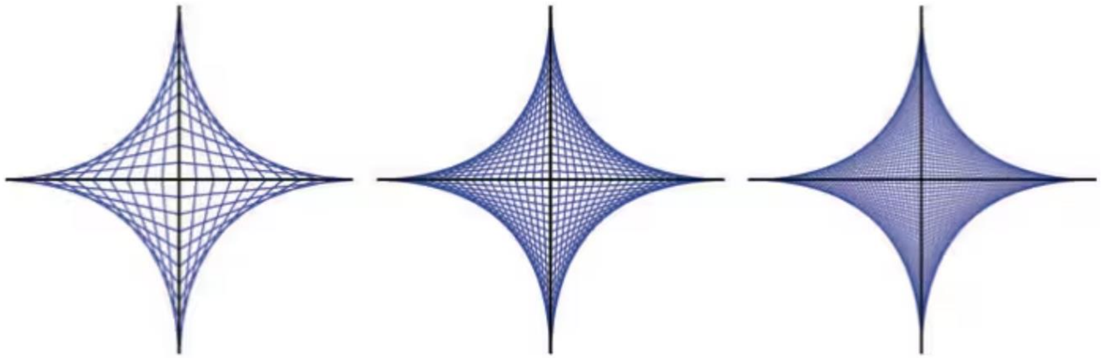
7.4 曲线的缝合艺术

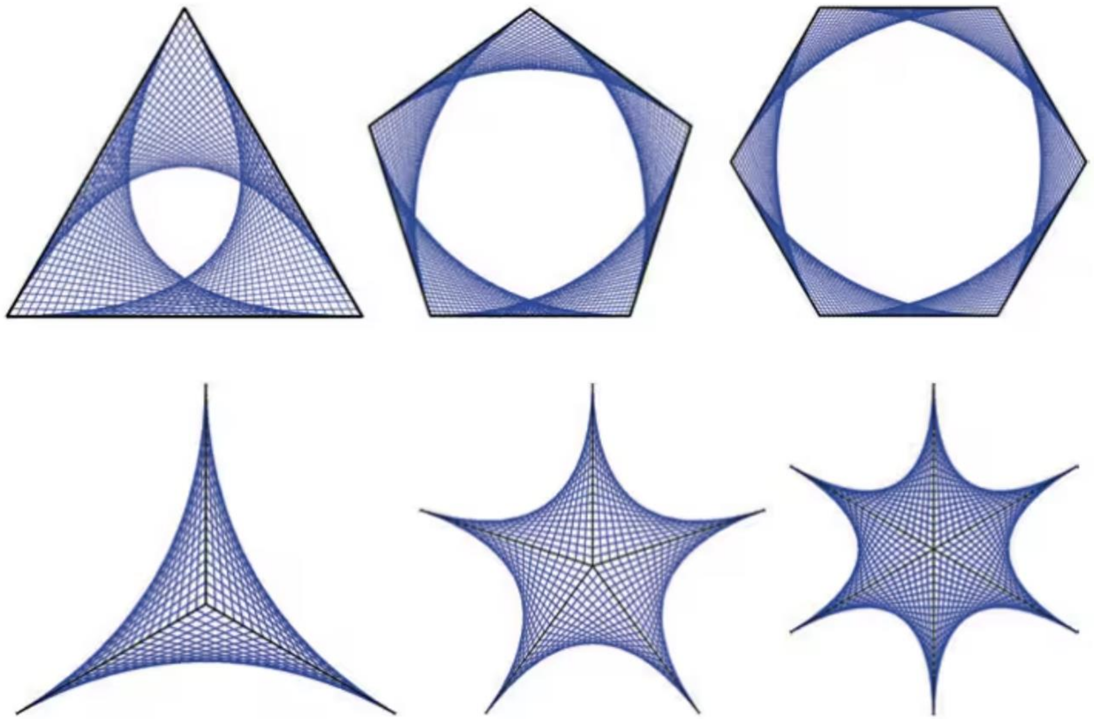
正方形中的抛物线



7.3 曲线的缝合艺术

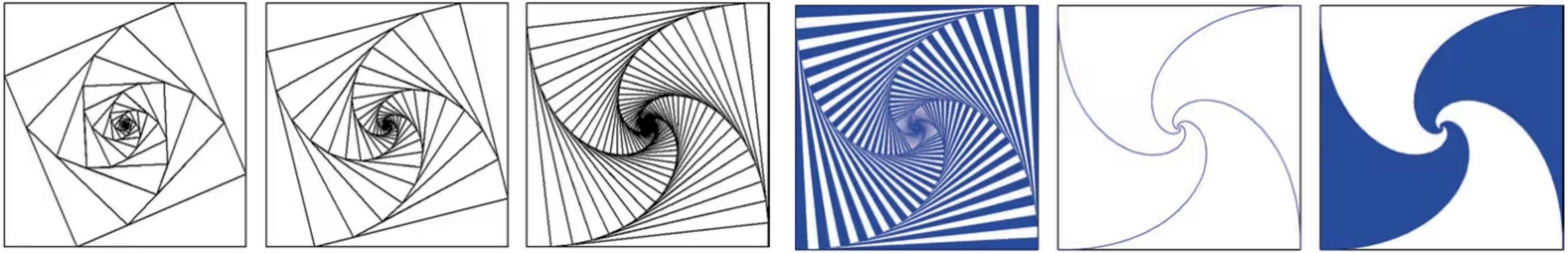
使用两个垂直(坐标)轴(或四个正方形放在一起形成一个更大的正方形)





7.4 曲线的缝合艺术

追逐曲线 → **嵌套正方形包络的对数螺线**



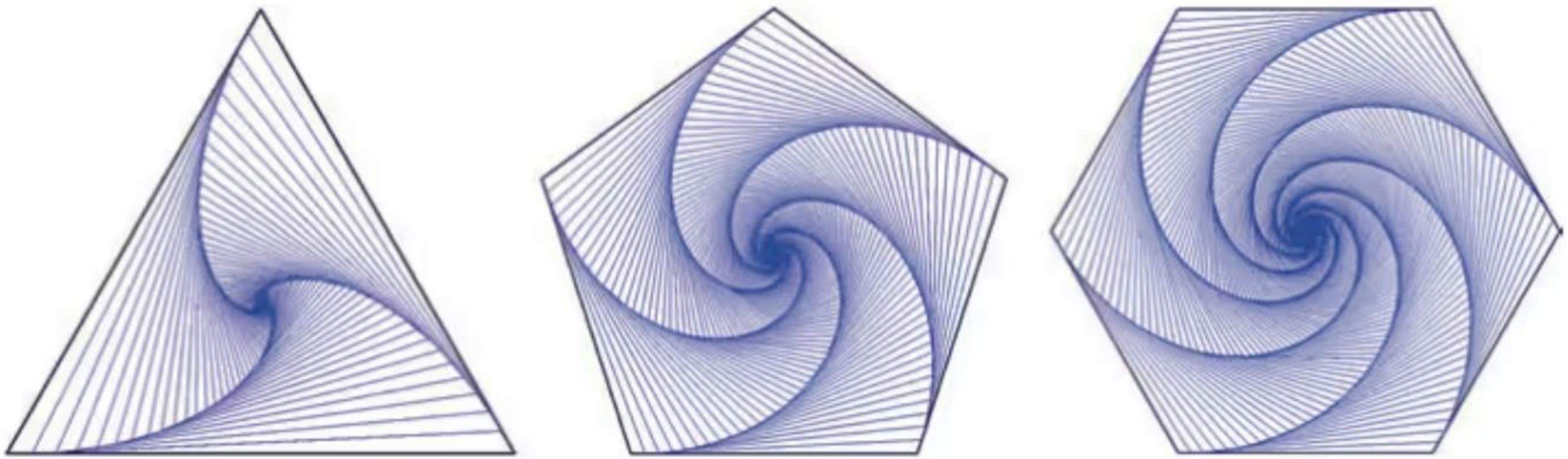
图示包含无限多个嵌套正方形的序列，这些方块的基本边被分成比例为3：7、2：8或1：9

正方形的所有四条边都按指示的比例划分。然后，所有的分割点都与相邻边上的相应点相连--得到的图形又是一个正方形。在这个正方形中，两边也以相同的比例划分，以此类推。

7.4 曲线的缝合艺术

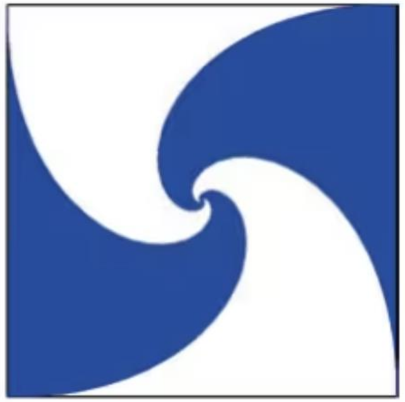
对数螺线也可由其他基础多边形创建。(通过几何级数)可以看出，边长为s的正n边图形的螺旋长度λn计算如下：

$$\lambda_n = \frac{s}{1-\cos\left(\frac{360°}{n}\right)}$$



作业7.2

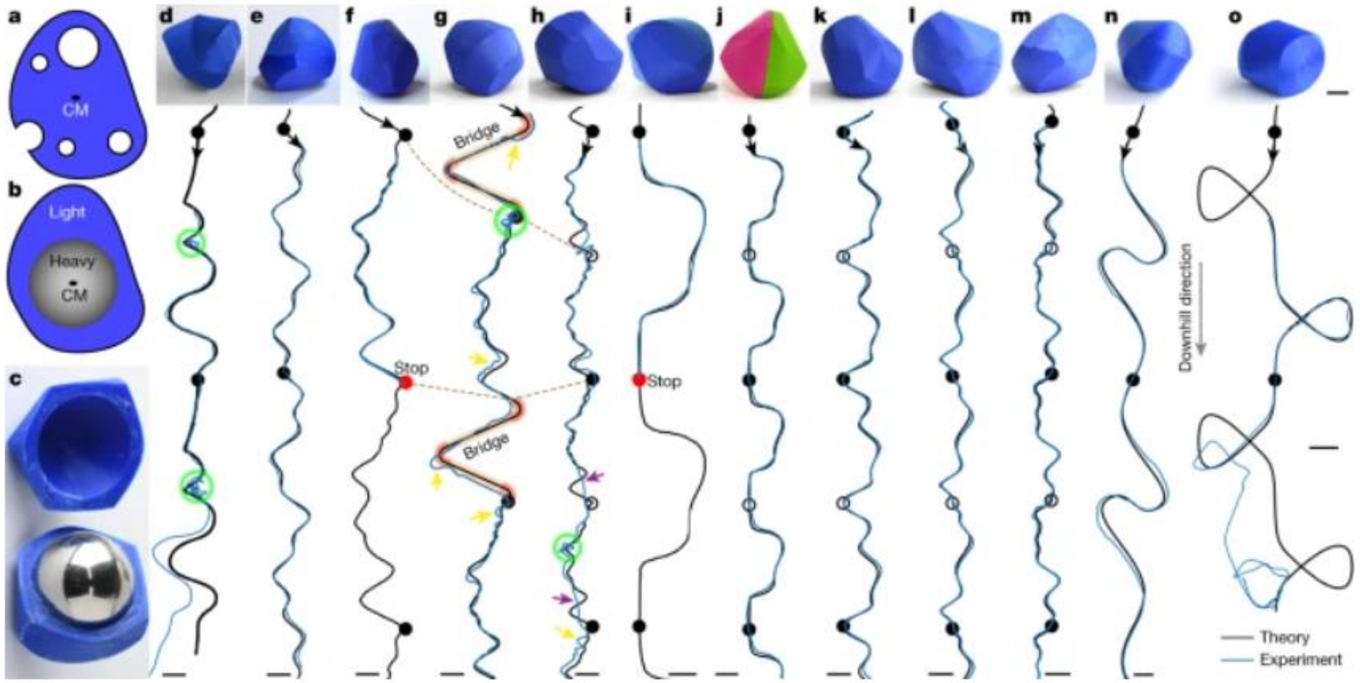
- 绘制正八边形，正十二边形，正二十边形的对数螺线，并按照下图方式进行填充。



总结

- 开放性问题: 如何让结构按照指定的路径前进?

Fig. 4: Experimental validation.



Solid-body trajectoids shaped to roll along desiredpathways, Nature, 2023

总结

- 摆线
  - 摆线的由来
    - 意大利科学家伽利略
    - 惠更斯
    - 约翰伯努利
  - 绘制不同的摆线
    - 摆线
    - 圆内旋轮线
    - 圆外旋轮线
  - 摆线的性质讨论
    - 最速下降性
    - 等时性
    - 拱线与拱面积的一些特殊性质
  - 曲线的缝合艺术

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

Q&A?

下节课内容

实验八：空间折痕

翟晓雅
Email: xiaoyazhai@ustc.edu.cn
Homepage: https://xiaoyazhai.github.io/
Lab: http://gcl.ustc.edu.cn/

作业7.1

- 分别在正方形内，边框线上和正方形外取一相对于正方形位置固定的点，当正方形沿着直线，圆周滚动时，定点会生成什么样的曲线？分别建立定点轨迹对应的参数方程和通过Matlab模拟其形成过程并观察最终的曲线形状与特征。

- 绘制类似如下轨迹生成的动态动画(gif格式)

作业7.2

- 绘制正八边形，正十二边形，正二十边形的对数螺线，并按照下图方式进行填充。