中 国 科 学 技 术 大 学

2015—2016 学年第二学期《电动力学》期末考试参考答案

第一题 (25 分) 介电常数为 ε 的无限大均匀介质中有匀强电场 $\vec{E}_0$，现在挖去一个半径为 a 的球体。求空间各处静电势的分布。

解答 球坐标系(以 $\vec{E}_0$ 方向为 z 轴)下静电势一般解为

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n r^n+\frac{b_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

考虑到问题的对称性以及球内电势(设为 φ_1)有限，而球外电势(设为 φ_2)在远处主要贡献为 $-\vec{E}_0\cdot\vec{r}=-E_0 r\cos\theta$，不妨设

$$\varphi_1=a_1 r\cos\theta \quad \text{and} \quad \varphi_2=\frac{c_0}{r}+\left(b_1 r+\frac{c_1}{r^2}\right)\cos\theta \quad \text{(5 分)}$$

由渐近条件不难得到

$$b_1=-E_0 \qquad \text{(5 分)}$$

而由 $r=a$ 处的边值关系

$$\varphi_2=\varphi_1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{c_0}{a}+\left(b_1 a+\frac{c_1}{a^2}\right)\cos\theta=a_1 a\cos\theta$$

$$\varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}=\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} \qquad \Rightarrow \qquad -\varepsilon\frac{c_0}{a^2}+\varepsilon\left(b_1-\frac{2c_1}{a^3}\right)\cos\theta=\varepsilon_0 a_1\cos\theta$$

此二式对于任意 θ 成立，因而有 $c_0=0$ 以及

$$\begin{cases} b_1+\dfrac{c_1}{a^3}=a_1 \\ b_1-\dfrac{2c_1}{a^3}=\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}a_1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a_1=\dfrac{3\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_0}b_1=-\dfrac{3\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_0}E_0 \\ c_1=\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2\varepsilon+\varepsilon_0}a^3 b_1=-\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2\varepsilon+\varepsilon_0}a^3E_0 \end{cases} \quad \text{(5 分)}$$

因而有

$$\text{球内}(r<a) \;:\; \varphi_1=-\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_0}E_0 r\cos\theta=-\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\vec{E}_0\cdot\vec{r} \quad \text{(5 分)}$$

$$\text{球外}(r>a) \;:\; \varphi_2=-\left(r+\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\frac{a^3}{r^2}\right)E_0\cos\theta=-\vec{E}_0\cdot\vec{r}-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\frac{a^3}{r^3}\vec{E}_0\cdot\vec{r} \quad \text{(5 分)}$$

第二题 (25 分) 设真空中有两块相互平行的无限大平板导体，其相邻的两面上存在面电荷和面电流，面电荷密度分别为σ和$-\sigma$，面电流密度分别为$\vec{\alpha}$和$-\vec{\alpha}$，若能找到一个参考系，其中只有电场而没有磁场。

(1) 试给出σ、$\vec{\alpha}$应满足的条件；

(2) 给出该参考系的速度；

(3) 求出该参考系中的电场。

解答 (1) 如图取坐标系(z 轴垂直于纸面向外)，由电场 Gauss 定理以及磁场的 Ampere 环路定理不难得到

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{y} \quad \text{and} \quad \vec{B}=\mu_0\alpha\hat{z}$$ **(5 分)**

由于可以找到一个参考系，其中只有电场而没有磁场，这意味着该电磁场是类电的，因而满足 $E>cB$

由此得到

$$\frac{\alpha}{\sigma}<\frac{1}{c\varepsilon_0\mu_0}=c$$

(2) 由于平行于运动方向的电磁场分量不变，因而在其中$\vec{B}'=0$的参考系以沿着 xy 平面的某个方向运动，不妨设该参考系沿着 x 轴以速度v运动(如果在该参考系中$\vec{B}'=0$，在相对于该参考系沿着 y 轴运动的其他参考系中磁场也为零)，由于

$$\vec{B}'_{\parallel}=\vec{B}_{\parallel}=0$$

而

$$\vec{B}'_{\perp}=\gamma\left(\vec{B}_{\perp}-\frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}\right)=\gamma\left(\mu_0\alpha-\frac{v\sigma}{\varepsilon_0c^2}\right)\hat{z}$$

由 $\vec{B}'_{\perp}=0$ 得到

$$\mu_0\alpha-\frac{v\sigma}{\varepsilon_0c^2}=0 \quad \Rightarrow \quad v=\frac{\mu_0\varepsilon_0\alpha c^2}{\sigma}=\frac{\alpha}{\sigma}>0$$

沿着 x 轴正向。

(3) 由于

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2/c^2\sigma^2}}=\frac{c\sigma}{\sqrt{c^2\sigma^2-\alpha^2}}$$

在该参考系中，电场为

$$\vec{E}'_{\parallel}=\vec{E}_{\parallel}=0$$

$$\vec{E}'_{\perp}=\gamma\left(\vec{E}_{\perp}+\vec{v}\times\vec{B}\right)=\gamma\left(E-vB\right)\hat{y}=\gamma\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{c^2}\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\right)\hat{y}=\frac{\sqrt{c^2\sigma^2-\alpha^2}}{c\varepsilon_0}\hat{y}$$

即

$$\vec{E}'=\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{c^2\sigma^2}}\vec{E}$$

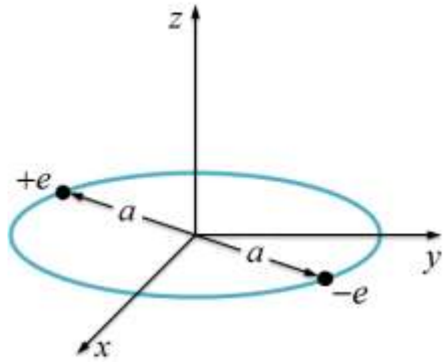
第三题 (18 分) 相距为$2a$的两个点电荷$+e$和$-e$绕着二者连线中心在 xy 平面内作匀速圆周运动，角速度为ω（设$d << c/\omega$）。

(1) 辐射主要来自哪个多极矩?

(2) 试求辐射功率的角分布;

(3) 试计算总的辐射功率;

(4) 如果在$z=-b$处放一无限大的理想导体平板(设$b << c/\omega$)，试问辐射主要来自哪个多极矩? 请简述理由。



解答 第一问 3 分，其余每小问 5 分

(1) 在远处，由于$r >> \lambdabar = c/\omega >> a$，辐射主要来自电偶极辐射。

(2) 电偶极辐射的矢量势为

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\vec{p}}$$

电磁场为

$$\vec{B}=\frac{1}{c}\dot{\vec{A}}\times\hat{r}=\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{\ddot{\vec{p}}\times\hat{r}}{r}\quad\text{and}\quad\vec{E}=c\vec{B}\times\hat{r}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left(\ddot{\vec{p}}\times\hat{r}\right)\times\hat{r}}{r}$$

平均能流密度为

$$\left\langle\vec{S}\right\rangle=\frac{1}{\mu_0}\left\langle\vec{E}\times\vec{B}\right\rangle=\frac{\mu_0\hat{r}}{16\pi^2cr^2}\left\langle\left(\ddot{\vec{p}}\times\hat{r}\right)^2\right\rangle$$

由于

$$\vec{p}(t)=p_0(\cos\omega t,\sin\omega t,0)\quad\text{where } p_0=2ea$$

所以

$$\left(\ddot{\vec{p}}\times\hat{r}\right)^2=\ddot{\vec{p}}^2-\left(\ddot{\vec{p}}\cdot\hat{r}\right)^2=\omega^4p^2-\omega^4\left[\left(\vec{p}\cdot\hat{r}\right)^2\right]$$

因而

$$\left\langle\left(\ddot{\vec{p}}\cdot\hat{r}\right)^2\right\rangle=\omega^4p_0^2\left\langle\begin{matrix}\cos^2\omega t\sin^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\omega t\sin^2\theta\sin^2\varphi\\+2\sin\omega t\cos\omega t\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\end{matrix}\right\rangle=\frac{1}{2}\omega^4p_0^2\sin^2\theta$$

所以

$$\left\langle\vec{S}\right\rangle=\frac{\mu_0\omega^4p_0^2\hat{r}}{32\pi^2cr^2}\left(1+\cos^2\theta\right)$$

辐射功率角分布为

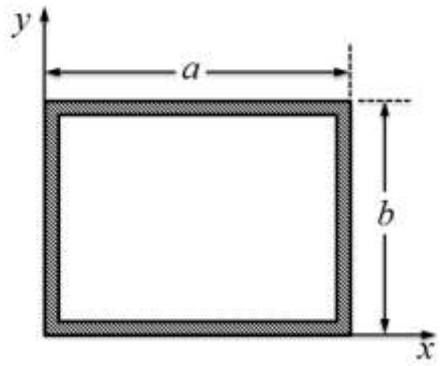
$$\frac{dP}{d\Omega}=\left|\left\langle\vec{S}\right\rangle\right|r^2=\frac{\mu_0\omega^4p_0^2}{32\pi^2c}\left(1+\cos^2\theta\right)=\frac{\mu_0e^2a^2\omega^4}{8\pi^2c}\left(1+\cos^2\theta\right)$$

(3) 总的辐射功率为

$$P=\int\frac{dP}{d\Omega}d\Omega=\frac{\mu_0e^2a^2\omega^4}{8\pi^2c}\times2\pi\times\int_0^\pi\left(1+\cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta=\frac{2\mu_0e^2a^2\omega^4}{3\pi c}$$

(4) 如果在$z=-b$处放一无限大的理想导体平板，由于每一电荷都有一个等量异号的像电荷，因而系统总的电偶极矩为零，而且总的磁偶极矩也为零，所以第一个非零的多极矩是电四极矩。

第四题 (20 分) 边长为 $a=8$ cm 和 $b=6$ cm 的矩形波导管(如图)被用来**以横磁(TM)模式传输电磁波，TM 模意指磁场与传播方向(此处为 z 方向)垂直**。假设管壁均为理想导体。



提示：如果前两问未解出，你仍可以利用所带 A4 纸上的公式直接求解下面的问题。

(1) 请由 Maxwell 方程证明：电磁波以 TM 模在波导管中传输时电磁场的 x、y 分量可以由 E_z 的一阶导数表示出来，写出这些关系式；

(2) 由边界条件以及 E_z 的波动方程导出 E_z 的表达式；

(3) 试证明频率为 $f=4\times10^9$ Hz 的电磁波在波导管中能以 TM 模传输；

(4) 求频率为 $f=4\times10^9$ Hz 的电磁波以 TM 模传输时的色散关系(即 ω 与波数 k 的关系)，由此给出其相速度 v_p 以及群速度 v_g (表示为光速 c 的倍数)；二者乘积 $v_p v_g$ 等于多少？

(5) 如果电磁波以 TM 模形式传输，试问其最低截止频率 f_c 等于多少？对于频率恰好等于最低截止频率一半的电磁波，其衰减长度约为多少厘米？ (衰减长度定义为功率减小为最初数值的 $1/e$ 的长度)。

解答　每小问 4 分

(1) 由于电磁场分量都具有 $u=u_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)}$ 的形式，因而将其代入 Maxwell 方程

$$\nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B} \quad \text{and} \quad \nabla\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E}$$

可得

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{ik}{\gamma^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}, & E_y &= \frac{ik}{\gamma^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ B_x &= -\frac{i\omega}{c^2\gamma^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}, & B_y &= \frac{i\omega}{c^2\gamma^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} \end{aligned}, \qquad \text{where } \gamma^2\equiv\frac{\omega^2}{c^2}-k^2$$

(2) 由 E_z 满足的波动方程

$$\nabla^2E_z=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2E_z}{\partial t^2} \quad\Rightarrow\quad \nabla^2E_z=-\frac{\omega^2}{c^2}E_z \quad\Rightarrow\quad \left(\partial_x^2+\partial_y^2\right)E_z+\gamma^2E_z=0$$

由于电场切向分量等于零给出其解为

$$E_z=E_0\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}$$

这里 n、m 为整数。因而

$$\gamma^2=\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)$$

角频率

$$\omega=c\sqrt{k^2+\gamma^2}=c\sqrt{k^2+\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)}$$

(3) 截止频率对应于 $k=0$，因而有

$$\omega_c = c\pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}} \quad \text{of} \quad f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}$$

对于 TM 模，n、m 全不为零，否则 $E_z = 0$，从而电磁场为零。所以最低截止频率

$$f_{c11} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}} = \frac{1}{2}\times 3\times 10^{10}\times\sqrt{\frac{1}{8^2}+\frac{1}{6^2}} = \frac{25}{8}\times 10^9 \approx 3.1\times 10^9\ \text{Hz}<4\times 10^9\ \text{Hz}$$

因而频率为 $f = 4\times 10^9$ Hz 的电磁波在波导管中能以 TM 模传输；

(4) 由于

$$f_{c12} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{2^2}{b^2}} > f_{c21} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{2^2}{a^2}+\frac{1}{b^2}} = \frac{5}{4}\sqrt{13}\times 10^9 \approx 4.5\times 10^9\ \text{Hz}>4.0\times 10^9\ \text{Hz}$$

因而 $f = 4\times 10^9$ Hz 的电磁波在波导管中只能以TM_{11}模传输；色散关系为

$$\omega = c\sqrt{k^2+\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}$$

由此得到

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{\pi^2 c^2}{\omega^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{c^2}{4f^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}$$

相速度为

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{c^2}{4f^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}} = \frac{32}{\sqrt{399}}c \approx 1.6c$$

群速度为

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{ck}{\sqrt{k^2+\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}} = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2}{v_p} = \frac{\sqrt{399}}{32}c \approx \frac{5}{8}c = 0.62c$$

相速度与群速度严格等于光速平方：$v_p v_g = c^2$。

(5) 波数用截止频率表示为

$$k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_{c11}^2}$$

当 $\omega < \omega_{c11}$ 时，波不能传输，对于 $\omega = \omega_{c11}/2$，有

$$k = \frac{1}{c}\sqrt{\left(\frac{\omega_{c11}}{2}\right)^2-\omega_{c11}^2} = i\frac{\sqrt{3}\omega_{c11}}{2c}$$

E_z 可以写为

$$E_z \propto E_0 e^{ikz} = E_0 e^{-\sqrt{3}\omega_{c11}z/2c}$$

功率

$$P \propto |E_z|^2 \propto P_0 e^{-\sqrt{3}\omega_{c11}z/c}$$

衰减长度 d 满足 $P(z=d)/P(0) = 1/e$，因此

$$\frac{\sqrt{3}\omega_{c11}d}{c} = 1 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{c}{\sqrt{3}\omega_{11}} = \frac{ab}{\sqrt{3}\pi\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{8\sqrt{3}}{5\pi} = 0.88\ \text{cm}$$

第五题简答题（12 分）

(1) 假如你发明了一个函数 $\varphi_0(\vec{r},t)$，并以你的姓氏定义一种规范：$\varphi(\vec{r},t)=\varphi_0(\vec{r},t)$（对于任意的 $\vec{r}$ 和 t）。试问：对于**任意**电磁势 $(\varphi,\vec{A})$，是否可以通过规范变换

$$\varphi'=\varphi-\partial_t\psi,\quad \vec{A}'=\vec{A}+\nabla\psi$$

使 $(\varphi',\vec{A}')$ 满足你所定义的规范？如果可以，给出一种找到相应规范函数 ψ 的方法，如果不可以，请给出你的理由；

(2) 假如你发明了一个函数 $\vec{A}_0(\vec{r},t)$，并以你的姓氏定义一种规范：$\vec{A}(\vec{r},t)=\vec{A}_0(\vec{r},t)$（对于任意的 $\vec{r}$ 和 t）。试问：对于**任意**电磁势 $(\varphi,\vec{A})$，是否可以通过规范变换

$$\varphi'=\varphi-\partial_t\psi,\quad \vec{A}'=\vec{A}+\nabla\psi$$

使 $(\varphi',\vec{A}')$ 满足你所定义的规范？如果可以，给出一种找到相应规范函数 ψ 的方法，如果不可以，请给出你的理由；

(3) 设两个事件 A 和 B 在 K 系中的时空坐标分别为(仅考察一维情形)

$$(ct_A,x_A)=(2,4),\quad (ct_B,x_B)=\left(4\sqrt{3},6\right)$$

各量均以“米”为单位。是否可以找到一个参考系使得这两个事件同时或者同地发生？如果不可以，请说明理由，如果可以，找出一个这样的参考系；

(4) 考察总电量为 Q 的均匀带电球面，其半径 $R(t)$ 随时间周期性变化

$$R(t)=R_0(2+\sin\omega t)$$

球面上的电荷显然作加速运动，但该系统不会发出辐射。为什么？电磁场能量的最大与最小值之比等于多少？

解答 每小问 3 分 (1) 可以。为了满足相应规范，要求

$$\varphi'=\varphi-\partial_t\psi=\varphi_0\quad\Rightarrow\quad \partial_t\psi=\varphi-\varphi_0$$

故只需取规范函数为 $\psi=\int(\varphi-\varphi_0)dt$ 即可。

(2) 不可以。如果可以满足相应规范，这意味着

$$\vec{A}_0=\vec{A}+\nabla\psi\quad\Rightarrow\quad \nabla\times\vec{A}=\nabla\times\vec{A}_0$$

如果磁场 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\neq\nabla\times\vec{A}_0$，则无法找到相应的规范函数 ψ。

(3) 由于 $-(ct_B-ct_A)^2+(x_B-x_A)^2=-\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2=-8<0$，

因而，两事件是类时的，可以找到一个参考系使得二者同时发生，但是由于速度不能超过光速，故不存在使得二者同地发生的参考系。使得二者同时发生的参考系相对于 K 系的速度 v 满足

$$\beta=\frac{v}{c}=\tan\theta=\frac{x_B-x_A}{ct_B-ct_A}=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad\Rightarrow\quad v=\frac{c}{\sqrt{3}}$$

(3) 由于电流沿着径向分布，其大小仅依赖于到球心距离而与方位无关，由对称性知，空间各点无磁场，故尽管电荷加速度，但该系统不会发射出辐射。由对称性，电场沿着径向，由 Gauss 定理不难得到球内电场始终为零(球的半径在变化)，球外电场则等于位于中心的点电荷 Q 产生的电场， 因此电磁场能量就等于静态情形半径为 R 的均匀带电球面的静电场能量，有

$$W\propto\frac{1}{R(t)}\quad\Rightarrow\quad \frac{W_{\max}}{W_{\min}}=\frac{1/R_{\min}}{1/R_{\max}}=\frac{R_{\max}}{R_{\min}}=\frac{3R_0}{R_0}=3$$