知识点复习

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow f(z)\text{ 解析}$$

$$\Updownarrow$$

$$\longrightarrow \oint_C f(z)\,dz = 0 \longrightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \longrightarrow f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta$$

平均值公式 $f(a) = \dfrac{1}{2\pi R}\oint_C f(\zeta)\,ds$

最大模原理

柯西不等式 $C: |\zeta - z| = R$ $\quad M = \max\{|f(\zeta)| : |\zeta - z| = R\}$ $\quad |f^{(n)}(z)| \le \dfrac{n!\,M}{R^n}$

刘维尔定理 有界整函数必为常数

$\mathrm{Res}[f(z), a] = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz$ e.s.p. a 为 m 阶极点

$$\mathrm{Res}[f(z), a] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]$$

也可以用 a_{-1} 来求，此时不用乘以 $\dfrac{1}{(m-1)!}$

求形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin x\,dx$ 时，第一步是换成 $f(x)e^{ix}$

保形变换

分式保形变换 $\dfrac{w - w_1}{w - w_2} = k\dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ e.s.p. $M(z_1) = 0$ $M(z_2) = \infty$，则 $w = k\dfrac{z - z_1}{z - z_2}$

上半平面 $\rightarrow |w| < 1$，且 $z = a \mapsto w = 0$

$w = e^{i\theta}\dfrac{z - a}{z - \bar{a}}$ $\quad \arg w'(a) = \theta - \dfrac{\pi}{2}$

不好区分区域时
最好还是带一个数进去看看

$|z| < 1 \rightarrow |w| < 1$，且 $z = a \mapsto w = 0$

$w = e^{i\theta}\dfrac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ $\quad \arg w'(a) = \theta$

拉氏变换 $F(p) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$

$L[e^{at}] = \dfrac{1}{p-a}$ $\quad L[\cos wt] = \dfrac{p}{p^2 + w^2}$ $\quad L[\sin wt] = \dfrac{w}{p^2 + w^2}$ $\quad \boxed{L[t^n] = \dfrac{n!}{p^{n+1}}}$

$L[f^{(n)}(t)] = p^n L[f] - p^{n-1}f(0+) - p^{n-2}f'(0+) - \cdots - f^{(n-1)}(0+)$

$L[t f(t)] = -\dfrac{dF}{dp}$ $\qquad \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = F(0)$

$L\left[\int_0^t f(s)\,ds\right] = \dfrac{F(p)}{p}$ $\qquad \int_0^{+\infty} t f(t) = -F'(0)$

$L\left[\dfrac{f(t)}{t}\right] = \int_p^{+\infty} F(p)\,dp$ $\qquad \int_0^{+\infty}\dfrac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} F(p)\,dp$

位移定理 $L[e^{\lambda t}f(t)] = F(p - \lambda)$

卷积 $L[f * g] = L[f]\cdot L[g]$ $\qquad (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)\,g(t - \tau)\,d\tau$

复数和平面点集

例 1.1.5 试证

$$|1-\bar{z}_1 z_2|^2-|z_1-z_2|^2=(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2).$$

分析 左端较右端繁,故从左证向右且应用公式$|z|^2=z\bar{z}$.

要善于利用共轭来转化模

证 左端$=(1-\bar{z}_1 z_2)\overline{(1-\bar{z}_1 z_2)}-(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}$

$=(1-\bar{z}_1 z_2)(1-z_1\bar{z}_2)-(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$

$=1-|z_1|^2-|z_2|^2+|z_1|^2|z_2|^2=$右端.

* $\arg z \in (-\pi, \pi]$

复变函数

☆ **例 1.3.13** 函数 $1+z^2$ 在单位圆 $|z|<1$ 内连续且处处不为零，而函数 $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ 在 $|z|<1$ 内连续，但不一致连续.

分析 由于已知 $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ 在 $|z|<1$ 内连续，在边界 $|z|=1$ 上 $z=\pm i$ 是不连续的点. 要证 $f(z)$ 不一致连续，我们总是在无限靠近其不连续点处，取充分接近的两点，然后证明其两个像点不靠近.

先找奇点

证 取两个点列 $z_n'=\left(1-\frac{1}{n}\right)i$，$z_n''=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)i$，$n=1,2,\cdots$. 当 n 充分大时，$|z_n'-z_n''|=\left|\frac{n-1}{n^2}\right|<\frac{1}{n}$，即 $|z_n'-z_n''|$ 可任意小，但

$$|f(z_n')-f(z_n'')|=n^2\left|\frac{2n^3-3n^2+1}{4n^3-2n^2-2n+1}\right|$$

$$=n^2\left|\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}{4-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}\right|>\frac{n^2}{3},$$

即 $|f(z_n')-f(z_n'')|$ 可任意大，故不一致连续. ■

这里的证法是
取两个无限接近的点列，
但这两个点列的函数值的极限不接近.

☆☆ 判断极限 $\lim\limits_{z\to 0} z\sin\frac{1}{z}$ 是否存在

取 $z=iw$ 即可

可以考虑分别把 z 限制在实轴或虚轴上

☆☆ 求 $\sin z=2$ 的根　　（求 $\tan z=1+2i$ 的根）

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=2 \Rightarrow e^{2iz}-4i\,e^{iz}-1=0$$

$$\Rightarrow e^{iz}=(2\pm\sqrt{3})i$$

$$\Rightarrow z_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}-i\ln(2\pm\sqrt{3}) \quad n\in\mathbb{Z}$$

这里令 $z=x+iy$ 反而很麻烦.
直接解关于 e^{iz} 的一元二次方程
再解出 z 会更简单

☆ **例 2.1.6** 考查 $f(z)=z\operatorname{Re} z$ 的可导性与解析性.

分析 直接应用函数可导和解析的定义.

解 因为

$$f'(0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z\operatorname{Re}(\Delta z)}{\Delta z}=0,$$

所以 $f(z)$ 在 $z=0$ 处可导.

若 $z\neq 0$，则

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)\operatorname{Re}(z+\Delta z)-z\operatorname{Re} z}{\Delta z}$$

$$=\frac{z}{\Delta z}[\operatorname{Re}(z+\Delta z)-\operatorname{Re} z]+\operatorname{Re}(z+\Delta z).$$

令 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$，于是

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=z\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}+x+\Delta x,$$

上述比值当 $z+\Delta z$ 沿平行于虚轴的方向趋于 z 时（即 $\Delta x=0,\Delta y\to 0$），其极限为 x；当 $z+\Delta z$ 沿平行于实轴的方向趋于 z 时（即 $\Delta y=0,\Delta x\to 0$），其极限为 $z+x$. 所以当 $z\neq 0$ 时，$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ 不存在. 故 $f(z)$ 在 $z\neq 0$ 处不可导. 于是得知 $f(z)=z\operatorname{Re} z$ 仅在原点 $z=0$ 可导，此外处处不可导. 故由解析的定义知 $f(z)=z\operatorname{Re} z$ 在 z 平面上处处不解析. ■

分类讨论

☆ 求值最后要化简，最好化到 $a+bi$ or e^{x+yi} 的形式

解析函数的积分表示

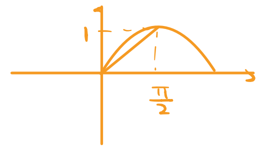
例 3.1.9 试证

$$\left|\int_C e^{iz}\,dz\right| < \pi,$$

其中 C 为圆周 $|z|=R$ 的上半圆周从 R 到 $-R$.

利用放缩

$\frac{2}{\pi}\theta < \sin\theta < \theta$



分析 应用积分估值定理和若尔当不等式.

证 $C: z=Re^{i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，

$$\left|\int_C e^{iz}\,dz\right| \leqslant \int_C |e^{iz}|\,|dz| = \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} R\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta} R\,d\theta \leqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta} R\,d\theta \quad （若尔当不等式）$$

$$= -\pi e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi(1-e^{-R}) < \pi.$$

例 3.3.7 证明：若 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上解析，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\zeta = \begin{cases} \overline{f(0)}, & |z|<1, \\ \overline{f(0)} - \overline{f\left(\frac{1}{\bar z}\right)}, & |z|>1. \end{cases}$$

分析 当 $|\zeta|=1$ 时，$\zeta=e^{i\varphi}$，$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$，

$$\bar\zeta = e^{-i\varphi},\quad d\zeta = ie^{i\varphi}\,d\varphi,\quad d\bar\zeta = -ie^{-i\varphi}\,d\varphi,$$

于是

$$d\zeta = ie^{i\varphi}\,d\varphi = \frac{ie^{-i\varphi}\,d\varphi}{e^{-2i\varphi}} = \frac{-d\bar\zeta}{\bar\zeta^2}.$$

利用 $d\bar\zeta = -\frac{d\zeta}{\zeta^2}$

$\zeta\bar\zeta = 1$

又注意到 $\zeta\bar\zeta = |\zeta|^2 = 1$，于是

把 $d\bar\zeta$ 换成成 $d\zeta$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta - z}\left(-\frac{d\bar\zeta}{\bar\zeta^2}\right)$$

$$= \overline{\frac{1}{-2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta(1-\bar z\zeta)}} = \overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta(1-\bar z\zeta)}}. \tag{1}$$

再整体取共轭换回来（注意，此时曲线方向没变）

取共轭后曲线方向改变

证 (1) $|z|<1 \Rightarrow |\bar z|<1 \Rightarrow \left|\frac{1}{\bar z}\right|>1$，则(1)式右端被积函数的奇点 $\zeta=0$ 在圆周 $|\zeta|=1$ 的内部；奇点 $\zeta=\frac{1}{\bar z}$ 在其外部. 由柯西积分公式，知

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta(1-\bar z\zeta)}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\frac{f(\zeta)}{1-\bar z\zeta}}{\zeta - 0}\,d\zeta$$

$$= \frac{f(\zeta)}{1-\bar z\zeta}\Big|_{\zeta=0} = f(0) \quad \left(\frac{f(\zeta)}{1-\bar z\zeta}\ 在\ |\zeta|\leqslant 1\ 上解析\right),$$

所以

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\zeta \overset{(1)}{=\!=} \overline{f(0)},\quad |z|<1.$$

(2) $|z|>1 \Rightarrow |\bar z|>1 \Rightarrow \left|\frac{1}{\bar z}\right|<1$，则(1)式右端被积函数的两个奇点 0 及 $\frac{1}{\bar z}$ 都在圆周 $|\zeta|=1$ 的内部. 为此，我们将被积函数分成两项，再应用柯西积分公式，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta(1-\bar z\zeta)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta - \frac{1}{\bar z}}\right) f(\zeta)\,d\zeta$$

$$\overset{(3.16)}{=\!=\!=} f(0) - f\left(\frac{1}{\bar z}\right).$$

所以

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\zeta \overset{(1)}{=\!=} \overline{f(0)} - \overline{f\left(\frac{1}{\bar z}\right)},\quad |z|>1.$$ ■

例 3.3.8 设 $g(z) = \int_{|\zeta|=2} \frac{2\zeta^2 - \zeta + 1}{\zeta - z}\,d\zeta$. (3) 能否求出 $g(2)$?

(3) 因对积分

$$\int_{|\zeta|=2} \frac{2\zeta^2 - \zeta + 1}{\zeta - 2}\,d\zeta \tag{1}$$

奇点不能出现在积分路径上

中的被积函数来说，分子 $2\zeta^2-\zeta+1$ 在 $\zeta=2$ 时不为 0，分母 $\zeta-2$ 在 $\zeta=2$ 时为 0，而 $\zeta=2$ 又在积分路径上，因此此积分无意义，所以不能求出 $g(2)$. ■

☆☆ **19.** 证明：若 $f(z)$ 在由简单闭曲线 C 所围成的闭区域 G 上解析，点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是 C 内部任意 n 个不同的点，且

$$g_n(z)=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n),$$

则

$$p(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)[g_n(\xi)-g_n(z)]}{g_n(\xi)(\xi-z)}d\xi$$

是与 $f(z)$ 在点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 相等的 $(n-1)$ 次多项式.

关键在于用留数定理，
不须害怕 $g_n(z)=(z-z_1)\cdots(z-z_n)$
的形式

$$p(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)g_n(\xi)}{g_n(\xi)(\xi-z)}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)g_n(z)}{g_n(\xi)(\xi-z)}d\xi$$

$$=f(z)-\frac{g_n(z)}{2\pi i}\sum_{j=0}^{n}\underline{\int_{C_j}\frac{f(\xi)}{g_n(\xi)(\xi-z)}d\xi}$$

别怕，算开来便是

$$=f(z)-g_n(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\frac{f(\xi)}{g_n(\xi)}}{\xi-z}d\xi+\right.$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\frac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z_2)\cdots(\xi-z_n)}}{\xi-z_1}d\xi+\cdots+$$

$$\left.\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{\frac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z_1)\cdots(\xi-z_{n-1})}}{\xi-z_n}d\xi\right]$$

$$=f(z)-g_n(z)\left[\frac{f(z)}{g_n(z)}+\frac{f(z_1)}{(z_1-z)(z_1-z_2)\cdots(z_1-z_n)}+\right.$$

$$\frac{f(z_2)}{(z_2-z)(z_2-z_1)(z_2-z_3)\cdots(z_2-z_n)}+\cdots+$$

$$\left.\frac{f(z_n)}{(z_n-z)(z_n-z_1)(z_n-z_2)\cdots(z_n-z_{n-1})}\right]$$

$$=\frac{g_n(z)f(z_1)}{(z-z_1)(z_1-z_2)\cdots(z_1-z_n)}+$$

$$\frac{g_n(z)f(z_2)}{(z-z_2)(z_2-z_1)(z_2-z_3)\cdots(z_2-z_n)}+\cdots+$$

$$\frac{g_n(z)f(z_n)}{(z-z_n)(z_n-z_1)(z_n-z_2)\cdots(z_n-z_{n-1})}.$$

(2) 再证 $p(z_j)=f(z_j), j=1,2,\cdots,n$. 将 z_j 代入 $p(z)(j=1,2,\cdots,n)$ 有

$$p(z_1)=f(z_1),\quad p(z_2)=f(z_2),\quad \cdots,\quad p(z_n)=f(z_n),$$

即

$$p(z_j)=f(z_j),\quad j=1,2,\cdots,n.$$

由(1)和(2)，问题得证.

☆☆☆ $P_n(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$ $n\geq1$ $a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{C}$ $a_n\neq0$

且 $|z|\leq1$ $|P_n(z)|\leq M$ 设 $R>1$

证明 $|P_n(z)|\leq MR^n$ $|z|\leq R$

这种题目一般思路都是
构造出一个符合要求的 $g(z)$
再应用最大模原理

$$g(z)=\frac{P_n(z)}{z^n}=\frac{a_0}{z^n}+\frac{a_1}{z^{n-1}}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{z}+a_n=a_0\zeta^n+\cdots+a_{n-1}\zeta+a_n$$

$g(z)$ 在 $|z|=1$ 上，$|g(z)|\leq M$ $\Rightarrow$ $|g(\zeta)|\leq M$ $\zeta\leq1$

$\Rightarrow |P_n(z)|\leq MR^n$ $R>1$

★★★ $f(z)$ 在 $|z|<2$ 解析 $|f(e^{i\theta})|\le 2$ $\theta\in[0,\pi)$ $|f(e^{i\theta})|\le 3$ $\theta\in[\pi,2\pi)$

证明 $|f(0)|\le\sqrt{6}$

构造 $g(z)=f(z)f(-z)$

最大模 $\Rightarrow$ $|g(z)|\le 2\cdot 3=6$

$\Rightarrow$ $|f(0)|=\sqrt{|g(z)|}=\sqrt{6}$

还是一样

构造出一个恰当的 $g(z)$

来应用最大模原理.

★★ f 为整函数，且 $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{(2^n z-1)^3}dz=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

证明 $f(z)=az+b$ $a,b\in\mathbb{C}$

$\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{(2^n z-1)^3}dz=0\Rightarrow f''\left(\frac{1}{2^n}\right)=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow f''(z)=0$ $\forall z\in\mathbb{C}$

$\Rightarrow f(z)=az+b$.

唯一性定理 + 高阶导数公式

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$$

★★ f 在上半平面解析 问 $g(z)=\overline{f(\bar z)}$ 是否在下半平面解析

法一

$$\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{f(\bar z)}-\overline{f(\bar z_0)}}{z-z_0}=\overline{\lim_{\bar z\to\bar z_0}\frac{f(\bar z)-f(\bar z_0)}{\bar z-\bar z_0}}$$

$$=\overline{\lim_{\xi\to\bar z_0}\frac{f(\xi)-f(\bar z_0)}{\xi-\bar z_0}}=\overline{f'(\bar z_0)}$$

用导数基本定义!

法二

C-R Eq

★★★ 设函数 $f(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内全纯，且 $\operatorname{Re}f(z)>0$，$f(0)=\alpha>0$，则

$$\left|\frac{f(z)-\alpha}{f(z)+\alpha}\right|\le|z|,\quad |f'(0)|\le 2\alpha.$$

依旧是构造出全纯函数 $g(z)$

再利用最大模原理放至边界处

$$g(z)=\frac{f(z)-\alpha}{(f(z)+\alpha)z}$$ 在 $|z|<1$ 内全纯

只需证 $|g(z)|\le 1$ $|z|=1$

$\Leftrightarrow$ $\left|\dfrac{f(z)-\alpha}{f(z)+\alpha}\right|\le 1$ $|z|=1$

$f(z)=a+bi$ $a>0$

即 $\left|\dfrac{a-\alpha+bi}{a+\alpha+bi}\right|\le 1$ 显然成立.

$$|f'(0)|=\lim_{z\to 0}\left|\frac{f(z)-\alpha}{z}\right|\le f(z)+\alpha=2\alpha$$

35. 若 $|z_1|>1,|z_2|>1,\cdots,|z_n|>1$. 证明：在单位圆周 $|z|=1$ 上存在点 z_0，使得 $\prod_{k=1}^{n}|z_0-z_k|>1$.

$$(-1)^n z_1\cdots z_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(z-z_1)\cdots(z-z_n)}{z}\,dz$$

$$\Rightarrow\quad 1<|(-1)^n z_1\cdots z_n| < \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{|z-z_1|\cdots|z-z_n|}{|z|}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}|z-z_1|\cdots|z-z_n|\,ds$$

$$\Rightarrow\quad \exists z_0,\ |z_0|=1,\ s.t\ \prod_{k=1}^{n}|z_0-z_k|>1$$

43. 若 $f(z)$ 在 $D(0,1)$ 上全纯，且 $f(0)=1$. 如果对每一个 $z\in D(0,1)$，$\operatorname{Re}f(z)\geqslant 0$ 成立，利用 Schwarz 引理证明：

(1) 不等式

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}\leqslant \operatorname{Re}f(z)\leqslant f(z)\leqslant\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

对每个 $z\in D(0,1)$ 都成立.

(2) 上述不等式中等号在 z 异于零时成立，当且仅当

$$f(z)=\frac{1+e^{i\theta}z}{1-e^{i\theta}z},$$

这里，θ 为任意实数.

注意 Re f(z) 为调和函数

也有最大模原理

调和函数

★★ 18. 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $f'(z)\neq 0$，试证 $\ln|f'(z)|$ 为区域 D 内的调和函数.

证　$f(z)$ 在 D 内解析 $\Rightarrow f'(z)$ 在 D 内解析，而题设 $f'(z)\neq 0 \Rightarrow \ln f'(z)$ 在 D 内解析. 于是其实部 $\ln|f'(z)|$ 为 D 内的调和函数.

更直接的证法
展开 u,v

* 若是求 $f(z)$，最后要化为只关于 z 的式子，不可出现 (x,y)

32. 求在 $|z|<1$ 内的调和函数，使其在 $|z|=1$ 上的一段弧上取值为 1，而在圆周的其余部分取值为零.

设 $u(e^{i\varphi})=\begin{cases}1 & \varphi\in(\alpha,\beta)\subset[0,2\pi) \\ 0 & \varphi\in[0,\alpha]\cup[\beta,2\pi]\end{cases}$

定理 6　设 $u(z)$ 是闭圆 $\bar{D}:|z-z_0|\leqslant R$ 上的调和函数，则对此圆内部任一点 $z=z_0+re^{i\varphi}(r<R)$，有

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\theta)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\theta, \tag{4.7}$$

这里记 $u(z_0+re^{i\varphi})=u(r,\varphi)$，$u(z_0+Re^{i\theta})=u(R,\theta)$.

由泊松公式，$r\in[0,1)$ 时

$$u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\arctan\frac{1-r}{1+r}\cot\frac{\alpha-\theta}{2}-\arctan\frac{1-r}{1+r}\cot\frac{\beta-\theta}{2}\right]$$

解析函数的级数展开

例 4.3.4 把 $e^z \sin z$ 展成 z 的幂级数.

乘法

解 由第 4 小节的公式(3)和(5),

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

两级数均在 $|z| < +\infty$ 内绝对收敛,故柯西积也绝对收敛.

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
1 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
-\frac{1}{3!} & -\frac{1}{3!} & -\frac{1}{3!} & -\frac{1}{3!2!} & -\frac{1}{3!3!} & -\frac{1}{3!4!} & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\frac{1}{5!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{5!2!} & \frac{1}{5!3!} & \frac{1}{5!4!} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

由对角线方法,

$$\begin{aligned}
e^z \sin z &= 0 + (1+0)z + (0+1+0)z^2 + \\
&\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) z^3 + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{3!}\right) z^4 + \\
&\left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{3!\ 2!} + \frac{1}{4!}\right) z^5 + \cdots \\
&= z + z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{30} z^5 + \cdots \quad (|z| < +\infty).
\end{aligned}$$

例 4.3.5 求 $\tan z$ 在点 $z=0$ 的泰勒展式.

除法

分析 函数 $\tan z$ 的奇点为 $\cos z$ 的零点

$$z_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \cdots).$$

而距原点 $z=0$ 最近的奇点为 $z_0 = \frac{\pi}{2}$, $z_{-1} = -\frac{\pi}{2}$. 故函数 $\tan z$ 在 $|z| < \frac{\pi}{2}$ 内解析,且能展为 z 的幂级数.

解 因为

$$\sin z = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \frac{1}{7!} z^7 + \cdots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \frac{1}{6!} z^6 + \cdots,$$

可以像多项式按升幂排列用直式做除法那样(分离系数),将分式的分子、分母的幂级数用直式相除,缺项用 0 补充,得到

$$\begin{array}{r}
0 + 1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 + \frac{2}{15} + 0 + \cdots \\
1 + 0 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{24} + \cdots \enclose{longdiv}{0 + 1 + 0 - \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{120} + 0 + \cdots} \\
1 + 0 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{24} + 0 + \cdots \\
\hline
\frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{30} + 0 + \cdots \\
\frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{6} + 0 + \cdots \\
\hline
\frac{2}{15} + 0 + \cdots \\
\frac{2}{15} + 0 + \cdots \\
\hline
\cdots
\end{array}$$

故

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \cdots \quad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right).$$

■

例 4.3.7 把 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 展成 z 的幂级数.

分析 $z=1$ 是 $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$ 在 **C** 上的惟一奇点，故 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，从而能展成 z 的幂级数.

解 设

$$f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}. \tag{1}$$

求导得

$$f'(z)=e^{\frac{1}{1-z}}\cdot\frac{1}{(1-z)^2}=f(z)\cdot\frac{1}{(1-z)^2},$$

即

$$(1-z)^2f'(z)-f(z)=0. \tag{2}$$

对微分方程(2)逐次求导，

$$(1-z)^2f''(z)+(2z-3)f'(z)=0, \tag{3}$$

$$(1-z)^2f'''(z)+(4z-5)f''(z)+2f'(z)=0, \tag{4}$$

$$\cdots.$$

由于 $f(0)\xlongequal{(1)}e$，由上列各微分方程可得

$$f'(0)\xlongequal{(2)}e,\quad f''(0)\xlongequal{(3)}3e,\quad f'''(0)\xlongequal{(4)}13e,\quad\cdots,$$

从而有

$$e^{\frac{1}{1-z}}=e\left(1+z+\frac{3}{2!}z^2+\frac{13}{3!}z^3+\cdots\right)\quad(|z|<1).$$ ■

用微分方程来求各阶导数的方法

需了解

例 4.3.16 设 $t(-1\leqslant t\leqslant 1)$ 是参数，求函数

$$f(z)=\frac{4-z^2}{4-4zt+z^2}$$

在 $z=0$ 的泰勒展式.

把三角写成 $e^{i\alpha}$ 的形式

可能会更有利于后面化简

分析 令 $t=\cos\varphi$，并将 $f(z)$ 展为最简分式.

解 由分析，

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{4-z^2}{4-4z\cos\varphi+z^2}\\&=-1+\frac{1}{1-\frac{z}{2}e^{-i\varphi}}+\frac{1}{1-\frac{z}{2}e^{i\varphi}}\\&=-1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n e^{-in\varphi}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n e^{in\varphi}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{2^{n-1}}z^n\\&=-1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(n\arccos t)}{2^{n-1}}z^n,\quad |z|<2.\end{aligned}$$

例 4.3.18 若 $1+w=(1-a)e^a$，且 $|a|<1$，则

$$|w|\leqslant\frac{|a|^2}{1-|a|}.$$

级数放缩成等比数列求和

从 $\frac{|a|^2}{1-|a|}$ 的形式，很容易联想到等比数列，

进一步联想到级数展开

证 因为

$$\begin{aligned}(1-a)e^a&=(1-a)\left(1+a+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}+\cdots\right)\\&=1+a+\frac{1}{2!}a^2+\cdots+\frac{a^n}{n!}+\cdots-a-a^2-\cdots-\frac{a^n}{(n-1)!}-\cdots\\&=1-\frac{a^2}{2}-\cdots-\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{a^n}{(n-1)!}-\cdots\quad(|a|<1),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}|(1-a)e^a-1|=|w|&\leqslant\frac{|a|^2}{2}+\cdots+\frac{n-1}{n!}|a|^n+\cdots\\&\leqslant|a|^2+|a|^3+\cdots+|a|^n+\cdots\\&=\frac{|a|^2}{1-|a|}.\end{aligned}$$

例 4.3.21 若 $f(z)$ 为整函数，且

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{M(r)}{r^n}<+\infty \quad \left(M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|\right),$$

则 $f(z)$ 是不高于 n 次的多项式.

分析 因 $f(z)$ 为整函数，则其可展成 z 的幂级数，收敛半径 $R=+\infty$.

证 因

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k, \quad |z|<+\infty,$$

其系数的柯西不等式为

$$|c_k|\leqslant\frac{M(r)}{r^k} \quad (k=0,1,2,\cdots).$$

当 $k\geqslant n+1$ 时，令 $k=n+p\ (p\geqslant 1)$，则

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{M(r)}{r^k}=\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{r^p}\cdot\frac{M(r)}{r^n}=0 \quad (k\geqslant n+1).$$

所以，当 $k\geqslant n+1$ 时，$c_k=0$. 故 $f(z)$ 是不高于 n 次的多项式.

4. 设 $f(z)=\sum_{n=0}a_n z^n\ (a_0\neq 0)$ 的收敛半径 $R>0$，且

$$M=\max_{|z|\leqslant\rho}|f(z)| \quad (\rho<R).$$

试证在圆

$$|z|<\frac{|a_0|}{|a_0|+M}\rho$$

内 $f(z)$ 无零点.

利用 $|a_n|\leqslant\frac{M}{\rho^n}$ 易证

例 4.4.12 若 $\varphi(r)>0$ 在 $0\leqslant r<1$ 内为增函数，$f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，$f(0)=0$，$|f(z)|\leqslant\varphi(|z|)$，则

$$|f(z)|\leqslant k|z|\varphi(|z|),$$

其中 k 可以取为 $k=2\dfrac{\varphi\left(\frac{1}{2}\right)}{\varphi(0)}\ (\geqslant 2)$.

证 (1) 因 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $f(0)=0$，故由泰勒定理，

$$\frac{f(z)}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^{n-1} \quad (0<|z|<1),$$

即 $\dfrac{f(z)}{z}$ 在 $|z|<1$ 内解析（$z=0$ 为其可去奇点）.

① 引入辅助函数 $\frac{f(z)}{z}$

利用 $f(0)=0$ 证明其解析

(2) 由题设，$\varphi(|z|)$ 在 $|z|<1$ 内是 $|z|$ 的增函数. 再由最大模原理知，当 $|z|\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right|\leqslant\max_{|z|=\frac{1}{2}}\left|\frac{f(z)}{z}\right|=2\max_{|z|=\frac{1}{2}}|f(z)|\overset{(\text{题设})}{\leqslant}2\varphi(|z|)$$

$$\leqslant 2\varphi(|z|)\frac{\varphi\left(\frac{1}{2}\right)}{\varphi(0)} \quad \left(\text{由题设 }\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\geqslant\varphi(0)\right),$$

② 对 $\left|\frac{f(z)}{z}\right|$ 利用最大模原理 故需引

边界上

即

$$|f(z)|\leqslant 2\frac{\varphi\left(\frac{1}{2}\right)}{\varphi(0)}|z|\varphi(|z|)=k|z|\varphi(|z|),$$

这里 $k=2\dfrac{\varphi\left(\frac{1}{2}\right)}{\varphi(0)}\geqslant 2$.

(3) 当 $1>|z|>\dfrac{1}{2}$ 时，$2|z|>1$，

$$|f(z)|\overset{(\text{题设})}{\leqslant}\varphi(|z|)<2|z|\varphi(|z|)\overset{(2)}{\leqslant}k|z|\varphi(|z|).$$

合并(2)和(3)即得：当 $0\leqslant|z|<1$ 时，

$$|f(z)|\leqslant k|z|\varphi(|z|),$$

其中 $k=2\dfrac{\varphi\left(\frac{1}{2}\right)}{\varphi(0)}\geqslant 2$.

例 5.2.4 试求出 $f(z)=\cot\frac{1}{z}$ 的全部有限奇点，并确定其类型.

解 因为

$$\cot\frac{1}{z}=\frac{\cos\frac{1}{z}}{\sin\frac{1}{z}},$$

所以 $f(z)=\cot\frac{1}{z}$ 的全部奇点只能出自于使 $\frac{1}{z}$ 无意义，及使 $\sin\frac{1}{z}=0$ 的点. 因为 $z_0=0$ 使 $\frac{1}{z}$ 无意义；$z_k=\frac{1}{k\pi}$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 使 $\sin\frac{1}{z}=0$，所以 $z_0=0$ 及 $z_k=\frac{1}{k\pi}$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为 $f(z)$ 的全部有限奇点. 又因为

$$\cos\frac{1}{z}\Big|_{z=z_k}\neq0,\quad \sin\frac{1}{z}\Big|_{z=z_k}=0,\quad 而\left(\sin\frac{1}{z}\right)'\Big|_{z=z_k}\neq0,$$

所以 $z_k=\frac{1}{k\pi}$ 为 $f(z)=\cot\frac{1}{z}$ 的一阶极点. 又因为

$$\lim_{k\to\infty}z_k=0=z_0,$$

所以 $z_0=0$ 不是 $f(z)$ 的孤立奇点，而是 $f(z)$ 的非孤立奇点，或者说 $z_0=0$ 为 $f(z)$ 的诸极点的聚点. ■

判断奇点类型时注意一下聚点

以及对 e^z，$\sin z$，$\cos z$ 往往有多个奇点，不要遗漏

求出下列函数的奇点，并确定它们的类别

(7) $f(z)=\frac{1}{\sin z-\sin a}$ (a 为常数).

注意分类讨论

(7) 因为 $\sin z-\sin a$ 仅以 $k\pi+(-1)^k a$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为孤立零点，又因为

$$(\sin z-\sin a)'\big|_{z=k\pi+(-1)^k a}=\cos[k\pi+(-1)^k a]=(-1)^k\cos a,$$

$$(\sin z-\sin a)''\big|_{z=k\pi+(-1)^k a}=-\sin[k\pi+(-1)^k a]=-\sin a,$$

所以，当 $\cos a\neq0$ 时，$k\pi+(-1)^k a$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 各为 $\frac{1}{\sin z-\sin a}$ 的一阶极点；当 $\cos a=0$ 时，必然 $\sin a\neq0$，因而 $k\pi+(-1)^k a$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 各为 $\frac{1}{\sin z-\cos a}$ 的二阶极点.

3. 设 λ 为复数，试证

$$e^{\frac{1}{2}\lambda\left(z+\frac{1}{z}\right)}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z^n+z^{-n}),\quad 0<|z|<+\infty,$$

$$e^{\frac{1}{2}\lambda\left(z-\frac{1}{z}\right)}=b_0+\sum_{n=1}^{\infty}b_n[z^n+(-1)^n z^{-n}],\quad 0<|z|<+\infty,$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{\lambda\cos\theta}\cos n\theta\,d\theta\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta-\lambda\sin\theta)\,d\theta\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

知识点

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

$f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上除 $z=1$ 为二阶极点外解析，且满足 $\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z+2023}=1$

$f(0)=0$　$f(-1)=-\frac{5}{4}$　$f(2)=4$　求 $f(z)$

关键在于得到一个合适的级数展开形式

$$f(z)=\frac{a_{-1}}{(z-1)^2}+\frac{a_{-1}}{z-1}+a_0+a_1z+\cdots$$

由 $\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z+2023}=1$ $\Rightarrow$ $a_1=1$，$a_2=a_3=\cdots=0$

又 $f(0)=0$

$f(-1)=-\frac{5}{4}$ $\Rightarrow$ $f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{z-1}+z$

$f(2)=4$

10. 设幂级数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 所表示的和函数 $f(z)$ 在其收敛圆周上只有惟一的一阶极点 z_0，试证 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\to z_0$，因而 $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|\to|z_0|$（$|z_0|=r$ 是收敛半径）.

要善于先猜测展开式的形式

（换了展开区域）

分析 由于 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点，故在 z_0 的去心邻域内有洛朗展式 $f(z)=\dfrac{c_{-1}}{z-z_0}+g(z)$，其中 $g(z)$ 为正则部分，于是

$$f(z)-\frac{c_{-1}}{z-z_0}(=g(z))$$

在点 z_0 解析，因此在半径 $R>r=|z_0|$ 的圆 $|z|<R$ 内也解析.

证 由泰勒定理，我们设

$$f(z)-\frac{c_{-1}}{z-z_0}=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n\quad(|z|<R).\tag{1}$$

它在 z_0 也收敛，于是通项

$$b_nz_0^n\to 0\quad(n\to\infty).\tag{2}$$

收敛要求 $b_n\to 0$

因为

$$\frac{c_{-1}}{z-z_0}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{c_{-1}}{z_0^{n+1}}\right)z^n\quad(|z|<|z_0|=r),\tag{3}$$

又由题设

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\quad(|z|<r),\tag{4}$$

所以

$$f(z)-\frac{c_{-1}}{z-z_0}\xlongequal{(3)(4)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n+\frac{c_{-1}}{z_0^{n+1}}\right)z^n\quad(|z|<r).\tag{5}$$

由(1)式和(5)式，

$$b_n=a_n+\frac{c_{-1}}{z_0^{n+1}},\tag{6}$$

再由(2)式和(6)式即可得证.

16. 若 $f(z)$ 在圆 $|z|<R$ 内解析，$f(0)=0$，$|f(z)|\leqslant M<+\infty$，试证

施瓦茨引理

(1) $|f(z)|\leqslant\dfrac{M}{R}|z|$，$|z|<R$，且有 $|f'(0)|\leqslant\dfrac{M}{R}$；

(2) 若在圆内有一点 $z(0<|z|<R)$ 使 $|f(z)|=\dfrac{M}{R}|z|$，就有

$$f(z)=\frac{M}{R}e^{i\alpha}z\quad(\alpha\text{ 为实数},|z|<R).$$

假想前面某题

$\left|\dfrac{f(z)}{z}\right|$ 放至边界处

证 令 z 是圆 $|z|<R$ 内任一点，r 满足 $|z|<r<R$，由最大模原理知 $|\varphi(z)|\leqslant\max\limits_{|\zeta|=r}|\varphi(\zeta)|$（$|z|<r<R$），即 $|\varphi(z)|\leqslant\max\limits_{|\zeta|=r}\left|\dfrac{f(\zeta)}{\zeta}\right|=\dfrac{M}{r}$. 令 $r\to R$，则

$$|\varphi(z)|=\left|\frac{f(z)}{z}\right|\leqslant\frac{M}{R}.\tag{1}$$

特别地，

$$|\varphi(0)|=|f'(0)|\leqslant\frac{M}{R},$$

即

$$|f(z)|\overset{(1)}{\leqslant}\frac{M}{R}|z|\quad(|z|<R).$$

若圆 $|z|<R$ 内有一点 z，使

$$|f(z)|=\frac{M}{R}|z|\quad(0<|z|<R),$$

即 $|\varphi(z)|=\left|\dfrac{f(z)}{z}\right|=\dfrac{M}{R}$，这说明在(1)式中，等号在圆 $|z|<R$ 内某一点达到. 由最大模原理知 $|\varphi(z)|=|c|=\dfrac{M}{R}$. 所以 $f(z)=\dfrac{M}{R}e^{i\alpha}z$（$\alpha$ 为实数）.

注 我们保留本题假设条件不变，如果 $z=0$ 是 $f(z)$ 的 λ 阶零点，则

$$|f(z)|\leqslant\frac{M}{R^{\lambda}}|z|^{\lambda}(|z|<R),\quad\left|\frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!}\right|\leqslant\frac{M}{R^{\lambda}}.$$

如果这些关系中，有一个取等号，这只有

$$f(z)=\frac{M}{R^{\lambda}}e^{i\alpha}z^{\lambda}\quad(\alpha\text{ 为实数},|z|<R).$$

19. 设函数 $f(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内全纯，且 $f(0)=0$, $\operatorname{Re} f(z) \leqslant A\ (A>0)$，则

$$|f(z)| \leqslant \frac{2A|z|}{1-|z|}.$$

构造函数 $g(z) = \frac{f(z)}{(f(z)-2A)\cdot z}$

由 $f(0)=0$，$\operatorname{Re} f(z) \leq A$ 和 $g(z)$ 在 $|z|<1$ 内全纯

由最大模原理，$|g(z)| \leq |g(z_0)|$ $|z_0|=1$ $|z|<1$

$g(z) \leq 1 \Leftrightarrow |f(z)| \leq \frac{2A|z|}{1-|z|}$

21. (1) 若 $f(z)$ 在 $|z| \leqslant r$ 上全纯，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 为其在 $z=0$ 处的 Taylor 展开，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

(2) 若(1) 中的 $r=1$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} = \frac{1}{\pi}\iint_D |f(z)|^2 dA,$$

这里，D 为单位圆 $|z| \leqslant 1$，dA 为面积元素.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{i\theta})^n \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n (re^{i(-\theta)})^n \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \, d\theta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

留数及其应用

☆☆ **例 6.3.6** 试确定方程 $z^4-5z+1=0$ 在圆 $|z|<1$ 内以及在圆环 $1<|z|<2$ 内根的个数.

还要考虑 $|z|=1$

解 由教材例 6.23(定理*)知,已给方程在 $|z|<1$ 内有且仅有一个根.

因在圆周 $|z|=2$ 上,

$$|1-5z|\leqslant 1+5|z|=1+10=11<16$$
$$=2^4=|z|^4=|z^4|,$$

由鲁歇定理,已给方程的四个根全在圆 $|z|<2$ 内. 但当 $|z|=1$ 时,

$$|z^4-5z|=|z||z^3-5|\leqslant |z|(|z|^3+5)=6,$$
$$|z^4-5z+1|\geqslant 5|z|-|z^4|-1=3>0,$$

所以在圆周 $|z|=1$ 上,$z^4-5z+1=0$ 无根. 于是在圆环 $1<|z|<2$ 内,方程 $z^4-5z+1=0$ 有三个根 在这一步同样考虑 ■

☆☆☆ **例 6.3.8** 试证明:对任给的正数 r,恒存在自然数 N,当 $n>N$ 时,

$$F_n(z)=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}$$

的零点全位于 $|z|\leqslant r$ 上.

证 为此,记 $m=\min\limits_{|\zeta|=\frac{1}{r}}|e^{\zeta}|$,$m>0$. 由于 $f_n(\zeta)$ 在 $|\zeta|=\frac{1}{r}$ 上一致收敛于 e^{ζ},所以必存在 N,当 $n>N$ 时,

利用 $f(z)\to e^z$

$$|f_n(\zeta)-e^{\zeta}|<m\leqslant|e^{\zeta}|\quad(\text{在 } |\zeta|=\frac{1}{r}\text{ 上}).$$

这倍鲁歇定理 g(x) 而是取常来了新思路

按鲁歇定理,e^{ζ} 与 $[f_n(\zeta)-e^{\zeta}]+e^{\zeta}=f_n(\zeta)$ 在 $|\zeta|<\frac{1}{r}$ 内零点个数相等. 但 e^{ζ} 在 **C** 上不等于 0,因此 $f_n(\zeta)(n>N)$ 在 $|\zeta|<\frac{1}{r}$ 内无零点.

☆☆ $\displaystyle\int_0^{\pi}\tan(\theta+ia)d\theta\quad(a\text{ 为实数且 }a\neq 0).$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\tan(\theta+ia)\,d\theta$$

换元 $z=e^{i(\theta+ia)}$

$\underline{\underline{z=e^{i(\theta+ia)}}}$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{|z|=e^{-a}}\frac{z+\frac{1}{z}}{\frac{z-\frac{1}{z}}{i}}\frac{dz}{iz}$

$$=\frac{1}{2}\int_{|z|=e^{-a}}\frac{z^2+1}{z(z^2-1)}dz$$

$$=\begin{cases}\pi i & a<0\\ -\pi i & a>0\end{cases}$$

☆☆☆ ~~7.~~ 设函数 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant r$ 上解析,在 $|z|=r$ 上 $f(z)\neq 0$. 试证在 $|z|=r$ 上,$\mathrm{Re}\left[z\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right]$ 的最大值至少等于 $f(z)$ 在 $|z|<r$ 内的零点个数.

证 由定理 6.9 的公式(6.26),

$$N(f(z),C)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=r}\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

$$N(f(z),C)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C:|z|=r}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

注意到上式左边为实数,再令 $z=re^{i\theta}$,并取右边实部,即可得证.

求 $\mathrm{Res}(z^{2016}\sin(z-\frac{1}{z}),0)$

☆求 $\displaystyle\int_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{z^5 \cos z}$

将 $\frac{1}{\cos z}$ 展开，利用待定系数法

☆☆☆ $n \in \mathbb{N}$ $a_1, \cdots, a_n$ $b \in \mathbb{C}$ $|a_k|<1$ $k=1,\cdots,n$ $f(z)=\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{z-a_k}{1-\bar{a}_k z}$

证明 (1) $|b|<1$，则 $f(z)=b$ 在 $|z|<1$ 内恰有 n 个根

(2) $|b|>1$，— — — 、 $|z|>1$ — — — — .

Pf $\arg f(z) = \arg \frac{z-a_1}{1-\bar{a}_1 z} + \cdots + \arg \frac{z-a_n}{1-\bar{a}_n z}$

$|z|=1$ 转一圈 $\Rightarrow$ $\Delta \arg f(z) = 2n\pi$ 结 $|f(z)|=1$

$\Rightarrow \Delta \arg (f(z)-b) = \begin{cases} 2n\pi & |b|<1 \\ 0 & |b|>1 \end{cases}$

☆☆ $\displaystyle\int_{|z-4|=2} \frac{e^z}{|z|^2} |dz|$

$\displaystyle\int_{|z-4|=2} \frac{e^z}{|z|^2} |dz| \overset{z=4+2e^{i\theta}}{=\!=} \int_0^{2\pi} \frac{e^{4+2(\cos\theta+i\sin\theta)}}{(4+2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2} 2d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2e^4 e^{2(\cos\theta+i\sin\theta)}}{10+8\cos\theta} d\theta$

$\overset{z=e^{i\theta}}{=\!=} \frac{2e^4}{i} \displaystyle\int \frac{e^{2z}}{4z^2+10z+4} dz$

下略

☆☆☆ f 在 $|z|\le r$ 上解析， 且 $|z|=r$ 上 $f(z)\neq 0$

证明 f 在 $|z|<r$ 内零点个数 $N \le \max\limits_{|z|=r} \mathrm{Re}\left(z \frac{f'(z)}{f(z)}\right)$

Pf： $N = \frac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \overset{z=re^{i\theta}}{=\!=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} re^{i\theta} d\theta$

令 $z=re^{i\theta}$ 之后
分子 表出了一个 z

$= \frac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} z\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(z \frac{f'(z)}{f(z)}\right) d\theta$

$\le \max\limits_{|z|=r} \mathrm{Re}\left(z \frac{f'(z)}{f(z)}\right)$

☆ 求 $\mathrm{Res}\left(\frac{e^{z^2}}{(z-1)^2}, 1\right)$

$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{z^2}}{(z-1)^2}, 1\right) = \frac{1}{1!}\left(e^{z^2}\right)'\Big|_{z=1} = 2ze^{z^2}\Big|_{z=1} = 2e$

$\mathrm{Res}(f(z), a) = \frac{1}{(m-1)!}\left((z-a)^m f(z)\right)^{(m-1)}$

记一记

记不住 现场推一推，不要猜

求 $\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^3-z^5}, 1\right)$

错解 $\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^3-z^5}, 1\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\frac{1}{z^3(1+z)}}{\underline{\underline{1-z}}}\,dz = \frac{1}{2}$

注意符号

正解 $-\frac{1}{2}$

求 $\frac{\sqrt{z}}{\sinh\sqrt{z}}$ 在奇点处的留数.

证明. Let $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{\sinh\sqrt{z}}$. Then $\sinh\sqrt{z} = 0$ if and only if $z = -(n\pi)^2$ $(n \in \mathbb{Z})$. Let $z_n = -(n\pi)^2$. Then $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ are singularities of $f(z)$. For $n = 0$, $z_0 = 0$ is a removable singularity since

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{z}}{\sinh\sqrt{z}} = \frac{1}{\cosh 0} = 1.$$

Therefore $\mathrm{Res}(f, 0) = 0$. For $n \neq 0$, we have (suppose $\rho > 0$ is sufficiently small)

$$\mathrm{Res}(f, z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_n|=\rho}\frac{1}{z-z_n}\cdot\frac{\sqrt{z}(\sqrt{z}-\sqrt{z_n})(\sqrt{z}+\sqrt{z_n})}{\sinh\sqrt{z}-\sinh\sqrt{z_n}}dz = \frac{\sqrt{z_n}(\sqrt{z_n}+\sqrt{z_n})}{\cosh\sqrt{z_n}} = 2z_n = -2(n\pi)^2.$$

对 sinh cosh 处理就如同 sin cos

无需写成 $f(e^x)$ 的形式

反而麻烦.

* 求函数在 ∞ 的留数

定义 $\mathrm{Res}(f(z), \infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\,dz = -a_{-1}$

$\mathrm{Res}(f, z_1) + \mathrm{Res}(f, z_2) + \cdots + \mathrm{Res}(f, z_n) + \mathrm{Res}(f, \infty) = 0$

$\mathrm{Res}(f, \infty) = -\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$

保形变换

三个典例

例 7.5 把上半 z 平面共形映射成上半 w 平面的分式线性变换为

$$w=\frac{az+b}{cz+d}, \tag{7.12}$$

其中 a,b,c,d 是实数，且 $ad-bc>0$.

注 线性变换(7.12)同时把 z 平面上的实轴变成 w 平面上的实轴，且把下半 z 平面共形映射成下半 w 平面.

例 7.6 把上半 z 平面 $\operatorname{Im} z>0$ 共形映射成单位圆 $|w|<1$，并使一点 $z=a(\operatorname{Im} a>0)$ 变为 $w=0$ 的分式线性变换为

$$w=k\frac{z-a}{z-\overline{a}} \quad (\text{复数 } k \text{ 待定}, |k|=1). \tag{7.13$'$}$$

或

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\frac{z-a}{z-\overline{a}} \quad (\text{实参数 } \beta \text{ 待定}). \tag{7.13}$$

注 (1) 确定变换(7.13)$'$中的 k 只需再给一对边界对应点.

(2) 确定变换(7.13)中的 β，只需再给一对边界对应点或指定在 $z=a$ 处的旋转角 $\arg w'(a)$，这里

$$\arg w'(a)=\beta-\frac{\pi}{2}.$$

例 7.7 把单位圆 $|z|<1$ 共形映射成单位圆 $|w|<1$，并使一点 $z=a(|a|<1)$ 变为 $w=0$ 的分式线性变换为

$$w=k\frac{z-a}{z-\dfrac{1}{\overline{a}}} \quad (\text{复数 } k \text{ 待定}), \tag{7.14$'$}$$

或

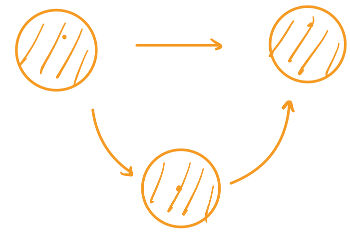
$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \quad (\text{实参数 } \beta \text{ 待定}). \tag{7.14}$$

注 (1) 确定变换(7.14)$'$中的 k，只需再给一对边界对应点.

(2) 确定变换(7.14)中的 β，只需再给一对边界对应点或指定在 $z=a$ 处的旋转角 $\arg w'(a)$，这里

$$\arg w'(a)=\beta.$$

例 7.2.10 求分式线性变换 $w=L(z)$，它将 $|z|<1$ 共形映射成 $|w|<1$，且满足条件：$L\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\mathrm{i}}{2}$，$L'\left(\frac{1}{2}\right)>0$.



导数也容易确定

解 如图 7.2.3 所示，在 z 平面与 w 平面之间插入 ζ 平面，使分式线性变换 $\zeta=L_1(z)$ 及 $\zeta=L_2(w)$ 分别满足条件

$$L_1\left(\frac{1}{2}\right)=0,\quad L_1'\left(\frac{1}{2}\right)>0,$$

及

$$L_2\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)=0,\quad L_2'\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)>0.$$

由条件 $L_1\left(\frac{1}{2}\right)=0$，直接由公式(7.14)得到 $\zeta=L_1(z)$ 具有形式

$$\zeta=L_1(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}\quad(\beta\text{ 为实参数}).$$

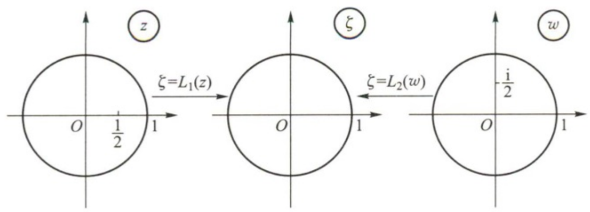


图 7.2.3

又由条件 $L_1'\left(\frac{1}{2}\right)>0$，即 $\beta=\arg L_1'\left(\frac{1}{2}\right)=0$. 故

$$\zeta=L_1(z)=\frac{2z-1}{2-z}.\tag{1}$$

同理

$$\zeta=L_2(w)=\frac{w-\frac{\mathrm{i}}{2}}{1+\frac{\mathrm{i}}{2}w}=\frac{2w-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}w}.\tag{2}$$

设 $\zeta=L_2(w)$ 的逆变换为 $w=L_2^{-1}(\zeta)$，则分式线性变换

$$w=L_2^{-1}(L_1(z))\tag{3}$$

就能满足全部要求了. 事实上，由于 $\zeta=L_1(z)$ 将 $|z|<1$ 共形映射成 $|\zeta|<1$，而 $w=L_2^{-1}(\zeta)$ 又将 $|\zeta|<1$ 共形映射成 $|w|<1$，因此分式线性变换(3)将 $|z|<1$ 共形映射成 $|w|<1$. 此外，有

$$L_2^{-1}\left(L_1\left(\frac{1}{2}\right)\right)=L_2^{-1}(0)=\frac{\mathrm{i}}{2},$$

及

$$\begin{aligned}(L_2^{-1}(L_1(z)))\big|'_{z=\frac{1}{2}}&=L_2^{-1\prime}\left(L_1\left(\frac{1}{2}\right)\right)L_1'\left(\frac{1}{2}\right)\\&=L_2^{-1\prime}(0)L_1'\left(\frac{1}{2}\right)\xlongequal{\text{定理 7.6}}\frac{1}{L_2'\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)}\cdot L_1'\left(\frac{1}{2}\right)>0.\end{aligned}$$

因此分式线性变换(3)满足全部条件.

为了求出 $w=L_2^{-1}(L_1(z))=L(z)$，有

$$L_2(w)=L_1(z).\tag{4}$$

将(1)式、(2)式代入(4)式，

$$\frac{2w-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}w}=\frac{2z-1}{2-z},$$

由此解出

$$w=\frac{2(\mathrm{i}-1)+(4-\mathrm{i})z}{(4+\mathrm{i})-2(1+\mathrm{i})z}\qquad\blacksquare$$

即为所求的线性变换.

例 7.2.11 求上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 到上半平面 $\operatorname{Im} w>0$ 的共形映射 $w=L(z)$，使满足条件

$$L(a)=b,\ \arg L'(a)=\alpha \quad (\operatorname{Im} a>0, \operatorname{Im} b>0).$$

分析 同上题，我们在 z 平面与 w 平面之间插入一个“中间”平面——ζ 平面（图 7.2.4），以寻找变换关系.

解 由公式(7.13)，

$$\zeta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_1}\frac{z-a}{z-\bar{a}} \tag{1}$$

满足条件 $\zeta(a)=0$，且设满足条件 $\arg\zeta'(a)=\alpha$；

$$\zeta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_2}\frac{w-b}{w-\bar{b}} \tag{2}$$

满足条件 $\zeta(b)=0$，且设满足条件 $\arg\zeta'(b)=0$.

由(1)式与(2)式，得 z,w 间的关系是

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_2}\frac{w-b}{w-\bar{b}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_1}\frac{z-a}{z-\bar{a}}. \tag{3}$$

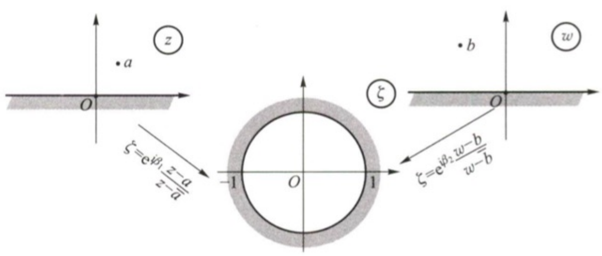


图 7.2.4

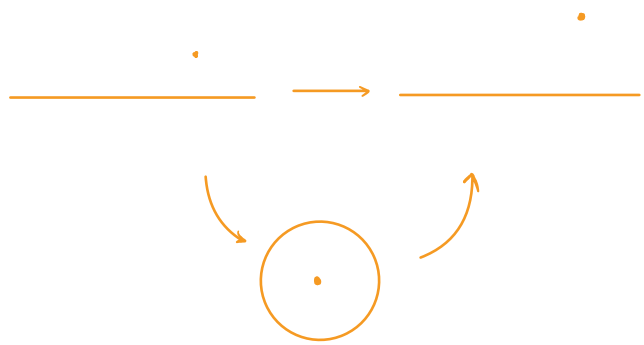
由前设条件，

$$\alpha=\arg\zeta'(a)=\beta_1-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\beta_1=\frac{\pi}{2}+\alpha, \tag{4}$$

$$0=\arg\zeta'(b)=\beta_2-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\beta_2=\frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

将(4)式、(5)式代入(3)式，便得所求的(分式线性)变换为

$$\frac{w-b}{w-\bar{b}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\frac{z-a}{z-\bar{a}}.$$ ■



例 7.3.5 求把具有割痕：$-\infty<\operatorname{Re}(z)\leqslant a$，$\operatorname{Im} z=H$ 的带形区域 $0<\operatorname{Im} z<2H$ 变成带形区域 $0<\operatorname{Im} w<2H$ 的一个共形映射.

关于割痕的处理

分析 首先要经伸缩变换将已给的带形区域共形映射成标准带形，再经指数变换将其共形映射成上半平面(图 7.3.4). 在这样的变换过程中割线的位置长短也会随之变化.

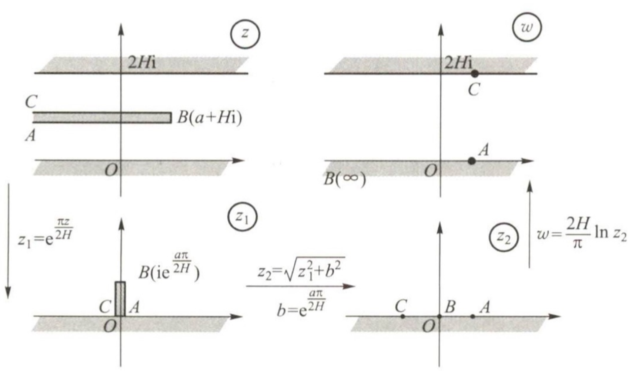


图 7.3.4

例 7.3.9 求把区域 $D:(|z|>1)\cap(|z-\sqrt{3}\mathrm{i}|<2)$ 共形映射成单位圆 $|w|<1$ 的函数 $w=f(z)$，使满足条件

$$f(\sqrt{3}\mathrm{i})=0,\quad f'(\sqrt{3}\mathrm{i})>0.$$

分析 D 为两角形，其边界为两段圆弧 L_1, L_2（图 7.3.9），交点为 ±1. 所给条件是惟一性条件.

解 函数

$$w_1=f_1(z)=\frac{z-1}{z+1}\tag{1}$$

将 L_1 上的点 $-1, \mathrm{i}, 1$ 分别变为

$$f_1(-1)=\infty,\quad f_1(\mathrm{i})=\mathrm{i},\quad f_1(1)=0.$$

由此可知 L_1 的像 $C_1=f_1(L_1)$ 是由 $w_1=0$ 出发经 $w_1=\mathrm{i}$ 的射线，即上半虚轴；L_2 的像 $C_2=f_1(L_2)$ 显然也是由 $w_1=0$ 出发的射线，由于在 $z=1$ 处 L_1 到 L_2 的转角为 $-\dfrac{\pi}{3}$，因而由(1)式的保角性可知由 C_1 绕 $w_1=0$ 转动 $-\dfrac{\pi}{3}$ 即得 C_2（图 7.3.9）. 转动时所扫过的角形区域即为 D 的像 G_1，此时

$$f_1(\sqrt{3}\mathrm{i})=\frac{\sqrt{3}\mathrm{i}-1}{\sqrt{3}\mathrm{i}+1}=\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\in G_1.$$

再作函数

$$w_2=f_2(w_1)=(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}w_1)^3=-\mathrm{i}w_1^3.\tag{2}$$

它把 G_1 共形映射成上半平面 $G_2:\operatorname{Im} w_2>0$，且

$$f_2\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)=\mathrm{i}\in G_2\quad(图\ 7.3.9).$$

最后作

$$w=f_3(w_2)\xlongequal{(7.13)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\frac{w_2-\mathrm{i}}{w_2+\mathrm{i}}\tag{3}$$

把上半 w_2 平面 G_2 共形映射成单位圆 $G:|w|<1$，且将 i 变为 $w=0\in G$（图 7.3.9）.

复合函数(1)—(3)，得

$$w=f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\frac{-\mathrm{i}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3+\mathrm{i}}=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\frac{z^3+3z}{3z^2+1},$$

此函数将 D 共形映射成 G，且满足 $f(\sqrt{3}\mathrm{i})=0$. 为使

$$f'(\sqrt{3}\mathrm{i})=-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}>0,$$

应取 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}=-1$. 故所求函数为

在最后一步，利用此例定出β，使满足对 f'(√3i)>0 的要求

$$w=f(z)=\frac{z^3+3z}{3z^2+1},$$

且该函数是惟一确定的.

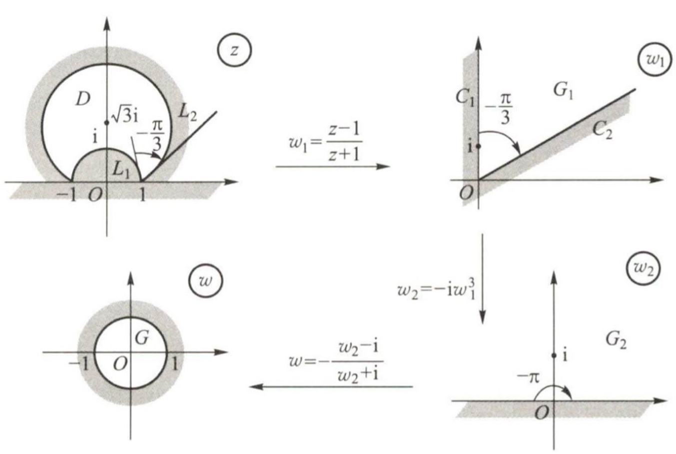


图 7.3.9

例 7.4.1 设 D 是一个非全平面的单连通区域(即扩充 z 平面上边界不止一点的单连通区域), $z_0 \in D$. 单叶解析函数 $w=f(z)$ 把 D 共形映射成单位圆 $|w|<1$, 且满足条件 $f(z_0)=0, f'(z_0)>0$; 又单叶解析函数 $w=F(z)$ 把 D 共形映射成以 w_0 为圆心的圆 K: $|w-w_0|<r$, 且 $F(z_0)=w_0, F'(z_0)=1$. 试求圆 K 的半径 r.

分析 不妨认为 $w_0=0$, 否则考虑函数 $F(z)-w_0$ 即可(这时 $F(z_0)-w_0=0$). 设函数 $g(z)=\dfrac{F(z)}{r}$, 则单叶解析函数 $w=g(z)$ 也将 D 共形映射成单位圆 $|w|<1$.

解 由条件 $F(z_0)=0, F'(z_0)=1$ 可知

$$g(z_0)=0, \quad g'(z_0)=\frac{1}{r}F'(z_0)=\frac{1}{r}>0,$$

利用黎曼惟一性定理

但 $w=f(z)$ 也满足这样的条件, 故由共形映射的黎曼惟一性定理知, $g(z)\equiv f(z)$ $(z\in D)$. 于是

$$r=\frac{1}{g'(z_0)}=\frac{1}{f'(z_0)}.$$

■