

中国科学技术大学2024-2025学年第一学期  
《数学分析B1》期末考试试卷(A卷)

考试时间 2025.01.15      考试形式 闭卷

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
满分	16	24	10	10	10	10	12	8	100
得分									

一. (16分, 每小题8分) 求极限:

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x} \sin^2 x} \int_0^{\sqrt{x}} \tan t^4 dt;$

解

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x} \sin^2 x} \int_0^{\sqrt{x}} \tan t^4 dt &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{5/2}} \int_0^{\sqrt{x}} \tan t^4 dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \tan x^2}{\frac{5}{2}x^{3/2}} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

**点评:** 本题没有什么技巧, 就是用L'Hospital 法则求函数极限, 只不过分子是变上限积分与 $\sqrt{x}$  的复合函数. 过程中若能采用无穷小替换, 则可简化求极限过程.

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left( 1 + \frac{k^2}{n^2} \right).$

解

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \ln \left( 1 + \frac{k^2}{n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \left( 1 + \frac{k^2}{n^2} \right) \\ &= \int_0^1 x \ln(1 + x^2) dx = \ln 2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**点评:** 本题核心是看出求和是 $x \ln(1 + x^2)$  的Riemann和, 因此极限就是该函数的积分.

学号:

姓名:

学生所在院系:

装订线 答题时不要超过此线

二. (24分, 每小题 6 分) 计算积分

$$(1) \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx;$$

解 分部积分

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx &= -e^{-x} \sin x \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x \, dx \\ &= -e^{-x} \cos x \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx = \frac{1}{2}$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

解 考虑对称性并作变换  $x = \tan t$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) \, dt = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

**点评:** 本题首先利用对称性, 再作积分变换. 大凡积分时首先观察对称性、奇偶性以简化积分.

$$(3) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \cos x}{e^x + 1} dx$$

解 利用对称性

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \cos x}{e^x + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \cos x}{e^x + 1} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x} \cos x}{e^{-x} + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 1.$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2025})}$$

解 将  $[0, +\infty)$  分解为  $[0, 1]$  和  $[1, +\infty)$  并对在  $[1, +\infty)$  上积分换元  $x = \frac{1}{t}$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2025})} &= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2025})} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2025})} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2025})} + \int_0^1 \frac{t^{2025}}{(1+t^2)(1+t^{2025})} dt \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

**点评:** 本题首先将积分区间分开, 对其中一个做变换, 使得两个积分区间一致, 虽然是广义积分, 但是积分的性质与常义积分是一样的, 只要广义积分收敛. 利用分拆区间, 分别作变换或分别作积分是一种常规方法.

三. (10分) 求解方程  $y'' - 2y' - 3y = -10 \cos x$  满足初值条件  $y(0) = 0, y'(0) = 1$  的特解.

解 齐次方程  $y'' - 2y' - 3y = 0$  的特征方程为  $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ , 因此齐次方程基本解组为  $e^{3x}, e^{-x}$ .

为求方程特解, 令  $y_0(x) = a \sin x + b \cos x$ , 其中  $a, b$  待定. 代入方程并比较  $\sin x, \cos x$  前系数得  $a = 1, b = 2$ . 因此方程的通解为

$$y(x) = \sin x + 2 \cos x + C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x},$$

由

$$y(0) = 2 + C_1 + C_2 = 0, \quad y'(0) = 1 + 3C_1 - C_2 = 1$$

解得  $C_1 = -\frac{1}{2}, C_2 = -\frac{3}{2}$ , 所以满足初始条件的解为

$$y(x) = \sin x + 2 \cos x - \frac{1}{2} e^{3x} - \frac{3}{2} e^{-x},$$

**点评:** 本题的关键是求非齐次的特解, 求该特解的方法是待定系数法. 最后写出非齐次通解, 代入初始条件, 确定通解中的常数.

四. (10分) 设  $f(x) = \ln^2(1+x)$ , 求  $f^{(n)}(0)$  ( $n \geq 0$ ).

解 (1)  $f'(x) = 2 \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ , 分别将  $\ln(1+x), \frac{1}{1+x}$  在  $x=0$  展开并相乘得

$$f'(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n,$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

$$c_n = 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} (-1)^{n-k} = 2(-1)^{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

因此  $f(0) = 0, f'(0) = 0$ ,

$$f^{(n)}(0) = (n-1)! c_{n-1} = 2(n-1)! (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}, \quad (n > 1).$$

**点评:** 也可以对  $(1+x)f'(x) = 2 \ln(1+x)$  继续求导, 令  $x=0$ , 给出  $f^{(n)}(0)$  的递推关系式.

五. (10分) 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^{2n}$  的收敛区域以及和函数.

解

$$\left| \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)} x^{2n+2} \right| / \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^{2n} \right| = \frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)} x^2 \rightarrow x^2,$$

因此收敛半径  $R = 1$ , 当  $x = \pm 1$  时, 显然绝对收敛, 因此收敛区域为  $[-1, 1]$ .

记  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^{2n}$ , 则  $S'(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = 2 \arctan x$ ,

如果看不出来, 也可继续求导

$$S''(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-x^2)^{n-1} = \frac{2}{1+x^2},$$

在  $[0, x]$  ( $|x| \leq 1$ ) 上积分并注意到  $S(0) = 0, S'(0) = 0$ , 因此

$$S'(x) = 2 \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = 2 \arctan x,$$

$$S(x) = \int_0^x 2 \arctan t dt = 2x \arctan x - 2 \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = 2x \arctan x - \ln(1+x^2)$$

因和函数在  $[-1, 1]$  上连续, 所以

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^{2n} = 2x \arctan x - \ln(1+x^2) \quad x \in [-1, 1]$$

六. (10分) 讨论级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{1+n^2x} \right)$  在  $(0, 1)$  上的收敛性、一致收敛性及和函数的连续性.

解 对  $x \in (0, 1)$ ,  $\ln \left( 1 + \frac{1}{1+n^2x} \right) \sim \frac{1}{1+n^2x} \sim \frac{1}{n^2x}$  因此收敛.

对任意的  $\delta > 0$ , 当  $x \in [\delta, 1)$  时,  $0 < \ln \left( 1 + \frac{1}{1+n^2x} \right) < \frac{1}{1+n^2x} < \frac{1}{n^2\delta}$ ,

因此内闭一致收敛, 因此在  $(0, 1)$  上连续.

**点评:** 本题关键是证明内闭一致收敛性. 证明内闭一致收敛时, 采用 Weierstrass 方法.

七. (12分, 每小题6分) 设  $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1 + \sin x)^n}$  ( $n \geq 1$ ),

(1) 证明数列  $\{u_n\}$  收敛, 并求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

(2) 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$  条件收敛.

**证明** (1) 对任意的  $1 > \varepsilon > 0$ , 取  $a = \frac{\varepsilon}{2}$ , 则

$$u_n = \int_0^a \frac{dx}{(1 + \sin x)^n} + \int_a^1 \frac{dx}{(1 + \sin x)^n}$$

其中

$$\int_0^a \frac{dx}{(1 + \sin x)^n} < a = \frac{\varepsilon}{2} \quad (n \geq 1),$$

当  $x \in [a, 1]$  时  $1 + \sin x \geq 1 + \sin a$  所以

$$0 < \int_a^1 \frac{dx}{(1 + \sin x)^n} \leq \int_a^1 \frac{dx}{(1 + \sin a)^n} = \frac{1 - a}{(1 + \sin a)^n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

所以存在  $N > 0$ , 当  $n > N$  时

$$0 < \int_a^1 \frac{dx}{(1 + \sin x)^n} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

即当  $n > N$  时  $0 < u_n < \varepsilon$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

**也可直接利用不等式  $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ , 因此**

$$0 < u_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1 + \sin x)^n} \leq \int_0^1 \frac{dx}{(1 + \frac{2}{\pi}x)^n} = \frac{1}{n-1} \frac{\pi}{2} \rightarrow 0.$$

(2) 对  $x \in [0, 1]$   $(1 + \sin x)^n < (1 + \sin x)^{n+1}$ , 因此  $u_n$  递减, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$

收敛. 再由  $1 + \sin x \leq 1 + x$  ( $x \in [0, 1]$ ), 所以

$$u_n \geq \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^n} = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

其中  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$  发散,  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)2^{n-1}}$  收敛, 所以  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$  发

散, 推出  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散, 因此  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$  条件收敛.

**要证明级数条件收敛, 就是要证明技术本身收敛, 但通项取绝对值后发散. 所以**

**难点在证明  $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.**

八. (8分, 每小题4分) (1) 设  $0 < \alpha < 1$ ,  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上非负、连续, 且

$$f(x) \leq \alpha + \int_1^x \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 dt \quad (x \geq 1),$$

求证:  $f(x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \quad (x \geq 1)$ .

(2) 设  $\alpha > 0$ ,  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上单调增. 求证

$$\int_0^1 (1-x)^\alpha f(x) dx \leq \alpha \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x f(x) dx.$$

**证明** (1) 设  $F(x) = \alpha + \int_1^x \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 dt$ , 则  $F(x)$  可导,  $F(1) = \alpha$ ,  $f(x) \leq F(x) \quad (x \geq 1)$ ,

$$F'(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 \leq \left(\frac{F(x)}{x}\right)^2.$$

$$\frac{F'(x)}{F^2(x)} \leq \frac{1}{x^2}, \implies \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{F(x)} \leq 1 - \frac{1}{x},$$

$$\implies f(x) \leq F(x) < \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - 1 + \frac{1}{x}} < \frac{\alpha}{1-\alpha} \quad (x \geq 1).$$

**点评:** 虽然  $f(x)$  并不一定可到, 但是连续, 所以右边记为  $F(x)$  是可导的 (连续函数的变上限积分), 因此重点放在  $F(x)$  上, 通过解方程给出

$$f(x) \leq F(x) < \frac{\alpha}{1-\alpha} \quad (x \geq 1)$$

学号:

姓名:

学生所在院系:

装订线 答题时不要超过此线

(2)

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (1-x)^\alpha f(x) dx - \alpha \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x f(x) dx \\
&= \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} [1 - (\alpha+1)x] f(x) dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{1+\alpha}} (1-x)^{\alpha-1} [1 - (\alpha+1)x] f(x) dx \\
&\quad + \int_{\frac{1}{1+\alpha}}^1 (1-x)^{\alpha-1} [1 - (\alpha+1)x] f(x) dx \\
&\leq \int_0^{\frac{1}{1+\alpha}} (1-x)^{\alpha-1} [1 - (\alpha+1)x] f\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) dx \\
&\quad + \int_{\frac{1}{1+\alpha}}^1 (1-x)^{\alpha-1} [1 - (\alpha+1)x] f\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) dx \\
&= f\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} [1 - (\alpha+1)x] dx \\
&= f\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) \int_0^1 (x(1-x)^\alpha)' dx = 0
\end{aligned}$$

**点评:** 本题左边减右边, 出现一个因子  $1 - (\alpha + 1)x$ , 因此将积分分为两个区间  $[0, \frac{1}{1+\alpha}]$  和  $[\frac{1}{1+\alpha}, 1]$ . 在  $[0, \frac{1}{1+\alpha}]$  上,  $1 - (\alpha + 1)x > 0, f(x) < f(\frac{1}{1+\alpha})$ , 在  $[\frac{1}{1+\alpha}, 1]$  上,  $1 - (\alpha + 1)x < 0, f(x) > f(\frac{1}{1+\alpha})$ . 因此就可推出结果.