

中国科学技术大学数学科学学院  
2021—2022学年第一学期考试试卷

A 卷

B 卷

课程名称 复变函数(A)

课程编号 001505

考试时间 2022年1月

考试形式 闭卷

姓名 \_\_\_\_\_

学号 \_\_\_\_\_

学院 \_\_\_\_\_

题号	一	二	三	总分
得分				

一. 填空题(30分)

1.  $\operatorname{Ln} \frac{1+i}{\sqrt{2}} =$  \_\_\_\_\_.

2. 曲线  $|z-1|=1$  在函数  $f(z) = \frac{1}{z}$  下的像为 \_\_\_\_\_ (写出表达式).

3. 若函数  $f(z) = my^3 + nx^2y + i(x^3 + lxy^2)$  是复平面上的解析函数, 那么实数常数  $m, n, l$  值分别为 \_\_\_\_\_.

4. 如果函数  $f: D \rightarrow G$  是区域  $D$  到区域  $G = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\}$  的解析函数, 那么函数  $\arg f(z)$  \_\_\_\_\_ (填写“是”或“否”)为调和函数.

5. 设  $u(x, y) = y^2 - x^2 + 2021y$ , 那么它的共轭调和函数  $v(x, y)$  为 \_\_\_\_\_.

6. 设级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  的收敛半径为  $R$ , 那么级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) a_n z^n$  的收敛半径为 \_\_\_\_\_.

7. 设  $f(z) = \frac{e^{-\frac{3}{z}}}{z(1-e^{-z})}$ , 给出  $f(z)$  的全体奇点 (不包括  $\infty$ ), 并且指出每个奇点的类型 (极点指出阶数): \_\_\_\_\_.

8.  $\operatorname{Res} \left( z^3 \cos \frac{1}{z-2}, 2 \right) =$  \_\_\_\_\_.

设  $n$  为正整数, 那么  $\operatorname{Res} \left( z^n \sin \frac{1}{z}, 0 \right) =$  \_\_\_\_\_.

9. 方程  $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8 = 0$  在区域  $|z| < 1$  内根的个数为 \_\_\_\_\_.

装订线 答题时不要超过此线

二. 计算题(40分) (本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向)

1. 求函数  $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$  在  $z=0$  处泰勒 (Taylor) 展开, 并且给出所得幂级数的收敛半径.
2. 将函数  $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$  在区域  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$  内展成罗朗 (Laurent) 级数.
3. 设  $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > -\frac{1}{2}\}$ , 设  $\gamma$  为区域  $D$  内从 0 到 1 的不经过  $i$  任意简单曲线, 计算积分  $\int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2}$ .
4. 计算积分  $\int_C \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$ , 其中  $C$  为不过点 0 和 1 的简单闭曲线.
5. 计算积分  $\int_0^{\pi} \cot(x+1-2i) dx$ .
6. 利用留数计算积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx$ .

三. 综合题 (共 30 分) (本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向)

1. 利用拉氏 (Laplace) 变换求解微分方程:

$$\begin{cases} y'(t) - 4y(t) + 4 \int_0^t y(t) dt = \frac{t^3}{3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

2. 设  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  为区域  $D$  内的解析函数,  $\gamma$  为  $D$  内简单闭曲线, 其内部包含于  $D$ . 设  $a$  为  $f(z)$  在  $\gamma$  内部的  $n$  阶零点,  $b$  为  $f(z)$  在  $\gamma$  内部的  $m$  阶极点,  $f(z)$  在  $\gamma$  内除了  $b$  外没有其它奇点, 在  $\gamma$  上没有零点和奇点. 证明:

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \sin z dz = 2\pi i (n \sin a - m \sin b).$$

3. 求一保形变换  $w = f(z)$ , 将区域  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1, |z| < 2\}$  映为单位圆盘  $|w| < 1$ , 并且满足  $f(-1) = 0$ . (请画出必要的示意图)

4. 设函数  $f(z)$  在  $|z| < 2$  内解析, 且满足  $|f(e^{i\theta})| \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi; |f(e^{i\theta})| \leq 3, \pi \leq \theta \leq 2\pi$ . 证明:

$$|f(0)| \leq \sqrt{6}.$$