一、15%

解：以角度为广义坐标。平衡时，小球到圆心连线之间的夹角为120°。

设微振动坐标为$\theta_1,\theta_2,\theta_3$。

系统的动能

$$T=\frac{1}{2}ma^2\left(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2+\dot{\theta}_3^2\right)$$

势能

$$V=\frac{1}{2}ka^2\{(\theta_1-\theta_2)^2+(\theta_2-\theta_3)^2+(\theta_3-\theta_1)^2\}$$
$$=\frac{1}{2}ka^2\{2\theta_1^2+2\theta_2^2+2\theta_3^2-2\theta_1\theta_2-2\theta_1\theta_3-2\theta_2\theta_3\}$$

惯性矩阵

$$M=ma^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

3 分；只写 T，未能写出 M 的 2 分

刚度矩阵

$$K=ka^2\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

3 分；只写 V，未能写出 K 的 2 分

广义特征方程

$$K\vec{x}=\omega^2M\vec{x}$$

3 分

广义特征值

$$\det(K-\omega^2M)=0\Longrightarrow\omega^2=0,\frac{3k}{m}$$

3 分

广义特征矢

$$(1,1,1)^T,\qquad(1,-1,0)^T,\qquad(1,0,-1)^T$$

施密特正角化，（$\vec{x}_2$和$\vec{x}_3$不唯一）

$$\vec{x}_1=\frac{1}{\sqrt{3ma}}(1,1,1)^T,\qquad\vec{x}_2=\frac{1}{\sqrt{2ma}}(1,-1,0)^T,\qquad\vec{x}_3=\frac{1}{\sqrt{6ma}}(1,1,-2)^T$$

模态矩阵

$$A=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)=\frac{1}{\sqrt{6ma}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{3}&1\\\sqrt{2}&-\sqrt{3}&1\\\sqrt{2}&0&-2\end{pmatrix}$$

逆矩阵

$$A^{-1}=A^TM=\frac{\sqrt{ma}}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}&\sqrt{2}\\\sqrt{3}&-\sqrt{3}&0\\1&1&-2\end{pmatrix}$$

简正坐标

$$\vec{\xi}=A^{-1}\vec{\eta}=\frac{\sqrt{ma}}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}&\sqrt{2}\\\sqrt{3}&-\sqrt{3}&0\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\\theta_2\\\theta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{ma}}{\sqrt{3}}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\\\frac{\sqrt{ma}}{\sqrt{2}}(\theta_1-\theta_2)\\\frac{\sqrt{ma}}{\sqrt{6}}(\theta_1+\theta_2-\theta_3)\end{pmatrix}$$

简正坐标归一化常数可自由约定；第二、第三个简正坐标的表达式不唯一。

简正模式 3 分；为正角化得 1 分

二、20%

解：（1）费马原理的拉氏函数是

$$L=n\frac{ds}{dz}=n_0\sqrt{(1-\alpha^2r^2)(r'^2+r^2\theta'^2+1)}$$

4 分

（2）广义动量p_θ守恒，

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\theta'}=n_0\sqrt{\frac{1-\alpha^2r^2}{r'^2+r^2\theta'^2+1}}r^2\theta'$$

2 分

广义能量守恒，

$$p_r=n_0\sqrt{\frac{1-\alpha^2r^2}{r'^2+r^2\theta'^2+1}}r'$$

$$\Longrightarrow E=p_rr'+p_\theta\theta'-L=-n_0\sqrt{\frac{1-\alpha^2r^2}{r'^2+r^2\theta'^2+1}}$$

2 分

本小题共 4 分

（3）等效拉氏函数是

$$L_{\text{eff}}=L-p_\theta\theta'=n_0\sqrt{1-\alpha^2r^2}\frac{r'^2+1}{\sqrt{r'^2+r^2\theta'^2+1}}$$

2 分

消去$r^2\theta'^2$，

$$p_\theta=n_0\sqrt{\frac{1-\alpha^2r^2}{r'^2+r^2\theta'^2+1}}r^2\theta'\Longrightarrow\frac{r^2\theta'^2}{r'^2+r^2\theta'^2+1}=\frac{p_\theta^2}{n_0^2(1-\alpha^2r^2)r^2}$$

$$\Longrightarrow\sqrt{\frac{r'^2+1}{r'^2+r^2\theta'^2+1}}=\sqrt{\frac{n_0^2(1-\alpha^2r^2)r^2-p_\theta^2}{n_0^2(1-\alpha^2r^2)r^2}}$$

$$\Longrightarrow L_{\text{eff}}=\sqrt{n_0^2(1-\alpha^2r^2)-\frac{p_\theta^2}{r^2}}\sqrt{r'^2+1}$$

2 分

本小题共 4 分

（4）前面已得

$$H=p_rr'+p_\theta\theta'-L=-n_0\sqrt{\frac{1-\alpha^2r^2}{r'^2+r^2\theta'^2+1}}$$

2 分

利用前面的结论作变量替换，

$$\begin{cases}\dfrac{r^2\theta'^2}{r'^2+r^2\theta'^2+1}=\dfrac{p_\theta^2}{n_0^2(1-\alpha^2r^2)r^2}\\[2ex]\dfrac{r'^2}{r'^2+r^2\theta'^2+1}=\dfrac{p_r^2}{n_0^2(1-\alpha^2r^2)}\end{cases}\Longrightarrow\frac{r'^2+r^2\theta'^2}{r'^2+r^2\theta'^2+1}=\frac{1}{n_0^2(1-\alpha^2r^2)}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)$$

$$\Longrightarrow\frac{1}{r'^2+r^2\theta'^2+1}=\frac{1}{n_0^2(1-\alpha^2r^2)}\left(n_0^2(1-\alpha^2r^2)-p_r^2-\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)$$

$$H=-\sqrt{n_0^2(1-\alpha^2r^2)-p_r^2-\frac{p_\theta^2}{r^2}}$$

2 分

正则方程

$$r' = \frac{p_r}{\sqrt{n_0^2(1-\alpha^2 r^2) - p_r^2 - \frac{p_\theta^2}{r^2}}}, \qquad p_r' = \frac{1}{\sqrt{n_0^2(1-\alpha^2 r^2) - p_r^2 - \frac{p_\theta^2}{r^2}}}\left(\frac{p_\theta^2}{r^3} - n_0^2\alpha^2 r\right)$$

$$\theta' = \frac{1}{\sqrt{n_0^2(1-\alpha^2 r^2) - p_r^2 - \frac{p_\theta^2}{r^2}}}\frac{p_\theta}{r}, \qquad p_\theta' = 0$$

4 分, 每个方程 1 分

三、20%

解：（1）触地点的坐标是

$$\vec{r}_A = (x, y, -a)^T, \qquad \vec{r}_{CA} = (0,0,-a)^T$$

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{CA} + \vec{v}_C = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \cos\phi\,\dot\theta + \sin\phi\sin\theta\,\dot\psi & \sin\phi\,\dot\theta - \cos\phi\sin\theta\,\dot\psi & \dot\phi + \cos\theta\,\dot\psi \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} + \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot x - a\left(\sin\phi\,\dot\theta - \cos\phi\sin\theta\,\dot\psi\right) \\ \dot y + a\left(\cos\phi\,\dot\theta + \sin\phi\sin\theta\,\dot\psi\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

2 分

约束方程是

$$\begin{cases} \dot x - a\left(\sin\phi\,\dot\theta - \cos\phi\sin\theta\,\dot\psi\right) = 0 \\ \dot y + a\left(\cos\phi\,\dot\theta + \sin\phi\sin\theta\,\dot\psi\right) = 0 \end{cases}$$

虚位移满足的约束方程

$$\begin{cases} \delta x - a(\sin\phi\,\delta\theta - \cos\phi\sin\theta\,\delta\psi) = 0 \\ \delta y + a(\cos\phi\,\delta\theta + \sin\phi\sin\theta\,\delta\psi) = 0 \end{cases}$$

4 分；每个约束 2 分

（2）拉格朗日函数是

$$L = T = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}ma^2\cdot\vec{\omega}^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}_C^2$$

$$= \frac{1}{5}ma^2\left\{\left(\cos\phi\,\dot\theta + \sin\phi\sin\theta\,\dot\psi\right)^2 + \left(\sin\phi\,\dot\theta - \cos\phi\sin\theta\,\dot\psi\right)^2 + \left(\dot\phi + \cos\theta\,\dot\psi\right)^2\right\} + \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2)$$

$$= \frac{1}{5}ma^2\{\dot\phi^2 + \dot\theta^2 + \dot\psi^2 + 2\cos\theta\,\dot\phi\dot\psi\} + \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2)$$

6 分

平动项 2 分，转动项 4 分

（3）由达朗贝尔原理，并利用约束方程消去$\delta x, \delta y$，

$$ma\ddot x(\sin\phi\,\delta\theta - \cos\phi\sin\theta\,\delta\psi) - ma\ddot y(\cos\phi\,\delta\theta + \sin\phi\sin\theta\,\delta\psi) + \frac{2}{5}ma^2\delta\phi\frac{d}{dt}(\dot\phi + \cos\theta\,\dot\psi) + \frac{2}{5}ma^2(\ddot\theta + \sin\theta\,\dot\phi\dot\psi)\delta\theta + \frac{2}{5}ma^2\delta\psi\frac{d}{dt}(\dot\psi + \cos\theta\,\dot\phi) = 0$$

2 分

$$\begin{cases} \frac{2}{5}ma^2\frac{d}{dt}(\dot\phi + \cos\theta\,\dot\psi) = 0 \\ \frac{2}{5}ma^2(\ddot\theta + \sin\theta\,\dot\phi\dot\psi) + ma\ddot x\sin\phi - ma\ddot y\cos\phi = 0 \\ \frac{2}{5}ma^2\frac{d}{dt}(\dot\psi + \cos\theta\,\dot\phi) - ma\ddot x\cos\phi\sin\theta - ma\ddot y\sin\phi\sin\theta = 0 \end{cases}$$

6 分；每个式子 2 分

四、15%

解：（1）有多种解法。利用可积条件，

$$dp\wedge dq = d\left(\frac{Q}{P}\right)\wedge \alpha d(P^2) = 2\alpha dQ\wedge dP$$

当$\alpha = 1/2$是正则变换。

3 分

（2）

$$dF = pdq - PdQ = \frac{1}{2}P^2 d\left(\frac{Q}{P}\right) - PdQ = -\frac{1}{2}PdQ - \frac{1}{2}QdP \Longrightarrow F = -\frac{1}{2}PQ$$

2 分

$$F_2(t,q,P) = F + PQ = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}P\cdot Pq = \frac{1}{2}P^2 q$$

2 分

（3）

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = p(q^2+1) = \frac{1}{2}P^2\left(\frac{Q^2}{P^2}+1\right) = \frac{1}{2}\left(P^2+Q^2\right)$$
$$\Longrightarrow \dot{Q} = P,\qquad \dot{P} = -\dot{Q}$$

5 分；哈密顿量 1 分，方程各 2 分

（4）

$$Q = \pm\sqrt{2pq},\qquad P = \pm\sqrt{2p}$$

$F_1(q,Q,t)$：$\frac{\partial Q}{\partial p}\neq 0$，存在；

$F_3(p,Q,t)$：$\frac{\partial Q}{\partial q}\neq 0$，存在；

$F_4(p,P,t)$：$\frac{\partial P}{\partial q} = 0$，不存在。

3 分；每个判断 1 分

五、15%

解：（1）

$$p_r = m\dot{r}$$
$$p_\theta = mr^2\dot{\theta}$$
$$p_\phi = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}$$
$$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\phi\dot{\phi} - L = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + \frac{1}{2}kr^2$$

4 分

（2）

$$\frac{d}{dt}J^2 = [J^2, H] = \left[p_\theta^2 + p_\phi^2 A(\theta), \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + \frac{1}{2}kr^2\right]$$
$$= \left[p_\theta^2 + p_\phi^2 A(\theta), \frac{1}{2m}\left(\frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)\right]$$
$$= \left[p_\theta^2, \frac{1}{\sin^2\theta}\right]\frac{p_\phi^2}{2mr^2} + \left[A(\theta), p_\theta^2\right]\frac{p_\phi^2}{2mr^2} = 0$$

3 分

$$\Longrightarrow \left[p_\theta^2, A(\theta) - \frac{1}{\sin^2\theta}\right] = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{A(\theta) - \frac{1}{\sin^2\theta}\right\} = 0$$
$$\Longrightarrow A(\theta) = \frac{1}{\sin^2\theta} + c,\qquad c\in\mathbb{R}$$

2 分

（3）

$$\delta r = \epsilon[r, J^2] = \epsilon\left[r, p_\theta^2 + p_\phi^2 A(\theta)\right] = 0$$
$$\delta\theta = \epsilon\left[\theta, p_\theta^2 + p_\phi^2 A(\theta)\right] = \epsilon\left[\theta, p_\theta^2\right] = 2\epsilon p_\theta$$
$$\delta\phi = \epsilon\left[\phi, p_\theta^2 + p_\phi^2 A(\theta)\right] = \epsilon\left[\phi, p_\phi^2 A(\theta)\right] = 2p_\phi A(\theta)$$
$$\delta p_r = \epsilon\left[p_r, p_\theta^2 + p_\phi^2 A(\theta)\right] = 0$$

$$\delta p_\theta=\epsilon\left[p_\theta,p_\theta^2+p_\phi^2A(\theta)\right]=\epsilon p_\phi^2[p_\theta,A(\theta)]=-\epsilon p_\phi^2\frac{\partial A(\theta)}{\partial\theta}=2\epsilon p_\phi^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}$$

$$\delta p_\phi=\epsilon\left[p_\phi,p_\theta^2+p_\phi^2A(\theta)\right]=0$$

6 分；每个式子 1 分

六、15%

解：设单摆的悬挂点距离平板的边缘距离为l，则拉氏函数是

$$L=\frac{1}{2}ma^2\dot\theta^2+mg\{a\sin\alpha\cos\theta+l\sin\alpha\}$$

微振动时，

$$L\approx\frac{1}{2}ma^2\dot\theta^2+mg\sin\alpha\left\{a\left(1-\frac{1}{2}\theta^2\right)+l\right\}$$

$$\Leftrightarrow L=\frac{1}{2}ma^2\dot\theta^2-\frac{1}{2}mga\sin\alpha\,\theta^2$$

6 分

利用量纲分析，绝热不变量是

$$\frac{1}{2}mga\sin\alpha\,\theta_M^2\cdot 2\pi\sqrt{\frac{ma^2}{mga\sin\alpha}}\propto\theta_M^2\sqrt{\sin\alpha}$$

6 分

$$\theta_M^2\sqrt{\sin 90^\circ}=\theta_0^2\sqrt{\sin 30^\circ}=\frac{\theta_0^2}{\sqrt{2}}$$

$$\theta_M=2^{-1/4}\theta_0\approx 0.841\theta_0$$

3 分