第一题：(10 分) 请问常数α、β满足什么条件时，变换$Q=\alpha p/q$、$P=\beta q^2$是关于一个自由度系统的正则变换，并写出相应的第一类生成函数$F_1(q,Q)$。

第二题：(20 分) 一维谐振子的哈密顿量为：$H=\dfrac{p^2}{2m}+\dfrac{1}{2}m\omega^2x^2$，引入如下的复变量：

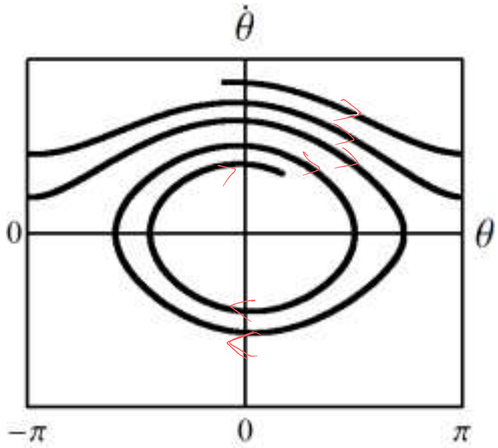
$$a=\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x+i\frac{p}{m\omega}\right)、a^*=\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x-i\frac{p}{m\omega}\right)。$$

1. (4 分) 用 a、a^* 来表示哈密顿量：$H=H(a,a^*)$；
2. (12 分) 计算泊松括号$[a,a^*]$、$[a,H]$、$[a^*,H]$的值；
3. (4 分) 用泊松括号计算得到$a(t)$、$a^*(t)$随时间的演化方程并求解。

第三题：(12 分) 已知体系的哈密顿量为$H=p(q^2+1)$，试通过哈密顿–雅可比方法求解$q(t)$和$p(t)$。

第四题：(18 分)

1. (8分) 右图是重力场中单摆在一段时间间隔里的一条相轨迹。其中θ是摆与竖直向下方向的夹角。试在图中用箭头标出相点运动的方向；在此时间间隔里，单摆转动的方向改变了几次？单摆转过了几个完整的圈？单摆的机械能是在增加还是减少？



2. (4分) 质量为$m=1$的粒子沿着 x 轴作一维运动，考察初始时刻由$-2\le x\le 2$和$-1\le p_x\le 1$所定义的相空间的一个区域(图中阴影部分)，它代表一组可能的初始状态。如果粒子不受任何力作用，试在图1中画出$t=2$ s时刻可能状态所占据的区域；如果粒子运动过程中只受到恒力$F=-x$的作用，试在图2中画出$t=0.5\pi$时刻可能状态所占据的区域。(本题所有物理量均取国际单位制。)

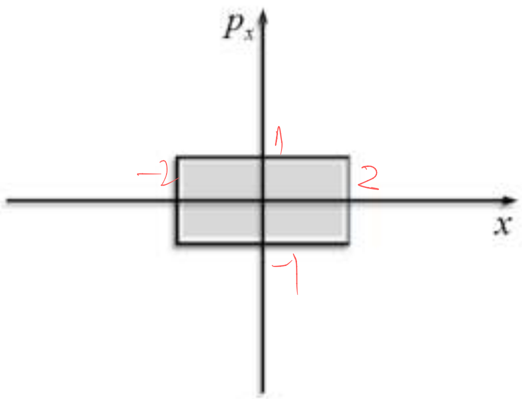


图1

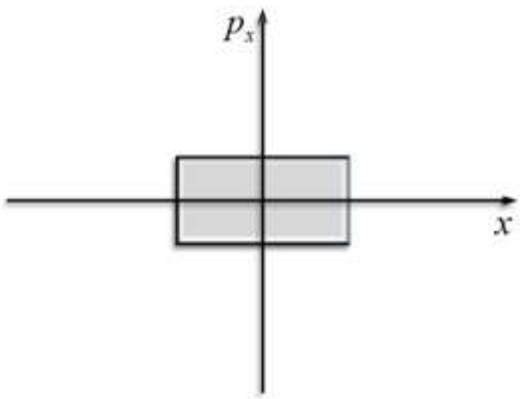
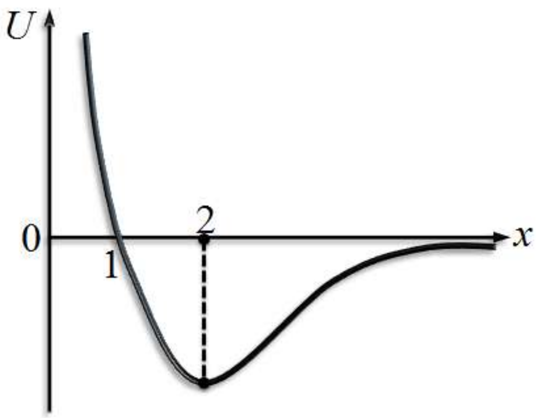


图2

3. (6分) 质量为m的粒子在正 x 轴上运动，势能如图所示，试在(x,p_x)平面内定性画出典型的相轨迹。



第五题：(20 分) 在中心力作用下的质量为 m 的粒子，当其角动量为 $l_0 = 2\sqrt{m\alpha}$ 时可以沿着轨道 $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\Gamma\theta}$ 运动，其中 $\varepsilon = 1/2$ 、$\Gamma = 1/\sqrt{2}$ ，而 α 、p 均为正常数。设无穷远处为势能零点。

1. (6 分) 确定描述该中心力的势能函数;

2. (4 分) 粒子沿着题目给定的轨道运动时的机械能 E 等于多大?

3. (4 分) 试确定在该中心力作用下，粒子沿着圆轨道 $r = p$ 运动时的角动量 l，并确定在轨道 $r = p$ 附近运动时径向微振动的角频率 ω_r ;

4. (6 分) 如果粒子从无穷远处以速度 v_0 开始靠近力心，试确定其“落向”力心的截面 σ 。

第六题：(20 分) 一个圆锥密度均匀为 ρ，底部的圆半径为 R，高为 h。

1. (4 分) 求相对于圆锥顶点的主转动惯量 I_1 （$I_2 = I_1$）、I_3 。

2. (6 分) 以圆锥顶点为固定点，求该重对称陀螺的拉格朗日函数及三个守恒量方程。

3. (4 分) 章动角 θ 随时间的演化可以等效地视为“质量”为 I_1 的粒子的一维运动，试写出该等效运动的有效势能 $V(\theta)$，并将进动角速度 $\dot{\phi}$ 用章动角 θ 表示出来;

4. (6 分) 重对称陀螺也能均匀进动(章动角 θ 和进动角速度 $\dot{\phi}$ 保持不变)。以圆锥顶点为固定点，求该重对称陀螺可以均匀进动的角速度 $\dot{\phi}$，并由此说明 p_ψ 满足什么条件时该均匀进动解存在。

（装订线内不要答题）