2023-2024 学年 线性代数 B1 期中

一、填空

1. $(1,1,1),(1,2,3),(2,4,a)$ 线性相关，则 $a=\underline{6}$
2. $\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 解为 $\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}$
3. $a_1=(1,3,5),a_2=(2,4,6),a_3=(3,2,0)$ 则 $(13,32,52)=2a_1+7a_2+(-1)a_3$
4. $\begin{pmatrix}1&0&1&-4\\-1&-3&-4&-2\\2&-1&4&4\end{pmatrix}$ 相抵标准型为 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$
5. $\{(1-x)^2,2x(1-x),x^2\}$ 到标准基 $\{1,x,x^2\}$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&\frac{1}{2}&0\\1&1&1\end{pmatrix}$
6. $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}2&0&2\\3&1&1\\2&5&7\end{pmatrix},B=P^{-1}AP$ 则 $PB^{2023}P^{-1}-A^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$

二、判断

1. $n\geq 2,a_1-a_2,a_2-a_3,\dots,a_{n-1}-a_n,2(a_n-a_1)$ 总是相关 (True)
2. $\begin{pmatrix}1&2&3\\5&5&5\\6&7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{pmatrix}$ 不相抵 (True)
3. 3 阶非零方阵 $A,A^*=-A^T$,则 $\det A<0$ (True)
4. 6x4 矩阵 $A=(a_1,a_2,a_3,a_4),Ax=0$ 基础解系 $(6,5,8,3)(2,0,2,3)$ 则 a_4 不能被 a_2,a_3 线性表示 (False)

三、方程组 $\begin{cases}x_1+3x_2-x_3=1\\2x_1+2\lambda x_2-10x_3=0\\3x_1+8x_2+(\lambda-3)=4\end{cases}$.

(1) λ 是多少，无解？(-1)

(2) λ 是多少，无穷组解？并写出通解 (4) $(4,-1,0)^T+t(-11,4,1)^T$

(3) λ 是多少，唯一解？(不是-1,4)

四、$A=\begin{pmatrix}4+x&4&4&4\\3&3+x&3&3\\2&2&2+x&2\\1&1&1&1+x\end{pmatrix}.x>0.$ 求 $\det A,A^{-1}$

$$A^{-1}=\frac{1}{x(x+10)}\begin{pmatrix}x+6&-4&-4&-4\\-3&x+7&-3&-3\\-2&-2&x+8&-2\\-1&-1&-1&x+9\end{pmatrix},\det A=x^4+10x^3$$

五、给定 n 个不同的实数 x_i,已知存在不超过 $2n-1$ 次的多项式 $f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_n$,

$$f_k(x_i)=g_k'(x_i)=\begin{cases}1,k=i\\0,k\neq i\end{cases},f_k'(x_i)=g_k(x_i)=0$$

(1) 证明 $S=\{f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_n\}$ 是一组基

（简证：考虑 $\sum(a_i f_i+b_i g_i)=0$,代入 x_i 或求导后代入，得到 $a_i=b_i=0$ ）

(2) 求 $q(x)=x^n+23$ 在 S 的坐标 $(x_1^n+23,\dots,x_n^n+23,nx_1^{n-1},\dots,nx_n^{n-1})$

(3) $n=2$. 求 S

$$
\begin{aligned}
f_1(x)&=-\frac{2}{(x_1-x_2)^3}(x-x_2)^2\left(x-\frac{3x_1-x_2}{2}\right)\\
f_2(x)&=-\frac{2}{(x_2-x_1)^3}(x-x_1)^2\left(x-\frac{3x_2-x_1}{2}\right)\\
g_1(x)&=\frac{1}{(x_1-x_2)^2}(x-x_2)^2(x-x_1)\\
g_2(x)&=\frac{1}{(x_1-x_2)^2}(x-x_1)^2(x-x_2)
\end{aligned}
$$

六、A,B,C 为 n 阶方阵，证明

$$\exists X,Y,XA-3BY=C\Leftrightarrow\begin{pmatrix}A&0\\C&B\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$$

左边推右边，用初等变换就可以了

$$\begin{pmatrix}A&0\\C&B\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}A&0\\C-XA+3BY&B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$$

现在看看右边推左边，设

$$P_1AP_2=\begin{pmatrix}I_1&0\\0&0\end{pmatrix},Q_1BQ_2=\begin{pmatrix}I_2&0\\0&0\end{pmatrix},Q_1CP_2=\begin{pmatrix}U&V\\W&S\end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{pmatrix}P_1&0\\0&Q_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&0\\C&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_2&0\\0&Q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_1&0&0&0\\0&0&0&0\\U&V&I_2&0\\W&S&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}I_1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&I_2&0\\0&S&0&0\end{pmatrix}$$

故由 $\begin{pmatrix}A&0\\C&B\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$ 得到 $S=0$. 现在令

$$X=Q_1^{-1}\begin{pmatrix}U&0\\W&0\end{pmatrix}P_1,Y=\frac{1}{3}Q_2\begin{pmatrix}0&-V\\0&0\end{pmatrix}P_2^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
XA-3BY&=Q_1^{-1}\begin{pmatrix}U&0\\W&0\end{pmatrix}P_1AP_2P_2^{-1}-Q_1^{-1}Q_1BQ_2\begin{pmatrix}0&-V\\0&0\end{pmatrix}P_2^{-1}\\
&=Q_1^{-1}\begin{pmatrix}U&0\\W&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_1&0\\0&0\end{pmatrix}P_2^{-1}-Q_1^{-1}\begin{pmatrix}I_2&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-V\\0&0\end{pmatrix}P_2^{-1}\\
&=Q_1^{-1}Q_1CP_2P_2^{-1}=C
\end{aligned}
$$