中国科学技术大学2024年春
复分析期末考试试卷

2024年6月19日

姓名：__________ 系别：__________ 学号：__________

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	总分
得分										
阅卷人										

1. (15分) 设 $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)(2-z)}$.

   (1) 求 $f(z)$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 级数，并求其收敛半径；

   (2) 求 $f(z)$ 在 $1<|z|<2$ 中的 Laurent 展开式.

2. (15分) 计算下列积分.

   (1) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{e^z+1}{\sin z}\mathrm{d}z$　　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^2}\mathrm{d}x\quad(-1<\alpha<1)$

3. (10分) 将 $|z-1|<2$ 和 $|z+1|<2$ 的公共部分共形地映为上半平面.

4. (10分) 求 $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{e^z+1}$ 的所有奇点，并指出其类型.

5. (10分) 设 f 为整函数, 且存在正整数 N, 使得当 z 充分大时恒有 $|f(z)|\geq|z|^N$. 证明：f 是次数不低于 N 的多项式.

6. (10分) 证明：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ 的收敛圆周上每一点都是全纯开拓意义下的奇点.

7. (10分) 设 $f : B(0,1) \to B(0,1)$ 为全纯函数. 若存在 $a \in B(0,1)$ 满足 $f(a) = a$, $f'(a) = 1$. 证明：对任意 $z \in B(0,1)$, $f(z) = z$.

8. (10分) 设 D 为平面区域，f 为 D 上的全纯函数, z_0 为 f 的 m 阶零点 $(m \geq 1)$. 证明：存在 z_0 的邻域 $U \subset D$ 及 U 上的单叶全纯函数 g 使得当 $z \in U$ 时，$f(z) = g(z)^m$.

9. (10分) 证明：不存在全纯函数 $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ 满足对任意 $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $|f(z)| \geq \frac{1}{\sqrt{|z|}}$.

1. (1). $f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$ 书本例5.1.3

$$=\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n.$$

收敛半径 $R=\left(\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\frac{1}{2^{n+1}}}\right)^{-1}=1$

(或者用Taylor展开定理分析半径).

(2). $f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{\frac{1}{z}-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ $(1<|z|<2)$

$$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

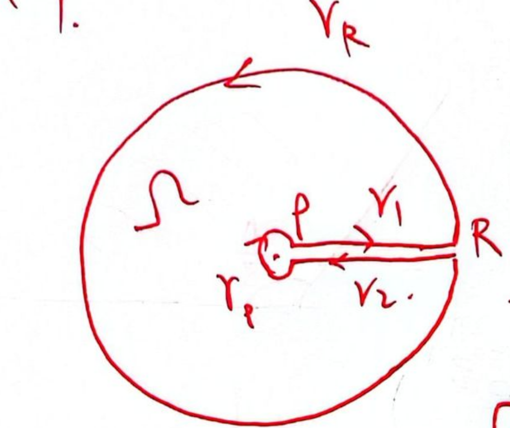
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

2. (1). $\frac{e^z+1}{\sin z}$ 在 $B(0,1)$ 内有唯一极点 $z=0$, 一阶. 所以

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^z+1}{\sin z},0\right)=\left.\frac{e^z+1}{\cos z}\right|_{z=0}=2.$$

$$\Rightarrow\int_{|z|=1}\frac{e^z+1}{\sin z}dz\underset{\text{留数thm.}}{=}2\pi i\,\mathrm{Res}=4\pi i$$

(2).



选取 $f(z)=\dfrac{z^\alpha}{1+z^2}$，其中 z^α 为在 $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$ 上选取，且在正实轴上岸取正值的单值分支，则在正实轴下岸有

$$f(x)=\frac{e^{\alpha(\log x+2\pi i)}}{1+x^2}=e^{2\alpha\pi i}\frac{x^\alpha}{1+x^2}.$$

故 $\displaystyle\int_{\gamma_2} f=-e^{2\alpha\pi i}\int_\rho^R \frac{x^\alpha}{1+x^2}dx$. 另一方面，

$$\left|\int_{\gamma_R} f\right| \le \frac{R^\alpha}{R^2-1}\cdot 2\pi R \to 0,\quad \text{as } R\to+\infty$$

$$\left|\int_{\gamma_\rho} f\right| \le \frac{\rho^\alpha}{1-\rho^2}\cdot 2\pi\rho \to 0,\quad \text{as } \rho\to 0^+.$$

而 f 在 Ω 内的共两个单极点 $z=\pm i$，且

$$\operatorname{Res}(f(z),\pm i)=\left.\frac{z^\alpha}{2z}\right|_{z=\pm i}=\begin{cases}\dfrac{1}{2i}e^{\alpha\cdot\frac{\pi i}{2}}=\dfrac{e^{\frac{\pi\alpha i}{2}}}{2i} & +i\\[2ex] \dfrac{1}{-2i}e^{\alpha\cdot\frac{3\pi i}{2}}=\dfrac{1}{2}e^{\frac{3\pi\alpha i}{2}} & -i\end{cases}$$

习题 5.5.11. 作业题

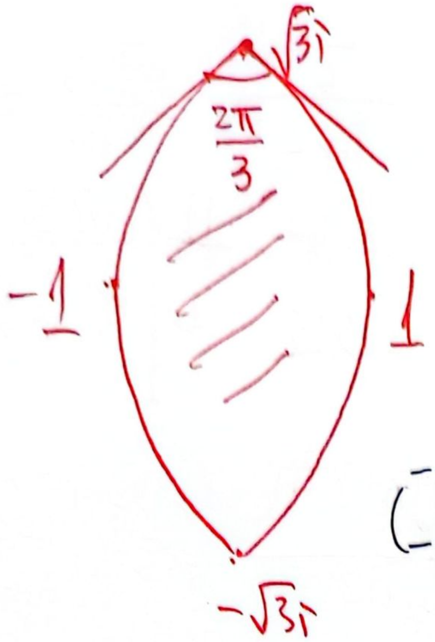
$$\boxed{\frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}}$$

故

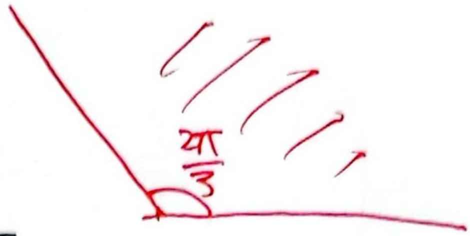
$$(1-e^{2\alpha\pi i})\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2}dx=\pi\left(e^{\frac{\alpha\pi i}{2}}-e^{\frac{3\alpha\pi i}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty\frac{x^\alpha}{1+x^2}dx=\pi\,\frac{e^{-\frac{\alpha\pi i}{2}}-e^{\frac{\alpha\pi i}{2}}}{e^{-\alpha\pi i}-e^{\alpha\pi i}}=$$

3.

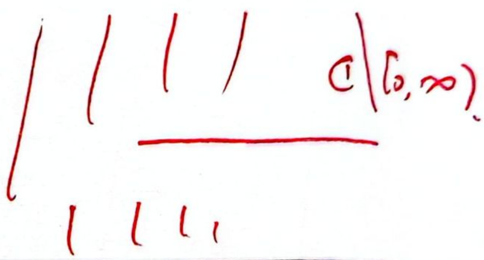


$$z_1=\frac{z+\sqrt{3}i}{z-\sqrt{3}i}e^{\frac{2\pi}{3}i} \longrightarrow$$



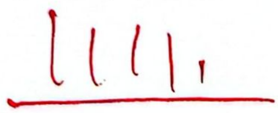
$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{-1-\sqrt{3}i}=\frac{e^{-\frac{\pi}{3}i}}{e^{\frac{\pi}{3}i}}=e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)$$

$$\downarrow z_2=z_1^3$$



$$\xleftarrow{w=\sqrt{z_2}}$$

$\sqrt{-1}=i$



所以 $w=\sqrt{\left(\frac{z+\sqrt{3}i}{z-\sqrt{3}i}\right)^3}$

第四次习题课，2.1(ii).
类似.

4. 可能奇点：$z=0$，$(2k+1)\pi i$，∞.

$e^{\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 处无极限 $\Rightarrow$ 本性.

$(2k+1)\pi i$ 处，一阶极点.

$\boxed{\infty：\text{非孤立}}$

5. $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ 为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数. ~~且~~ 因 $|g(z)|\le|z|^{-N}$ as $|z|>R$,

$\Rightarrow$ $g(z)$ 极点位于 $\overline{B(0,R)}$ 内 $\Rightarrow$ 有限. 设为 $z_1\cdots z_n$.

则 $h(z)=g(z)\prod^{n}(z-z_k)$ 为整函数 且

$|h(z)| \le 2|z|^{n-N}$ as $|z|$ 充分大

h 整 $\Longrightarrow$ h 多项式 $\Longrightarrow$ $g(z) = \dfrac{h(z)}{\prod(z-z_k)}$ 有理

3.5作业

复习课上习题2.5的简单延伸

$\Longrightarrow f(z) = \dfrac{1}{g(z)}$ 有理，但 f 整

$\Longrightarrow$ 多项式.

6. 只须证奇点集闭，更进一步，来证 $\{e^{i\frac{k}{2^m}\pi}: k\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{Z}_{\ge 0}\}$ 是奇点集. 注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{i\frac{k}{2^m}\pi}z\right)^{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\frac{k}{2^{m-n}}\pi} z^{2^n}$$

$$= \sum_{n\le m} e^{i\frac{k}{2^{m-n}}\pi} z^{2^n} + \sum_{n>m} z^{2^n}.$$

由书上定理，1是 $\sum_n \left(e^{i\frac{k}{2^m}\pi}z\right)^{2^n}$ 的奇点，从而 $e^{i\frac{k}{2^m}\pi}$ 是 $\sum z^{2^n}$ 的奇点.

书本习题6.2.6 作业题

7. 设 $\varphi_a(z) = \dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}$. 考虑 $g \triangleq \varphi_a^{-1}\circ f\circ\varphi_a$.

则 $g: B(0,1)\to B(0,1)$ 全纯，$g(0)=0$ 且 $g'(0)=1$.

$\xrightarrow[\text{Schwarz}]{} g = \mathbb{1}_D \Longrightarrow f = \varphi_a\circ g\circ\varphi_a^{-1} = \mathbb{1}_D$.

简单版本的Cartan定理（第四次讲义习题2.17）

证明与第四次习题2.6相似）

8. 设 f 在 $B(z_0,r)$ 内的Taylor为 $f(z)=\sum_{k=m}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$,

其中 $a_m\neq 0$. 考虑 $h(z)\triangleq \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m}(z-z_0)^k$, 则

$h\in H(B(z_0,r))$. 且 $f(z)=z^m h(z)$. 因为 $h(z_0)=a_m\neq 0$. 所以 $\exists r_1>0$ s.t. h 在 $B(z_0,r_1)$ 内恒不为0 $\Longrightarrow$

$\exists F\in H(B(z_0,r_1))$, s.t. $F(z)^m=h(z)$ $\Longrightarrow$ $f(z)=((z-z_0)F(z))^m$.

取 $g(z)=(z-z_0)F(z)$, 则 $g'(z_0)=F(z_0)=(h(z_0))^{\frac{1}{m}}\neq 0$, $\Rightarrow$ g 在 z_0 的一个邻域 U 内单叶.

Relate to: the local normal form of a holomorphic map between Riemann surfaces.

9. $|f(z)|\geq \frac{1}{\sqrt{|z|}}$ $\Rightarrow$ f 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 内恒非零

$\Rightarrow$ $\frac{1}{f}\in H(\mathbb{C}\setminus\{0\})$. 且 $\left|\frac{1}{f(z)}\right|\leq\sqrt{|z|}$.

$\xRightarrow{\text{可去奇点thm}}$ $\frac{1}{f}$ 以 $z=0$ 为~~极点~~可去奇点

$\Rightarrow$ $\frac{1}{f}$ 可以延拓为整函数 g, with $|g|\leq\sqrt{|z|}$

$\Rightarrow$ g 为常数 $\Rightarrow$ f 为常数, 但与 $|f|\geq\frac{1}{\sqrt{|z|}}$ 矛盾!

可去奇点的题在复习课上系统讲过.