应用随机过程期中考试

2020 年 4 月 19 日

姓名：邹广翼　　学号：PB18071555

第一部分　知识总结

我们期中前研究的是时间齐次可数马尔科夫链,重点研究的是其在长时间之后的极限分布.我们先给出马尔科夫链的定义:

定义1. *过程X_n如果满足一下的马尔科夫条件就叫做马尔科夫链:*

$$\mathbb{P}(X_n = s|X_0 = x_0, ..., X_{n-1} = x_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n = s|X_{n-1} = x_{n-1}).$$

可验证马尔科夫条件与如下条件等价

$$\mathbb{P}(X_n = s|X_{n_k} = x_{n_k}, ..., X_{n_1} = x_{n_1}) = \mathbb{P}(X_n = s|X_{n_k} = x_{n_k}), n_1 < n_2 < ... < n_k < n.$$

我们主要研究的是时间齐次马尔科夫链:

定义2. *马尔科夫链被称为齐次的如果其满足*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j|X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j|X_0 = i).$$

由此记$p_{ij} = \mathbb{P}(X_1 = j|X_0 = i)$我们可以得到单步概率转移矩阵$\boldsymbol{P} = (p_{ij})$.并且由

定理1 (Chapman-Kolmogorov 等式)**.**

$$p_{ij}(m, m+n+r) = \sum_k p_{ik}(m, m+n)p_{kj}(m+n, m+n+r).$$

我们可以得到n步转移概率矩阵为$\boldsymbol{P}^n$.这样,我们便将对该随机过程极限状态的研究转换为$\boldsymbol{P}^n$在n趋向无穷大时的状态.

要研究$\boldsymbol{P}^n$的性态,我们可以先考察状态是有限的情形.可以发现一个状态i可能有以下几种情况:(1)i是周期的(间隔几次才能回到自身,也就是$p_{ii}(n)$会有某种周期性).(2)i是非常返的(其回到自身的概率越来越小).

为此我们会需要先对状态进行分类(周期性之后考虑),我们引入:

定义3. *状态i被称为常返态,如果*

$$\mathbb{P}(X_n = i\text{对于某个}n|X_0 = i) = 1.$$

而非常返态的我们称为非常返或者暂态.

我们记$f_{ij}(n)$为从i出发第n次是第一次经过j的概率.记$f_{ij} = \sum_n f_{ij}(n) = \mathbb{P}(X_n = i\text{对于某个n}|X_0 = i)$.则通过母函数的方法我们可以得到:

定理2. *(1)j是常返态当且仅当$\sum_n p_{jj}(n) = \infty$,并且若其为常返态$\sum_n p_{ij}(n) = \infty$如果$f_{ij} > 0$.*
(2)j是非常返当且仅当$\sum_n p_{jj}(n) < \infty$,并且若其为非常返则$\sum_n p_{ij}(n) < \infty$对所有的$i$.

这样我们就有,若j是暂态,则$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n) = 0$.也就是说对于暂态,我们已经知道了对应的极限分布.

我们现在考虑常返态的极限分布.首先我们要对常返态进行划分,因为可能状态i, j都是常返态但他们却不相互可达.故引入定义:

定义4. *状态i可到达状态j,记为$i \to j$,如果存在某个m,使得$p_{ij}(m) > 0$.而称i与j可互达,记为$i \leftrightarrow j$如果i可达j且j可达i.*

容易发现其为等价关系.并且这种等价关系保持周期性与常返性.从而我们可以将状态空间分为暂态与多个常返态的并,我们希望每个常返态被分的足够简单,为此引入概念:

定义5. *$C \subset S$被称为:*
(1)闭的,如果$p_{ij} = 0$对所有的$i \in C, j \notin C$.
(2)不可约的,如果$i \leftrightarrow j$对所有的$i, j \in C$.

从而我们有如下的分解定理:

定理3. *状态空间S可被唯一分解为*

$$S = T \cup C_1 \cup C_2 ...$$

其中T是所有暂态的集合,C_i是不可约常返态的集合.

暂态我们已经研究清楚了,现在我们来研究不可约常返态,特别的,我们先研究非周期的.我们先考虑状态空间有限的情况.此时$\boldsymbol{P}$是有限的矩阵.如果这个概率矩阵每个元素都大于0,那么$\boldsymbol{P}^n$极限存在是显然的,并且其极限状况下秩为1[1].由于$\boldsymbol{P}$是概率矩阵,所以$\lambda = 1$是$\boldsymbol{P}$的特征值,并且容易得到$\boldsymbol{P}$的其他特征值模长都不大于1,若能将$\boldsymbol{P}$对角化,并且其他特征值模长小于1(极限唯一存在可能暗示着非周期时模长为1的只有1,事实上Perron-Frobenius [3]定理保证了这一点),那么$\boldsymbol{P}^n$的相似标准型在n趋向于无穷大时,会形如:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

右下角是$(n-1) \times (n-1)$的矩阵.那么$\boldsymbol{P}^n$就是$\alpha * \beta$其中α是特征值为1的特征向量,也就是所谓的平稳分布.那么自然我们会想到一般的不可约非周期马尔科夫链的极限性态与其平稳分布的联系.我们定义:

定义6. *向量π被称为平稳分布,如果$\pi = (\pi_j)_{j\in S}$使得:*
(a)$\pi_j \geq 0, \sum_j \pi_j = 1$
(b)$\pi = \pi\boldsymbol{P}$.

另外,我们考察π_i该如何计算,我们可以猜测$1/\pi_i$ =从某个状态出发首次到i的期望步长,特别地记μ_i为从i出发首次回到i的平均步长.则我们依据μ_i的有限与无限性可以将状态划分为零常返与非零常返:

定义7. *对于常返态i,如果$\mu_i = \infty$称其为零常返,否则称其为非零常返.*

我们有相互可达这一等价关系保有零常返与非零常返.我们想要考虑$\boldsymbol{P}^n$的极限性态,我们先考察其平稳分布,我们有如下定理:

定理4. *不可约链有平稳分布π当且仅当其所有状态都是非零常返,并且此时平稳分布由$\pi = \mu_i^{-1}$唯一给出.其中μ_i是i的平均中途相遇时间.*

我们先给出$x = x\boldsymbol{P}$的一组解,记$\rho_i(k)$是从k出发回到k前经过i的次数,则我们有:

引理1. *对于不可约常返马氏链,向量$\boldsymbol{\rho}(k)$满足$\rho_i(k) < \infty$,并且$\boldsymbol{\rho}(k) = \boldsymbol{\rho}(k)\boldsymbol{P}$*

以及唯一性:

引理2. *若不可约常返,则满足$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}$的解在乘上一个常数的意义下是唯一的,并且该链是非零的当且仅当$\sum x_i < \infty$.*

就可证明定理4.

接下来我们给出$\boldsymbol{P}^n$的极限性态与平稳分布的关系,我们有如下定理:

定理5. *对不可约遍历链我们有*

$$p_{ij}(n) \to \frac{1}{\mu_j}, n \to \infty, for\ all\ i,j.$$

得到这样一个定理后,剩下的问题就是判断一个链是不是非零常返态,对此我们有以下结果:

定理6. *(1)设s是不可约链S的任一状态,则此链是暂态链当且仅当存在一非零解$\{y_j : j \neq s\}, |y_j| \leq 1$满足*

$$y_i = \sum_{j:j\neq s} p_{ij} y_j, i \neq s.$$

(2)设s是不可约链S的任一状态,则此链是常返链当且仅当存在一解$\{y_j : j \neq s\}$,满足

$$y_i \geq \sum_{j:j\neq s} p_{ij} y_j, i \neq s.$$

并且当$i \to \infty$时,$y_i \to \infty$.

之后是研究极限情况下其他东西的分布.也就是退出分布和退出时间.我们有如下定理:

定理7. *(1)设状态空间为S的马尔科夫链.令A, B为S的子集,并且$C = S - A \cup B$是有限的.设$h(a) = 1, a \in A, h(b) = 0 b \in B$并且对于$x \in C$我们有*

$$h(x) = \sum_y p(x,y)h(y)$$

如果$P_x(V_A \wedge V_B < \infty) > 0$对所有的$x \in C$则$h(x) = P_x(V_a < V_b)$.

(2)令$V_A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$.设$C = S - A$有限,并且$P_x(V_A < \infty) > 0$对所有的$x \in C$,如果$g(a) = 0$对所有的$a \in A$,

$$g(x) = 1 + \sum_y p(x,y)g(y),$$

则$g(x) = E_x(V_A)$.

第二部分　自拟试题

问题1 (Stochastic Process:Problems and Solutions [5] 第一章第八题P18)**.** 分类下列概率转移矩阵的马氏链的状态空间.

$$(a)\ \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}.\ (b)\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.\ (c)\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

解答1. *(a)*显然各个状态都可互达,而其状态有限,所以其所有状态都是正常返.

*(b)*其所有状态也互达,并且状态有限,所以都是正常返.

*(c)1,2*是正常返闭链,*3,4*是正常返闭链,*5*是暂态.

问题2 (Discrete Probability Models and Methods–Probability on Graphs and Trees,Markov Chains and Random Fields,Entropy and Coding [1] P181 7.5.3)**.** 设τ是不可约正常返马氏链的首次返回时间,也就是$\tau=\inf\{n\geq 1: X_n=X_0\}$,$\tau=\infty$若$X_n\neq X_0$对所有的$n$.计算$\tau$的条件期望,当其初始分布为平稳分布$\pi$时.说明其为有限当且仅当状态空间有限.当状态空间无限时,其是否与其为正常返矛盾?

解答2. 平稳分布为$\pi=(\mu_i^{-1})$,故$\mathbb{E}(\tau)=\sum\mu_i*\mu_i^{-1}=|S|$.故其有限当且仅当状态空间有限,其无限当且仅当状态空间无限.其不与该链正常返矛盾,因为正常返保证的是每个$\mu_i<\infty$不代表$\sup\mu_i<\infty$,事实上,当状态空间为无穷时,由于$1=\sum\mu_i^{-}1$,故必然会有$\sup\mu_i=\infty$,

问题3 (Stochastic Processes [4],习题4.13)**.** 一个人有r把伞用于上下班,如果一天的开头*(*结束*)*他是在家*(*办公室*)*而且天下雨,那么他就拿一把伞到办公室*(*家*)*.如果不下雨,他就不带伞,假定一天的开始*(*结束*)*下雨的概率为p,与过去情况独立.

*(a)*定义一个有$r+1$个状态的马氏链,有助于我们确定此人被淋湿的次数的比率.

*(b)*计算极限概率.

*(c)*占多少比率的次数此人要被淋湿.

解答3. *(a)*设状态s表示办公室里有s把伞,我们首先写出转移概率

$$p_{s,s-1}=p(1-p).p_{s,s}=p^2+(1-p)^2,p_{s,s+1}=p(1-p),1\leq s\leq p-1,$$

$$p_{0,0}=1-p+p^2,p_{0,1}=p(1-p),p_{r,r-1}=p,p_{r,r}=1-p.$$

*(b)*其不可约有限马氏链,所以每个状态非零常返,设平稳分布为π,则

$$\pi_i=1/2(\pi_{i-1}+\pi_{i+1}),0<i<r-1,\pi_0=\pi_1,\pi_{r-1}=1/2\pi_{r-2}+1/2(1-p)\pi_r,\pi_r=(1-p)\pi_{r-1}$$

故$\pi_0-\pi_{r-1}$是等差数列,而$\pi_0=\pi_1$所以

$$\pi_i=\pi_0,0\leq i\leq r-1,\pi_r=(1-p)\pi_0.$$

所以

$$\pi_0 = (r+1-p)^{-1}.$$

这样就算出了极限分布.

*(c)*现在考虑其被淋湿的比率,显然,只有办公室有*0*或r把伞时才会被淋湿.故$\mathbb{P}(\text{被淋湿}) = p(1-p)/(r+1-p) + p(1-p)/(r+1-p) = 2p(1-p)/(r+1-p)$.

问题4 (Probability and Random Processes [3],6.4.11)**.** 如图一个粒子在图$ABCDE$上随机游走,从一个节点到他任一另外一个节点是等概率的,一开始它在点A,求以下几个的期望值:

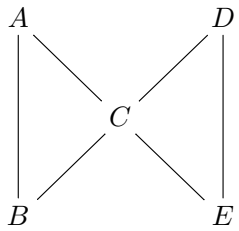
*(a)*首次返回A的时间,

*(b)*返回A前经过D的次数

*(c)*返回A前经过C的次数

*(d)*首次返回A的时间,但之前没经过E.

*(e)*不经过E,返回A前经过D的次数.



解答4. *(a)*我们知道简单图上随机游走的平稳分布是

$$\pi(i) = d(i)/2E$$

其中$d(i)$是i处的度数,E是总边数.所以有$\pi(A) = 1/6$,$\mu_{AA} = 6$.

*(b)*由于$\boldsymbol{\rho}(A)$是概率转移矩阵的特征值为*1*的特征向量,其与平稳分布只差一个常数,所以有$\rho_D(A) = \rho_A(A) * \pi(D)/\pi(A) = \mu_{AA}/mu_{DD} = 1$.

(c)$\rho_C(A) = \mu_{AA}/\mu_{CC} = 2$

*(d)*我们计算在给定不经过E的条件下的转移概率.由于$\mathbb{P}(T_A < T_E|X_0 = i)$可以计算,我们只需计算$\mathbb{P}(X_1 = j, T_A < T_E|X_0 = i)$,则我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = j, T_A < T_E|X_0 = i) &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = j, X_0 = i, T_A < T_E)}{\mathbb{P}(X_1 = j, X_0 = i)} * \frac{\mathbb{P}(X_1 = j, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \\ &= \mathbb{P}(T_A < T_E|X_1 = j, X_0 = i)\mathbb{P}(X_1 = j|X_0 = i) \\ &= \mathbb{P}(T_A < T_B|X_1 = j)\mathbb{P}(X_1 = j|X_0 = i)\end{aligned}$$

我们接下来就可计算$\mathbb{P}(T_A < T_E|X_0 = i) = p_i$,这是经典的退出概率问题.有方程:

$$p_A = 0.5p_B + 0.5p_C, p_B = 0.5 + 0.5p_C, p_C = 0.25 + 0.25p_D + 0.25p_B, p_D = 0.5p_C$$

有$p_A = 5/8, p_B = 0.75, p_C = 0.5, p_D = 0.25$,所以记

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_1 = j|X_0 = i, T_A < T_E) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = j, T_A < T_E|X_0 = i)}{\mathbb{P}(T_A < T_E|X_0 = i)} = \frac{\mathbb{P}(T_A < T_B|X_1 = j)\mathbb{P}(X_1 = j|X_0 = i)}{\mathbb{P}(T_A < T_E|X_0 = i)}$$

计算可得,$p_{AB}=3/5, p_{AC}=2/5, p_{BC}=1/3, p_{BA}=2/3, p_{CB}=3/8, p_{CD}=1/8, p_{CA}=1/2, p_{DC}=1$. 所以可以算出平稳分布

$$\pi'(A)=5/14, \pi'(B)=9/28, \pi'(C)=2/7, \pi'(D)=1/28$$

所以我们有$\mu'_{AA}=14/5$

(e)$\rho_D(A)=\mu'_{AA}/\mu'_{DD}=1/10$.

问题5 (Essentials of Stochastic Processes [2] 1.70)**.** 状态空间为$\{0,1,2,...\}$并且转移概率为

$$p(x,x+1)=p_x, p(x,x-1)=q_x, x>0, p(x,x)=r_x, x\geq 0,$$

其余状况都有$p(x,y)=0$.令$V_y=\min\{n\geq 0: X_n=y\}$以及$h_N(x)=P_x(V_N<V_0)$.则我们有

$$h_N(x)=p_x h_N(x+1)+r_x h_N(x)+q_x h_N(x-1)$$

令$h_N(1)=c_N$并且解这个方程来说明0是常返态当且仅当$\sum_{y=1}^{\infty}\Pi_{x=1}^{y-1}q_x/p_x=\infty$.

解答5. 不妨设$p_x, q_x\neq 0$否则原题结论容易证明*(*若有最小x使$p_x=0$且之前的q_x不为*0,*则其为有限状态不可约马氏链,状态0常返,而若有最小$q_x=0$且之前$p_x\neq 0$则状态0是暂态容易证明*).*

因为$p_x+r_x+q_x=1$,所以我们有*:*

$$p_x(h_N(x+1)-h_N(x))=q_x(h_N(x)-h_N(x-1)).$$

所以可以解出

$$h_N(x)=c_N\sum_{y=1}^{x}\Pi_{n=1}^{y-1}q_n/p_n.$$

而$h_N(x)=P_x(V_N<V_0)$.故若

$$\sum_{y=1}^{\infty}\Pi_{x=1}^{y-1}q_x/p_x=\infty$$

则由于$h_N(x)\leq 1$,我们有$h_N(1)=c_N\to 0$.也就是$P_x(V_N<V_0)\to 0$.这时假设0是暂态,则$f_{10}<1$,且有1是暂态得$\mathbb{P}(X_n\geq N)=1-\sum_{i=0}^{N-1}p_{1i}(n)\to 1$,得到$\mathbb{P}_1(V_N<V_0)\geq\mathbb{P}(X_n\geq N,$从不经过$0|X_0=1)\geq 1-\epsilon-f_{10}$会大于一个常数,与$c_N\to 0$矛盾.

反过来,若状态0常返,且$\sum_{y=1}^{\infty}\Pi_{x=1}^{y-1}q_x/p_x<\infty$,则存在序列$\{x_n\}$使得$q_{x_n}/p_{x_n}<1$,此时就有

$$(p_{x_n}+q_{x_n})h_{x_n+1}(x_n)=p_{x_n}+q_{x_n}h_{x_n+1}(x_n-1).$$

推出$h_{x_n+1}(x_n)>1/2$,推出c_{x_n+1}大于一个常数.由于$P_1(V_N<V_0)>P_1(V_{N+1}<V_0)$所以可以得到$P_1(V_N<V_0)$会一致地大于某个常数,从而有$\sum_{i=1}^{n}f_{10}<1-P_1(V_n<V_0)<1-c$与0是常返态矛盾.

问题6 (提高题,Discrete Probability Models and Methods–Probability on Graphs and Trees,Markov Chains and Random Fields,Entropy and Coding [1] P191 定理8.1.6)**.** 设$\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$是一不可约齐次状态有限马氏链,转移矩阵为$\boldsymbol{P}$,平稳分布为π.令$G=(E,A)$为对应的有向图,其中A是有向边的集合.边(i,j)的权重为p_{ij}.一个G的有根生成树是G的一个带有如下特性的子图*(a)*作为无向图其是连通的,并且含有G所有顶点.*(b)*作为无向图他没有环.*(c)*作为有向图,所有顶点出度为*1*,除了根节点出度为*0.*

记S为G的生成树的集合,S_i是S的子集,为所有以i为根节点的生成树的集合.有根生成树的权重$\omega(T)$为其所有边的权重之积.

证明:$\boldsymbol{P}$的平稳分布π由

$$\pi(i)=\frac{\sum_{T\in S_i}\omega(T)}{\sum_{T\in S}\omega(T)}.$$

给出.

解答6 (Anantharam and Tsoucas, 1989). 如下定义取值在S的随机过程$\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.Y_n的根节点为X_n.然后向前回溯X_{n-1},X_{n-2}...,令X_{n-l_1}为第一个指与X_n不同的,X_{n-l_2}为第一个与X_n,X_{n-l_1}不同的,以此类推穷尽所有节点.生成树Y_n则由有向边$(X_{n-l_1},X_{n-l_1+1}=X_n),(X_{n-l_2},X_{n-l_2+1}),(X_{n-l_3},X_{n-l_3+1})$...构成.则$\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$也是齐次马氏链,记$Q_{AB}=\mathbb{P}(Y_{n+1}=B|Y_n=A)$.我们接下来计算其概率.

从$Y_n=A$(*i*为根节点)转移到$Y_{n+1}=B$(*j*为根节点)会发生如下变化:

(a)在A中加一条有向边(i,j),生成一个含i,j的环(可能是i的自环).

(b)删掉唯一的一条从j出发的有向边,记为(j,k),打破之前生成的环.

(c)这种转移概率为p_{ij}.

根节点为j的生成树B可以从A经一步生成当且仅当A可以基于适当的k由如下过程从T重新构建(向后退一步):

(1)在B中加一条有向边(j,k),则得到一个带环生成树.

(2)删掉有向边(i,j),去掉那个环,则其变为根节点为i的有根生成树.

设k是上述过程对应的那个唯一节点.则从B到A,我们先加上有向边(i,j)并且删去对应的唯一一条便(j,k),而从A到B,我们加上一条有向边(j,k)并且删去(j,i).所以应该有

$$\omega(A)Q_{AB}=\omega(B)R_{BA}.$$

其中$R_{BA}:=p_{jk}$.,所以我们有

$$\sum_A\omega(A)Q_{AB}=\sum_S\omega(T)R_{TS}=\omega(T).$$

所以该链平稳分布为

$$\rho(A)=\frac{\omega(A)}{\sum_{A'}\omega(A')},$$

由此:

$$\pi(i)=\sum_{T\in S_i}\rho(T)=\frac{\sum_{A\in S_i}\omega(A)}{\sum_{A\in S}\omega(A)}.$$

第三部分　自我评价

大概50分左右.第一题是非常简单的状态判断题,第二题则是考察平稳分布的公式,以及对正常返概念的理解.第三题则是情境不算很简单也不算很复杂的有限马氏链的简单应用.第四题前三问很简单,只要记得平稳分布概念以及极限定理证明过程中用到的$\rho(k)$的定义就可以做出来,后面两问比较困难,一个是要计算退出概率,另一个比较难的地方可能是如何将原有马氏链转换成条件概率下的马氏链,这个地方实际上卡了我一会,但解决了这个这个题目还是能做出来.第五题算是给了一个生灭过程的必然灭绝的等价刻画,前面解出$h_N(x)$不算困难,主要是后面要将与c_N有关的直觉写清楚还是挺麻烦的.而第六题则是考察了带权图上的随机游走的平稳分布,说实话,证明难以想到,如果真要出成试题可能分成多个小问会更好.

而对于课程的建议,我个人觉得可以再讲快一点.

参考文献

[1] Pierre Brmaud (auth.). *Discrete Probability Models and Methods: Probability on Graphs and Trees, Markov Chains and Random Fields, Entropy and Coding.* Probability Theory and Stochastic Modelling 78. Springer International Publishing, 1 edition, 2017.

[2] Richard Durrett (auth.). *Essentials of Stochastic Processes.* Springer texts in statistics. Springer-Verlag New York, 2 edition, 2012.

[3] David R. Stirzaker Geoffrey R. Grimmett. *Probability and random processes.* Oxford University Press, 3rd ed edition, 2001.

[4] Ross S. *Stochastic Processes.* Second edition edition, 1995.

[5] L. Takacs. *Stochastic Process:Problems and Solutions.* CRC Monographs on Statistics & Applied Probability. Springer, 1 edition, 1966.