2.5.3 指数函数 ★★★ 熟记定义

根据欧拉公式和指数函数应该满足的运算法则定义指数函数.

定义：设 $z = x + \mathrm{i}\, y,\ x, y \in \mathbb{R}$, 则定义指数函数

$$e^z = \exp(z) = e^{x+\mathrm{i}y} = e^x e^{\mathrm{i}y} = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y),$$

即 $e^z = e^{\mathrm{Re}z}(\cos \mathrm{Im}\,z + \mathrm{i}\sin \mathrm{Im}\,z).$ 熟记

$$\mathrm{Re}(e^z) = e^x \cos y, \quad \mathrm{Im}(e^z) = e^x \sin y.$$

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}z} = e^x, \quad \mathrm{Arg}\, e^z = \mathrm{Im}\,z + 2k\pi = y + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

例 $e^{2+3\mathrm{i}} = e^2 e^{3\mathrm{i}} = e^2(\cos 3 + \mathrm{i}\sin 3), \quad e^0 = 1.$

$$e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = \mathrm{i}, \quad e^{\pi\mathrm{i}} = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -1,$$

$$e^{\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}} = \cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2} = -\mathrm{i}, \quad \cdots\cdots$$

$$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y),\ \ x,y\in\mathbb{R}.$$

e^z 是单值函数, 具有如下性质:

(1) $\forall z\in\mathbb{C}$(复数域), $\left|\mathrm{e}^z\right|=\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,z}\neq 0$, $\mathrm{e}^z\neq 0$.

(2) $\lim\limits_{z\to\infty}\mathrm{e}^z$ 不存在, e^∞ 无意义.

证:

$$\mathrm{e}^z=\begin{cases}\mathrm{e}^x\to+\infty, & z=x\to+\infty,\\ \mathrm{e}^x\to 0, & z=x\to-\infty,\\ \cos y+\mathrm{i}\sin y\text{不收敛}, & z=\mathrm{i}y,\ y\to+\infty,\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\end{cases}$$

故 $\lim\limits_{z\to\infty}\mathrm{e}^z$ 不存在. #

同理，$\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^2}{\mathrm{e}^z}$ 不存在，因为

$$\frac{z^2}{\mathrm{e}^z}=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}\to 0,\ z=x\to+\infty\text{时},\\ \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}\to+\infty,\ \text{当}z=x\to-\infty\text{时},\end{cases}$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y),\quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(1) $\forall z \in \mathbb{C}$(复数域), $\left|e^z\right| = e^{\mathrm{Re}z} \neq 0$, $e^z \neq 0$.

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ 不存在，　e^{∞} 无意义.

(3) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

证：设 $z_1 = x_1 + i\,y_1$，$z_2 = x_2 + i\,y_2$，　$x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$,

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = (e^{x_1} e^{iy_1})\cdot(e^{x_2} e^{iy_2})$$

$$= (e^{x_1} e^{x_2}) e^{i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)}$$

$$= e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}.\ \#$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y),\ x, y \in \mathbb{R}.$$

(1) $\forall z \in \mathbb{C}$(复数域), $|e^z| = e^{\mathrm{Re}z} \neq 0$, $e^z \neq 0$.

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ 不存在, e^∞ 无意义. (3) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

(4) e^z 是以$2\pi i$为周期的周期函数, 即

$$e^{z+2k\pi i} = e^z,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$ ★★★

证明: $\forall k \in \mathbb{Z}$, $e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1.$

由(3)得, $e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z$.

故 e^z 以$2\pi i$为周期. #

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y),\ x, y \in \mathbb{R}.$$

(1) $\forall z \in \mathbb{C}$(复数域), $|e^z| = e^{\mathrm{Re} z} \neq 0$, $e^z \neq 0$.

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ 不存在, e^∞ 无意义. (3) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

(4) e^z 是以$2\pi i$为周期的周期函数, 即$e^{z+2k\pi i} = e^z$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

(5) $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$, 使得$z_1 = z_2 + 2k\pi i$.

证明: 充分性 "$\Leftarrow$". 直接由上述性质(4)得出.

必要性 "$\Rightarrow$". 若 $e^{z_1} = e^{z_2}$, 则由性质(3)得

$$1 = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} \cdot \frac{e^{-z_2}}{e^{-z_2}} = \frac{e^{z_1-z_2}}{e^0} = e^{x_1-x_2} e^{i(y_1-y_2)}.$$

故$\begin{cases} e^{x_1-x_2} = 1, \text{ 即} x_1 - x_2 = 0, \\ y_1 - y_2 = 0 + 2k\pi, \ \exists k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$ 故$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2 + 2k\pi, \ \exists k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ #

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y),\ x, y \in \mathbb{R}.$$

(1) $\forall z \in \mathbb{C}$(复数域), $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\,z} \neq 0$, $e^z \neq 0$.

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ 不存在, e^{∞} 无意义. (3) $e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

(4) e^z 是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数, 即 $e^{z+2k\pi i} = e^z$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

(5) $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$, 使得 $z_1 = z_2 + 2k\pi i$.

教材P39-40

(6) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.

证明: $\overline{e^z} = \overline{e^x(\cos y + i\sin y)} = e^x(\cos y - i\sin y)$

$= e^x\{\cos(-y) + i\sin(-y)\} = e^{x-iy} = e^{\bar{z}}$. #

(7) e^z 在全平面解析, $(e^z)' = e^z$.

证: 利用柯西-黎曼定理(C-R方程). 详细证明见P29例6. #

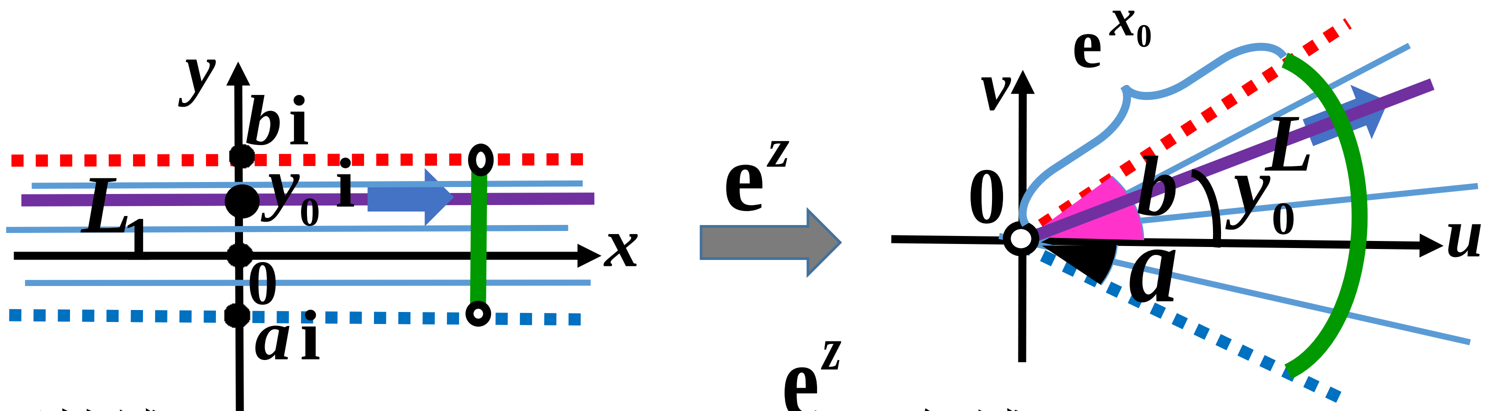
e^z 单叶性区域

$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$：单值且全平面解析函数

(5) $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$, 使得$z_1 = z_2 + 2k\pi i$.

D是e^z单叶性区域$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{不存在不相等的} z_1, z_2 \in D\text{，满足：} \\ z_1 = z_2 + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$

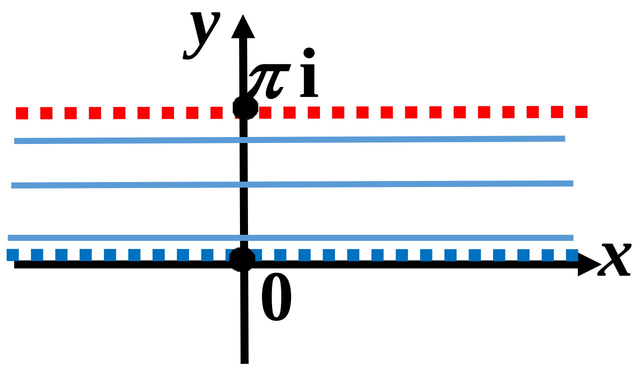
条形性域: $a < \operatorname{Im} z < b,\ b - a \le 2\pi$ 是e^z的单叶性区域.



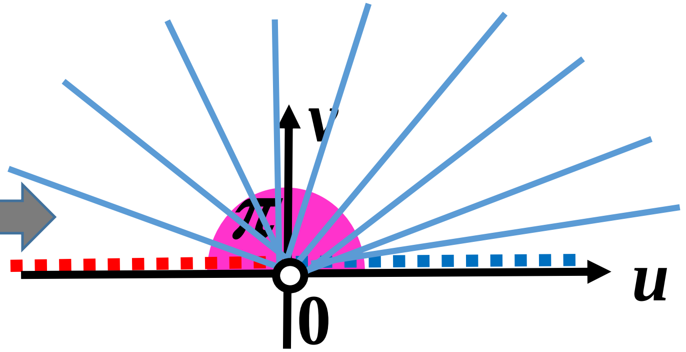
条形性域: $a < \operatorname{Im} z < b,\ b - a \le 2\pi$ $\xrightarrow{e^z}$ 角域: $a < \arg w < b$.

直线L_1： $\operatorname{Im} z = y_0$， $a < y_0 < b$ $\xrightarrow{e^z}$ 不含原点的射线L： $\arg w = y_0$.

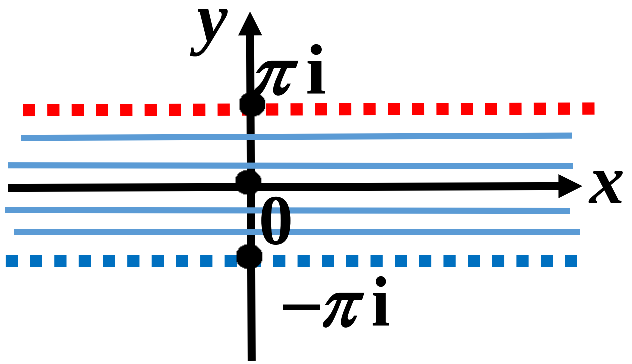
线段： $\operatorname{Re} z = x_0$， $a < \operatorname{Im} z < b$ $\xrightarrow{e^z}$ 圆弧$|w| = e^{x_0}$, $a < \arg w < b$.



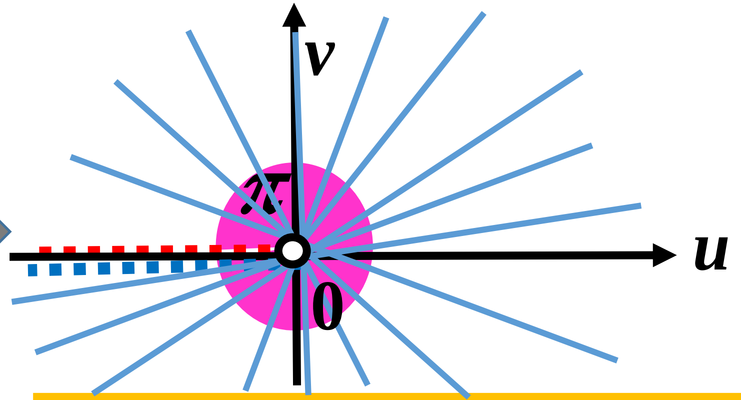
e^z



条形性域：$0 < \mathrm{Im}\, z < \pi$ $\xrightarrow{\mathrm{e}^z}$ 上半w平面：$0 < \arg w < \pi$



e^z



条形性域：$-\pi < \mathrm{Im}\, z < \pi$ $\xrightarrow{\mathrm{e}^z}$

割去负半实轴和原点的w平面

$-\pi < \arg w < \pi$

条形性域：

$(2k-1)\pi < \mathrm{Im}\, z < (2k+1)\pi$

$\xrightarrow{\mathrm{e}^z}$

割去负半实轴和原点的w平面

$(2k-1)\pi < \arg w < (2k+1)\pi$

2.5.4. 对数函数(指数函数的反函数)

定义：满足 $e^{w}=z\ (z\neq 0)$ 的函数 $w=f(z)$，

称为 z 的对数函数，记为 $w=\mathrm{Ln}z$，满足 $e^{\mathrm{Ln}z}=z.$

下面求 $w=\mathrm{Ln}z.$ 令 $w=u+\mathrm{i}v,\ z\neq 0,$ 代入 $e^{w}=z$，

$e^{u+\mathrm{i}v}=e^{u}e^{\mathrm{i}v}=z.$ 故 $e^{u}=|z|,\quad u=\ln|z|,$

$v=\mathrm{Arg}\,z=\arg z+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$

因此，$w=\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z$ ★★★ P41

$=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}.$ 熟记

$w=\mathrm{Ln}\,z$是无穷多值函数. 每个 k,对应 $\mathrm{Ln}z$ 的一个分支.

由定义知，$e^{\mathrm{Ln}z}=z.$

记$k=0$分支为$\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$, 称为$\mathrm{Ln}\,z$ 的主值.

其中 $-\pi<\arg z\leq\pi.$

任意非零复数都有对数.

$w=\operatorname{Ln}z=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi),\quad k\in\mathbb{Z}.$

主值：$\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z,\quad -\pi<\arg z\leq\pi.$

★★★ P41 熟记

非零复数都有对数.

例 求 $\operatorname{Ln}2$，$\operatorname{Ln}\{1-(\sqrt{3})\}\mathrm{i}$，$\operatorname{Ln}(1-\mathrm{i}(\sqrt{3}))$及相应主值.

解 (1) $\arg 2=0.$ $\operatorname{Ln}2=\ln 2+\mathrm{i}(\arg 2+2k\pi)=\ln 2+2k\pi\mathrm{i},\ k\in\mathbb{Z}.$

令$k=0$得 $\operatorname{Ln}2$主值$=\ln 2.$ 与正实数的对数一致.

(2) $\operatorname{Ln}\{1-(\sqrt{3})\}\mathrm{i}=\ln\left|\{1-(\sqrt{3})\}\mathrm{i}\right|+\mathrm{i}\{\arg\{1-(\sqrt{3})\}\mathrm{i}+2k\pi\}$

$=\ln\{(\sqrt{3})-1\}+\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.$

令$k=0$得，主值$\ln\{1-(\sqrt{3})\}\mathrm{i}=\ln\{(\sqrt{3})-1\}-\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}.$

(3) $\operatorname{Ln}(1-\mathrm{i}(\sqrt{3}))=\ln\left|1-\mathrm{i}(\sqrt{3})\right|+\mathrm{i}\left\{\arg(1-\mathrm{i}(\sqrt{3}))+2k\pi\right\}=\ln 2+\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.$

令$k=0$得，主值$\ln(1-\mathrm{i}(\sqrt{3}))=\ln 2-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}.$

对数函数的性质

(1) $\mathrm{Ln}(z_1\cdot z_2)=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2$, $z_1,z_2\neq 0$;

(2) $\mathrm{Ln}\dfrac{z_1}{z_2}=\mathrm{Ln}\,z_1-\mathrm{Ln}\,z_2$, $z_1z_2\neq 0$; $\mathrm{Ln}\dfrac{1}{z}=-\mathrm{Ln}\,z$, $z\neq 0$.

证明 (1) $\mathrm{Ln}(z_1\cdot z_2)=\ln|z_1\cdot z_2|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z_1\cdot z_2)$

$$=\ln\left(|z_1|\cdot|z_2|\right)+\mathrm{i}\left(\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2\right)=\ln|z_1|+\ln|z_2|+\mathrm{i}\left(\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2\right)$$

$$=\left(\ln|z_1|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_1\right)+\left(\ln|z_2|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_2\right)=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2.$$

(2) $\mathrm{Ln}\dfrac{z_1}{z_2}=\ln\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\ln|z_1|-\ln|z_2|+\mathrm{i}\left(\mathrm{Arg}\,z_1-\mathrm{Arg}\,z_2\right)$

$$=\left(\ln|z_1|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_1\right)-\left(\ln|z_2|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_2\right)=\mathrm{Ln}\,z_1-\mathrm{Ln}\,z_2.\ \#$$

$$w = \mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

主值： $\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z, \quad -\pi < \arg z \leq \pi.$

熟记

P 41

例 求 $\frac{1}{\mathrm{e}^z+2}$ 的所有奇点.

解 e^z+2 在全平面处处解析. 由 $\mathrm{e}^z + 2 = 0$, 得 $\mathrm{e}^z = -2$,

$$z = \mathrm{Ln}(-2) = \ln|-2| + \mathrm{i}\{\arg(-2) + 2k\pi\}$$

$$= \ln 2 + \mathrm{i}(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

因此, $\frac{1}{\mathrm{e}^z+2}$ 的所有奇点为 $\ln 2 + \mathrm{i}(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. #

当 $z \neq \ln 2 + \mathrm{i}(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ 时, $\frac{1}{\mathrm{e}^z+2}$ 解析.

$\operatorname{Ln} z$的多值性

$$w=\operatorname{Ln} z=\ln|z|+\mathrm{i}\operatorname{Arg} z=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi),\quad k\in\mathbb{Z}.$$

$\operatorname{Ln} z$ 多值性是由 $\operatorname{Arg} z$ 多值性引起, 与 $\sqrt[n]{z}$ 多值性类似:

$\operatorname{Ln} z$有且仅有两个支点：0和∞.

连接0和∞的任一简单曲线为支割线.

在沿支割线割开的 z 平面，$\operatorname{Ln} z$有无穷多分支：

$$w_k=(\operatorname{Ln} z)_k=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi),\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

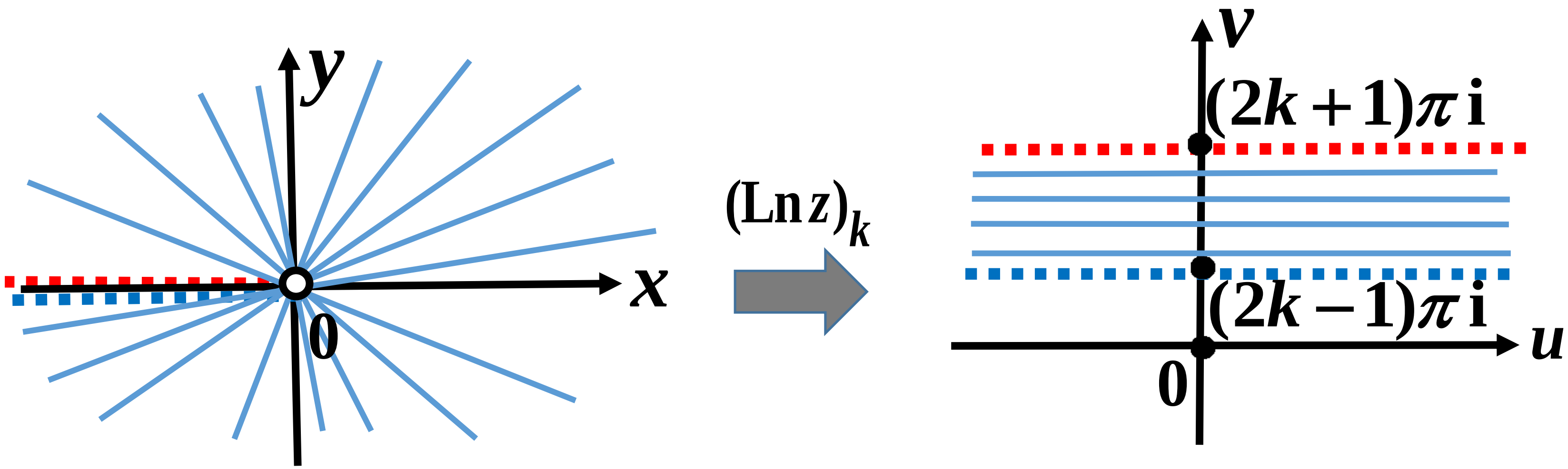
$\arg z$的取值范围依赖于支割线取法.

例如, 在沿负实轴割开的 z 平面内, 可以取 $-\pi<\arg z<\pi$.

沿负实轴割开的z 平面内，

$$w_k=(\mathrm{Ln}\,z)_k=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi),\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

$\mathrm{Im}\,w_k=\arg z+2k\pi,$ 其中$-\pi<\arg z<\pi$.



沿负半实轴割开的z平面 $-\pi<\arg z<\pi$.	$\xrightarrow{(\mathrm{Ln}\,z)_k}$	条形域: $(2k-1)\pi<\mathrm{Im}\,w_k<(2k+1)\pi$

根据反函数理论，在沿支割线割开的复平面内，

$\mathrm{Ln}\,z$ 的每一个单值连续分支：

$w_k = (\mathrm{Ln}\,z)_k = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$ 解析，

$$\left((\mathrm{Ln}\,z)_k\right)' = \frac{1}{(e^{w_k})'} = \frac{1}{e^{w_k}} = \frac{1}{e^{(\mathrm{Ln}\,z)_k}} = \frac{1}{z}.$$

特别是主值分支：在沿支割线割开的复平面内，

$w_0 = \ln z$ 解析，$(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$.

2.5.5-2.5.6 三角函数和双曲函数

$\forall y\in\mathbb{R}$, $e^{iy}=\cos y+i\sin y$, $e^{-iy}=\cos y-i\sin y$,

$\cos y=\frac{1}{2}\left(e^{iy}+e^{-iy}\right)$, $\sin y=\frac{1}{2i}\left(e^{iy}-e^{-iy}\right)$.

$\forall z\in\mathbb{C}$, 定义

余弦函数 $\cos z\triangleq\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)$,

正弦函数 $\sin z\triangleq\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)$.

★★★
★★

P 42

$\Rightarrow e^{iz}=\cos z+i\sin z$.

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$ ★★★★★

因 $\forall y\in\mathbb{R}$, $\cosh y=\frac{1}{2}\left(e^{y}+e^{-y}\right)$, $\sinh y=\frac{1}{2}\left(e^{y}-e^{-y}\right)$, 故

$\forall z\in\mathbb{C}$, 定义

P 44

双曲余弦函数 $\cosh z=\frac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right)$,

双曲正弦函数 $\sinh z=\frac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right)$.

$\sin iz=\frac{e^{-z}-e^{z}}{2i}=-\frac{1}{i}\sinh z=i\sinh z.$ ⇨ $\sinh z=-i\sin iz.$

$\sinh iz=i\sin z.$ ⇨ $\sin z=-i\sinh iz.$

$\cos iz=\cosh z$, $\cosh iz=\cos z.$ 记到P 44熟背

$\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$ $\cosh z=\dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2},\ \sinh z=\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}.$

- $\cos z,\ \sin z,\ \cosh z,\ \sinh z$在全平面处处解析，

$(\cos z)'=-\sin z,\quad (\sin z)'=\cos z,$ P43 熟记 ★★

$(\cosh z)'=\sinh z,\quad (\sinh z)'=\cosh z.$ P44 ★

证：因e^z, e^{iz}在全平面解析，故$\cos z, \sin z, \cosh z, \sinh z$在全平面解析，

$$(\cos z)'=\frac{1}{2}\left(ie^{iz}-ie^{-iz}\right)=-\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)=-\sin z.$$

其余可类似证明. #

$\sinh iz=i\sin z,\ \sin iz=i\sinh z,\ \sinh z=-i\sin iz,$

$\cosh iz=\cos z,\ \cos iz=\cosh z,\ \sin z=-i\sinh iz.$

$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. $\cosh z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$, $\sinh z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$.

$\cosh iz=\cos z$, $\cos iz=\cosh z$, $\sinh iz=i\sin z$, $\sin iz=i\sinh z$.

1) $\cos z, \sin z$以2π为周期, $\cosh z, \sinh z$以$2\pi i$为周期, 即

$\cos(z+2\pi)=\cos z$, $\sin(z+2\pi)=\sin z$. P43 熟记

$\cosh(z+2\pi i)=\cosh z$, $\sinh(z+2\pi i)=\sinh z$.

证: 因$e^{z+2k\pi i}=e^{z}$, $\forall k\in\mathbb{Z}$, 故

$$\cos(z+2\pi)=\frac{e^{i(z+2\pi)}+e^{-i(z+2\pi)}}{2}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z.$$

其余可类似证明. #

$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

$\cosh z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$, $\sinh z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$.

2)(零点) (*a*) $\{z|\sin z=0\}=\{n\pi, n\in\mathbb{Z}\}=\{0,\pm\pi,\pm2\pi,\cdots\}$.

(*b*) $\{z|\cos z=0\}=\{n\pi+\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}\}=\{\pm\frac{1}{2}\pi,\pm\frac{3}{2}\pi,,\cdots\}$.

(*c*) $\{z|\cosh z=0\}=\{(n\pi+\frac{\pi}{2})i,\ n\in\mathbb{Z}\}=\{\pm\frac{1}{2}\pi i,\pm\frac{3}{2}\pi i,\cdots\}$.

(*d*) $\{z|\sinh z=0\}=\{n\pi i, n\in\mathbb{Z}\}=\{0,\pm\pi i,\pm2\pi i,\cdots\}$.

证: (*b*) $\cos z=0\Leftrightarrow e^{iz}=-e^{-iz}=e^{i\pi}\cdot e^{-iz}=e^{i(\pi-z)}$

$\Leftrightarrow iz=i(\pi-z)+2n\pi i,\ n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow z=n\pi+\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}$.

其余证明类似. #

$\Rightarrow$ 若 $\operatorname{Im} z\neq0$, 则 $\cos z\neq0$, $\sin z\neq0$.

若 $\operatorname{Re} z\neq0$, 则 $\cosh z\neq0$, $\sinh z\neq0$.

(5) $e^{z_1}=e^{z_2}\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}$, 使得 $z_1=z_2+2k\pi i$.

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

实三角函数恒等式在复变数情形仍然成立：

(3) $\sin(-z) = -\sin z$(奇)，$\cos(-z) = \cos z$(偶)，$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$，

$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$，

$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2, \cdots$ P 36 熟记

证明 $$\sin z_1 \cos z_2 = \frac{1}{4i}\left(e^{iz_1} - e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2} + e^{-iz_2}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\left\{e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{i(z_2-z_1)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right\}.$$ 类似地，

$$\cos z_1 \sin z_2 = \frac{1}{4i}\left\{e^{i(z_2+z_1)} - e^{i(z_1-z_2)} + e^{i(z_2-z_1)} - e^{-i(z_2+z_1)}\right\}.$$

故 $$\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 = \frac{1}{2i}\left\{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right\} = \sin(z_1 + z_2).$$

其余证明类似. #

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2,$$
$$\cos(z_1 \mp z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \pm \sin z_1 \sin z_2.$$

$$\cosh iz = \cos z,\quad \cos iz = \cosh z,\quad \sinh iz = i\sin z,\quad \sin iz = i\sinh z.$$

例. 求 $\cos(3-2i)$.

解 $\cos(3-2i) = \cos 3\cos 2i + \sin 3\sin 2i$

$= \cos 3\cosh 2 + i\sin 3\sinh 2$. #

★ ★ ★ ★ ★

实双曲函数恒等式在复变数情形仍然成立:

$$\sinh(-z) = -\sinh z,\quad \cosh(-z) = \cosh z,\quad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1,$$
$$\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2.$$ P 44 熟记

证明 根据定义. #

余切函数

- 当$z \neq n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$时，$\sin z \neq 0$，定义

余切函数$\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$，解析，$(\cot z)' = -\dfrac{1}{\sin^2 z}$.

证明　首先$\sin z, \cos z$在全平面解析.

当$z \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$时，$\sin z \neq 0$，　故$\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$解析.

且$$(\cot z)' = \frac{(\cos z)' \sin z - \cos z (\sin z)'}{\sin^2 z} = \frac{-\sin^2 z - \cos^2 z}{\sin^2 z} = -\frac{1}{\sin^2 z}.$$ #

注：$\{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$是$\cot z$的全部奇点.

- 当$z \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$时，$\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$, 解析, $(\cot z)' = -\dfrac{1}{\sin^2 z}$.

$\{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$是$\cot z$的全部奇点.

正切函数

- 当$z \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$时，$\cos z \neq 0$, 定义

正切函数$\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, 解析, $(\tan z)' = \dfrac{1}{\cos^2 z}$.

$\left\{n\pi + \dfrac{\pi}{2}, \; n \in \mathbb{Z}\right\}$是$\tan z$的全部奇点.

- 当$z \neq n\pi \mathrm{i}$, $n \in \mathbb{Z}$时，$\coth z \triangleq \dfrac{\cosh z}{\sinh z}$解析, $(\coth z)' = -\dfrac{1}{\sinh^2 z}$.

- 当$z \neq \left(n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}$, $n \in \mathbb{Z}$时, $\tanh z \triangleq \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$解析, $(\tanh z)' = \dfrac{1}{\cosh^2 z}$.

- $\tan z$, $\cot z$ 都是以π为周期的函数, 即

$$\tan(z+\pi)=\tan z, \quad \cot(z+\pi)=\cot z.$$

- $\tanh z$, $\coth z$ 都是以$\pi \mathrm{i}$为周期的函数, 即

$$\tanh(z+\pi \mathrm{i})=\tanh z, \quad \coth(z+\pi \mathrm{i})=\coth z.$$

例1. 求$\sin z$的实部，虚部和模.

解：设$z = x + \mathrm{i}\, y$, $x, y \in \mathbb{R}$, 则由三角函数公式得

$$\sin z = \sin(x + \mathrm{i}\, y) = \sin x \cos(\mathrm{i}\, y) + \cos x \sin(\mathrm{i}\, y)$$

$$= \sin x \cosh y + \mathrm{i} \cos x \sinh y.$$ ★ ★ ★ ★ ★

故 $\mathrm{Re}(\sin z) = \sin x \cosh y$, $\mathrm{Im}(\sin z) = \cos x \sinh y$.

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x \cosh^2 y + \sinh^2 y \cos^2 x}$$

$$= \sqrt{(1 - \cos^2 x)\cosh^2 y + \sinh^2 y \cos^2 x}$$

$$= \sqrt{\cosh^2 y - \cos^2 x(\cosh^2 y - \sinh^2 y)} = \sqrt{\cosh^2 y - \cos^2 x}.$$ #

同理可以求$\cos z$ 的实部，虚部和模.

$\sinh x$，$\cosh x$在$\mathbb{R}$ 中无界，故$\sinh z$，$\cosh z$在复平面 无界.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$, 有界，但是

复变中 $|\sin z|$无界, $|\cos z|$无界.

证：当$z = \mathrm{i}\, y$, $y \to \infty$时, $\cos z = \cos \mathrm{i}\, y = \cosh y$,

$$|\cos \mathrm{i}\, y| = |\cosh y| = \frac{\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{y}}{2} \to \infty.$$

故 $|\cos z|$ 无界. 同理, $|\sin z|$ 无界. #

例 求 $\frac{1}{\sin z-3}$ 的解析区域, 并求出微商.

解 先求 $\sin z-3=0$ 的全部解 $z=\text{Arcsin}\,3$. 由 $\sin z$ 的定义知, 须求

$\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)-3=0$ 的解. 先求 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$. 记 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$, 则

$w-w^{-1}-6\mathrm{i}=0$, $w^2-6\mathrm{i}w-1=0$. 解得

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=w=\frac{6\mathrm{i}+\sqrt{36\mathrm{i}^2+4}}{2}=3\mathrm{i}+\frac{1}{2}\sqrt{-32}=\left(3\pm2\left(\sqrt{2}\right)\right)\mathrm{i}$. 故得

$\mathrm{i}z=\text{Ln}\left\{\left(3\pm2\left(\sqrt{2}\right)\right)\mathrm{i}\right\}=\ln\left(3\pm2\left(\sqrt{2}\right)\right)+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$. 两边乘以(−i) 得z.

故当 $z\neq\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi-\mathrm{i}\ln\left(3\pm2\left(\sqrt{2}\right)\right)$, $k\in\mathbb{Z}$ 时, $\frac{1}{\sin z-3}$ 解析.

$$\left(\frac{1}{\sin z-3}\right)'=-\frac{(\sin z-3)'}{(\sin z-3)^2}=-\frac{\cos z}{(\sin z-3)^2}. \quad \#$$

2.5.8* 反三角函数

设 $z=\cos w$, 那么称 w 为 z 的反余弦函数,

记作 $w=\mathrm{Arccos}\,z$.

由 $z=\cos w=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2}$, 两边乘以$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}$, 整理得

$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w}-2z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}+1=0.$ 记$\beta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}$, 则$\beta^2-2z\beta+1=0.$

用二次方程求根公式得 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}=\beta=z+\sqrt{z^2-1}.$

故 $\mathrm{i}w=\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$, 因此

$$w=\mathrm{Arccos}\,z=-\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right).$$

$\sqrt{z^2-1}$是双值函数, 前面不须加"±".

$\mathrm{Arccos}\, z = -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$ 类似地可求得，(P46)

反正弦函数 $\mathrm{Arcsin}\, z = -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\left(\mathrm{i}z + \sqrt{1 - z^2}\right),$

反正切函数 $\mathrm{Arctan}\, z = -\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}.$

反余切函数 $\mathrm{Arccot}\, z = \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Ln}\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}.$

反双曲正弦 $\mathrm{Arsinh}\, z = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right),$

反双曲余弦 $\mathrm{Arcosh}\, z = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$

反双曲正切 $\mathrm{Artanh}\, z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z},$

反双曲余切 $\mathrm{Arcoth}\, z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{z+1}{z-1}.$

例 求 $\frac{1}{\cos z-2}$ 的解析区域，并求出微商.

解 先求使分母等于零的点，即求 $\cos z-2=0$ 的全部根.

由 $\cos z$ 的定义知, 也就是要求解 $\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}-2=0.$

记 $w=e^{iz}$，则 $w+w^{-1}-4=0,\quad w^2-4w+1=0.$

解得 $e^{iz}=w=\frac{4+\sqrt{16-4}}{2}=2+\sqrt{3}>0.$ ($\sqrt{3}$是双值函数: $\pm(\sqrt{3}), (\sqrt{3})>0.$)

故 $iz=\mathrm{Ln}\left(2+\sqrt{3}\right)=\ln\left|2+\sqrt{3}\right|+i\left(\arg\left(2+\sqrt{3}\right)+2k\pi\right),$

$=\ln\left(2\pm\left(\sqrt{3}\right)\right)+i(0+2k\pi).$

两边乘以 $-i$, 得 $z=2k\pi-i\ln\left(2\pm\left(\sqrt{3}\right)\right),\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$

故当 $z\neq 2k\pi-i\ln\left(2\pm\left(\sqrt{3}\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}$时, $\cos z-2\neq 0,$ $\frac{1}{\cos z-2}$解析,

例 求 $\frac{1}{\cos z-2}$ 的解析区域，并求出微商.

解 由 $\cos z-2=0$ 及 $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ 解得

$$z=2k\pi-i\ln\left(2\pm\left(\sqrt{3}\right)\right),\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

故当 $z\neq 2k\pi-i\ln\left(2\pm\left(\sqrt{3}\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}$ 时，$\cos z-2\neq 0$，$\frac{1}{\cos z-2}$ 解析，

由分式求导公式得

$$\left(\frac{1}{\cos z-2}\right)'=-\frac{(\cos z-2)'}{(\cos z-2)^2}=\frac{\sin z}{(\cos z-2)^2}.\quad \#$$

作业

P 48 - 49

16 (1)(提示：可以分别考虑$z = x \to +\infty$ 和$z = x \to -\infty$)

19 (1)

21(参考此PPT的P26)

23 第1,2,4行

P 48第17题提示：

当z 沿通过原点的所有方向射线趋于∞ 时, $z+e^z$ 都趋于∞.

证明：(1) 当$z = x + kx\,i$, $x \to +\infty$时,

$$|z+e^z| \ge |e^z| - |z| = |e^{x+kx\,i}| - |x+kx\,i| = e^x - \left(\sqrt{1+k^2}\right)|x|.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^x - \left(\sqrt{1+k^2}\right)|x|\right) = +\infty.$$

(2) 当$z = x + kx\,i$, $x \to -\infty$时,

$$|z+e^z| \ge |z| - |e^z| = |x+kx\,i| - |e^{x+kx\,i}| = \left(\sqrt{1+k^2}\right)|x| - e^x.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\left(\sqrt{1+k^2}\right)|x| - e^x\right) = +\infty.$$

(3) 当$z = y\,i$, $y \to \infty$时, $|z+e^z| \ge |z| - |e^z| = |y\,i| - |e^{y\,i}| = |y| - 1.$

$$\lim_{y\to\infty}\left(|y| - 1\right) = +\infty.$$

故当z 沿通过原点的所有方向射线趋于∞ 时, $\left(z+e^z\right)$ 都趋于∞. #

例 设 $z = x + \mathrm{i}\, y$, 求(1) $\left|e^{\mathrm{i}+z^2}\right|$; (2) $\mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{i}+z^2}\right)$; (3) $\left(e^{\mathrm{i}+z^2}\right)'$.

解 $e^{\mathrm{i}+z^2} = e^{\mathrm{i}+(x+\mathrm{i}\,y)^2} = e^{x^2-y^2+\mathrm{i}(2xy+1)}$

$= e^{x^2-y^2}\left\{\cos(2xy+1) + \mathrm{i}\sin(2xy+1)\right\}$，故

(1) $\left|e^{\mathrm{i}+z^2}\right| = e^{x^2-y^2}$;

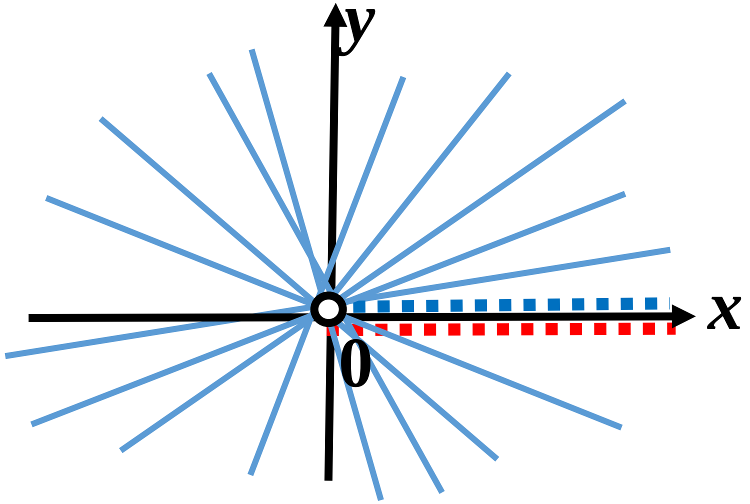
(2) $\mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{i}+z^2}\right) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy+1)$.

(3)有复合函数求导法则得

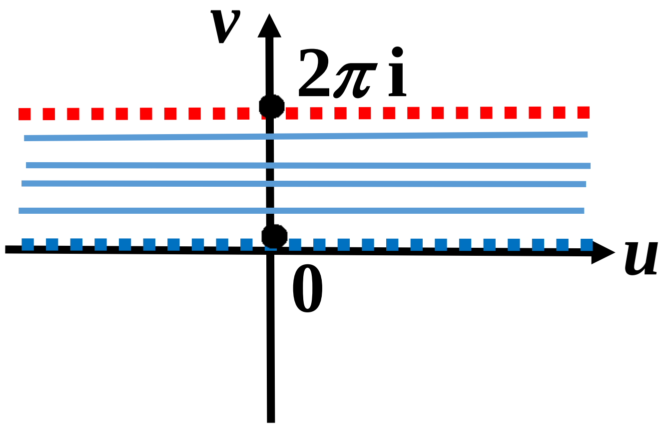
$\left(e^{\mathrm{i}+z^2}\right)' = e^{\mathrm{i}+z^2}\left(\mathrm{i}+z^2\right)' = 2z\,e^{\mathrm{i}+z^2}$. #

在除去原点和正实轴的复平面, 可以取 $0<\arg z<2\pi$内, 则得连续函数

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z,\quad 0<\arg z<2\pi,$$ 连续，解析.



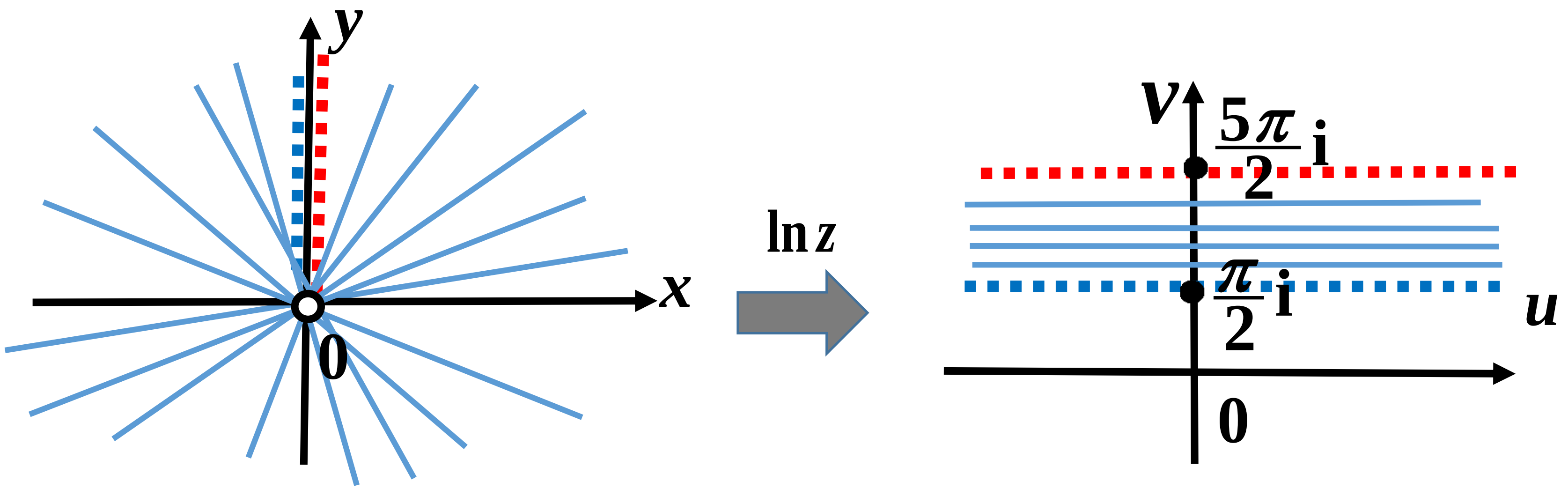
$w=\ln z$



沿正半实轴割开的z平面 $0<\arg z<2\pi$ $\xrightarrow{w=\ln z}$ 条形域: $0<\operatorname{Im} w<2\pi$.

在除去原点和上半虚轴的复平面取 $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2}$ 内，则得连续函数

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z,\quad \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2}.$$



沿上半虚轴割开的z平面 $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2}$ $\xrightarrow{\ln z}$ 条形域：$\frac{\pi}{2} < \mathrm{Im}\, w < \frac{5\pi}{2}$。