

中国科学技术大学数学科学学院
2018-2019学年第一学期考试试卷

■ A 卷 □ B 卷

课程名称 复变函数B 课程编号 001506
姓名 _____ 学号 _____ 学院 _____

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一. 基础知识 (共36分)

1. 求以下各值:

(1) $(2018 + i)(1 + i)$, (2) $3 + \ln i$

2. 已知解析函数 $f(z)$ 的实部为 $x^2 - y^2 + 4x + y$ 且 $f(0) = i$, 求虚部 $v(x, y)$.

3. 计算积分

$$\int_{-i}^i (2z + |z|) dz$$

积分路径为: 1) 沿直线段, 2) 沿圆周 $|z| = 1$ 的左半圆。

4. 已知 $f_1(z) = \frac{1}{1-2z} + e^z$, 把 $f_1(z)$ 在 $z = 0$ 展为幂级数, 并指出其收敛半径。

5. 已知 $f_2(z) = \frac{1}{z(z^2 - 2z + 5)}$, 把 $f_2(z)$ 在区域 $2 < |z - 1| < +\infty$ 展开成洛朗级数。

6. 求方程 $z^8 + 7z + 1 = 0$ 在圆环 $1 < |z| < 2$ 中根的个数, 并说明理由。

二. 计算复积分 (共27分, 其中(4)(5)每小题6分)

1) $\oint_{|z|=5} \frac{e^{7z}}{z-3} dz$, 2) $\oint_{|z|=3} \frac{\sin 2z}{(z-1)(z+8)} dz$,

3) $\oint_{|z-2|=3} \frac{dz}{(z-\pi)\sin z}$, 4) $\oint_{|z|=4} \frac{z^3}{2+z} e^{\frac{1}{z}} dz$,

5) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^5 \cos 2z} dz$.

三 计算定积分(14分)

$$(1) \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(1 + 2 \cos^2 \theta)^2}; \quad (2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 2x + 5} dx.$$

四 利用拉氏变换解微分方程: (10分)

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) = te^{2t} \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases}$$

五. (8分) 已知 $f(z)$ 在复平面上除了二级极点 $z_1 = 0$ 和一级级点 $z_2 = 2$ 外都解析, 并且有

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{f(z)}{z+3} = 1, \quad f(1) = 8, \quad f(3) = -\frac{4}{9}, \quad f(-1) = -\frac{2}{3}, \quad f(-2) = -\frac{7}{4}$$

求 $f(z)$ 的表示式。

六 (5分) 设函数 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内解析, 且 $f(0) = 0$, 定义函数

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & \text{当 } z \neq 0 \\ f'(0). & \text{当 } z = 0 \end{cases}$$

求证: $\varphi(z)$ 在 $|z| < 1$ 内解析.