第 10 章复习

1. §10.1.2 二重积分的基本概念与性质
2. §10.1.3 二重积分的计算
3. §10.2.2 二重积分的换元
4. §10.3.1 三重积分的累次积分
5. §10.3.2 三重积分的换元

1. 二维区间上的积分

设 $D=[a,b]\times[c,d]$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的二维闭区间. 分别作 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 上的分割:

$$T_x:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b;$$
$$T_y:\ c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d.$$

两族平行直线 $x=x_i,\ (i=0,1,\cdots,n)$ 和 $y=y_j,\ (j=0,1,\cdots,m)$ 把 D 分成 $n\times m$ 个子区间:

$$D_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\ (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m).$$

这些子区间组成 D 的一个分割 $T=T_x\times T_y$. 对于在 D 上定义的函数 $f(x,y)$, 在每个 D_{ij} 中取一点 ξ_{ij}, 作和式 (Riemann 和)

$$S(f,T):=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(\xi_{ij})\sigma(D_{ij}), \tag{1}$$

其中 $\sigma(D_{ij})$ 是 D_{ij} 的面积. 记 $\|T\|=\max\limits_{i,j}\{\mathrm{diam}(D_{ij})\}$, 这里 $\mathrm{diam}(D_{ij})$ 是

D_{ij} 的对角线长度, 称 $\|T\|$ 为分割 T 的宽度. 称 ξ_{ij} 为值点.

定义 1 设 $f(x,y)$ 是定义在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上的函数. 如果存在数 A, 使得对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $\|T\|<\delta$ 时, 不论值点 ξ_{ij} 在 D_{ij} 中如何选, 都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij)}\sigma(D_{ij})-A\right|<\varepsilon,$$

则称函数 f 在区间 D 上可积, 并将 A 写作

$$\iint_D f(x,y)dxdy \quad \text{或} \quad \int_D f d\sigma,$$

称为 f 在区间 D 上的二重积分.

2. **有界集上的积分**

设 $f(x,y)$ 是定义在有界集 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上的函数. 按下面的方式将它延拓到 $\mathbb{R}^2$ 的函数: 令

$$f_D(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D; \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$$

设 $f(x,y)$ 是定义在有界集 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上的函数. I 是一个二维区间, 且 $D\subset I$. 若 $f_D(x,y)$ 在 I 上可积, 则称 f 在 D 上可积. 积分值就是 $f_D(x,y)$ 在 I 上的积分值, 记为

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \quad \text{或} \quad \int_D f\,d\sigma.$$

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

3. **积分的性质**

(a) 设 D 是有界集. 如果 f 在 D 上可积, 那么 f 在 D 上有界.

(b) 设 $f(x,y)$ 是有界集 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的有界函数. 如果 ∂D 以及 f 在 D 上的间断点全体都是零测集, 那么 f 在 D 上可积.

(c) 设 D 是有界集. 若 f 和 g 都在 D 上可积, c_1, c_2 是常数, 则 $c_1 f + c_2 g$ 也在 D 上可积, 且

$$\int_D (c_1 f + c_2 g) d\sigma = c_1 \int_D f d\sigma + c_2 \int_D g d\sigma.$$

(d) 设 D 是有界集. 若 f 和 g 都在 D 上可积, 则 fg 也在 D 上可积.

(e) 设 D 是有界集, f 和 g 都在 D 上可积.

(1) 若 $f \geqslant 0$, 则 $\int_D f d\sigma \geqslant 0$;

(2) 若 $f \geqslant g$, 则 $\int_D f d\sigma \geqslant \int_D g d\sigma$.

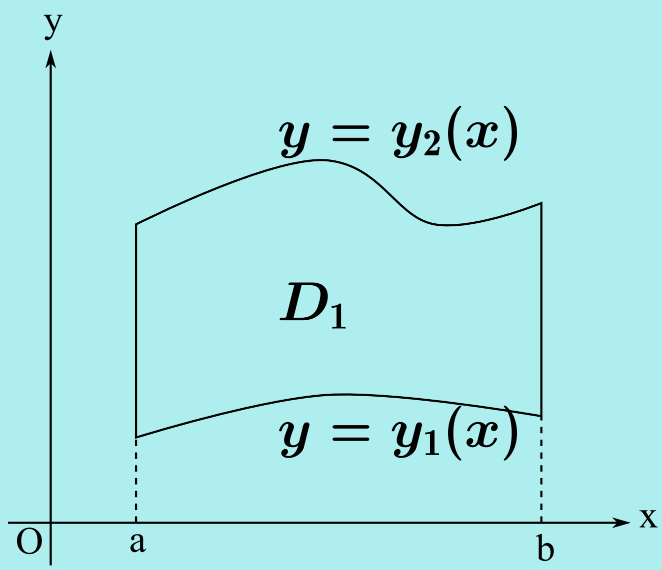
(f) 设 D 是有界集. 如果 f 在 D 上可积, 那么 $|f|$ 也在 D 上可积, 且有

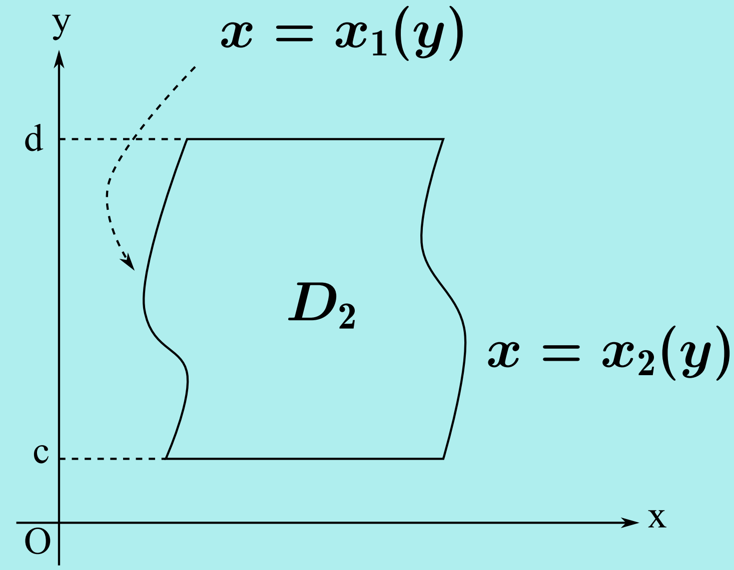
$$\left|\int_D f d\sigma\right| \leqslant \int_D |f| d\sigma.$$

(g) 设 D_1 和 D_2 是有界集, 并且 $D_1 \cap D_2$ 是零面积集. 如果 f 在 D_1 和 D_2 上都可积, 那么 f 也在 $D_1 \cup D_2$ 上可积, 并且

$$\int_{D_1 \cup D_2} f d\sigma = \int_{D_1} f d\sigma + \int_{D_2} f d\sigma.$$

4. 二重积分的计算





$$\iint_{D_1} f\,d\sigma = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

$$\iint_{D_2} f\,d\sigma = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

5. **二重积分换元：** 设连续函数 $F(x,y)$ 定义在有界区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上，连续可导的映射 φ 由公式

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ (u,v) \in \Delta$$

定义，并将 Δ 一对一地映到 D，且

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

在 Δ 上成立，则有换元公式

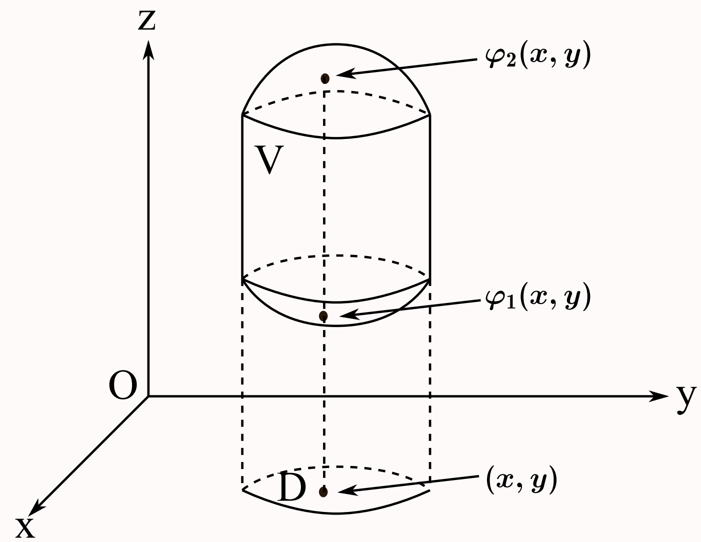
$$\iint\limits_D F(x,y)\,dxdy = \iint\limits_\Delta F \circ \varphi(u,v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv.$$

6. **极坐标换元：**

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r.$$

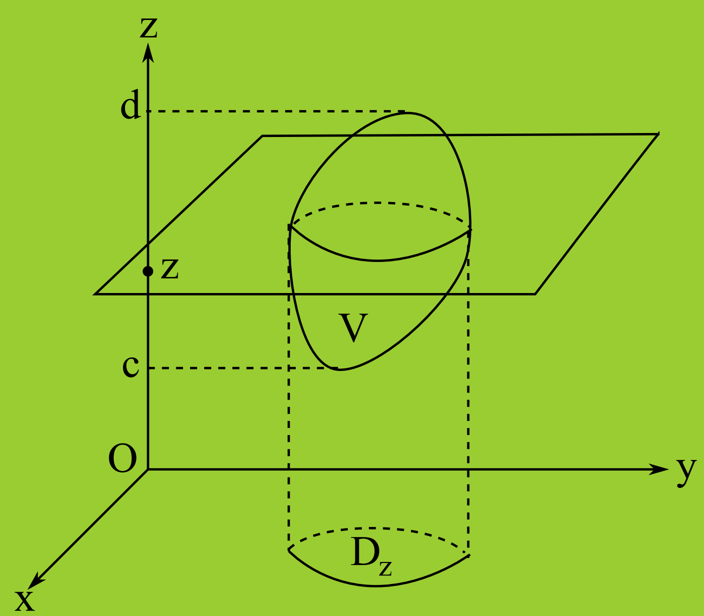
||◄ ►|| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

7. **三重积分的计算：**



$$\int\limits_{V} f\,d\mu = \iint\limits_{D} dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz,$$

||◄ ►|| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出



$$\iiint\limits_{V} f\,d\mu = \int_c^d dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy.$$

8. **三重积分换元** 设连续函数 $F(x,y,z)$ 定义在有界区域 $V\in\mathbb{R}^3$ 上，连续可导的映射 φ 由公式

$$x=x(u,v,w),\ y=y(u,v,w),\ z=z(u,v,w),\ (u,v,w)\in\Delta,$$

定义，并将 Δ 一对一地映到 V，且

$$\det J\varphi=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\neq 0$$

在 Δ 成立，则有换元公式

$$\int_V F(x,y,z)\,dxdydz=\int_\Delta F\circ\varphi(u,v,w)\,|\det J\varphi|\,dudvdw.$$

9. **球坐标换元公式**

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi,\\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\\ z=r\cos\theta, \end{cases}\qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta.$$

10. **积分平均值定理** 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭区域，函数 f,g 在 K 上连续，且 g 在 K 上不变号，则存在一点 $\xi \in K$ 使得

$$\int_K fg\,d\sigma = f(\xi)\int_K g\,d\sigma.$$

例 1 设 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数，求极限

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} f(x,y)\,dxdy.$$

解： 由积分平均值定理知，存在 $\xi_r \in \overline{D_r(0)}$ 使得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} f(x,y)\,dxdy = f(\xi_r)\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} dxdy = \pi r^2 f(\xi_r).$$

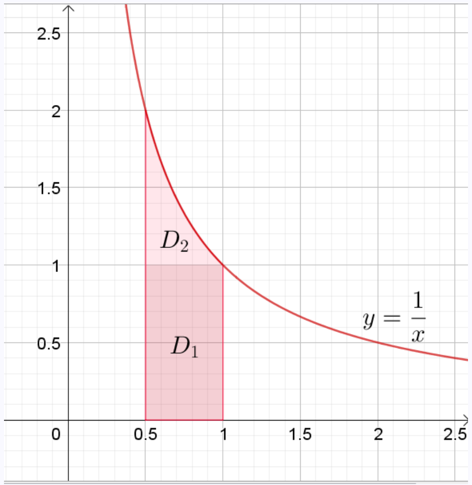
于是由 f 的连续性可知所求的极限为 $\lim\limits_{r\to 0} f(\xi_r) = f(0,0)$.

例 2 改变积分 $\int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{y}} f(x,y)dx$ 的顺序.

解: 设 $D_1 = [\frac{1}{2}, 1] \times [0,1]$, $D_2 = \{(x,y) : \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, 1 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x}\}$.
$D = D_1 \cup D_2 = \{(x,y) : \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x}\}$.

$$\int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x,y)dx = \iint_{D_1} f(x,y)\, dxdy$$

$$\int_1^2 dy \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{y}} f(x,y)dx = \iint_{D_2} f(x,y)\, dxdy$$



故,

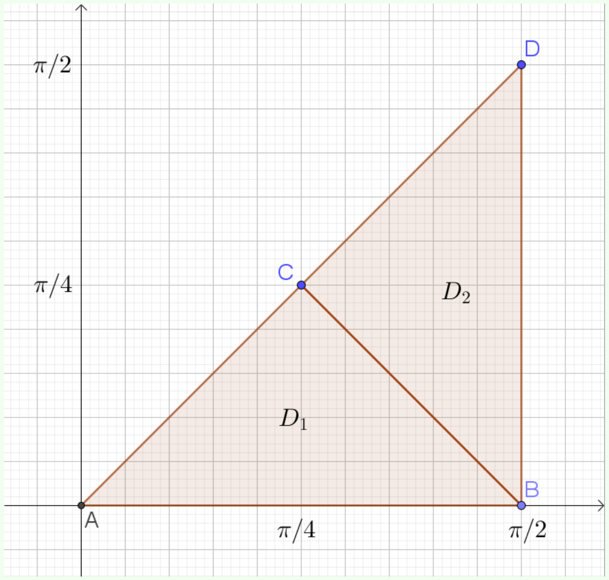
$$\int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{y}} f(x,y)dx = \iint_D f(x,y)\, dxdy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_0^{\frac{1}{x}} f(x,y)\, dy.$$

例 3 计算积分 $\iint_D |\cos(x+y)|dxdy$, D 由直线 $y=x, y=0, x=\frac{\pi}{2}$ 围成.

解:

如图 D_1 是由 A, B, C 三点所围成的三角形, D_2 是由 B, C, D 三点所围成的三角形, 则 $D = D_1 \cup D_2$. 函数 $\cos(x, y)$ 在 D_1 上非负, 在 D_2 上非正.



故,

$$\iint_D |\cos(x+y)|dxdy = \iint_{D_1} \cos(x+y)dxdy - \iint_{D_2} \cos(x+y)dxdy.$$

$$\iint_{D_1} \cos(x+y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_y^{\frac{\pi}{2}-y} \cos(x+y)\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin(x+y)\Big|_{x=y}^{x=\frac{\pi}{2}-y} \right) dy$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin 2y)dy = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

$$\iint_{D_2} \cos(x+y)dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{x} \cos(x+y)\,dy$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin(x+y)\Big|_{y=\frac{\pi}{2}-x}^{y=x} \right) dx$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - 1)dy = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}.$$

于是, 所求积分的值为 $\frac{3\pi}{4} - 1$.

|◄ ►| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

例 4 计算二重积分 $\iint_D \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y+3}}dxdy$, $D:\ |x|+|y|\leqslant 1.$

解: 作变换 $u=x+y, v=x-y$, 则 D 变为 $U: -1\leqslant u\leqslant 1,\ -1\leqslant v\leqslant 1$. 由此变换得 $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$. 故, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\frac{1}{2}$. 于是

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y+3}}dxdy &= \iint_U \frac{uv}{\sqrt{u+3}}\cdot\frac{1}{2}dudv\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{u}{\sqrt{u+3}}\int_{-1}^{1}v\,dv\\ &= 0.\end{aligned}$$

注: 实际上, 由于 D 关于 x, y 对称, 有

$$\iint_D \frac{x^2}{\sqrt{x+y+3}}dxdy=\iint_D \frac{y^2}{\sqrt{x+y+3}}dxdy.$$

故, 所求积分为 0.

例 5 计算二重积分 $\iint_D \sin\frac{y}{x+y}dxdy$, D : 由直线 $x+y=1, x=0, y=0$ 围成的区域.

解: 作变换 $u=\frac{y}{x+y}$, $v=x+y$, 即, $x=v(1-u)$, $y=uv$. 因而, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-v$. 在此变换下, 区域 D 变为正方形 $[0,1]^2$. 故,

$$\begin{aligned}\iint_D \sin\frac{y}{x+y}dxdy &= \iint_{[0,1]^2} v\sin u\,dudv \\ &= \int_0^1 vdv\int_0^1 \sin u\,du \\ &= \frac{1}{2}(1-\cos 1) \\ &= \sin^2\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

||◄ ►|| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

例 6 计算三重积分 $\iiint_V (|x|+z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz$, V : $1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$.

解: 区域 V 关于 z 对称, 因而 $\iiint_V ze^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz = 0$, 所以

$$\iiint_V (|x|+z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz = \iiint_V |x|e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz.$$

作球坐标变换 $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, 则区域 V 变为 $V_1 : 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

$$\begin{aligned}
\iiint_V |x|e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz &= \iiint_{V_1} r\sin\theta|\cos\varphi|e^{-r^2}r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi \\
&= \int_1^2 r^3e^{-r^2}dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} |\cos\varphi|d\varphi \\
&= \frac{1}{2}(2e^{-1}-5e^{-4}) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 4 \\
&= \frac{\pi}{2}(2e^{-1}-5e^{-4})
\end{aligned}$$

例 7 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，求证 Cauchy 积分不等式：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx. \tag{1}$$

证明： 设 $D=[a,b]\times[a,b]$.

$$右端 = \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(y)\,dy = \iint_D f^2(x)g^2(y)\,dxdy$$

$$右端 = \int_a^b f^2(y)dy \int_a^b g^2(x)\,dy = \iint_D f^2(y)g^2(x)\,dxdy.$$

$$\begin{aligned}左端 &= \left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)\left(\int_a^b f(y)g(y)\,dy\right)\\ &= \iint_D f(x)f(y)g(x)g(y)\,dxdy.\end{aligned}$$

因此, 有

$$2\times右端 - 2\times左端 = \iint_D \left[f(x)g(y)-f(y)g(x)\right]^2 dxdy \geqslant 0.$$

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

例 8 设 $f(x), g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上单调, 但是单调性相反, 则有

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx$$

证明: 对于任意 $x, y \in [a,b]$ 有

$$\Big[f(x)-f(y)\Big]\cdot\Big[g(x)-g(y)\Big] \leqslant 0.$$

将上式在 $D=[a,b]\times[a,b]$ 上积分, 得

$$\iint_D f(x)g(x)\,dxdy + \iint_D f(y)g(y)\,dxdy \\ - \iint_D f(x)g(y)\,dxdy - \iint_D f(y)g(x)\,dxdy \leqslant 0$$

即,

$$2(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx - 2\iint_D f(x)g(y)\,dxdy \leqslant 0$$

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出