中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

数学实验

实验八：空间形体特征

翟晓雅

Email: xiaoyazhai@ustc.edu.cn
Homepage: https://xiaoyazhai.github.io/

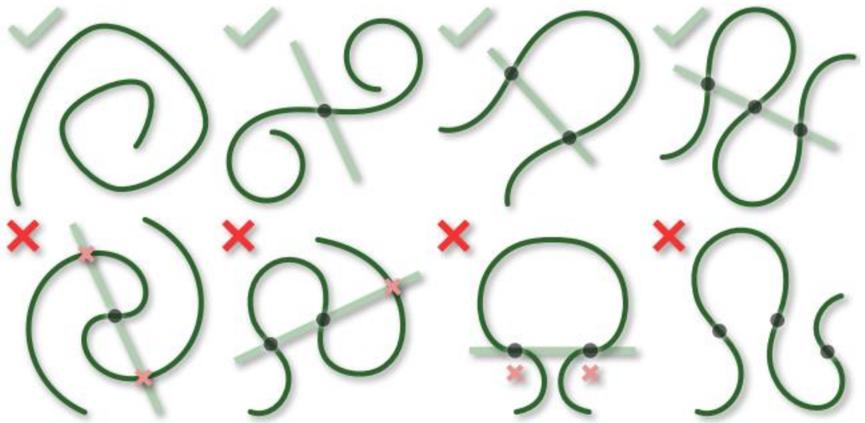
实验目的

- 了解空间曲线
- 了解空间曲面
- 了解空间实体
- 学习MATLAB GUI编程

2D → 2.5D → 3D → 4D

8.1 空间曲线

- 一般表示方法
- 空间曲线的一些研究工作

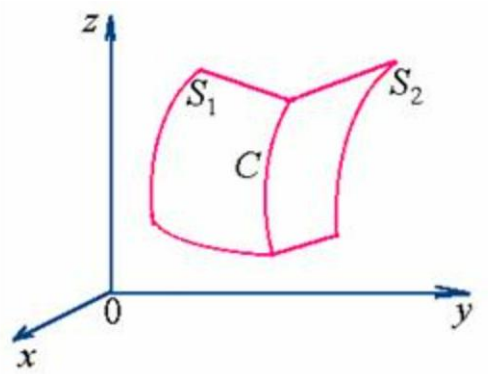


8.1 空间曲线

空间曲线的一般方程

- 空间曲线可以看作两个曲面的交线C，设：

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$



曲线上任何点的坐标应同时满足这两个曲面方程。

8.1 空间曲线

空间曲线的参数方程

- 空间曲线C，若C上的动点坐标(x,y,z)可表示成为参数t的函数

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in [\alpha,\beta]$$

随着t的变动可得到曲线C上的全部点。常写成向径式:

$$\vec{r}(t) = \big(x(t),y(t),z(t)\big)\ t \in [\alpha,\beta]$$

8.1 空间曲线

空间曲线的参数方程

- 空间曲线C，若C自身不相交，即$\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2), \forall t_1 \neq t_2, t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$则L为简单曲线或者Jordan曲线。
- 若曲线C首尾相连，即$\vec{r}(\alpha) = \vec{r}(\beta)$, 则称C为闭曲线。

8.1 空间曲线

空间曲线的切线

- 设$M_0 = \vec{r}(t_0)$处的切线，可表示为

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$$

将其记为$\vec{r'}(t_0)$，则 $r'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0), z(t) - z(t_0))}{t - t_0}$

$$\vec{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

8.1 空间曲线

空间曲线的切线方程

空间曲线C在M_0 处的切线方程为:

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$$

8.1 空间曲线

空间曲线的法平面方程

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0$$

一般来说

- 空间曲线总可以用参数形式给出它的方程
- 随着参数选取的不同，方程的形式也会发生变化

8.1 空间曲线

一个简单算例:

如果空间一点M在圆柱面$x^2+y^2=a^2$上以角速度ω绕z轴旋转，同时又以线速度v沿平行于z轴的正方向上升（其中ω, v都是常数），那么点M的轨迹叫做**螺旋线**。试着建立其参数方程。

螺旋线性质:

当θ从θ_0变到$\theta_0+\alpha$时，z从$b\theta_0$变到$b\theta_0+b\alpha$；这表明当OM'转过角α时，M点沿螺旋线上升了高度$h=b\alpha$; 特别地，当$\alpha=2\pi$时，$\boxed{h=2b\pi}$，螺距

8.1 空间曲线

空间曲线在坐标平面上的投影

- 空间曲线C的一般方程为：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$， 消去z之后为：$H(x,y)=0$， 曲线C上所有点都在由$H(x,y)=0$表示的曲面上。

- 方程$H(x,y)=0$表示一个母线平行于z轴的柱面，此柱面必包含曲线C。以曲线C为准线，母线平行于z轴的柱面叫做曲线C关于XOY坐标平面的投影柱面。

8.1 空间曲线

空间曲线在坐标平面上的投影

投影柱面与XOY面的交线叫做空间曲线C在XOY面上的投影曲线。该曲线方程可写成：

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

8.1 空间曲线

- 编织?
- 绳结?
- 弹性线?

8.1 空间曲线

关于空间曲线的一些研究工作：编织艺术

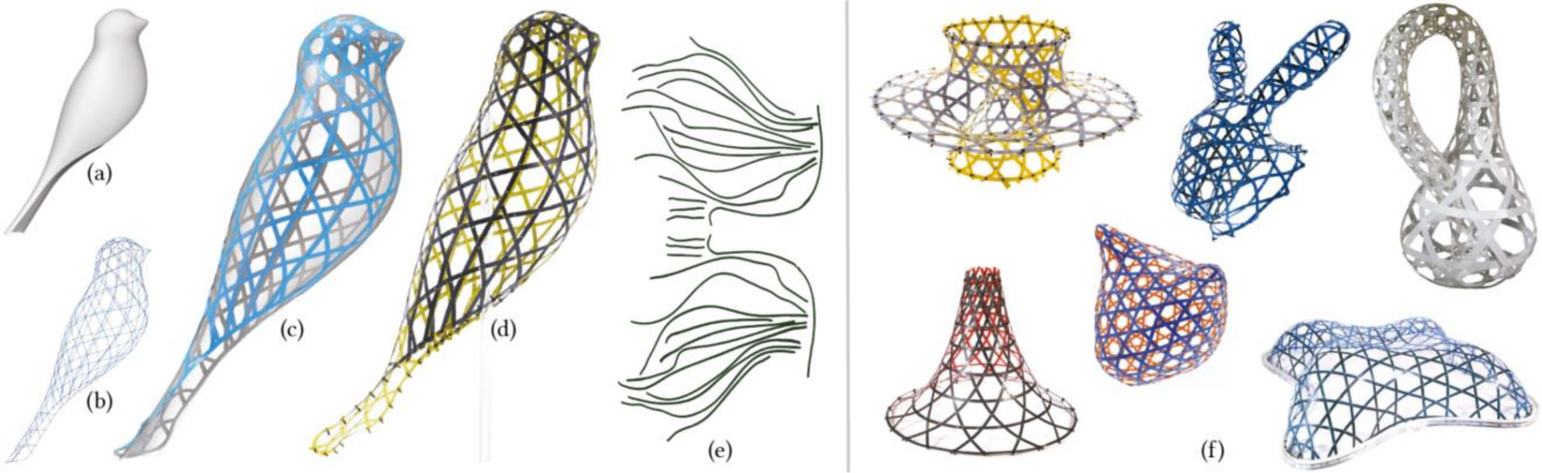


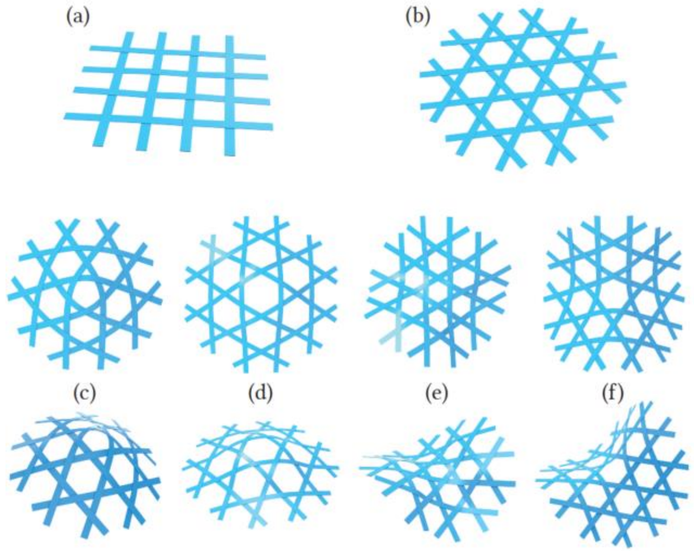

8.1 空间曲线

关于空间曲线的一些研究工作：编织艺术

3D Weaving with Curved Ribbons

YINGYING REN, EPFL, Switzerland
JULIAN PANETTA, UC Davis, USA
TIAN CHEN, EPFL, Switzerland
FLORIN ISVORANU, EPFL, Switzerland
SAMUEL POINCLOUX, EPFL, Switzerland
CHRISTOPHER BRANDT, EPFL, Switzerland
ALISON MARTIN, Weaver and Independent Researcher, Italy
MARK PAULY, EPFL, Switzerland





ACM Trans. Graph, 2021

8.1 空间曲线

关于空间曲线的一些研究工作：编织艺术

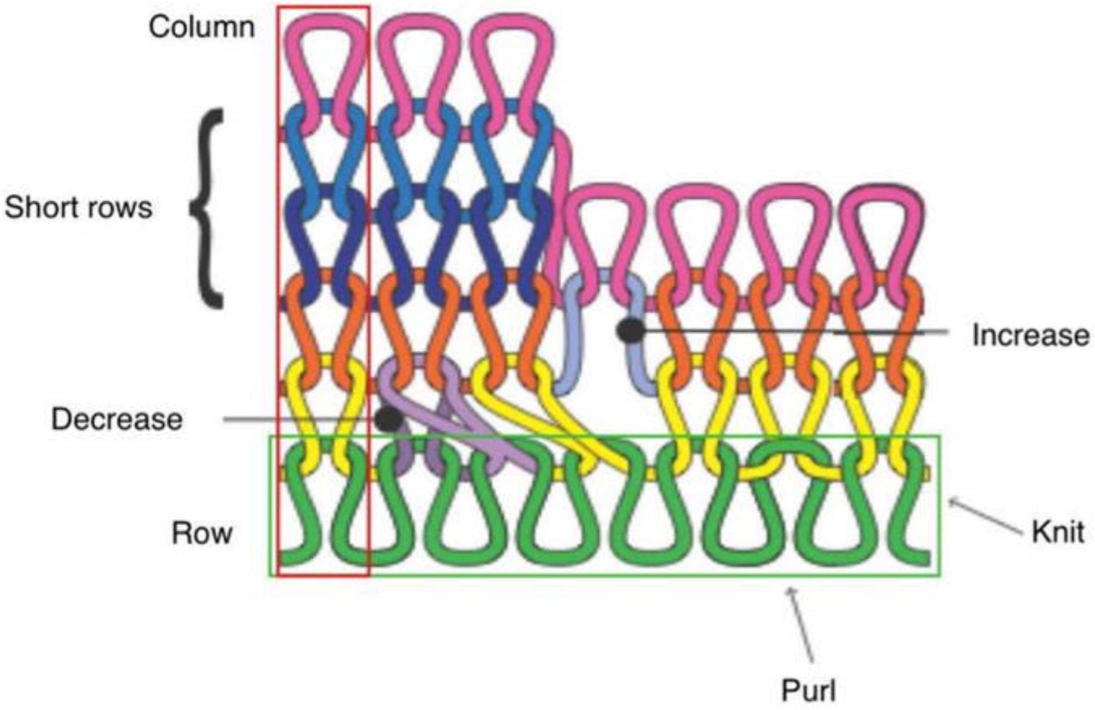
3D Weaving with Curved Ribbons

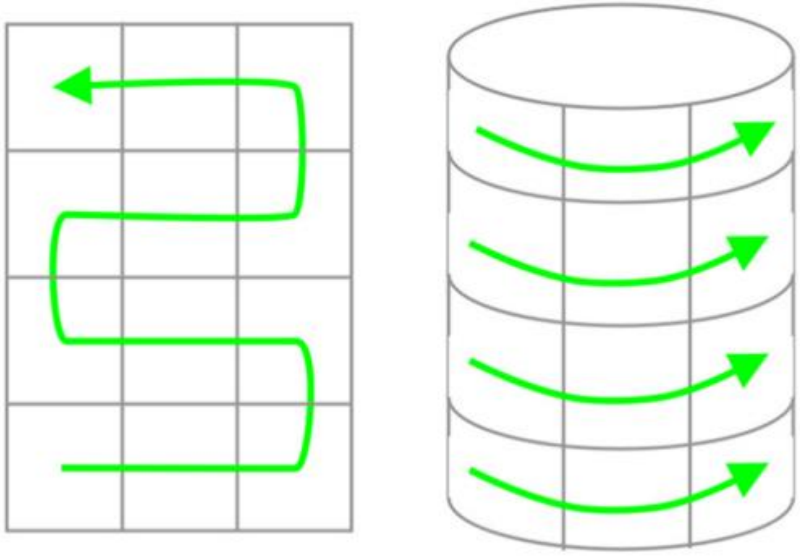
YINGYING REN[1] JULIAN PANETTA[2] TIAN CHEN[1] FLORIN ISVORANU[1]
SAMUEL POINCLOUX[1] CHRISTOPHER BRANDT[1] ALISON MARTIN[3] MARK PAULY[1]

[1]EPFL
[2] UC Davis
[3] Weaver and Independent Researcher

8.1 空间曲线

关于空间曲线的一些研究工作：编织艺术





8.1 空间曲线

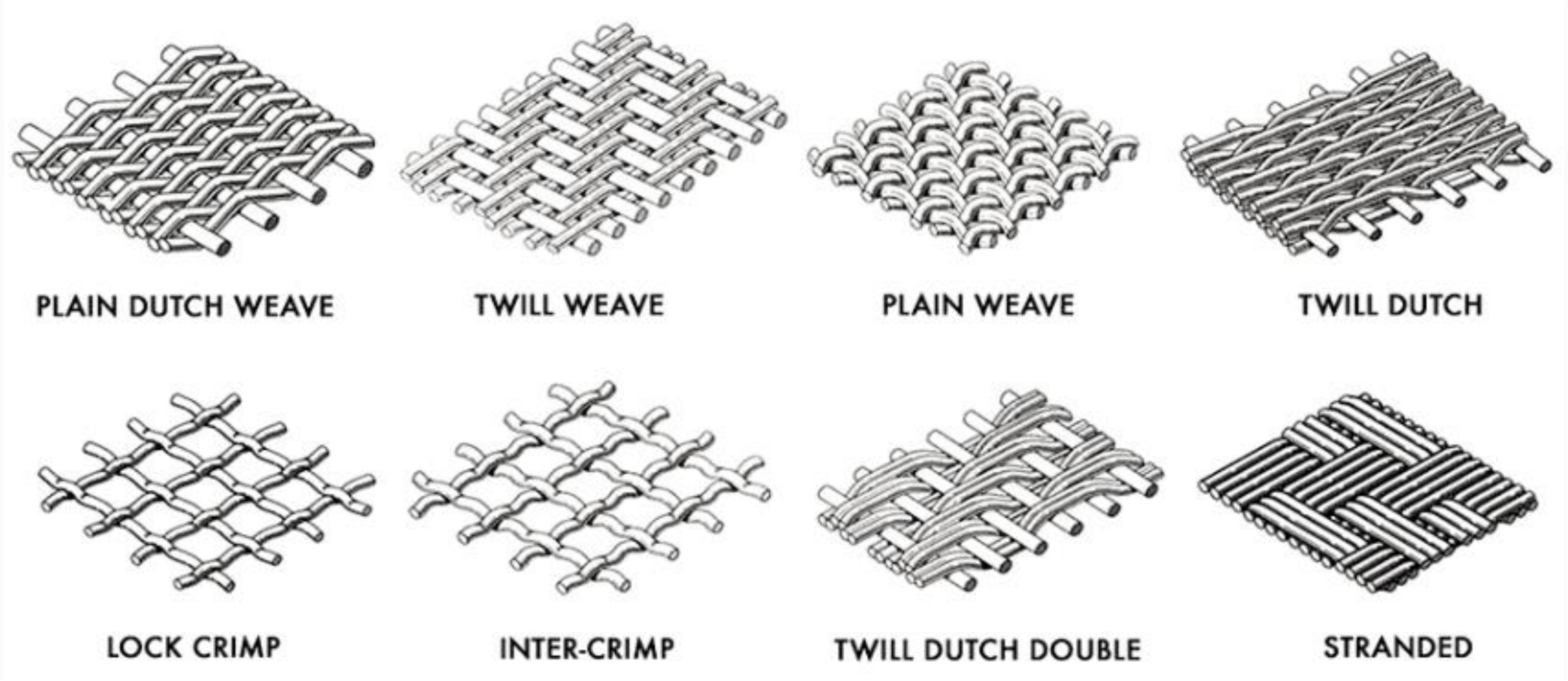
关于空间曲线的一些研究工作：编织艺术

Computational Design of Knit Templates

BENJAMIN JONES, YUXUAN MEI, HAISEN ZHAO, TAYLOR GOTFRID, JENNIFER MANKOFF, and
ADRIANA SCHULZ, University of Washington

8.1 空间曲线

关于空间曲线的一些研究工作：编织艺术



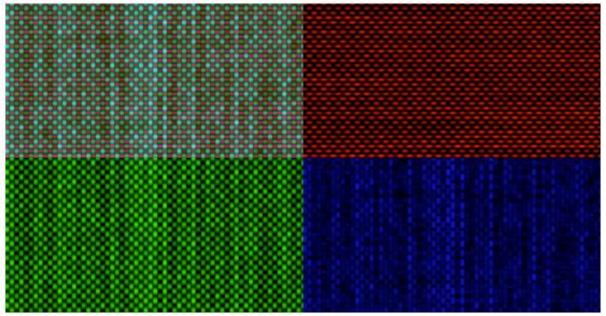
8.1 空间曲线

关于空间曲线的一些研究工作

Creating Curve-Based Garments with Custom Weave Patterns

Dan Lipson
Walt Disney Animation Studios
Burbank, USA
dan.lipson@disneyanimation.com

Jose Velasquez
Walt Disney Animation Studios
Burbank, USA
jose.velasquez@disneyanimation.com



ACM Trans. Graph, 2023

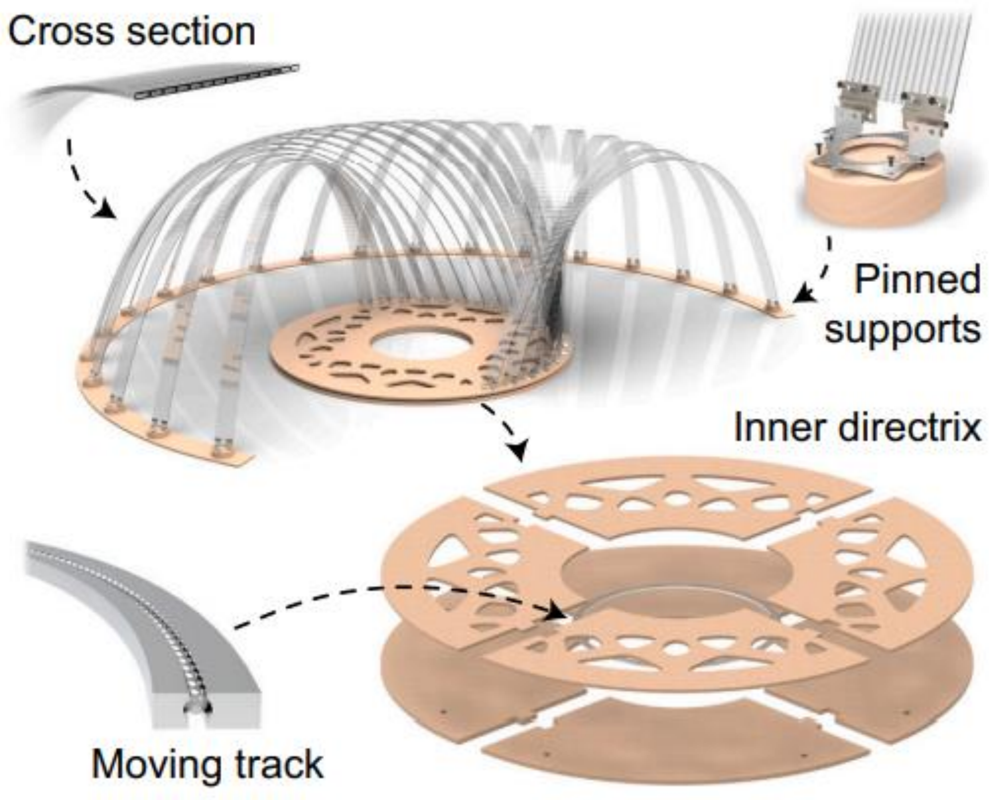
8.1 空间曲线

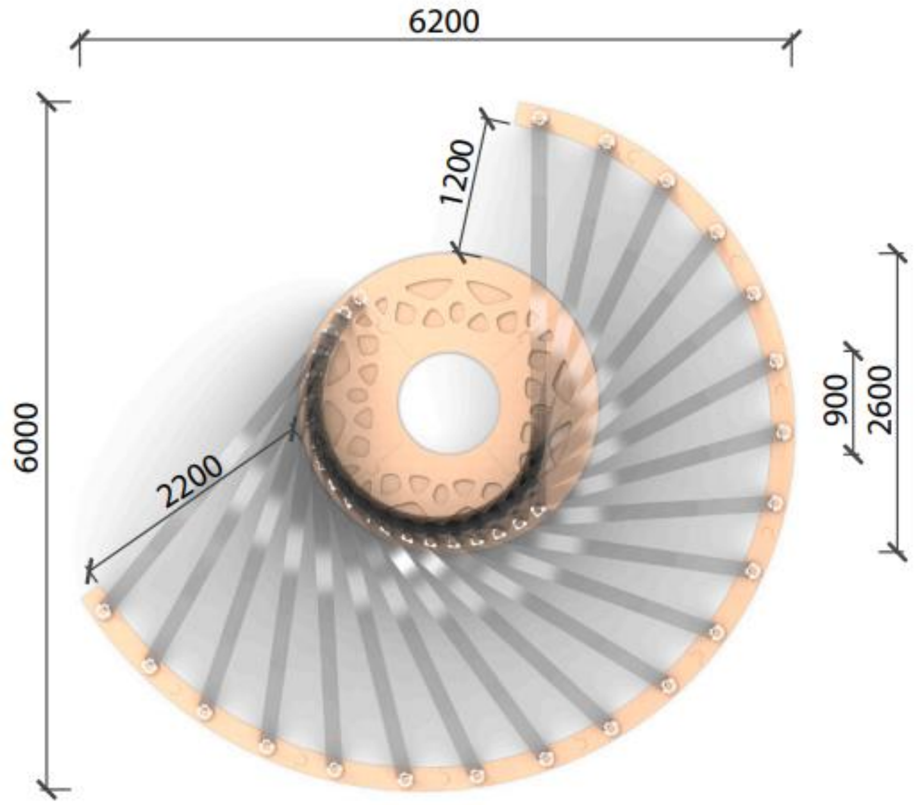
关于空间曲线的一些研究工作

The Design Space of Plane Elastic Curves， ACM Trans. Graph, 2021

8.1 空间曲线

关于空间曲线的一些研究工作

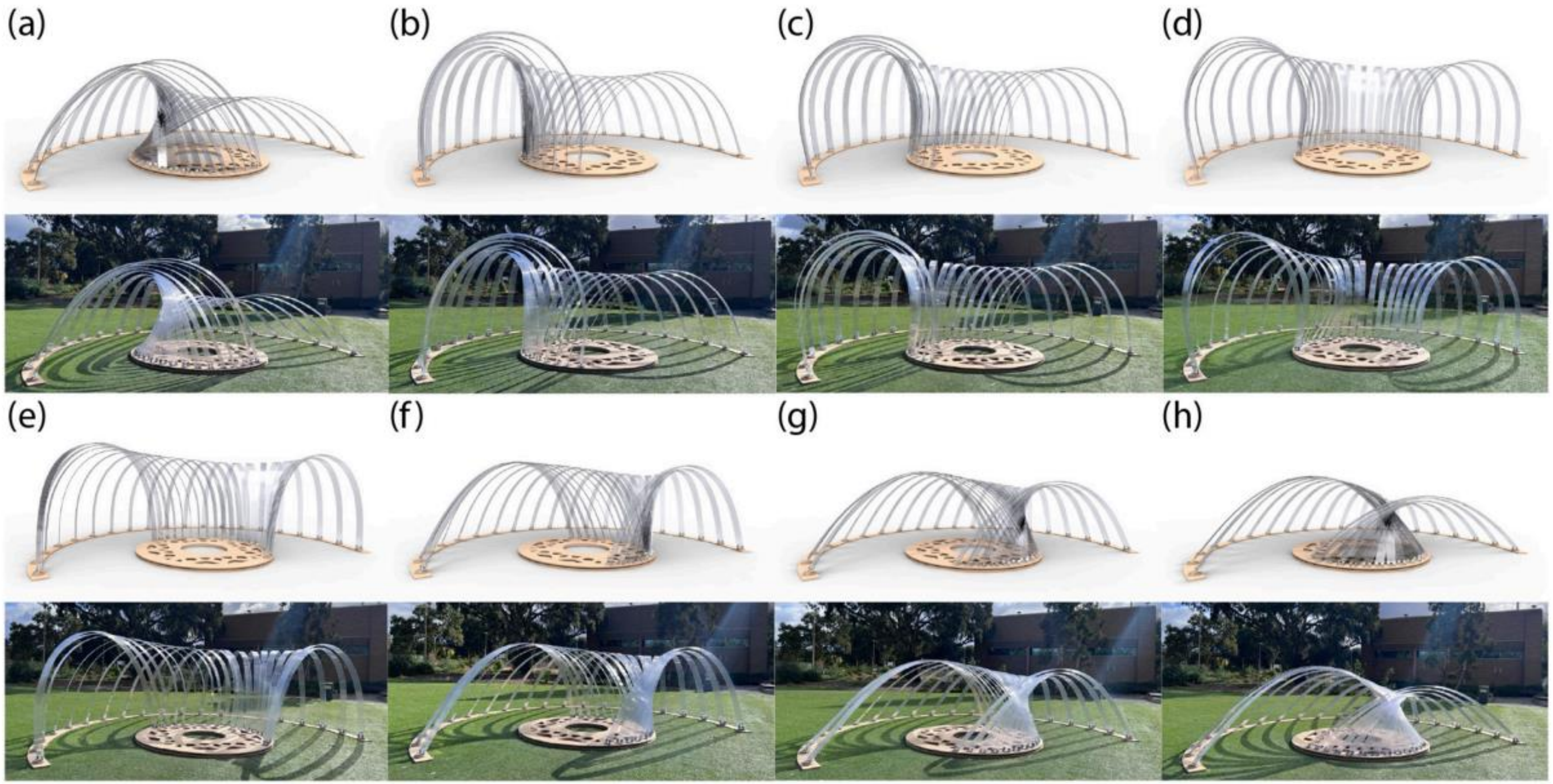




Design and construction of kinetic structures based on elastic strips， AC， 2023

8.1 空间曲线

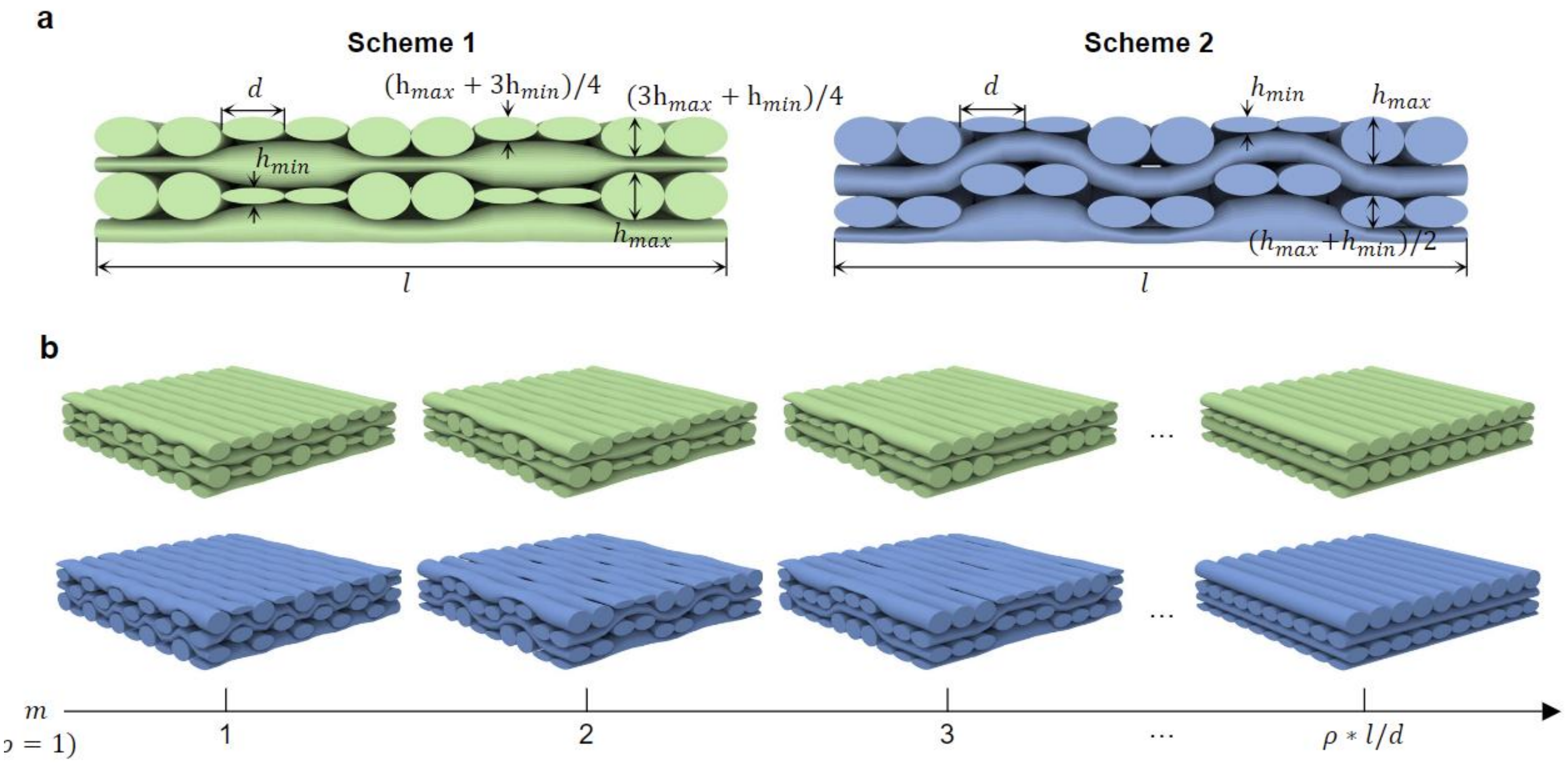
关于空间曲线的一些研究工作



Design and construction of kinetic structures based on elastic strips, AC, 2023

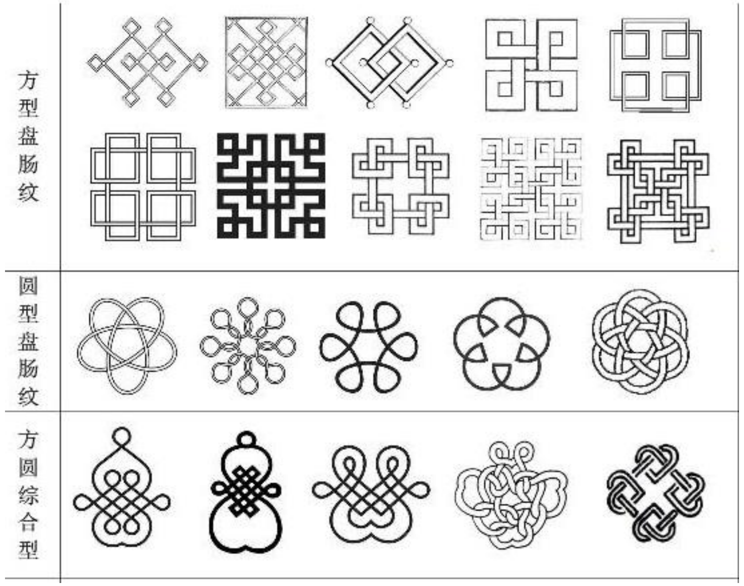
8.1 空间曲线

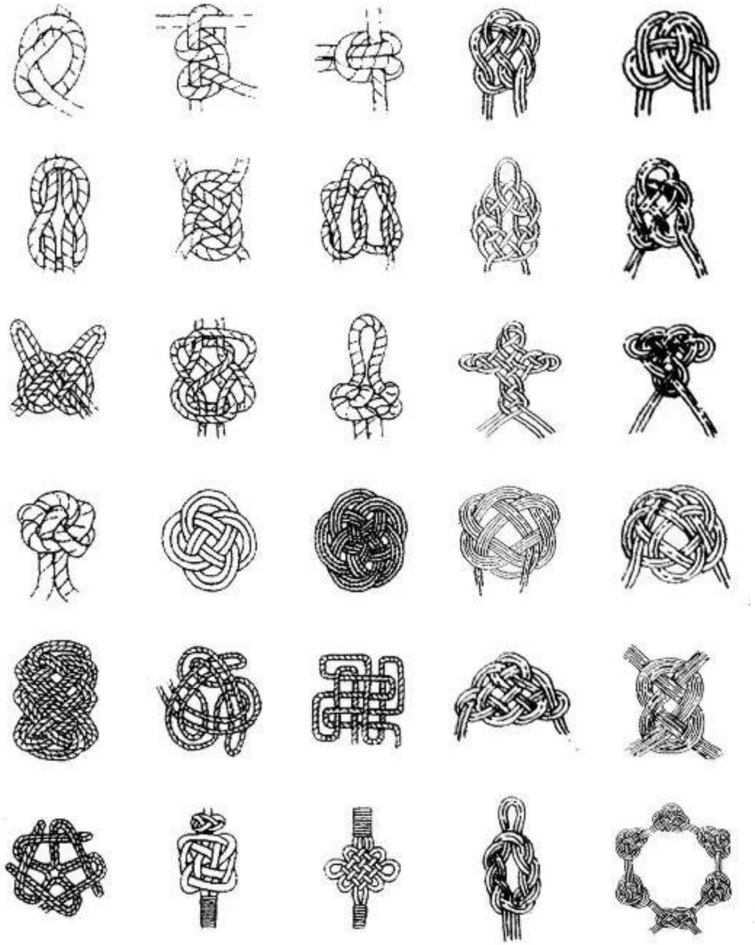
关于空间曲线的一些研究工作



8.1 空间曲线

关于空间曲线的一些研究工作：绳结艺术





8.1 空间曲线

关于空间曲线的一些研究工作：弹性结

Computational Exploration of Multistable Elastic Knots

MICHELE VIDULIS, EPFL, Switzerland
YINGYING REN, EPFL, Switzerland
JULIAN PANETTA, UC, Davis, USA
EITAN GRINSPUN, University of Toronto, Canada
MARK PAULY, EPFL, Switzerland

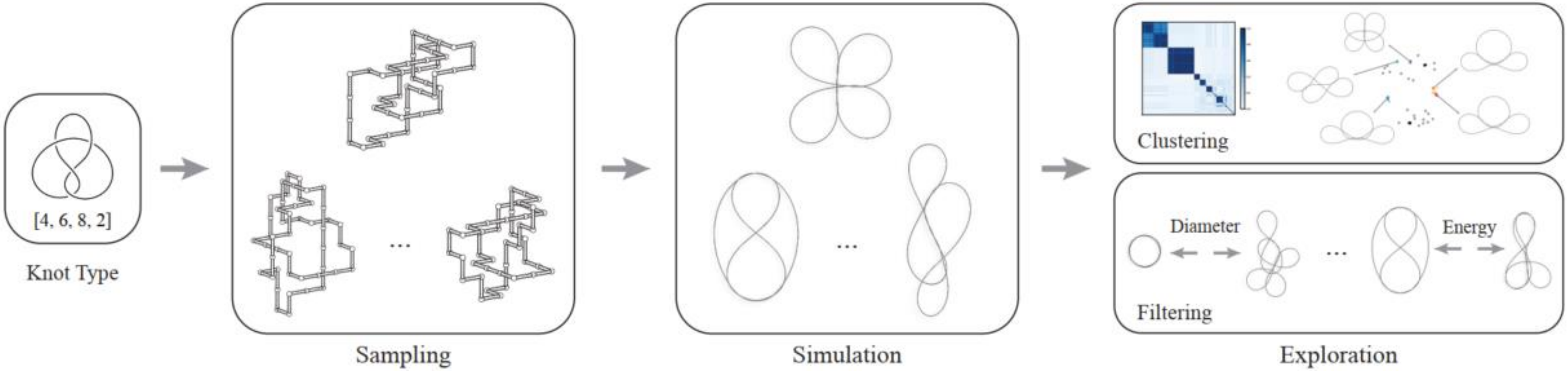
Siggraph, 2023

基于弹性结研究多稳态的机械系统

https://www.youtube.com/watch?v=5_Qlc3ChxC8&ab_channel=JunggooLee

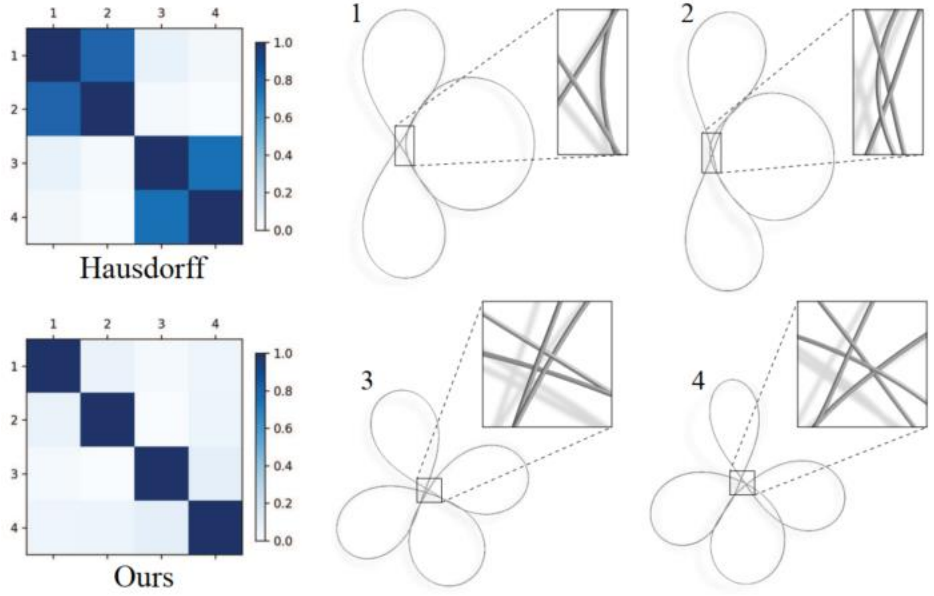
8.1 空间曲线

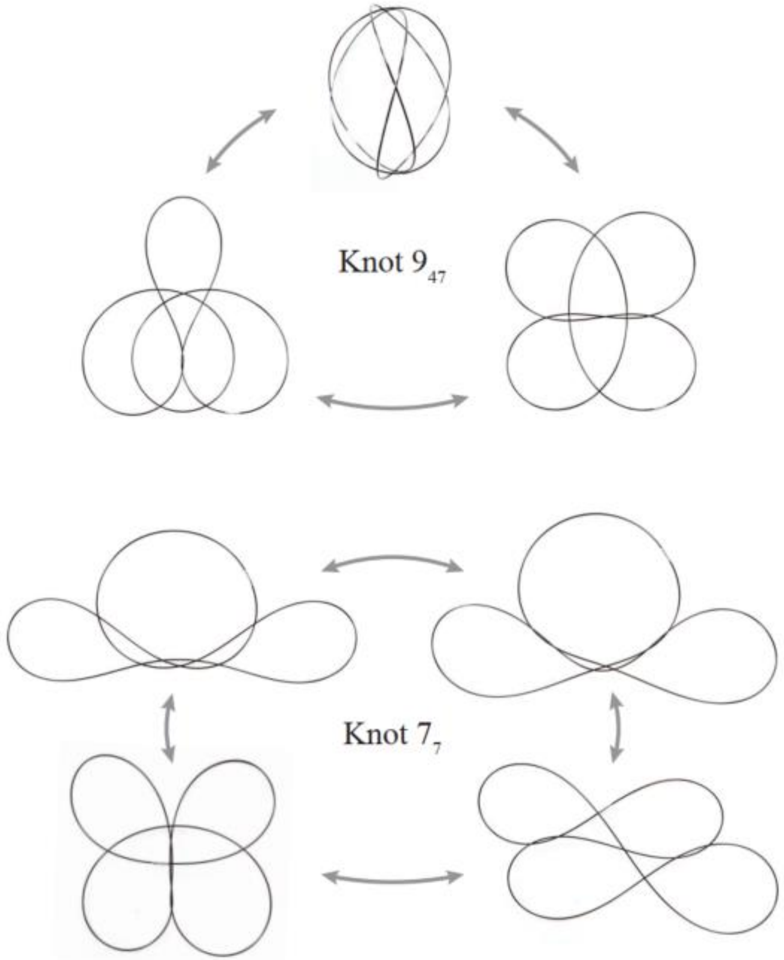
关于空间曲线的一些研究工作



8.1 空间曲线

关于空间曲线的一些研究工作





8.1 空间曲线-总结

- 空间曲线
  - 一般方程
    - 两曲面的交线
    - 平面上的投影线
  - 参数方程/向径式
    - 简单曲线/Jordan曲线
    - 闭曲线
    - 切线/切线方程/法平面方程
  - 离散表示
  - 相关研究
    - 编织艺术
    - 曲线造型装饰/建筑
    - 编织交错的路径规划
    - 绳结艺术

8.2空间曲面

- 空间曲面的表示:

（1）显式表示如$z = f(x, y)$等

（2）向径式方程→ 参数方程

（3）隐式表示如 $f(x, y, z) = 0$

- 空间曲面的相关研究

8.2 空间曲面

显式方程 $Z = f(x, y), (x, y) \in D$

显式曲面可以写成参数方程

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y) = \big(x, y, f(x, y)\big), (x, y) \in D$$

则

$$\overrightarrow{r_x} = (1,0, f_x') \quad \overrightarrow{r_y} = \left(0,1, f_y'\right)$$

可以得到切平面的法向量

$$\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x' \\ 0 & 1 & f_y' \end{pmatrix} = (-f_x', -f_y', 1)$$

8.2 空间曲面

参数方程

D为$\mathbb{R}^2$中的区域，定义在D上的一个二元向量值函数：

$$r(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big),\qquad (u,v)\in D$$

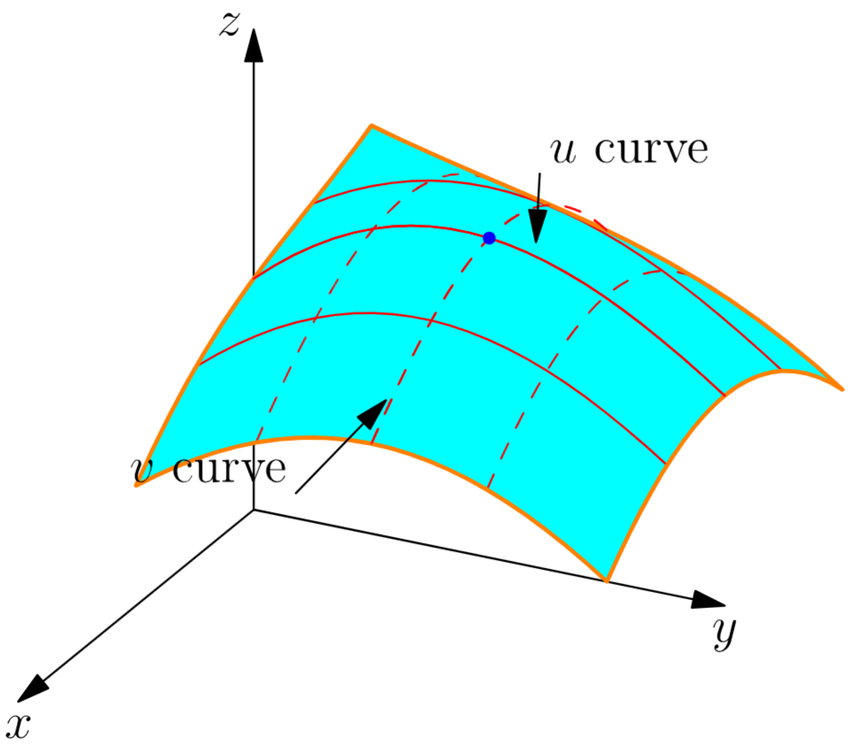
确定了空间中的一个曲面，称为曲面的**向径式方程**。

$$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}\qquad (u,v)\in D$$

称为曲面的**参数方程**。

8.2 空间曲面

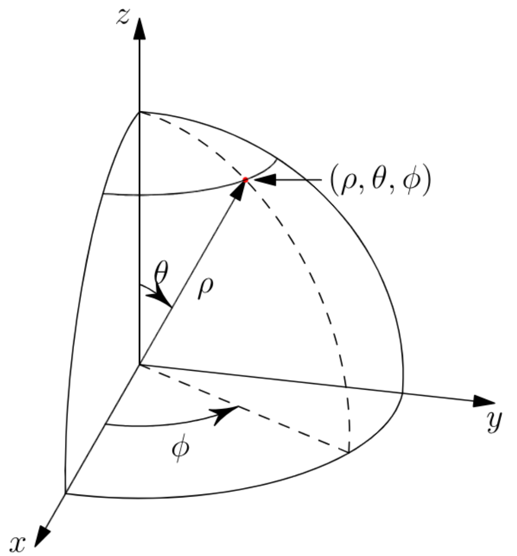
固定一个v值，让u变化，则$r(u,v)$在曲面上画出一条线，称为u曲线，同样有v曲线。



如下球面方程：

$$
\begin{cases}
x(\theta,\phi) = R\sin\theta\cos\phi, \\
y(\theta,\phi) = R\sin\theta\sin\phi, \quad \theta\in[0,\pi], \phi[0,2\pi] \\
z(\theta,\phi) = R\cos\theta
\end{cases}
$$

当θ固定时，得到纬线，
当ϕ固定时，得到经线。



8.2 空间曲面

参数方程

$$r(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big),\qquad (u,v)\in D$$

u曲线的切线方向： $r'_u=\dfrac{\partial r}{\partial u}=(\dfrac{\partial x}{\partial u},\dfrac{\partial y}{\partial u},\dfrac{\partial z}{\partial u})$

v曲线的切线方向： $r'_v=\dfrac{\partial r}{\partial v}=(\dfrac{\partial x}{\partial v},\dfrac{\partial y}{\partial v},\dfrac{\partial z}{\partial v})$

若$x(u,v),y(u,v),z(u,v)$均为C^1函数，若D中处处有$r'_u\times r'_v\neq 0$，则曲面为光滑曲面。

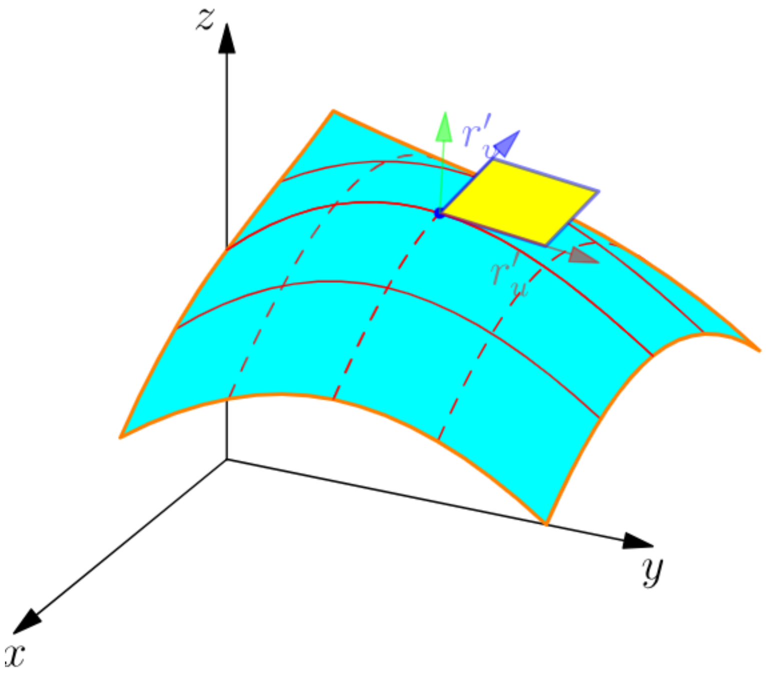
8.2空间曲面

切平面:

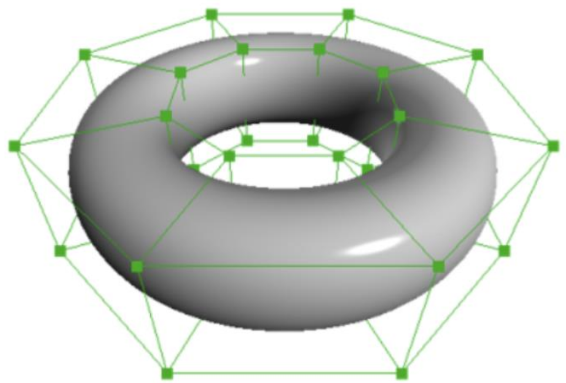
曲面过M_0, 由$r'_u(u_0,v_0)$与$r'_v(u_0,v_0)$张成的平面，称为曲面在M_0 处的切平面，它的法向量是:

$$n(u_0,v_0)=r'_u(u_0,v_0)\times r'_v(u_0,v_0)$$

$$n(u_0,v_0)=(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})$$



8.2空间曲面



参数方程中一个代表性的表示方法：样条曲面

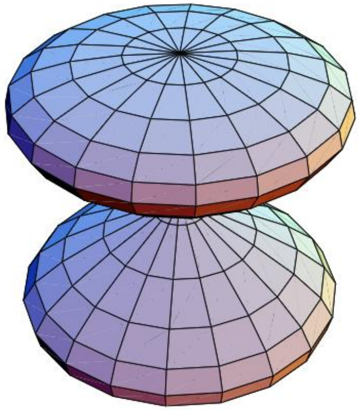
在当今的CAD软件中，**样条曲面 (Spline Surfaces)** 是最常用的表示方法之一，尤其是在机械、工业设计等领域，对曲面质量要求较高的行业中应用广泛。

样条曲面表达一般指**非均匀有理B样条 (NURBS)，**它是由分段多项式或有理B样条基函数来描述的。

URBS建模可以使用户设计出**质量极高的曲面**，但是对于一些较复杂的几何形体，它需要通过多张曲面拼接来实现。

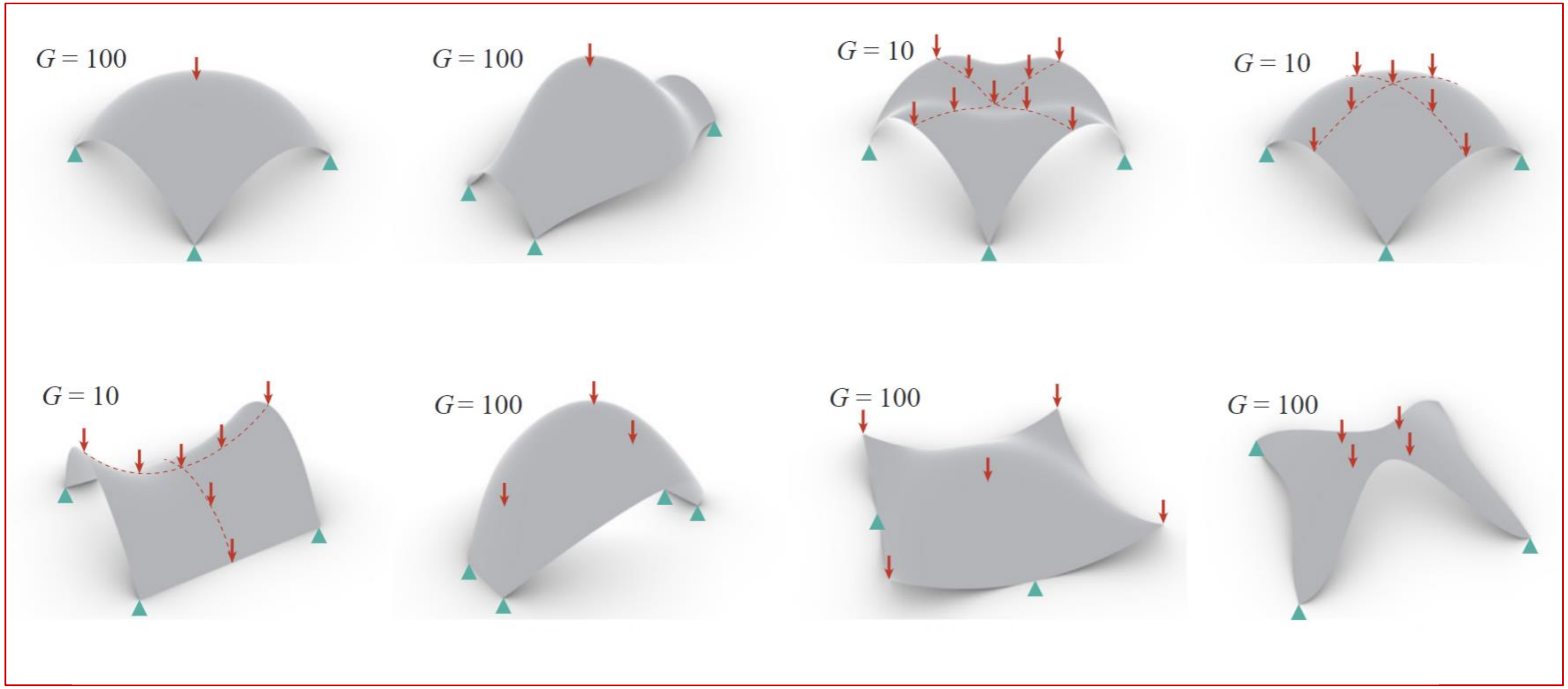
8.2 空间曲面

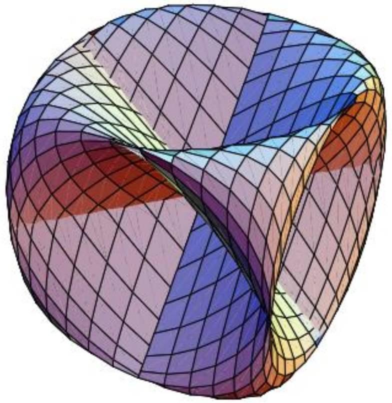
各式各样的参数方程的空间曲面



$$x(u, v) = \cos u \sin(2v)$$
$$y(u, v) = \sin u \sin(2v)$$
$$z(u, v) = \sin v$$

NURBS 曲面





Sine Surface

$$x = a\sin u$$
$$y = a\sin v$$
$$z = a\sin(u + v)$$

8.2 空间曲面

隐式方程

设$F(x,y,z)$为区域$D \in \mathbb{R}^3$上的C^1函数，点$M_0(x_0,y_0,z_0) \in D$满足$F(x_0,y_0,z_0)=0$

且$\left(F'_x,F'_y,F'_z\right)|_{M_0} \neq 0$，根据隐函数存在定理，F在$M_0$附近给出了一张曲面。

隐式曲面：$F(x,y,z)=0$

空间中的曲线可以表示为两个空间中的曲面的交线:

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}, (x,y,z) \in D \subset \mathbb{R}^3$$

8.2 空间曲面

- 隐式曲面$F(x,y,z)=0$在点M_0处的法向量为:

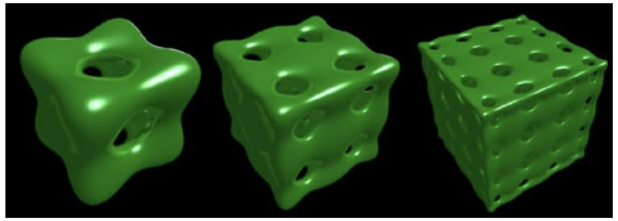
$$\vec{n}=\left(F'_x(M_0),F'_y(M_0),F'_z(M_0)\right)$$

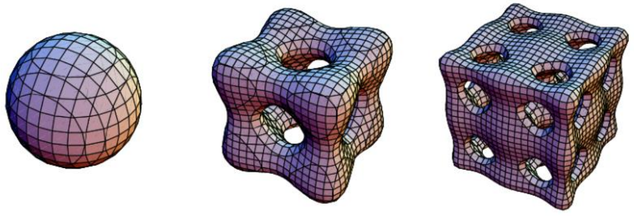
- 同样，显式曲面$z=f(x,y)$可以写成隐式

$$F(x,y,z)=z-f(x,y)=0$$

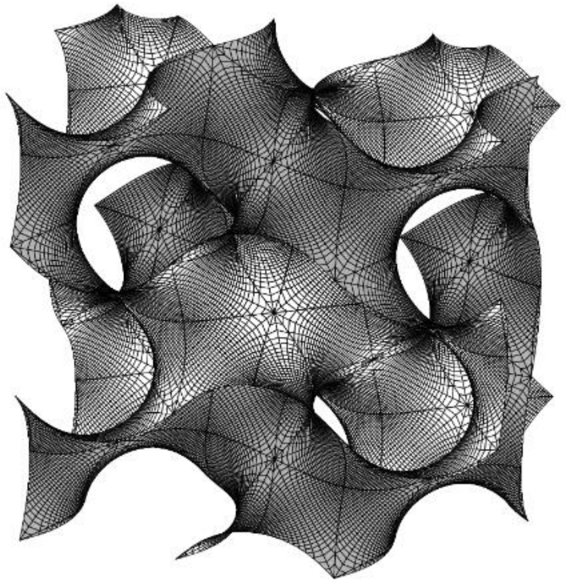
则它的法向量为$\left(-f'_x,-f'_y,1\right)$,与前面得到的一致。

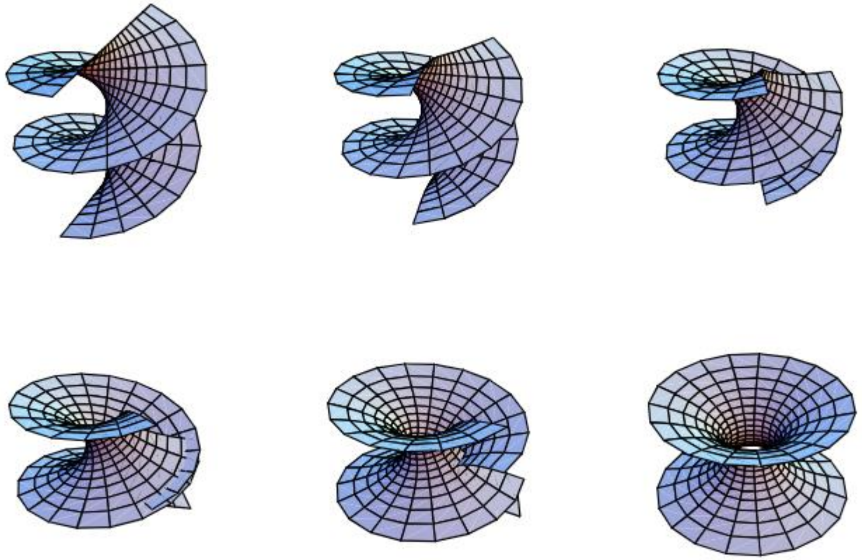
8.2空间曲面

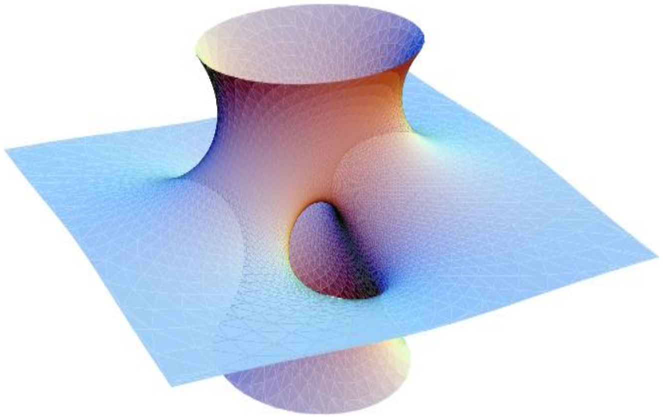




各式各样的隐式方程的空间曲面





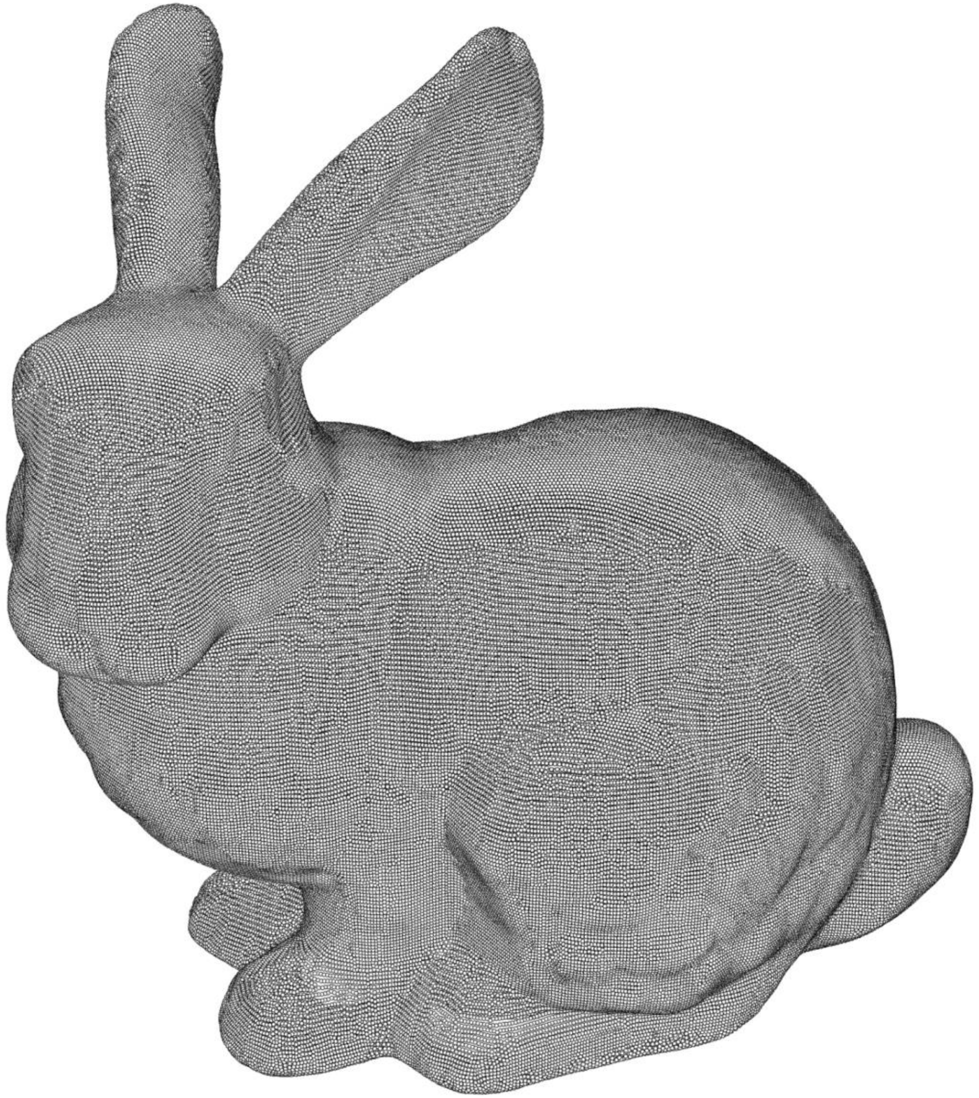


Gyroid曲面　　悬链面　　Costa曲面

8.2空间曲面

离散曲面表示：点云

常在描述一个三维模型时，最基本的描述方式是使用点去描述，但是要想表达出一个三维模型，需要大量且密集的点，这些点称之为**点云 (Point Cloud)** 。

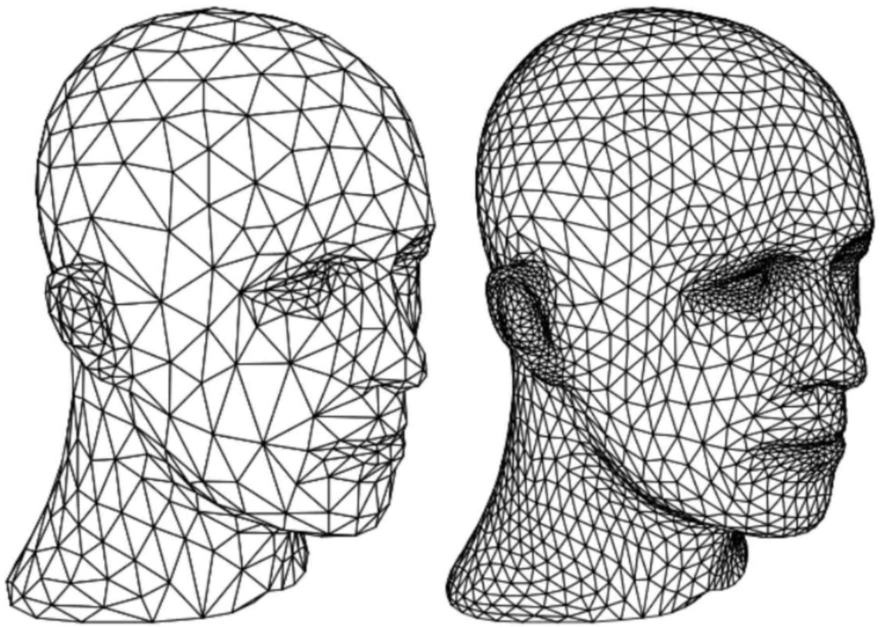


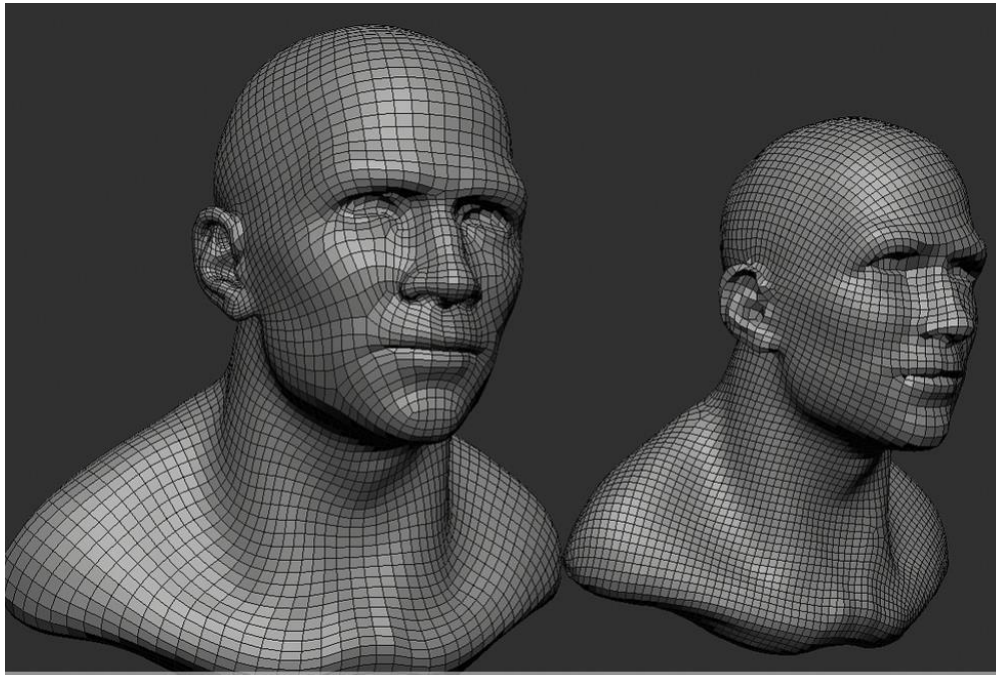
三维空间中一个点由三个方向的坐标构成，通常记作 (x,y,z)，因此，点云可以被视作是一堆点的集合，存储时即可用一系列 (x,y,z) 坐标来表示.

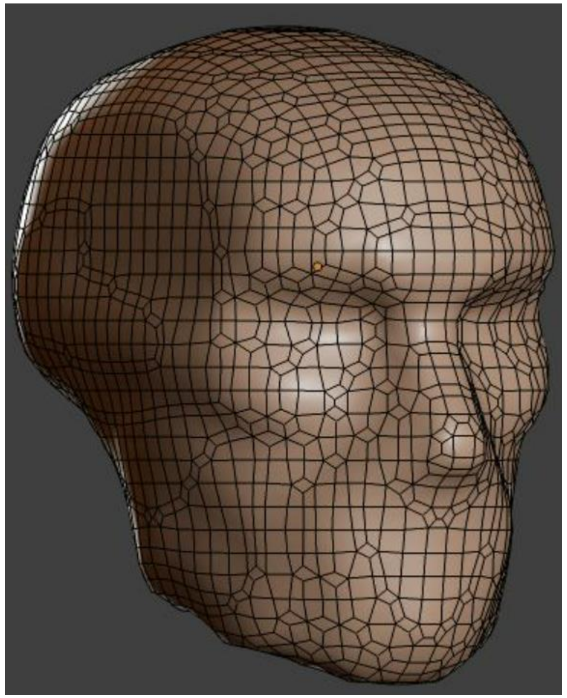
[1] - 描述三维模型的点云数据是无序排布的，这意味着**点云在三维空间中，仅表示一系列点，点与点之间没有任何联系.**
[2] - 点云是表示三维几何模型中最简单的方法，它**可以表示任意类型的几何物体**，代价是必须拥有足够密集的点云信息才能避免物体失真.

8.2空间曲面

离散曲面表示：多边形网格







由于网格在图形学领域被广泛研究，各种处理算法层出不穷，因此它已经变成了当前图形学最普遍的图形表示方法.无论是游戏场景建模、概念设计建模还是分析与模拟，都是通过编辑和处理网格单元来实现的.

8.2空间曲面

离散曲面表示：多边形网格

最基础的网格数据结构将网格所描述的信息分成了两个部分：**几何信息 (Geometry Information)** 和**拓扑信息 (Topology Information)**.

- 几何信息描述了网格上的**顶点的坐标**;
- 拓扑信息描述了网格上的**顶点的连接关系**;

点云通常是由三维扫描得到的，三维扫描仪通过记录空间中被扫描物体的点云信息，再使用表面重建算法来得到一个完整的三维扫描模型的. 因此，**点云通常会被转化成网格来做后续处理**.

8.2空间曲面-相关研究

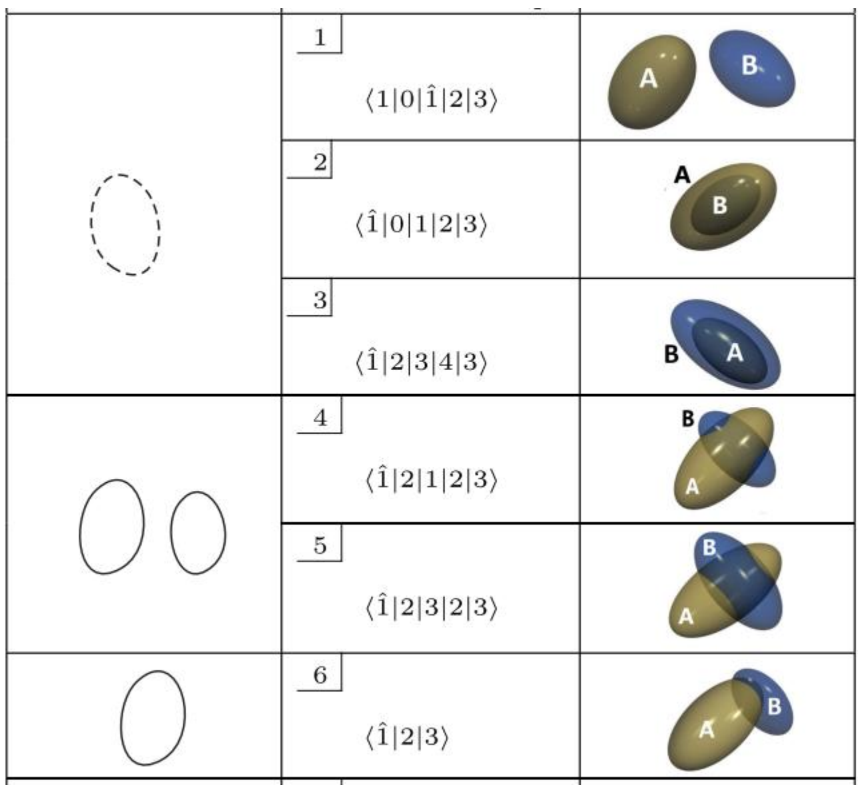
- 不同曲面的交线情况？ ➡ • 不同曲面的自交情况？
- 如何对曲面进行参数化？ （曲面的参数化表示？）
- 特殊类型的曲面？比如极小曲面？可展曲面？有何应用？
- 功能性曲面，赋有材料属性的曲面的结构特性？

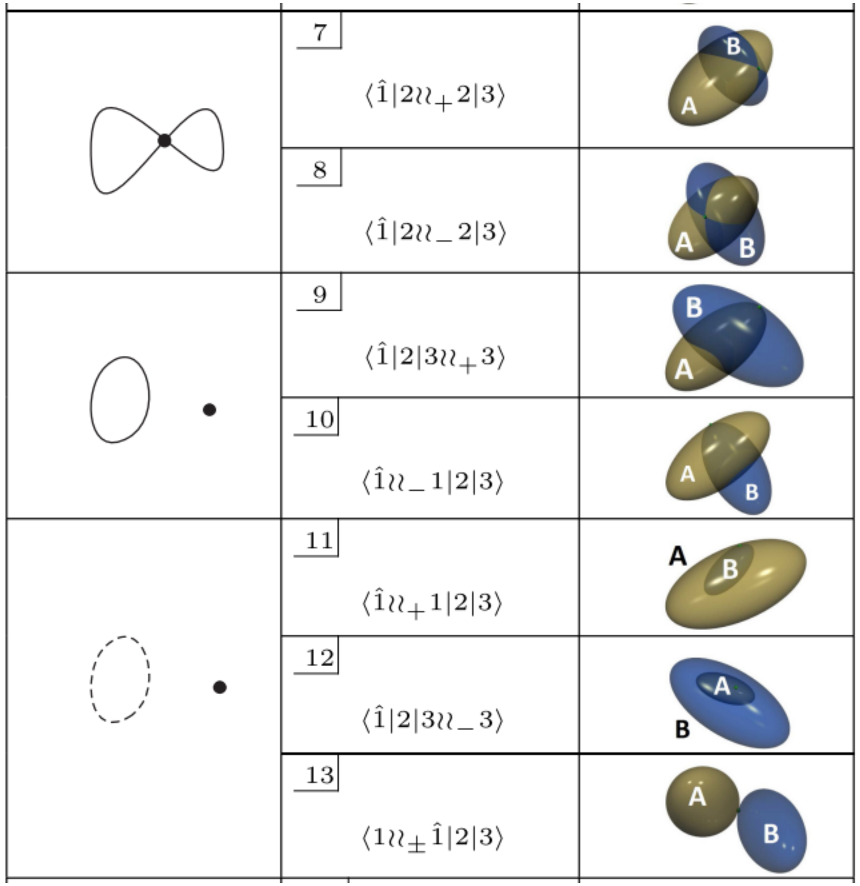
8.2空间曲面-相关研究

- 不同曲面的交线情况？ → • 不同曲面的自交情况？
- 如何对曲面进行参数化？ （曲面的参数化表示？）
- 特殊类型的曲面？ 比如极小曲面？ 可展曲面？ 有何应用？
- 功能性曲面，赋有材料属性的曲面的结构特性？

8.2空间曲面-截痕

关于空间曲面的一些研究工作：椭球面交线的确定



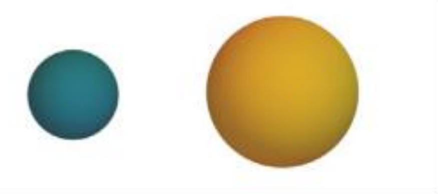
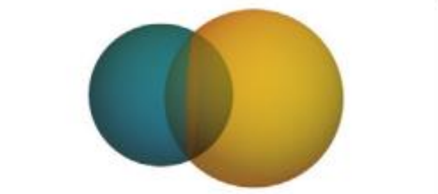


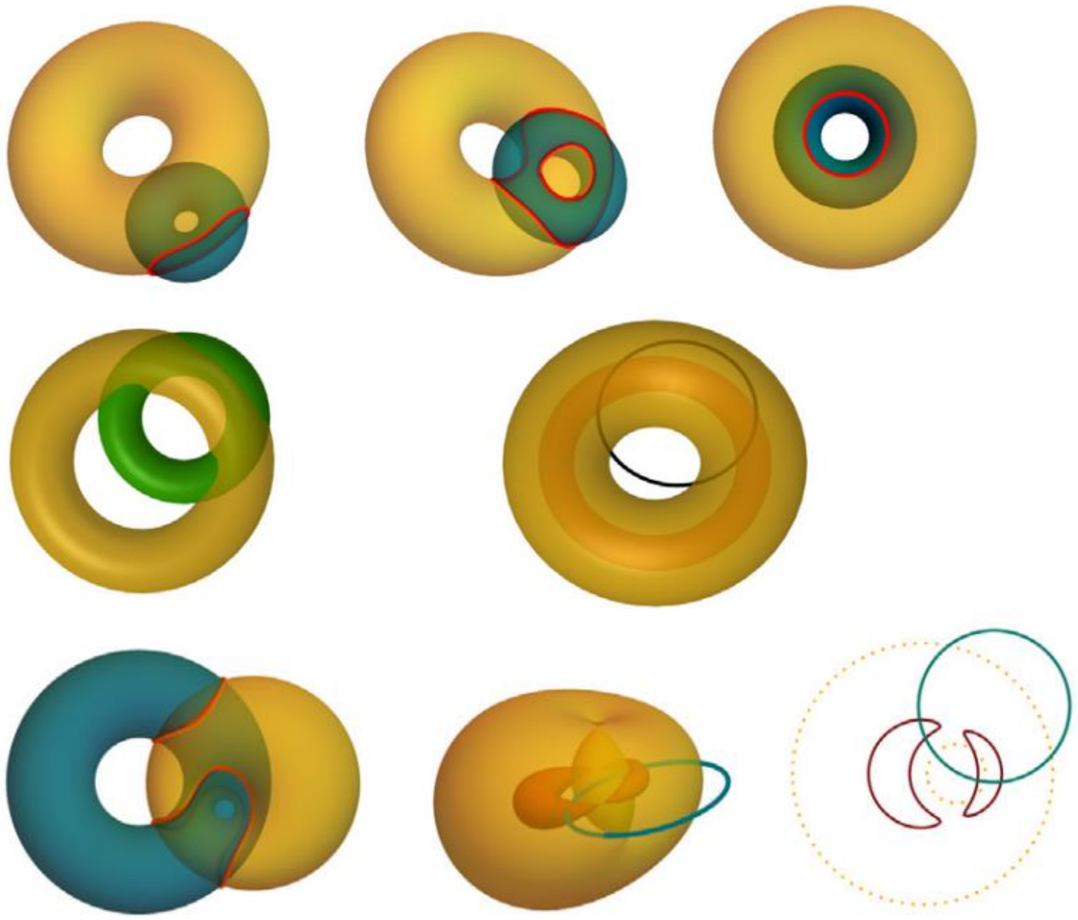
共有42中位置关系构成
不同的交线情况！

Complete Classification and Efficient Determination of Arrangements Formed by Two Ellipsoids, TOG, 2020

8.2空间曲面-截痕

关于空间曲面的一些研究工作：圆环面交线的确定

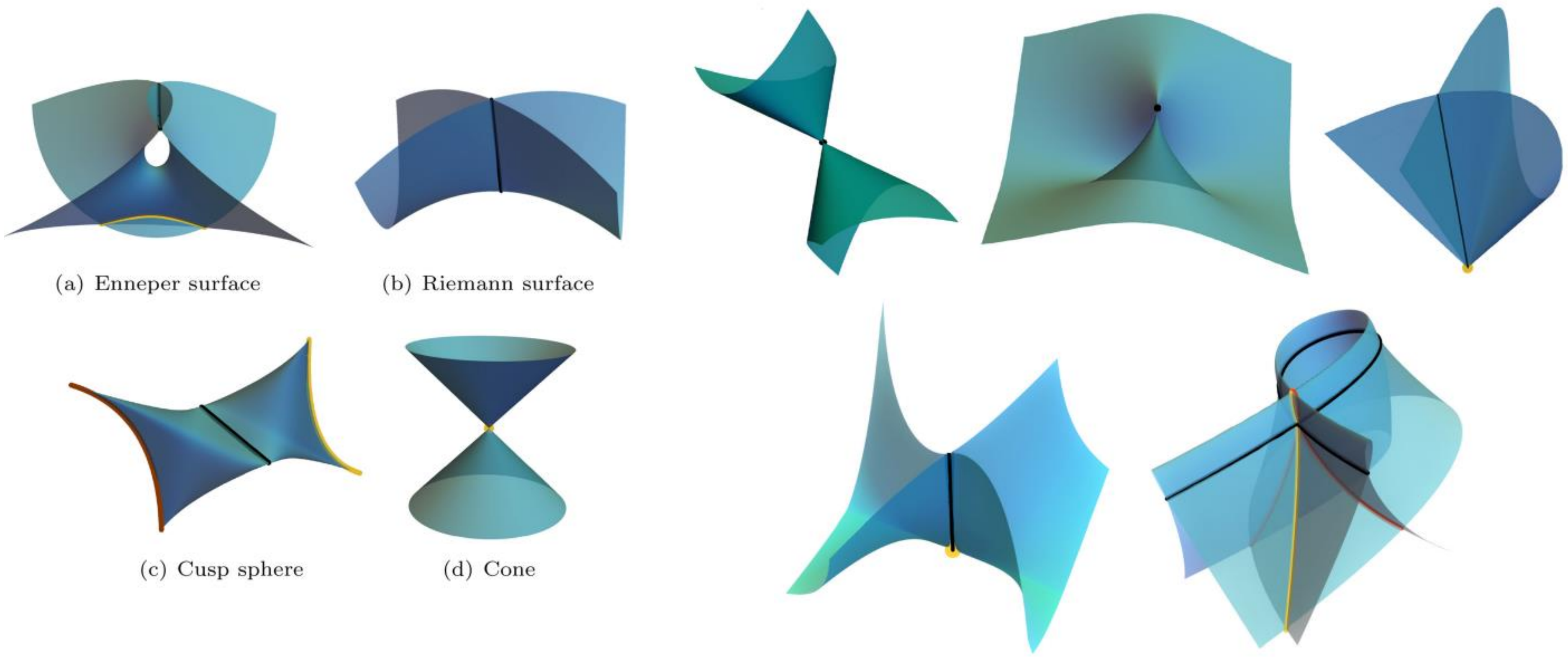
	S_1, S_2	S_2^O, S_2^I and Ω_1
separate		
overlap		
contain		



Topological Classification and Determination of Non-Degenerate Intersections of Two Dupin Cyclides, CAD, 2022

8.2空间曲面-截痕

关于空间曲线的一些研究工作：单曲面交线的确定



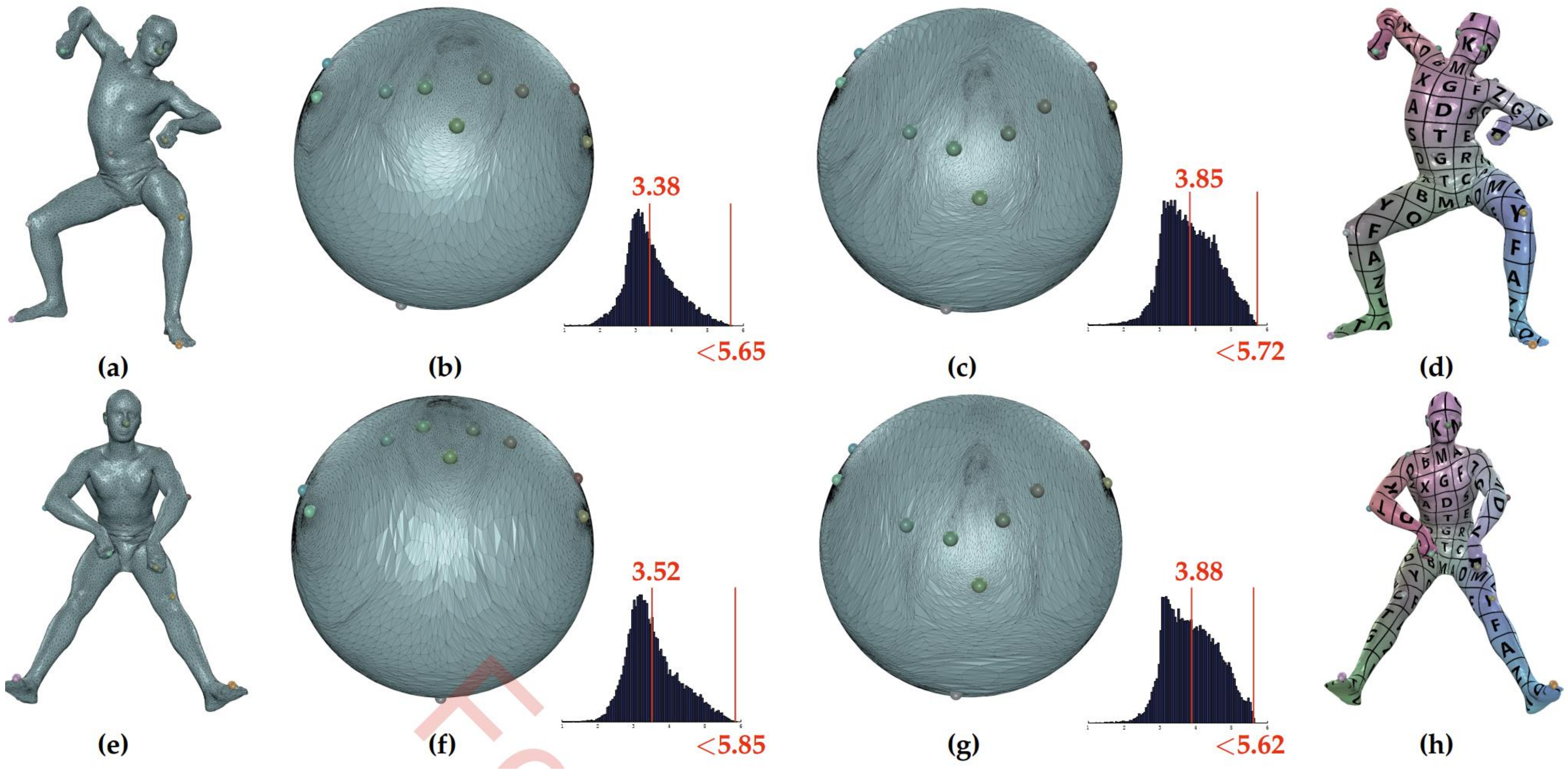
Singularity Computation for Rational Parametric Surfaces Using Moving Planes, Siggraph, 2023

8.2空间曲面-相关研究

- 不同曲面的交线情况？ ➡ • 不同曲面的自交情况？
- 如何对曲面进行参数化？ （曲面的参数化表示？）
- 特殊类型的曲面？ 比如极小曲面？ 可展曲面？ 有何应用？
- 功能性曲面，赋有材料属性的曲面的结构特性？

曲面参数化专题课程：http://staff.ustc.edu.cn/~renjiec/GAMES301/

8.2空间曲面-参数化

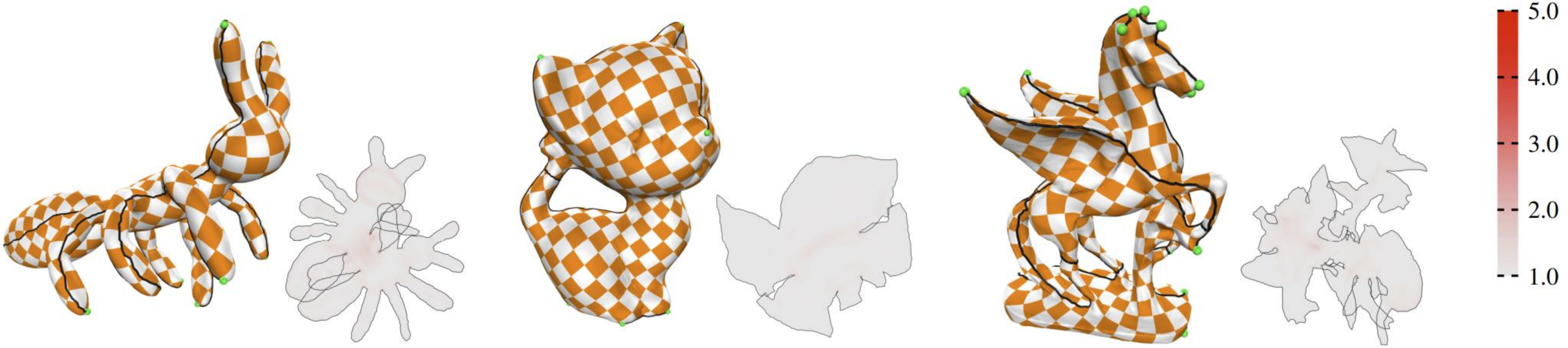


(a) (b) (c) (d)

(e) (f) (g) (h)

Advanced Hierarchical Spherical Parameterizations, TVCG, 2017

8.2空间曲面-参数化



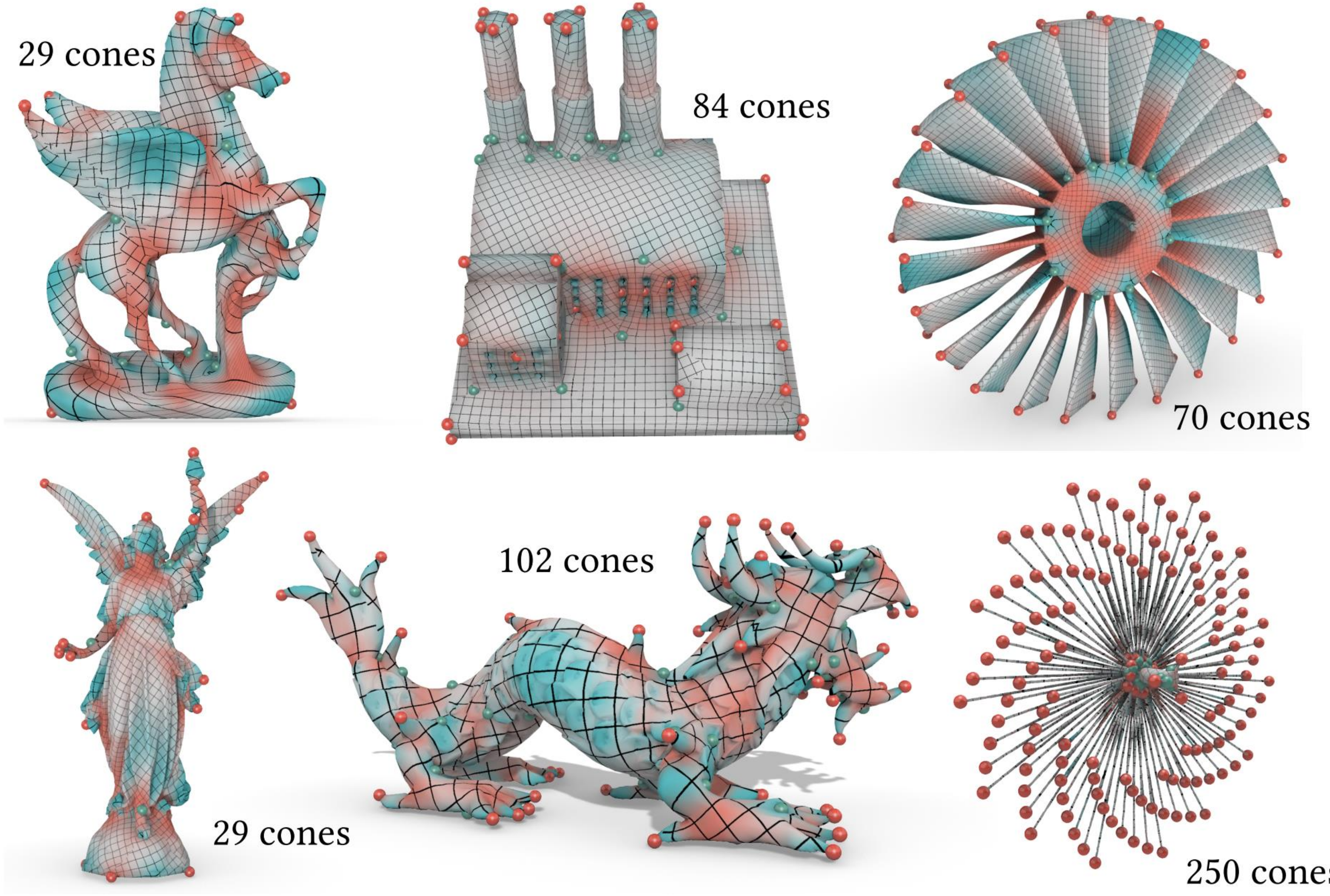
(3.44/1.12/0.12)
(2.04%/2.04%)

(3.21/1.10/0.08)
(0.45%/0.45%)

(6.14/1.15/0.17)
(0.98%/1.01%)

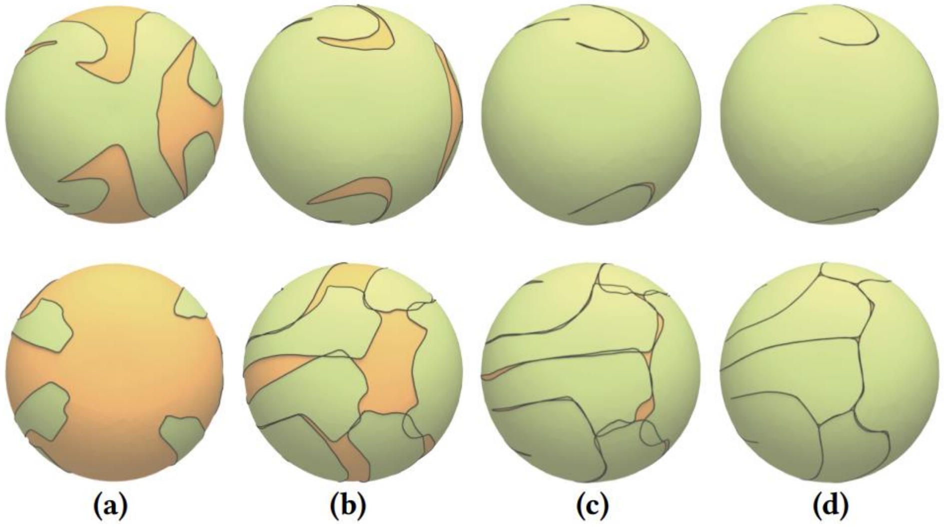
Sphere-based cut construction for planar parameterizations, Computers & Graphics, 2018

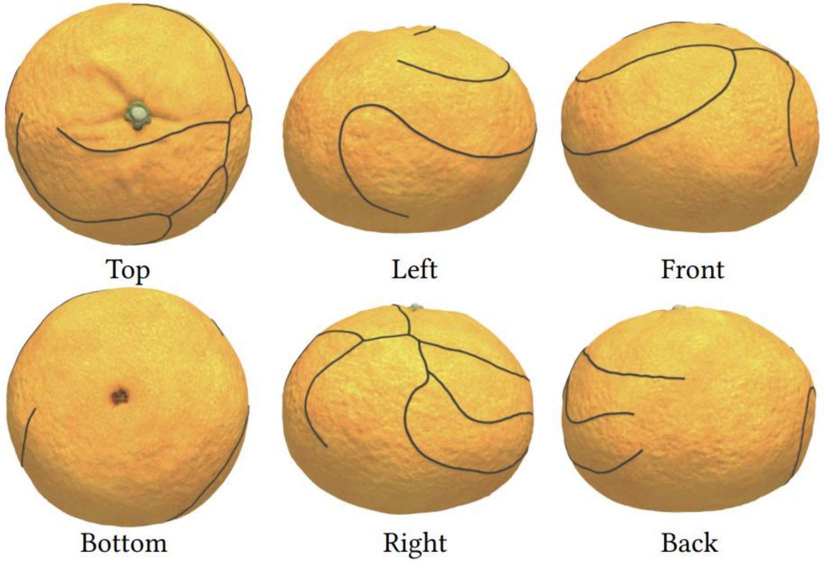
8.2空间曲面-参数化

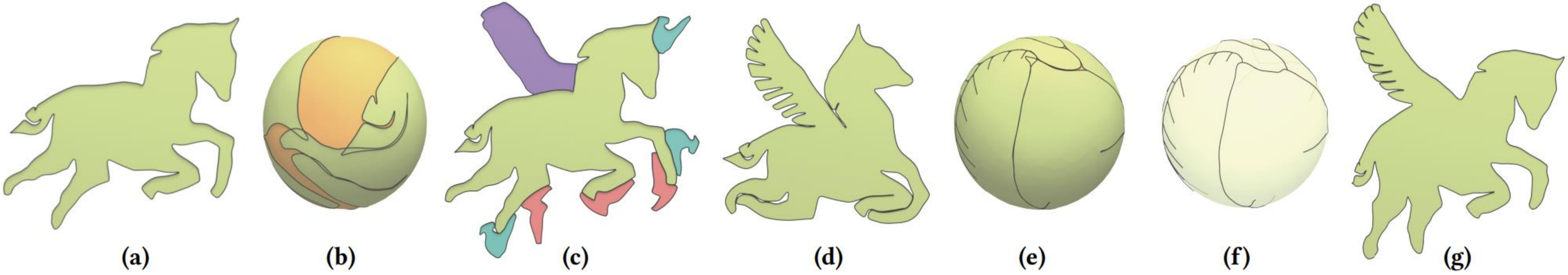


Computing Sparse Cones with Bounded Distortion for Conformal Parameterizations, TOG, 2021

8.2空间曲面-参数化







Computational Peeling Art Design, ACM Trans. Graph. 2019

8.2 空间曲面-参数化

Computational Peeling Art Design

ACM SIGGRAPH 2019

Hao Liu* Xiao-Teng Zhang* Xiao-Ming Fu Zhi-Chao Dong Ligang Liu

University of Science and Technology of China

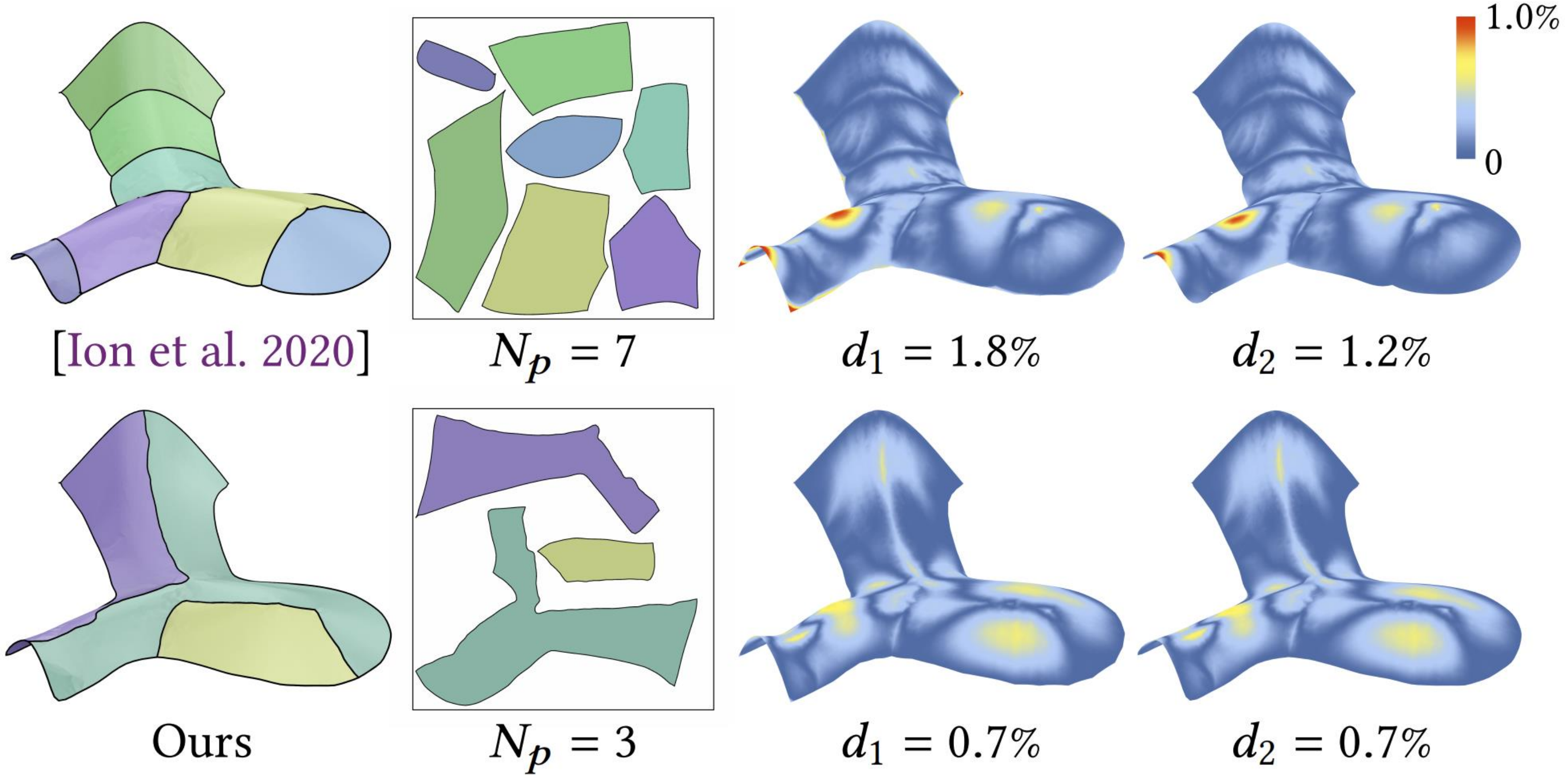
(This video contains voiceover.)

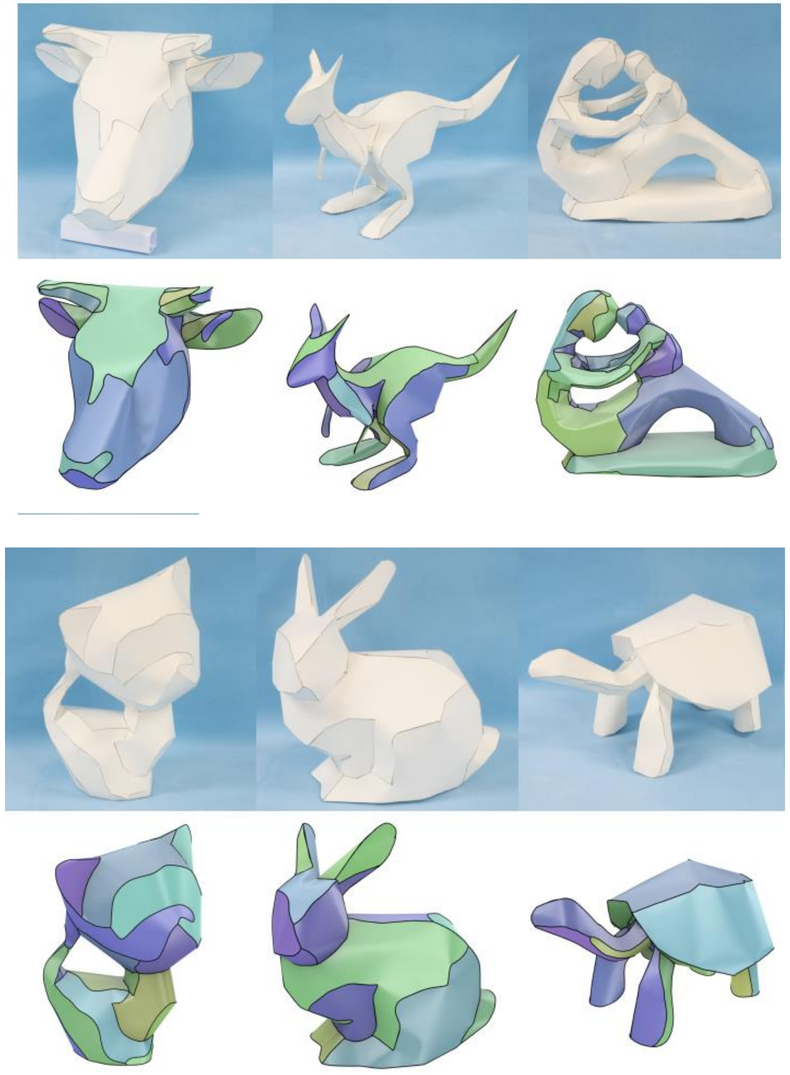
8.2空间曲面-相关研究

- 不同曲面的交线情况？ → • 不同曲面的自交情况？
- 如何对曲面进行参数化？ （曲面的参数化表示？）
- 特殊类型的曲面？比如极小曲面？可展曲面？有何应用？
- 功能性曲面，赋有材料属性的曲面的结构特性？

8.2空间曲面-特殊曲面

曲面的分片可展性质的探讨

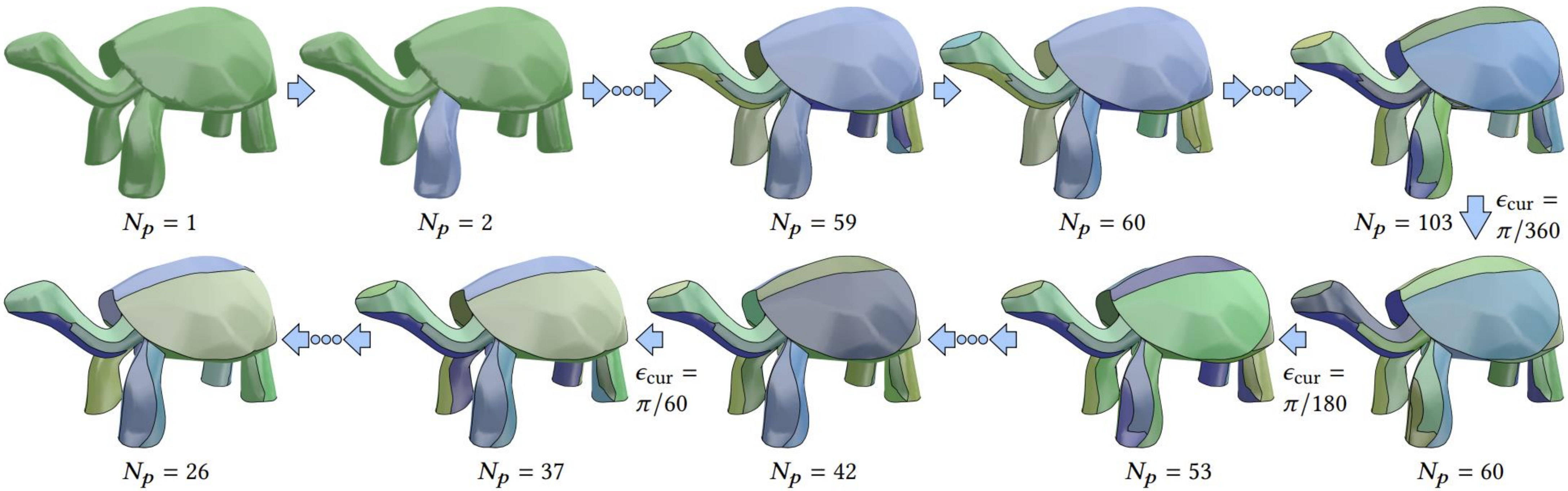




Developability-Driven Piecewise Approximations for Triangular Meshes, TOG, 2022

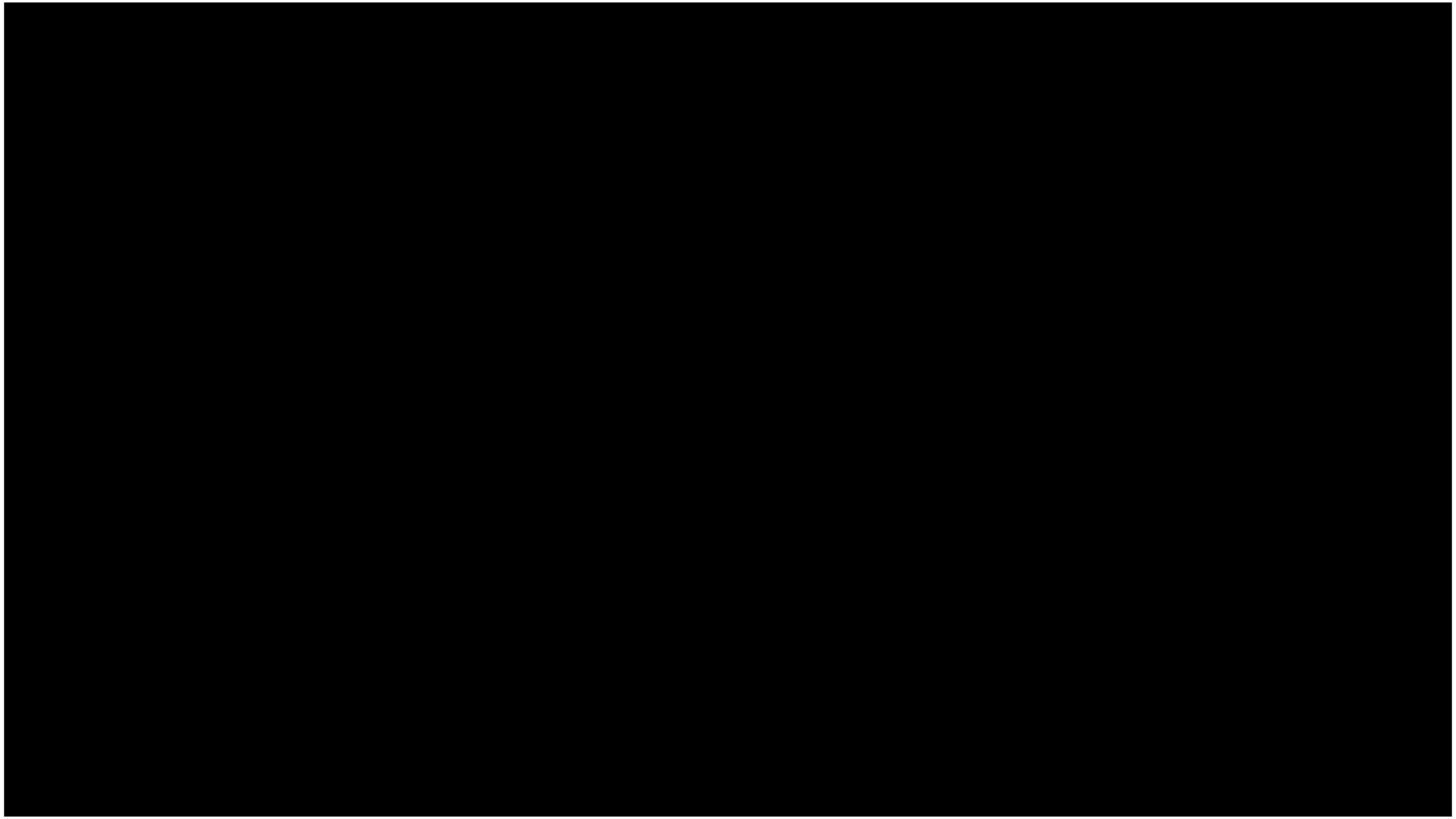
8.2空间曲面-特殊曲面

曲面的分片可展性质的探讨



Developability-Driven Piecewise Approximations for Triangular Meshes, TOG, 2022

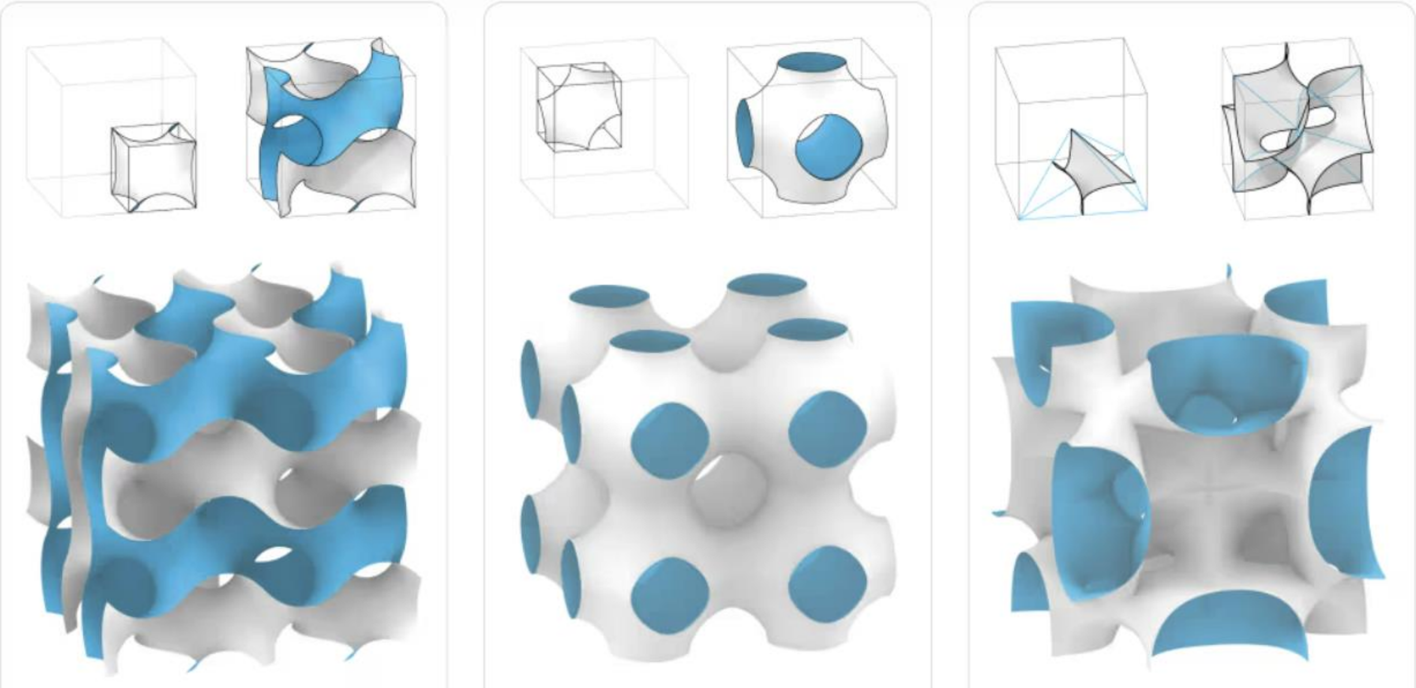
8.2空间曲面-特殊曲面



Developability-Driven Piecewise Approximations for Triangular Meshes, TOG, 2022

8.2空间曲面-特殊曲面

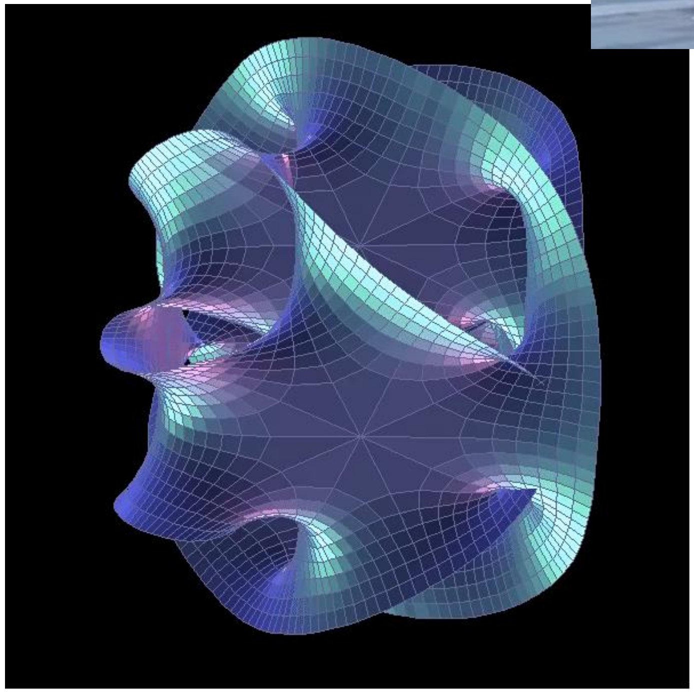
极小曲面的探讨与应用



Schoen's Gyroid Surface

Schwarz P Surface

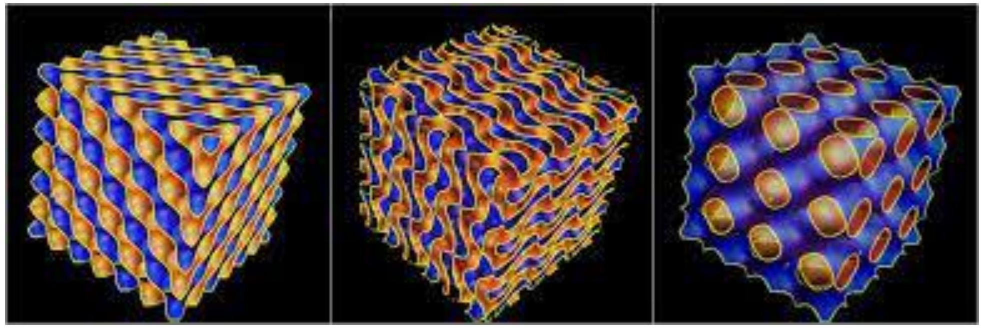
Schoen's PA Batwing Surface

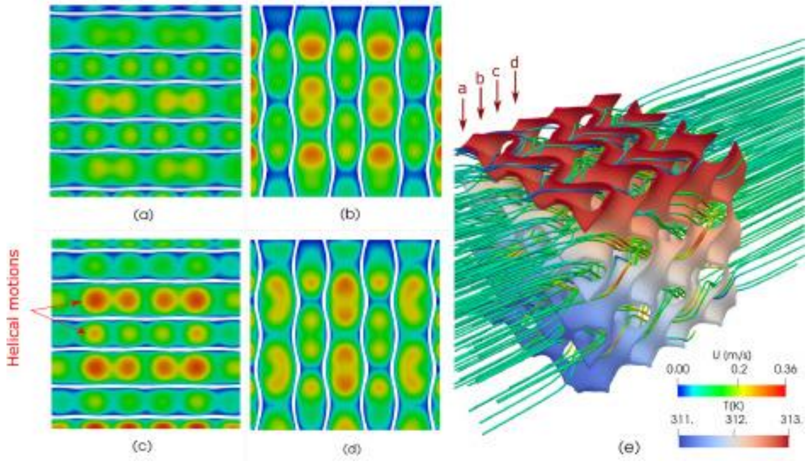


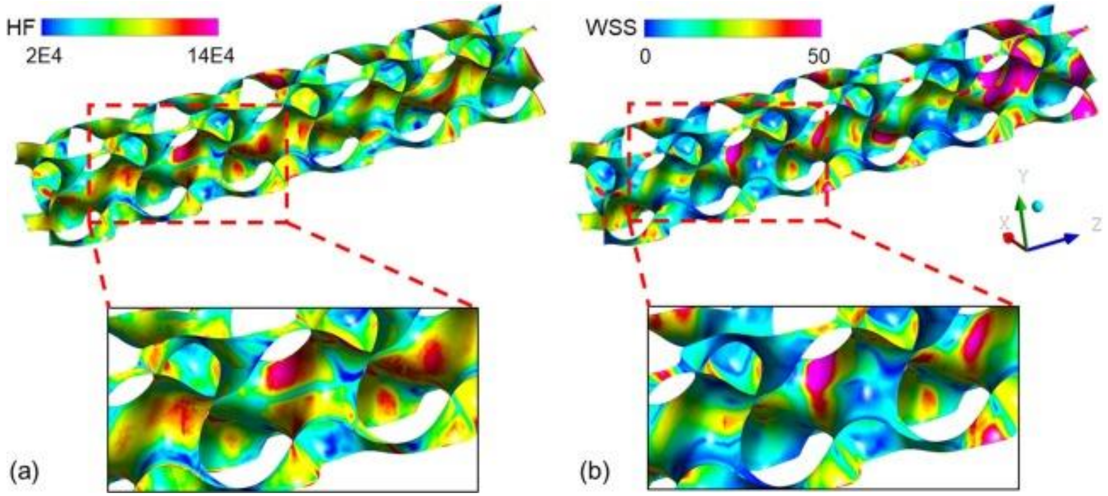
MEMBERS.WOLFRAM.COM

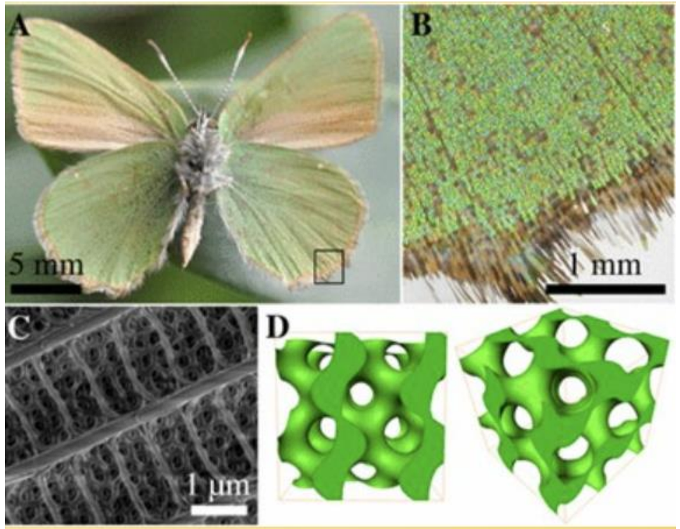
8.2空间曲面-特殊曲面

极小曲面可用作热交换器







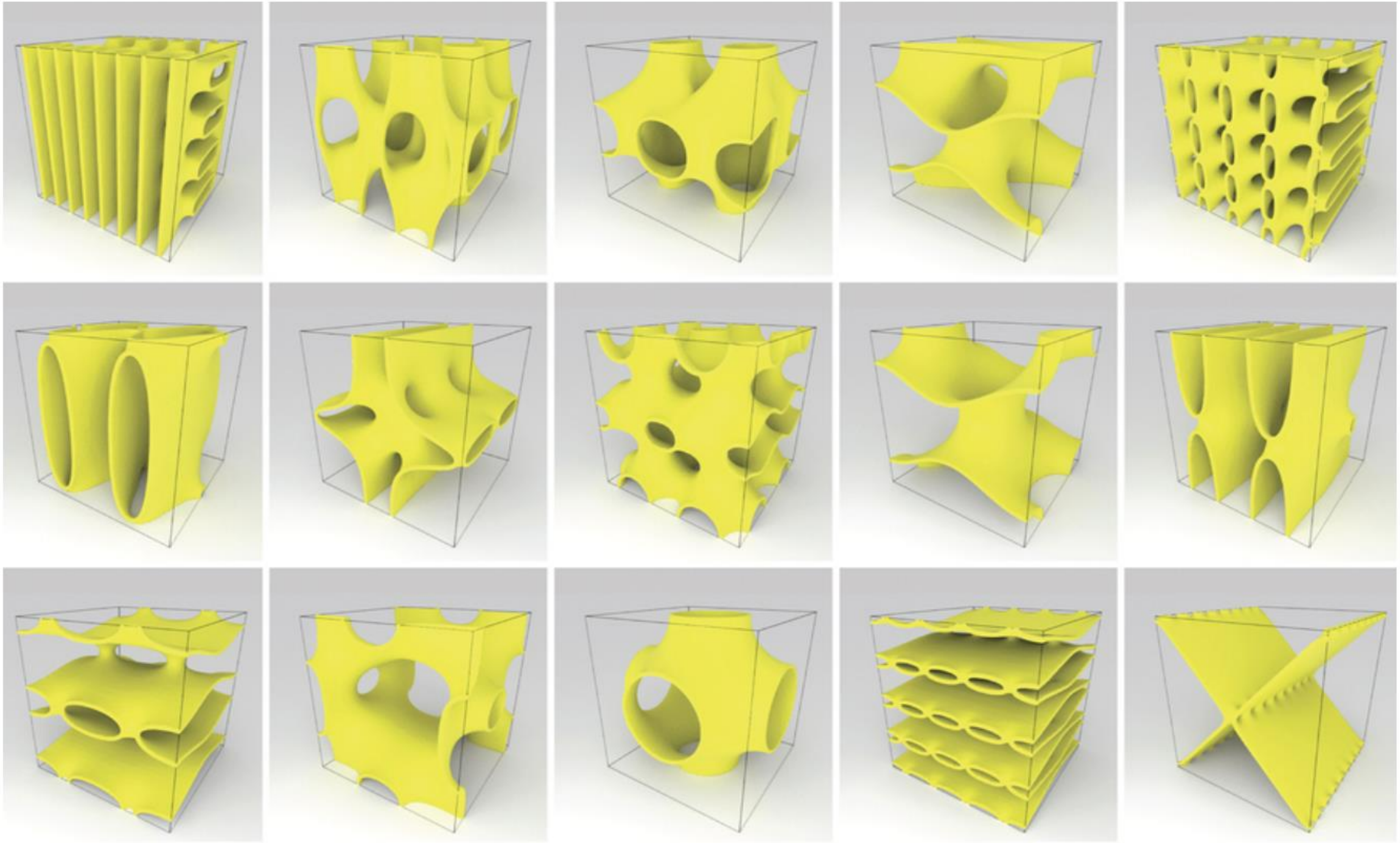


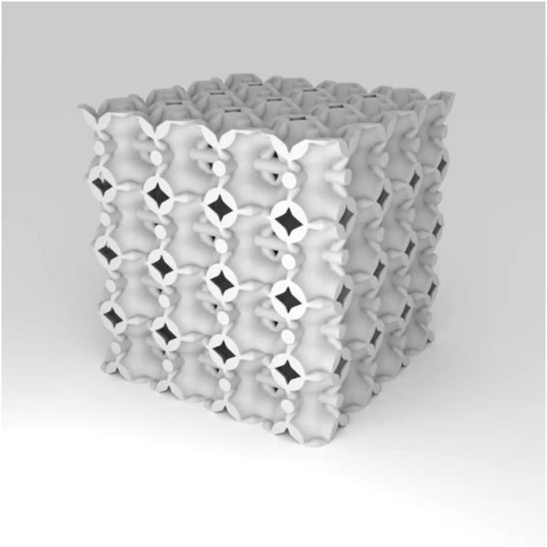
8.2空间曲面-相关研究

- 不同曲面的交线情况？ ➡ • 不同曲面的自交情况？
- 如何对曲面进行参数化？ （曲面的参数化表示？）
- 特殊类型的曲面？ 比如极小曲面？ 可展曲面？ 有何应用？
- 功能性曲面，赋有材料属性的曲面的结构特性？

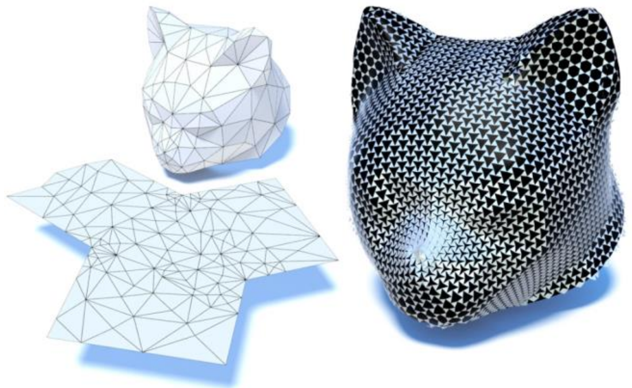
8.2空间曲面

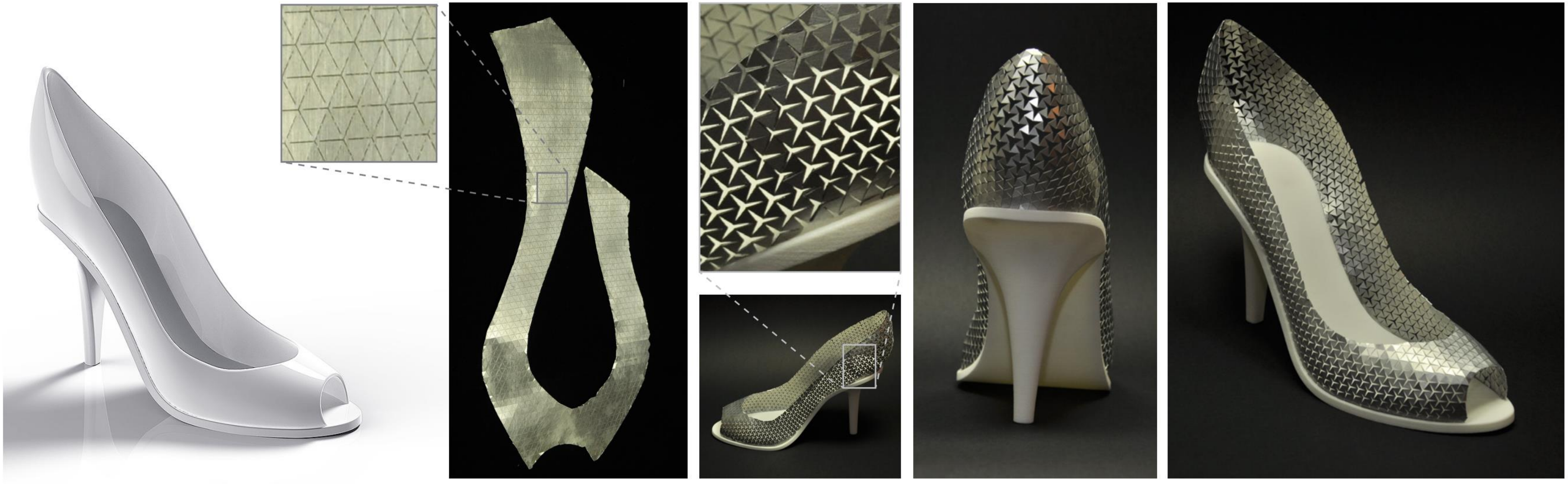
https://news.mit.edu/2023/new-method-simplifies-construction-complex-materials-0802





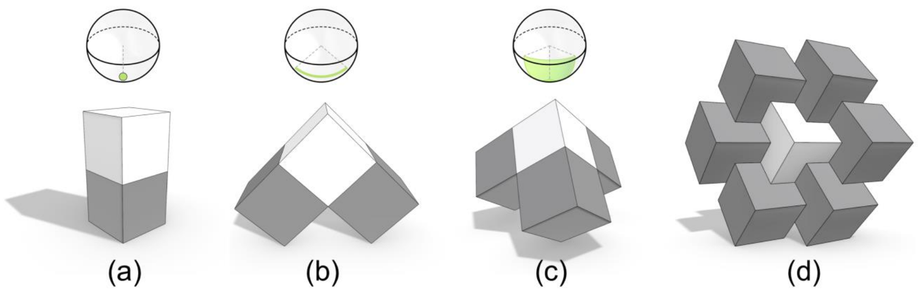
8.2空间曲面-功能性曲面

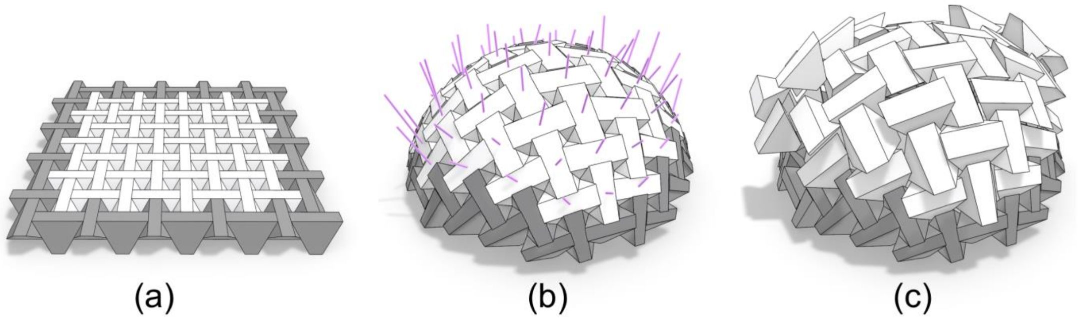


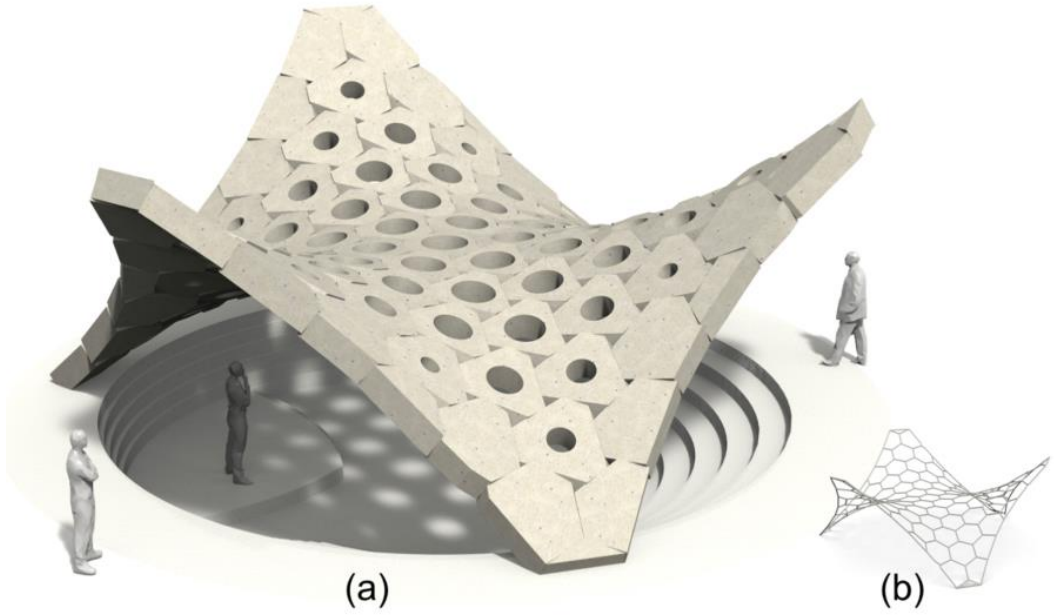


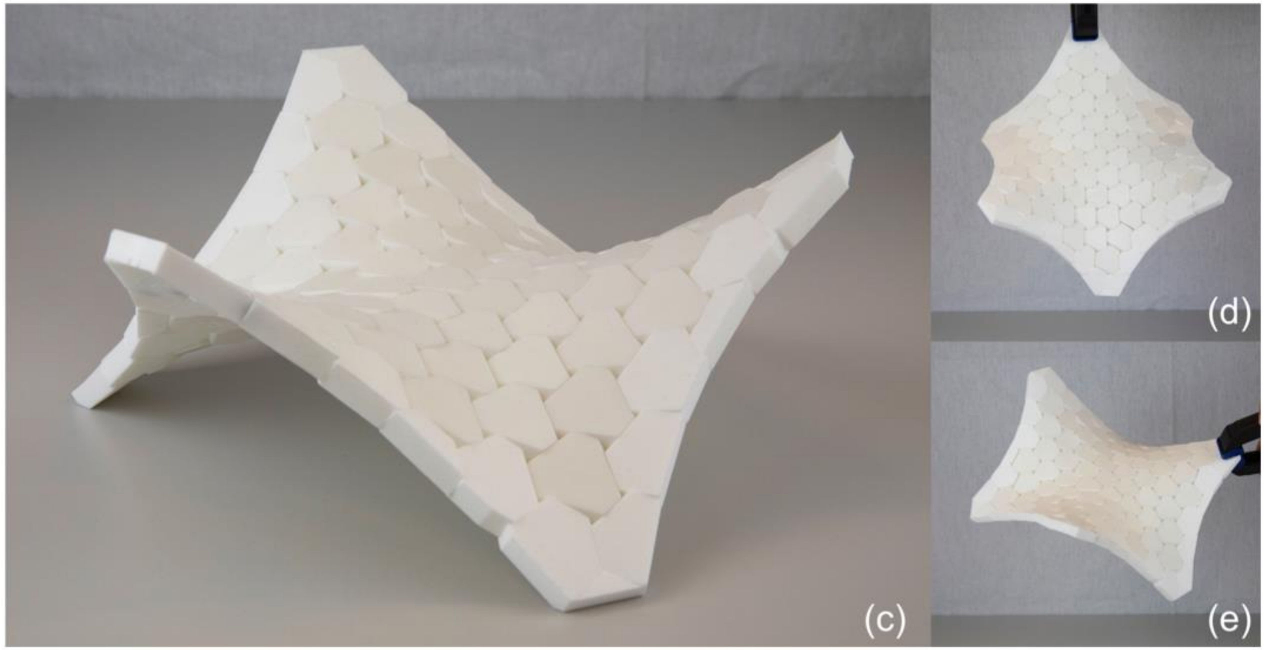
Beyond Developable: Computational Design and Fabrication with Auxetic Materials, TOG, 2016

8.2空间曲面-功能性曲面



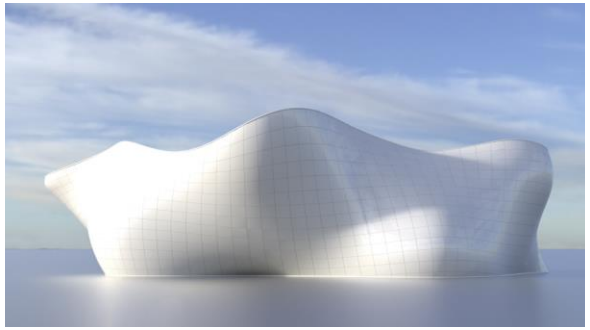


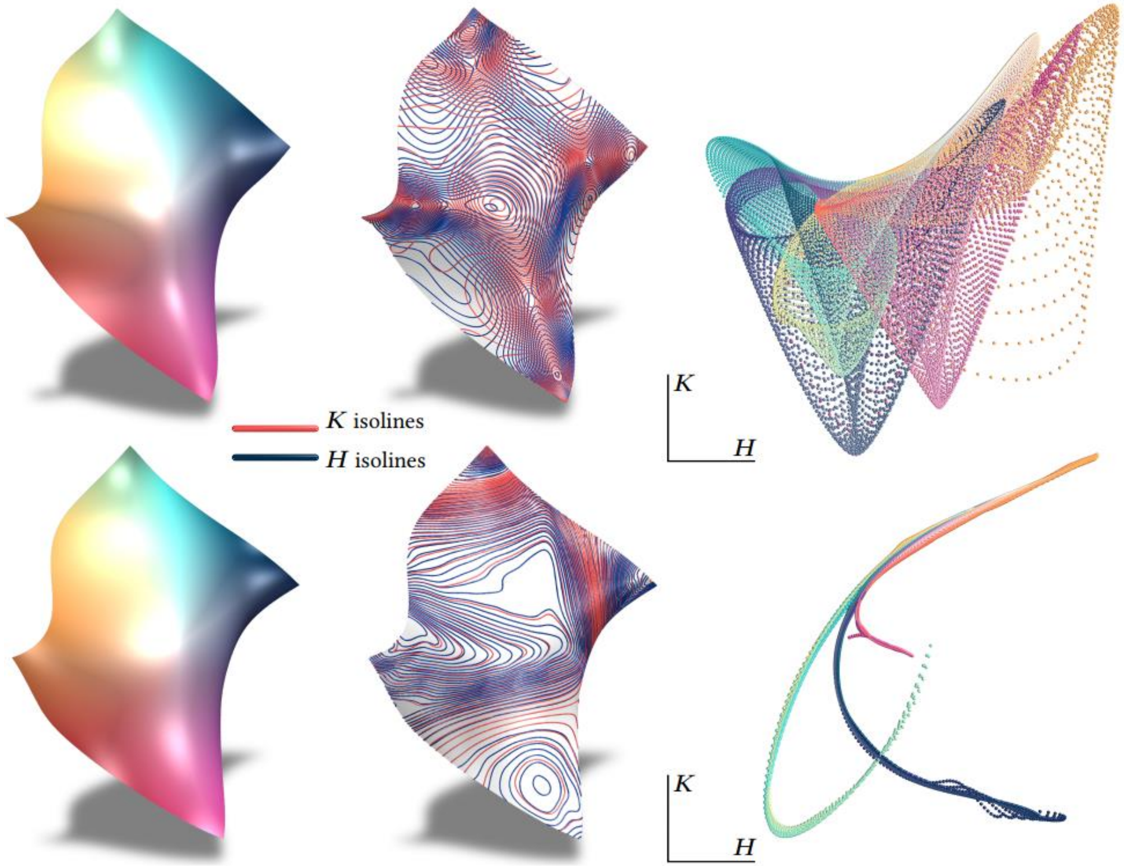


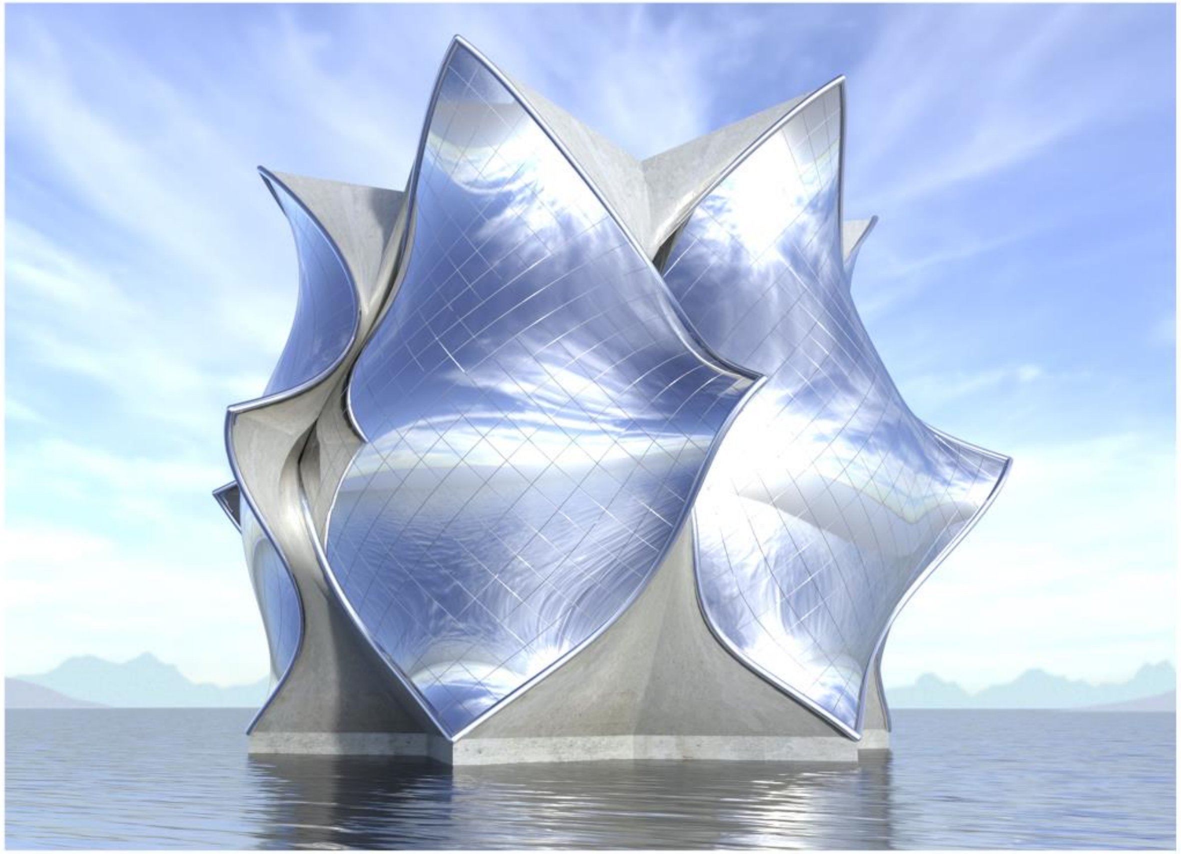


Design and Structural Optimization of Topological Interlocking Assemblies, TOG, 2019

8.2空间曲面-功能性曲面

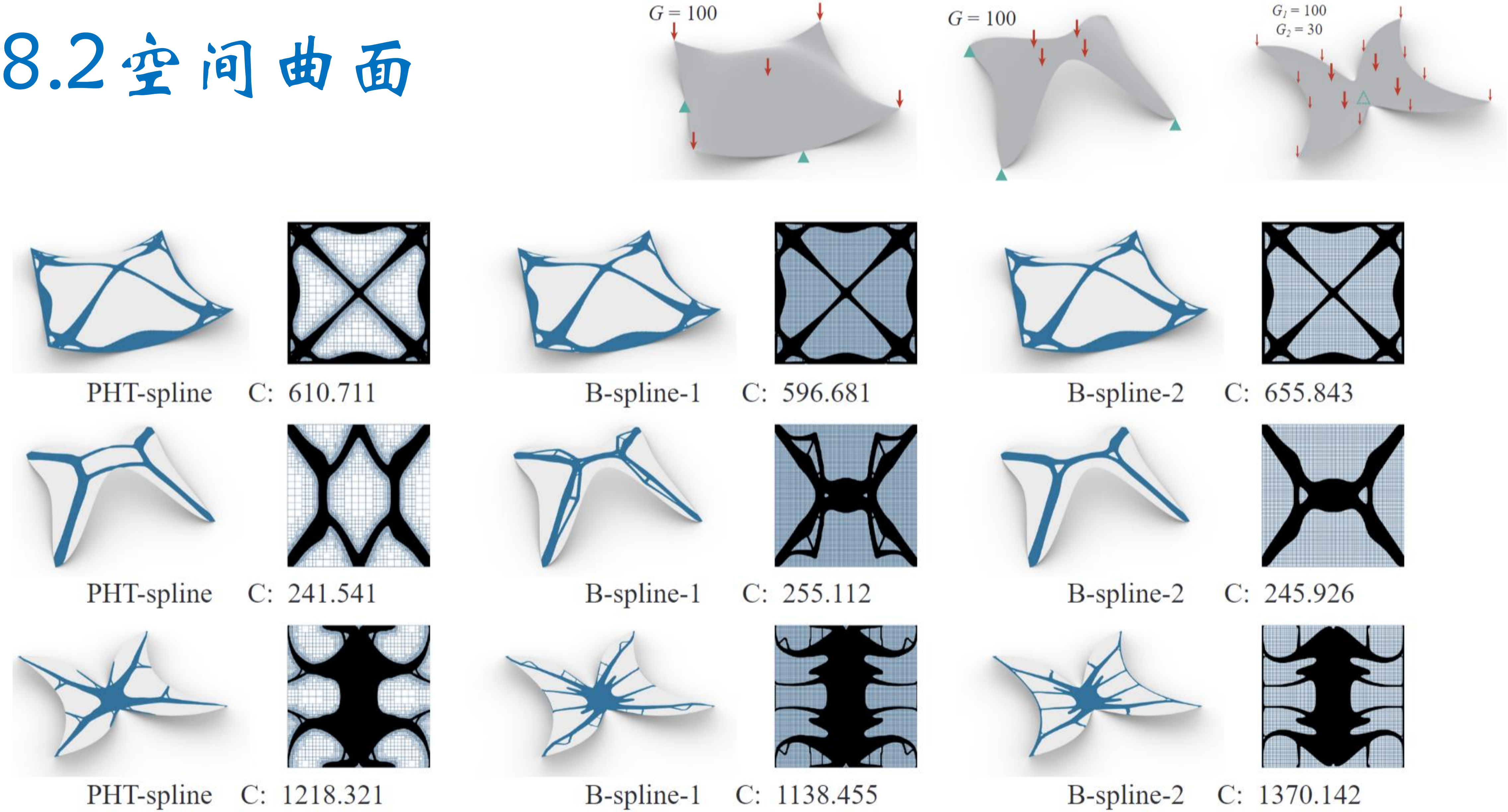






Computational Design of Weingarten Surfaces , TOG, 2021

8.2空间曲面



G = 100
G = 100
G1 = 100
G2 = 30
PHT-spline C: 610.711
B-spline-1 C: 596.681
B-spline-2 C: 655.843
PHT-spline C: 241.541
B-spline-1 C: 255.112
B-spline-2 C: 245.926
PHT-spline C: 1218.321
B-spline-1 C: 1138.455
B-spline-2 C: 1370.142

Project 1：天幕的形状优化

Project 1：天幕的形状优化

8.2 空间曲面

开源网格框架：

http://gcl.ustc.edu.cn/code.html

Surface Mesh Framework

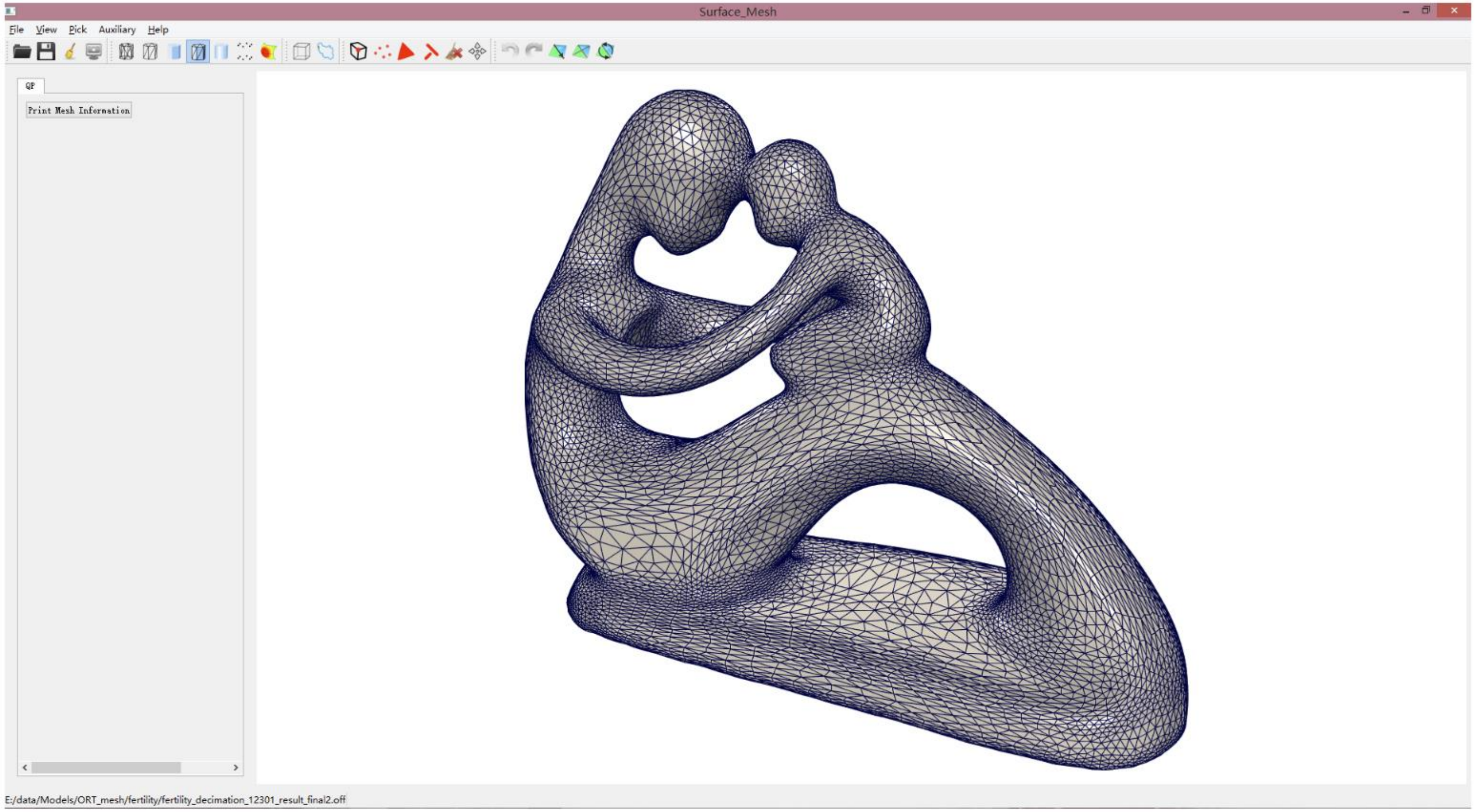
We provide a simple code framework for surface mesh processing.This framework mainly contains following functions:

1. Open and save mesh file. We support general polygon mesh, such as traingle and quad mesh.

2. Basic rendering modes. Especially combining the wireframe and flat shading modes is very userful for doing geometric computing research.

3. Capture rendering region. Save the rendering region as images.

4. Pick point, vertex, edge, face on the input mesh.



Third party librires: OpenMesh and Qt. Rencently it is comppiled with Visual Studio 2013.

Download: Surface_Framework

8.2 空间曲面-总结

- 空间曲面
  - 显式方程
    - 过某点的切线与法线
  - 参数方程/向径式
    - u,v曲线的切线
    - 过某点的切平面
    - 样条曲面
  - 隐式方程
    - 过某点的法向
  - 离散曲面表示
    - 点云
    - 多边形网格
  - 相关研究
    - 空间曲面的交线, 自交情况
    - 曲面参数化
    - 特殊类型的曲面
    - 功能性曲面

作业8.1

- 函数$z = |xy|$的图形宛如坐落在水平面上的四座山，两山相交形成骨线，其脊线为抛物线，它在水平面上的投影为$y = \pm x$，将该曲面称为谷脊面。

(1) 绘制谷脊面图形，谷线及脊线位置；

(2) 用平行于坐标平面的平面（XOY,YOZ,XOZ）截取谷脊面，绘制截线情况；总结截线特征（是否为抛物线？双曲线？等）

(3) 观察谷脊面是否为直纹面？

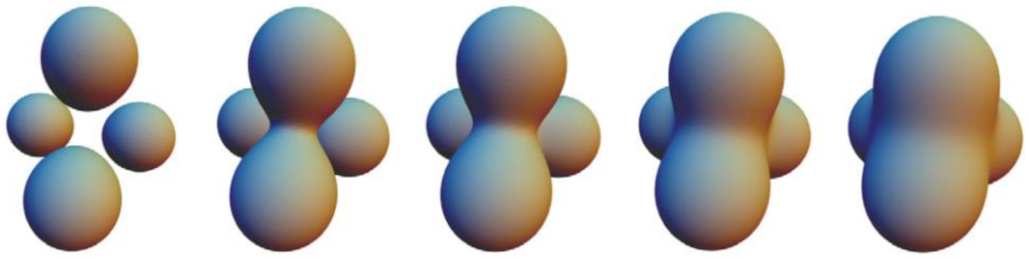
8.3 空间实体

隐式表示实体结构： $f(x,y,z) \leq 0$

$$
f_i(x,y,z) = \begin{cases} 1 - \dfrac{3d_i^2}{r_i^2}, & 0 \leq d_i < \dfrac{r_i}{3}, \\ \dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{d_i}{r_i}\right)^2, & \dfrac{r_i}{3} \leq d_i < r_i, \\ 0, & r_i \geq d_i \end{cases}
$$

$$
d_i^2 = \|q - p_i\|^2 = \frac{(x-x_i)^2}{a_i^2} + \frac{(y-y_i)^2}{b_i^2} + \frac{(z-z_i)^2}{c_i^2}
$$

$$
f_{in}(x,y,z) := \sum_{i=1}^{N} f_i(x,y,z) - \kappa = 0.
$$



(a) $\kappa = 2$ (b) $\kappa = 1.7$ (c) $\kappa = 1.5$ (d) $\kappa = 1.3$ (e) $\kappa = 1.1$

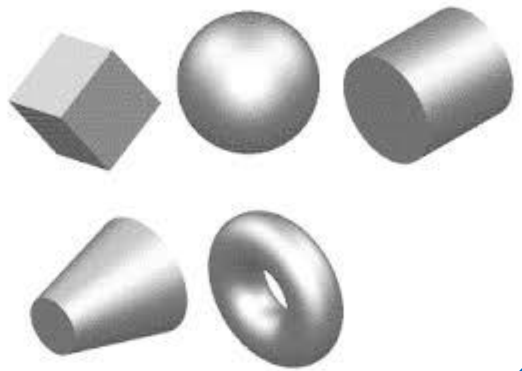
其中$p_1, p_2, \cdots, p_N$是一系列种子点$p_i = (x_i, y_i, z_i)$

a_i, b_i, c_i为放缩因子

8.3 空间实体

CSG(Constructive Solid Geometry)体素构造表示法：

把复杂的实体，看成由若干较简单的最基本实体经过一些有序的布尔运算而构造出来

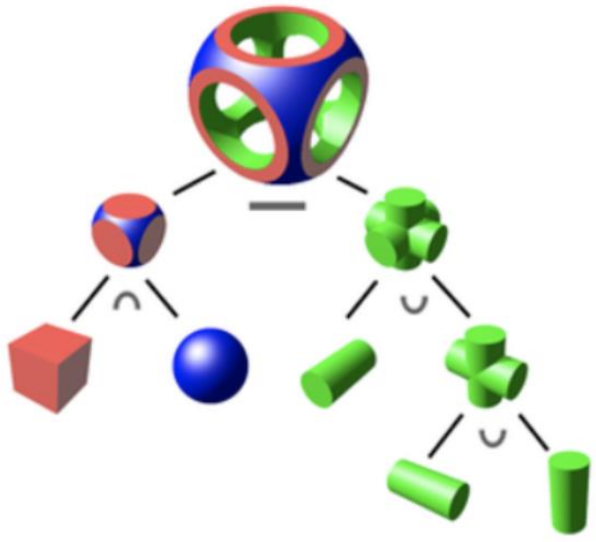


空间基本实体

并　　交

差

空间形体的正则集合运算



CSG建模

8.3 空间实体

CSG表示

- 数据结构：二叉树结构，记录了实体所有基本体素的组成、正则集合运算和相关的几何变换。
- 特点：方法简洁，生成速度快，处理方便，无冗余信息，而且能够详细地记录构成实体的原始特征参数，甚至在必要时可修改体素参数或附加体素进行重新拼合。数据结构比较简单，数据量较小，修改比较容易
- 缺点：没有详细几何信息，必须转化为其它形式才能对点、边、面等信息进行查询和编辑。由于信息简单，这种数据结构无法存贮物体最终的详细信息，例如边界、顶点的信息等。由于CSG表示受体素的种类和对体素操作的种类的限制，使得它表示形体的覆盖域有较大的局限性，而且对形体的局部操作（例如，倒角等等）不易实现，显示CSG表示的结果形体时需要的间也比较长。

8.3 空间实体

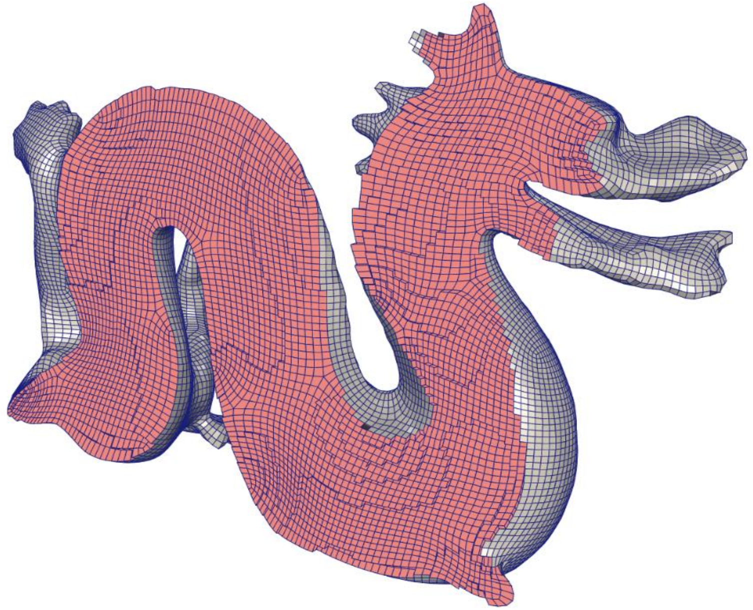
B-rep 表示

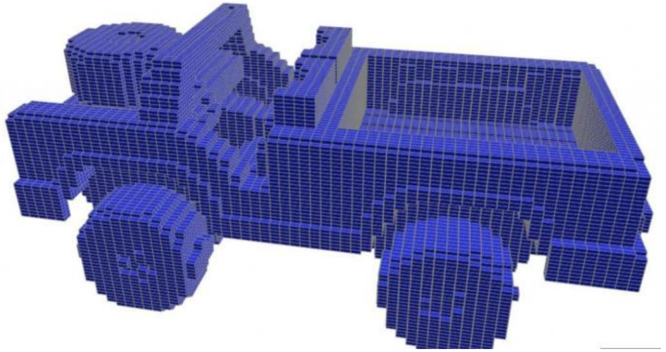
BREP的基本方法是在20世纪70年代早期由剑桥大学的Ian C. Braid(用于CAD)和斯坦福大学的Bruce G. Baumgart(用于计算机视觉)独立开发的。

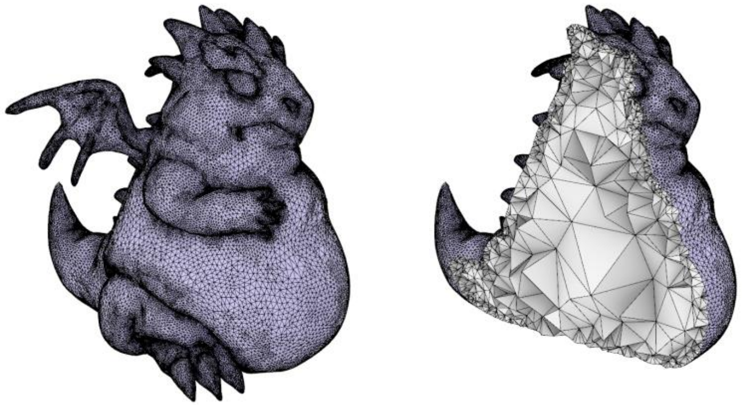
边界表示本质上是连接面、边和顶点的局部表示。它的一个扩展是将形状的子元素分组成称为几何特征的逻辑单元，或简称为特征。

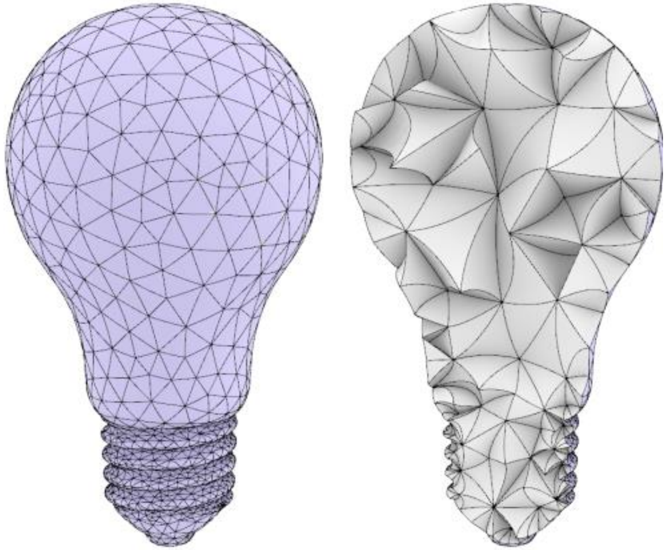
8.3 空间实体

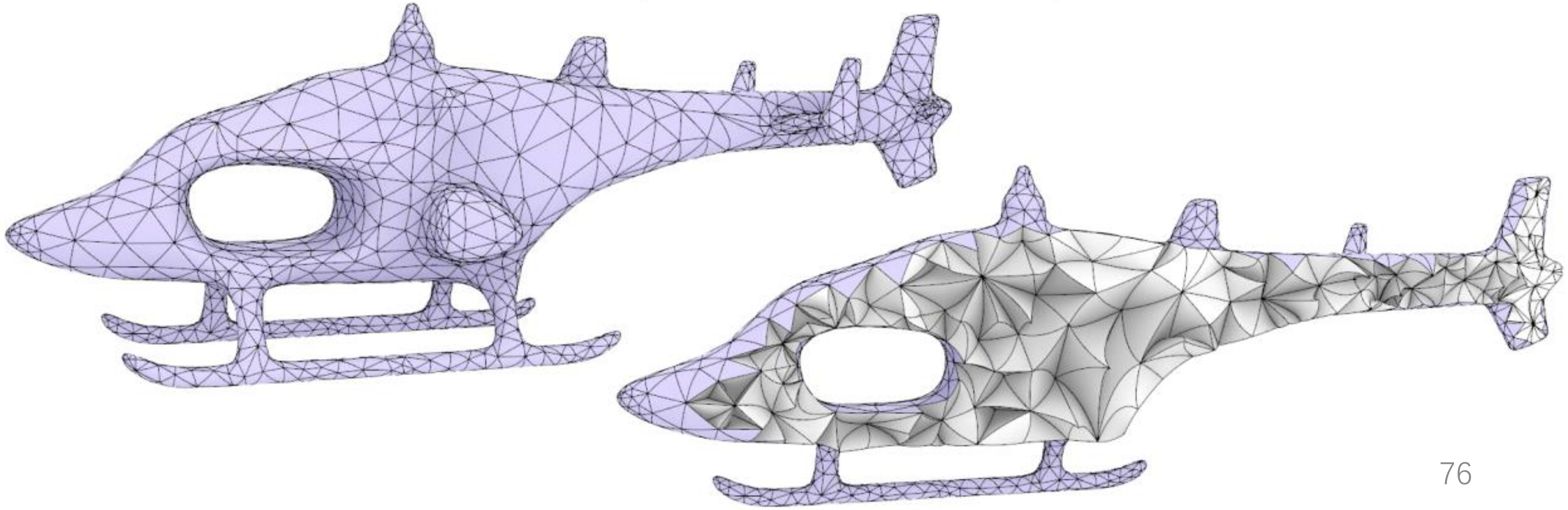
离散表示的实体结构：四面体/ 六面体











8.3 空间实体

开源网格框架：

http://gcl.ustc.edu.cn/code.html

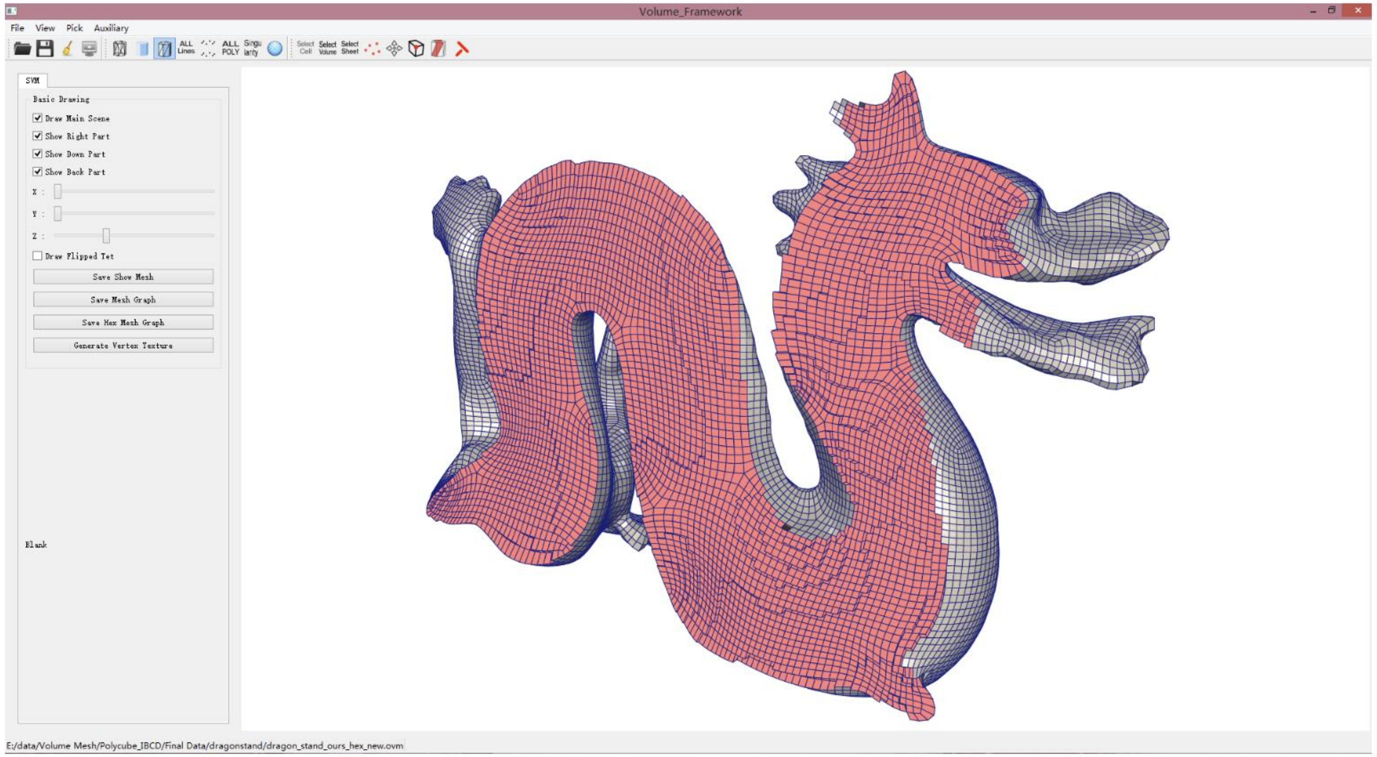
Volumetric Mesh Framework

We provide a simple code framework for volumetric mesh processing.This framework mainly contains following functions:

1. Open and save mesh file. We support tetrahedral and all-hex mesh in "OVM" file format. This format is supported by OpenVolumeMesh. You can transfer the "VTK" file into "OVM" by OpenFlipper.

2. Basic rendering modes. Especially combining the wireframe and flat shading modes is very userful for doing geometric computing research. Also the interier elements can be shown by changing slider bar on the left.

3. Capture rendering region. Save the rendering region as images.



Third party librires: OpenVolumeMesh, OpenMesh and Qt. Rencently it is comppiled with Visual Studio 2013.

Download: Volume_Framework

Download: some OVM models

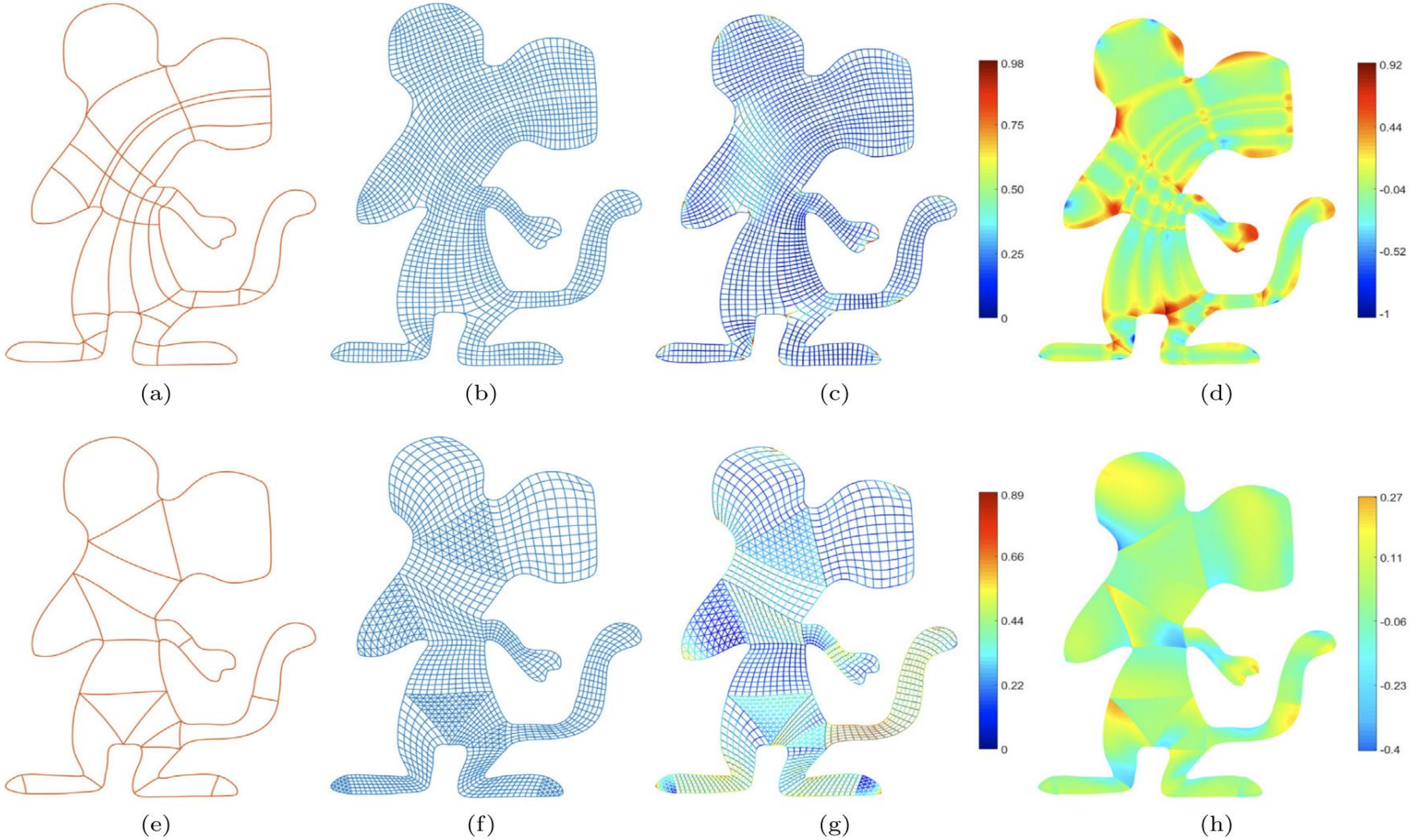
8.3 空间实体

- 实体参数化?
- 实体四面体化？六面体化？
- 组合问题
- 基于实体的拓扑优化？

8.3 空间实体

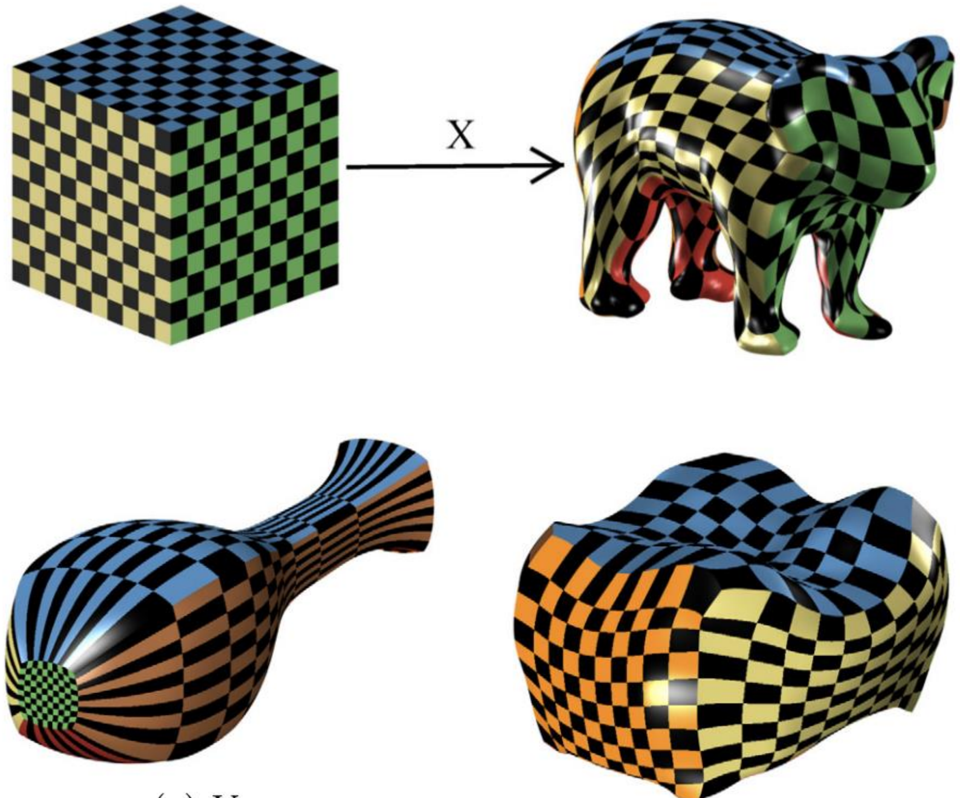
- 实体参数化? → 实体四面体化？六面体化？
- 组装问题
- 基于实体的拓扑优化?

8.3 空间实体



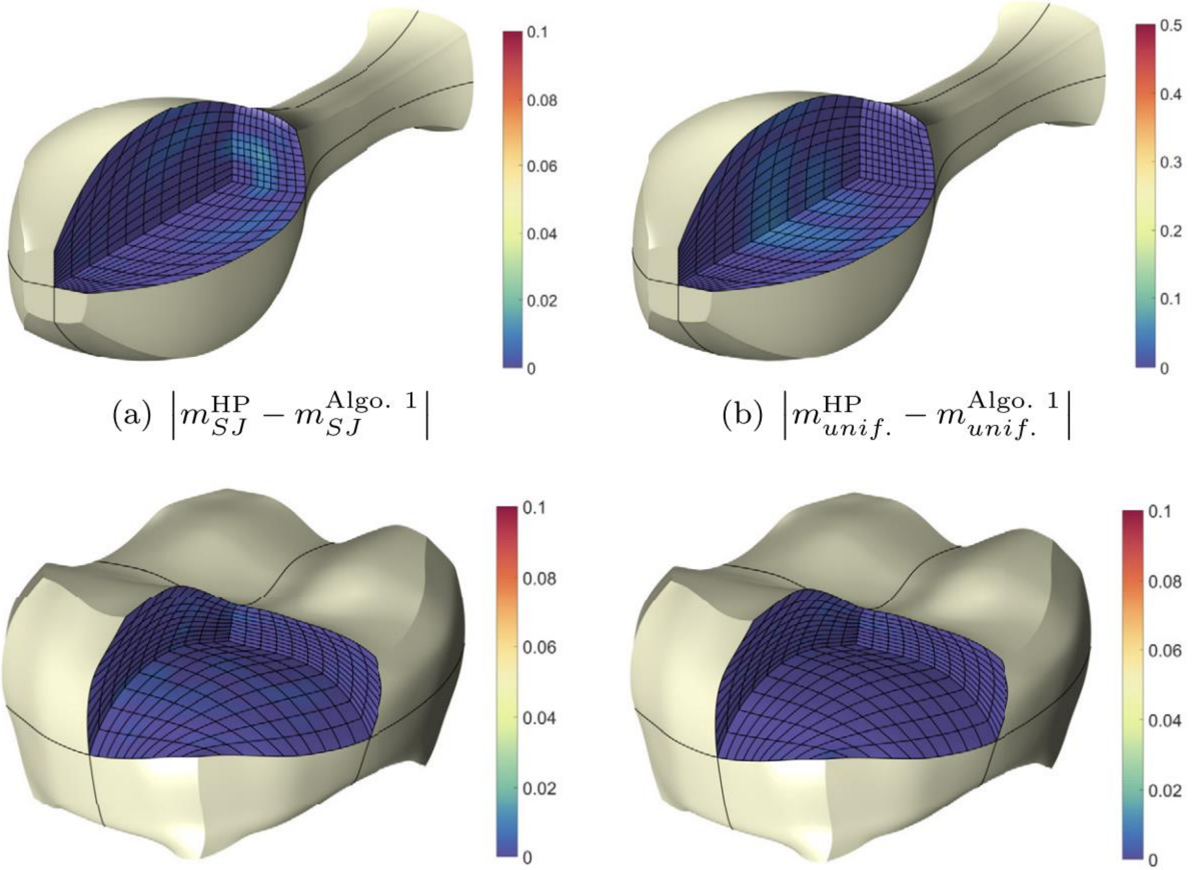
G1 -smooth planar parameterization of complex domains for isogeometric analysis, CMAME, 2023

8.3 空间实体



(a) Vase

(b) Tooth



(a) $\left|m_{SJ}^{\mathrm{HP}} - m_{SJ}^{\mathrm{Algo.\ 1}}\right|$ (b) $\left|m_{unif.}^{\mathrm{HP}} - m_{unif.}^{\mathrm{Algo.\ 1}}\right|$

(c) $\left|m_{SJ}^{\mathrm{HP}} - m_{SJ}^{\mathrm{Algo.\ 1}}\right|$ (d) $\left|m_{unif.}^{\mathrm{HP}} - m_{unif.}^{\mathrm{Algo.\ 1}}\right|$

Penalty function-based volumetric parameterization method for isogeometric analysis, CAGD, 2022

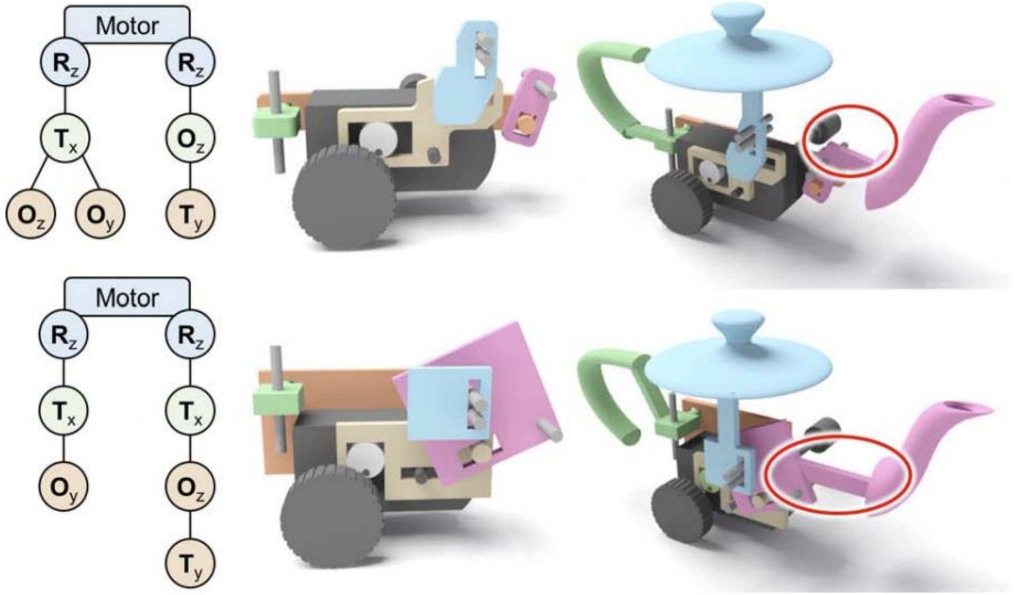
8.3 空间实体

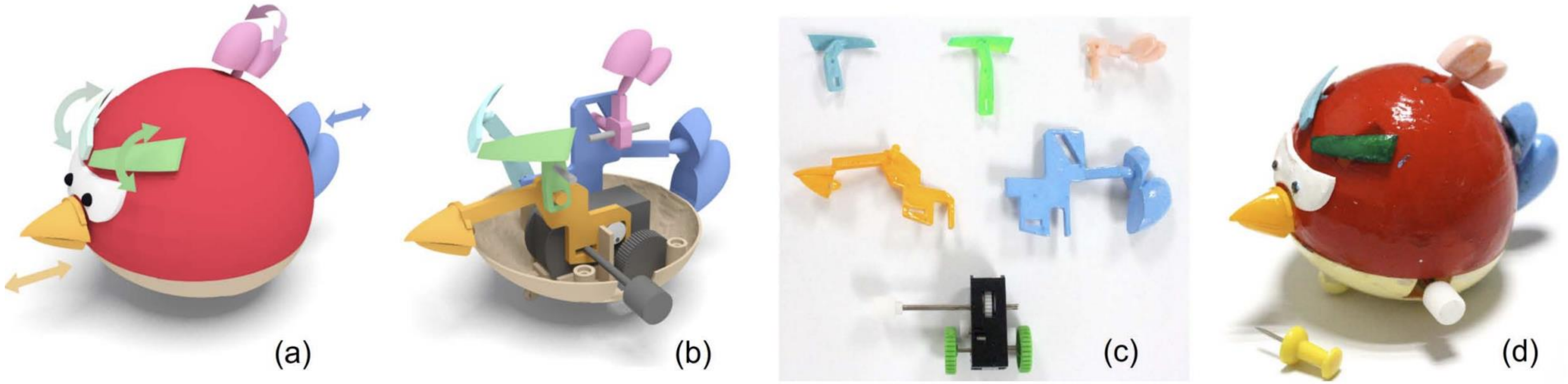
- 实体参数化?
- 实体四面体化？六面体化？
- 组装问题
- 基于实体的拓扑优化？

8.3 空间实体

Computational Design of Wind-up Toys

PENG SONG, University of Science and Technology of China
XIAOFEI WANG, University of Science and Technology of China
XIAO TANG, University of Science and Technology of China
CHI-WING FU, The Chinese University of Hong Kong
HONGFEI XU, University of Science and Technology of China
LIGANG LIU*, University of Science and Technology of China
NILOY J. MITRA, University College London





Computational Design of Wind-up Toys, TOG, 2017

8.3 空间实体

Computational Design of Steady 3D Dissection Puzzles

Keke Tang[1,2] Peng Song[3†] Xiaofei Wang[4] Bailin Deng[5] Chi-Wing Fu[6] Ligang Liu[4]

[1] Cyberspace Institute of Advanced Technology, Guangzhou University [2] University of Hong Kong [3] EPFL
[4] University of Science and Technology of China [5] Cardiff University [6] The Chinese University of Hong Kong

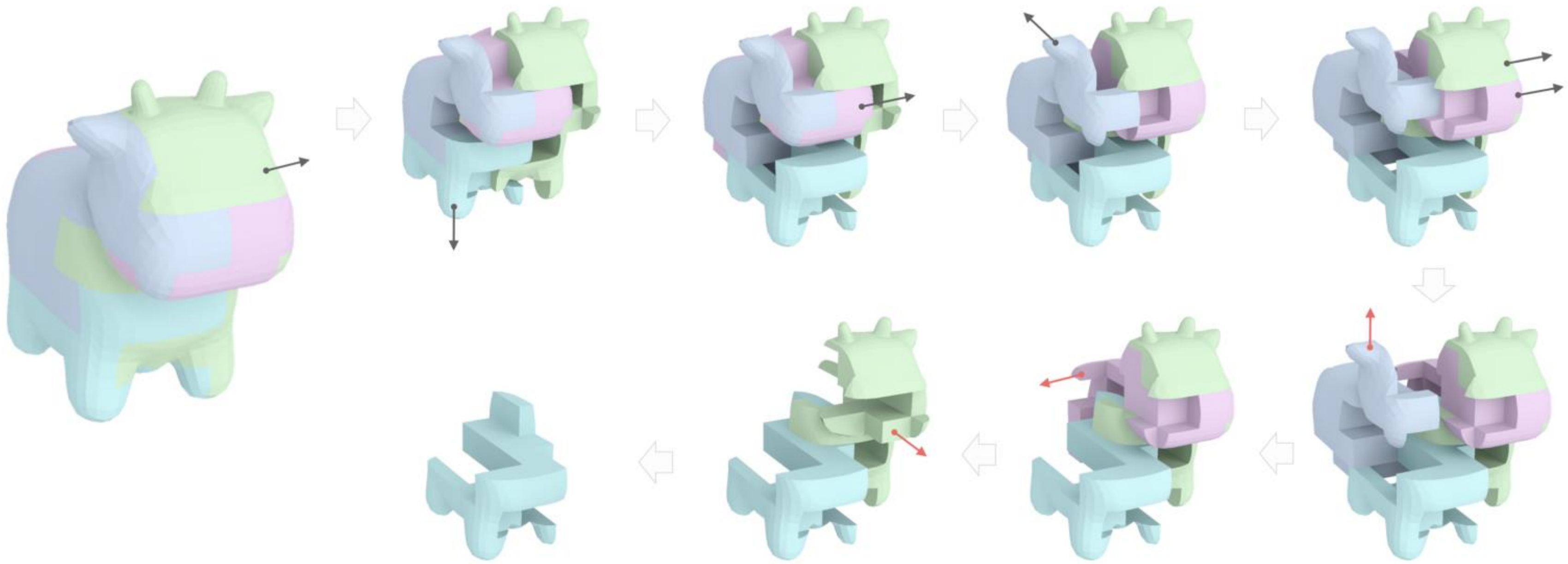
(a) (b) (c) (d) (e)

Computational Design of Steady 3D Dissection Puzzles, TOG, 2019

8.3 空间实体

Computational Design of High-level Interlocking Puzzles

RULIN CHEN, Singapore University of Technology and Design, Singapore
ZIQI WANG, EPFL, Switzerland and ETH Zürich, Switzerland
PENG SONG, Singapore University of Technology and Design, Singapore
BERND BICKEL, IST, Austria

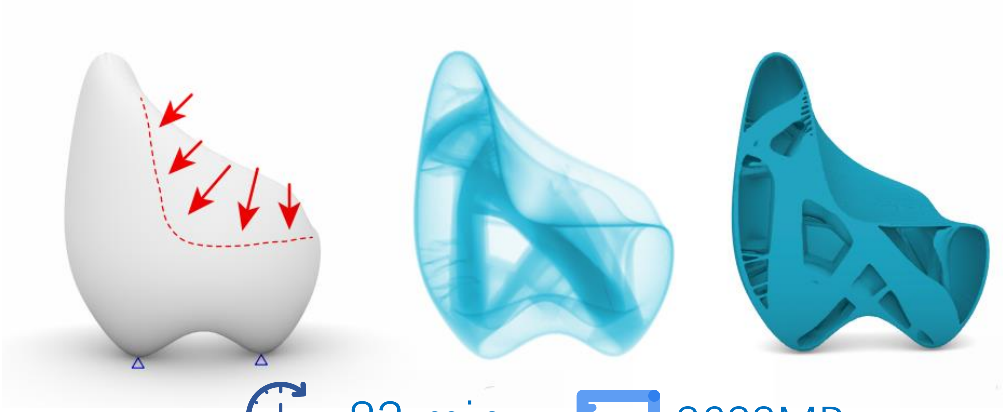


Computational Design of High-level Interlocking Puzzles, TOG, 2022

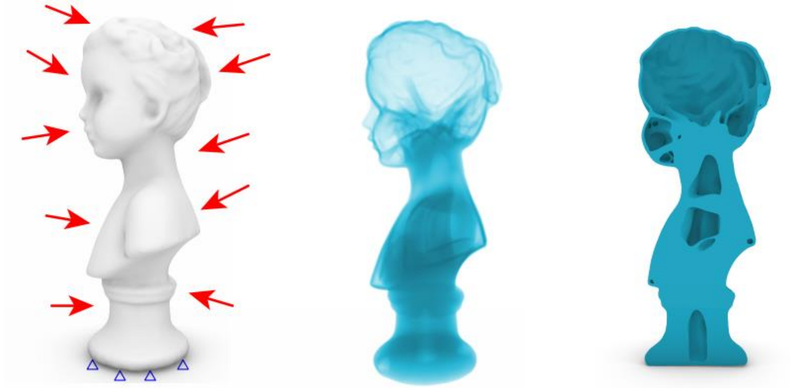
8.3 空间实体

- 实体参数化?
- 实体四面体化？六面体化?
- 组装问题
- 基于实体的拓扑优化?

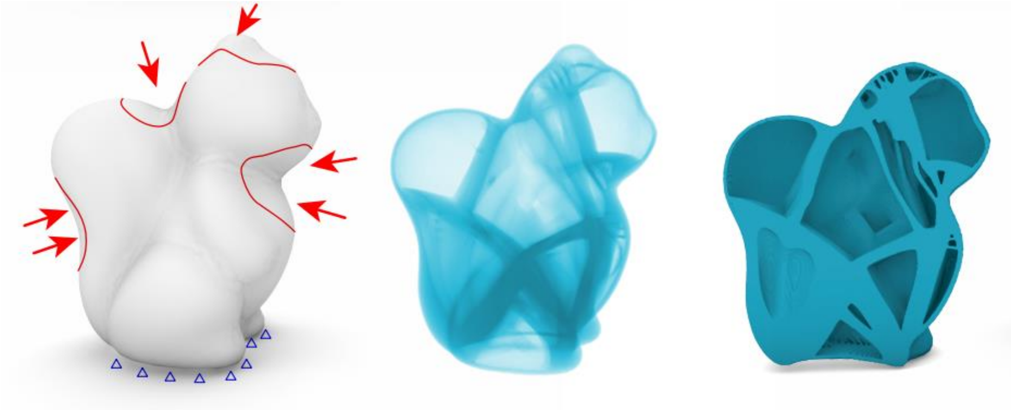
8.3 空间实体



83 min 3623MB



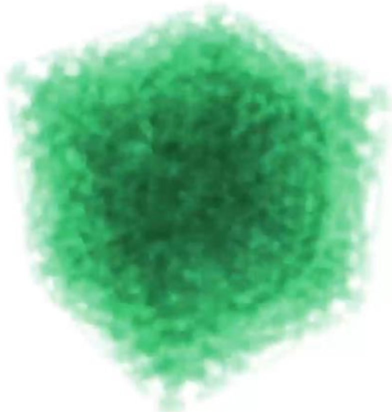
162 min 3222MB



56 min 2806MB

28 min 3356MB

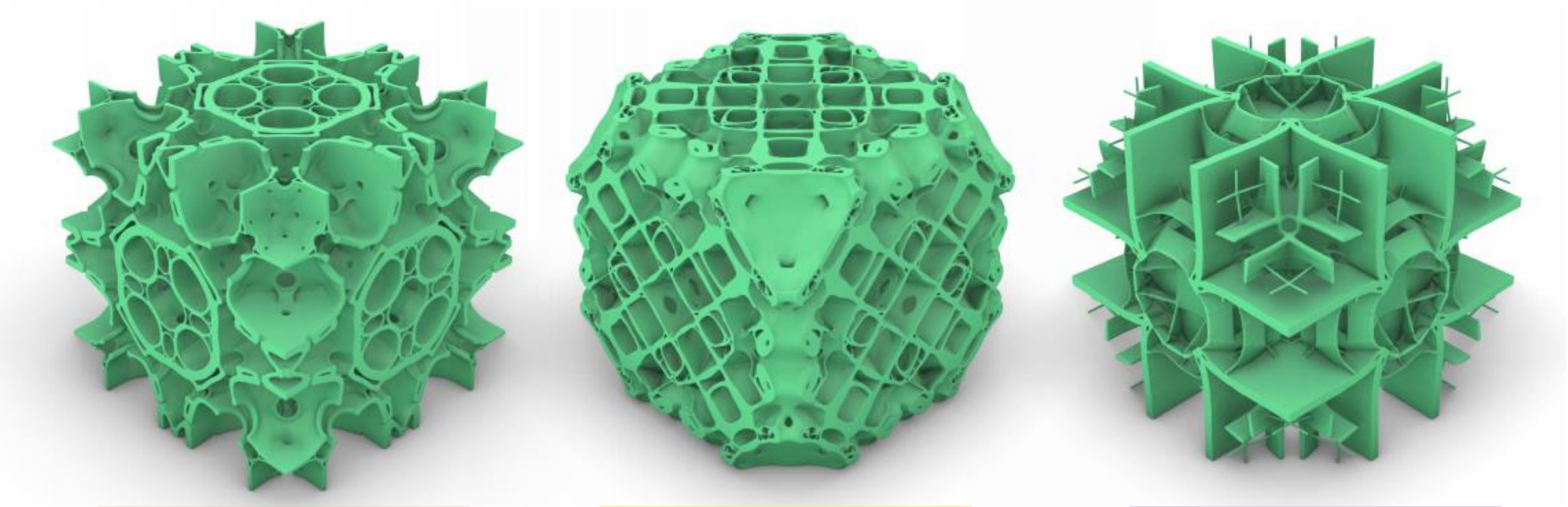
8.3 空间实体



B = 0.1094

S=0.0684

R = -0.6644

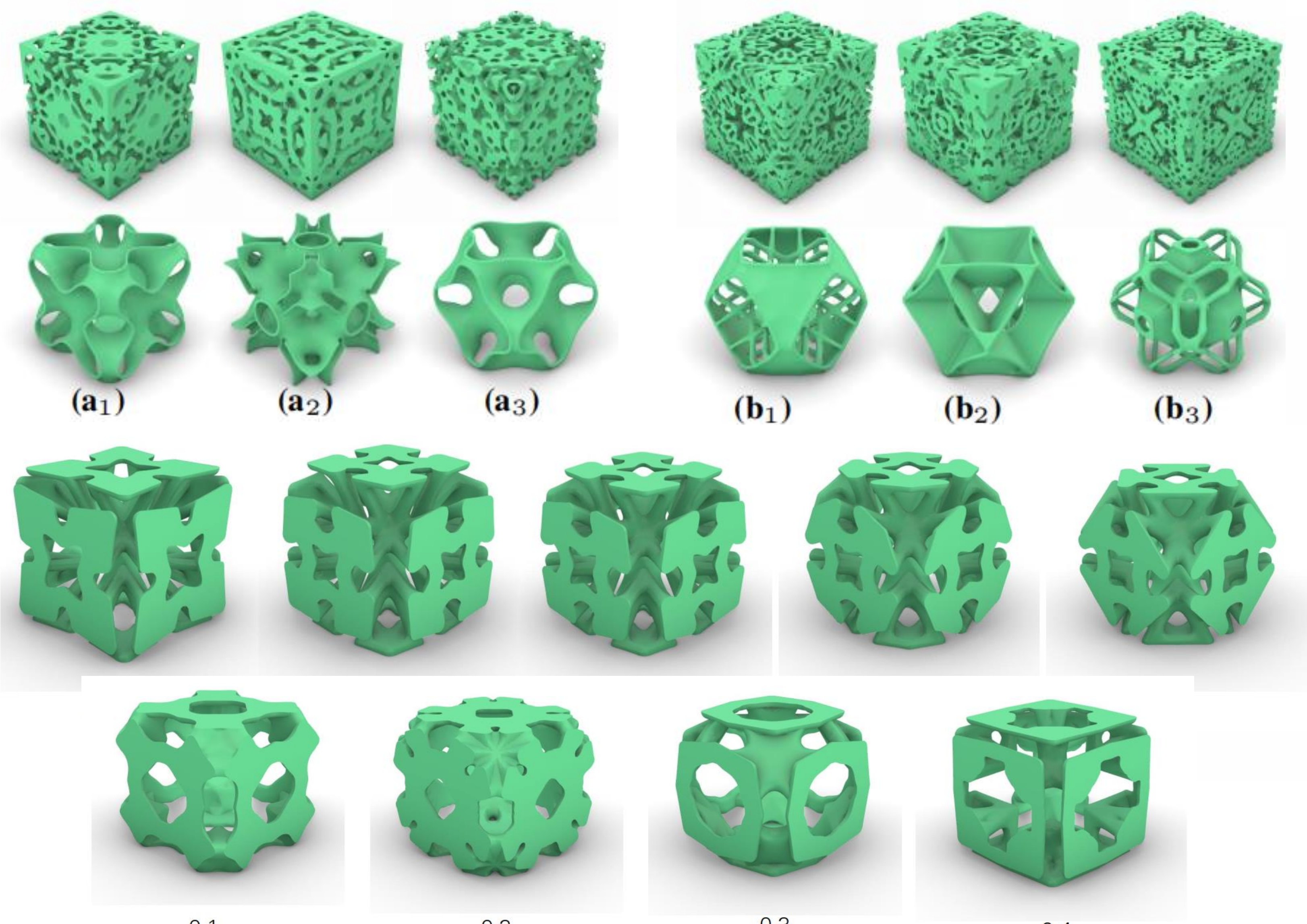


Bulk modulus

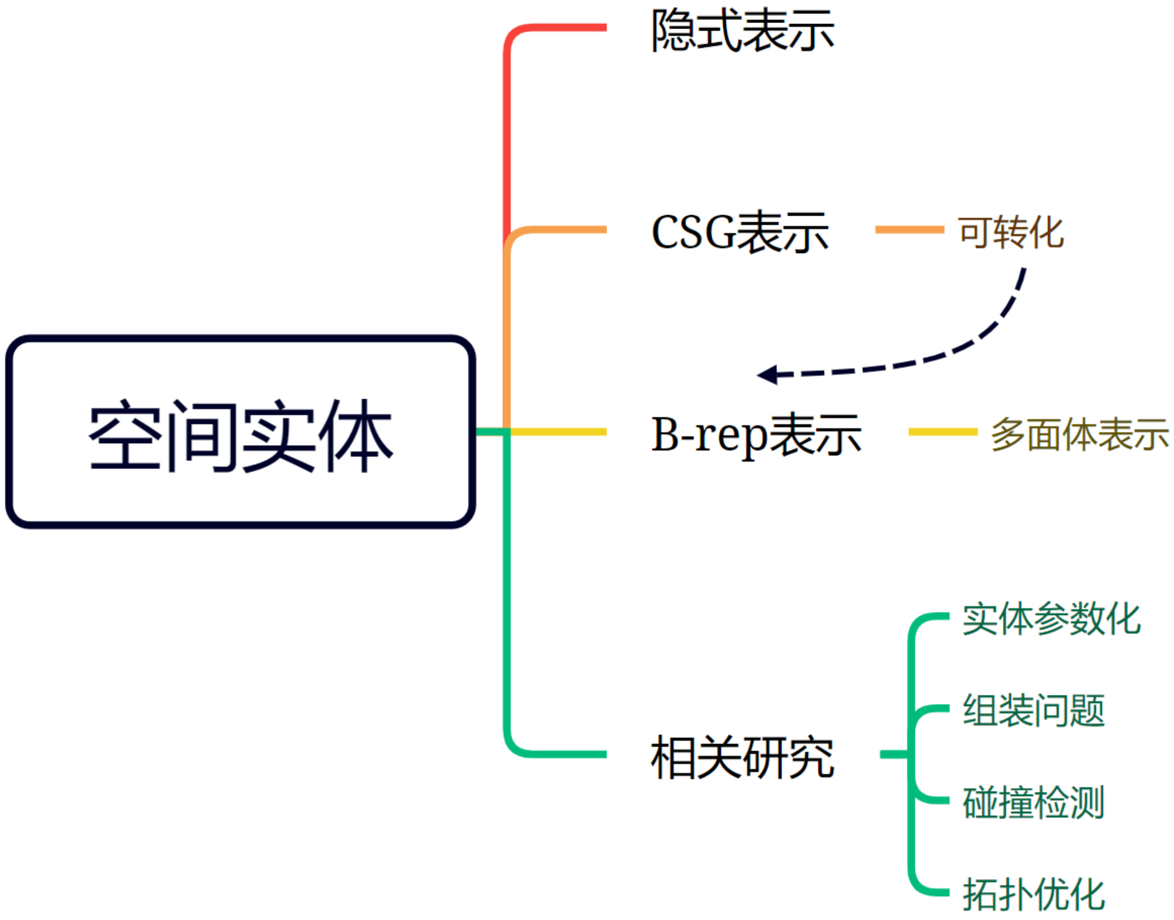
Shear modulus

Poisson’s ratio

8.3 空间实体



8.3 空间实体-总结



作业8.1

- 函数$z=|xy|$的图形宛如坐落在水平面上的四座山，两山相交形成骨线，其脊线为抛物线，它在水平面上的投影为$y=\pm x$，将该曲面称为谷脊面。

(1) 绘制谷脊面图形，谷线及脊线位置；

(2) 用平行于坐标平面的平面（XOY,YOZ,XOZ）截取谷脊面，绘制截线情况；总结截线特征（是否为抛物线？双曲线？等）

(3) 观察谷脊面是否为直纹面？

Q&A?

下节课内容

实验九：分形与混沌

翟晓雅

Email: xiaoyazhai@ustc.edu.cn

Homepage: https://xiaoyazhai.github.io/

Lab: http://gcl.ustc.edu.cn/