矢量分析简介

——2023 秋电动力学

罗曾宇

2023 年 12 月 31 日

目录

第一章　Einstein 求和约定

爱因斯坦求和约定是用于简化矢量分析公式推导过程的一种记号。

例如，不使用该约定时，

$$\boldsymbol{a} = \sum_i a_i \boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_i a_i b_i,$$

这里的求和符号实际上是冗余的，完全可以省略不写，只保留字母的下标，爱因斯坦求和约定就是以这种朴实的想法为基础而诞生的。

1.1　基本规则

具体来说，爱因斯坦求和约定遵循以下三个规则：

1. 不写求和符号.

$$\boldsymbol{a} = \sum_i a_i \boldsymbol{e_i} \to a_i \boldsymbol{e_i},$$

$$((\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c})_k = \sum_i a_i b_i c_k \to a_i b_i c_k.$$

注：$()_k$ 指的是该矢量的 k 分量.

这里出现两次的指标，也就是 i，被称作哑指标，除此之外在单项式中只出现一次的指标, 也就是 k，被称作自由指标。对于式中出现的哑指标，写出来之后默认对其进行求和，需要注意的是，哑指标具体用什么字符指代是任意的，只要注意不要同已经出现过的另外求和的指标符号弄混，以及前后字符对应的求和范围是不变的即可，除此之外单项式中同一指标不

能出现超过两次。自由指标写出来不求和，表示一次取某一个值，每取一个值都是一个单独的式子，需要注意的是对于每一个不同的自由指标，指示的字符都需要保持不同.

2. 哑指标自动求和.

即在式子中碰到哑指标，需要把哑指标遍历之后，各项加起来作为最终结果.

3. 和式相乘指标不能相同.

例如

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}) = a_i b_i c_j d_j,$$

而不能写成 $a_i b_i c_i d_i$，否则会造成混淆. 一般来说，哑指标会重复两次，重复三次的我也没见过，作业也大概率用不到 (乐).

有一个小问题是，如何表示 $\boldsymbol{a} = \sum_i a_i$ 呢? 这里如果直接去掉求和符号，那么无法判断 i 到底是哑指标还是自由指标. 可以用一种非常别扭的表示方法

$$\boldsymbol{a} = \sum_i a_i = a_i b_i (\text{取} b_i \text{恒为 } 1).$$

第二章　Kronecker 符号和 Levi-Civita 符号

2.1　Kronecker 符号

我们知道，在直角坐标系中，标准正交基为 $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$，并且

$$\boldsymbol{e_1} \cdot \boldsymbol{e_1} = 1, \boldsymbol{e_1} \cdot \boldsymbol{e_2} = 0, \boldsymbol{e_2} \cdot \boldsymbol{e_3} = 0,$$

也就是说，二者下标相同时，点积结果为 1，否则为 0. 因此，不妨定义

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

所以，可以把 $\boldsymbol{e_i} \cdot \boldsymbol{e_j}$ 写成

$$\boldsymbol{e_i} \cdot \boldsymbol{e_j} = \delta_{ij},$$

而且可以把基矢用 Kronecker 符号表示

$$\boldsymbol{e_i} = \begin{pmatrix} \delta_{i1} \\ \delta_{i2} \\ \delta_{i3} \end{pmatrix},$$

并且有如下性质

$$\delta_{ij} = \delta_{ji},$$

$$\delta_{im}\delta_{mj} = \delta_{ij}.$$

第一个性质的成立很显然，在此不做赘述，下面证明第二个性质：

$$\delta_{ij} = \boldsymbol{e_i} \cdot \boldsymbol{e_j} = \begin{pmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{j1} \\ \delta_{j2} \\ \delta_{j3} \end{pmatrix} = \delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2} + \delta_{i3}\delta_{j3} = \delta_{im}\delta_{mj}.$$

2.2 Levi-Civita 符号

我们知道，

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\boldsymbol{e_1} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\boldsymbol{e_2} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\boldsymbol{e_3},$$

行列式的表示方法很美观，但是还不够紧凑，因此，不妨定义

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & ijk = 123, 231, 312 \\ 1, & ijk = 321, 213, 132 \\ 0, & else \end{cases}$$

所以，可以把 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 写成

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \epsilon_{ijk} a_i b_j \boldsymbol{e_k},$$

我们可以用 Kronecker 符号表示 Levi-Civita 符号，

$$\epsilon_{ijk} = \boldsymbol{e_i} \cdot (\boldsymbol{e_j} \times \boldsymbol{e_k}) = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{vmatrix}$$

上式中第二个等号是混合积的结论，具体可翻阅大一的数分课本.

下面证明第一个等号是如何成立的:

$$\boldsymbol{e_j} \times \boldsymbol{e_k} = \epsilon_{lmn} (\boldsymbol{e_j})_l (\boldsymbol{e_k})_m \boldsymbol{e_n},$$

这里有一些绕，$(\boldsymbol{e_j})_l$ 意为 $\boldsymbol{e_j}$ 的第 l 个分量，$(\boldsymbol{e_k})_m$ 意为 $\boldsymbol{e_k}$ 的第 m 个分量，如何去求一个矢量的分量呢？答案是投影. 所以

$$(\boldsymbol{e_j})_l = \boldsymbol{e_j}\cdot\boldsymbol{e_l} = \delta_{jl}, (\boldsymbol{e_k})_m = \boldsymbol{e_k}\cdot\boldsymbol{e_m} = \delta_{km},$$

那么

$$\boldsymbol{e_i}\cdot(\boldsymbol{e_j}\times\boldsymbol{e_k}) = \boldsymbol{e_i}\cdot(\epsilon_{lmn}\delta_{jl}\delta_{km}\boldsymbol{e_n}) = \epsilon_{lmn}\delta_{jl}\delta_{km}\delta_{in},$$

这里 i,j,k 是自由指标，l,m,n 是哑指标，为取非零值，有 $j=l,k=m,i=n$，所以

$$\boldsymbol{e_i}\cdot(\boldsymbol{e_j}\times\boldsymbol{e_k}) = \epsilon_{jki} = \epsilon_{ijk}.$$

类似的，有性质

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik},$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix},$$

下面证明第二个性质：

由前面所证可知,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{vmatrix}, \epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{1l} & \delta_{2l} & \delta_{3l} \\ \delta_{1m} & \delta_{2m} & \delta_{3m} \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \delta_{3n} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{转置后行列式值不变}} \begin{vmatrix} \delta_{1l} & \delta_{1m} & \delta_{1n} \\ \delta_{2l} & \delta_{2m} & \delta_{2n} \\ \delta_{3l} & \delta_{3m} & \delta_{3n} \end{vmatrix},$$

所以

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \left| \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{1l} & \delta_{1m} & \delta_{1n} \\ \delta_{2l} & \delta_{2m} & \delta_{2n} \\ \delta_{3l} & \delta_{3m} & \delta_{3n} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}.$$

第三章　矢量的运算

3.1　基本运算

现在我们了解了 Einstein 求和约定，Kronecker 符号以及 Levi-Civita 符号，它们可以帮助我们大大简化运算，当然，目前看起来，效果还不明显. 为了利用它们，我们需要用这套规则和符号来处理矢量基本的代数运算. 以一个普通的矢量 $\boldsymbol{a}$ 为例：

$$\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\hat{a} = \sqrt{a_ia_i}\hat{a} = \sqrt{\delta_{ij}a_ia_j}\hat{a},$$

加法运算

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = a_i\boldsymbol{e_i} + b_i\boldsymbol{e_i} = (a_i + b_i)\boldsymbol{e_i},$$

数乘运算

$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda(a_i\boldsymbol{e_i}) = (\lambda a_i)\boldsymbol{e_i},$$

内积 (点积) 运算

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_i\boldsymbol{e_i} \cdot b_j\boldsymbol{e_j} = a_ib_j\delta_{ij} = a_ib_i,$$

叉积运算

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \epsilon_{ijk}a_ib_j\boldsymbol{e_k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

外积 (并积) 运算

$$\boldsymbol{ab} = a_i b_j \boldsymbol{e_i e_j},$$

这里并积的结果是一个具有九个分量的量，即二阶张量.

张量是一个更加一般化的表述，类似于范数，过去我们所说的标量称为零阶张量，矢量称为一阶张量，方阵可以称为二阶张量，也就是说，n 阶张量具有的分量个数为 维数^n 个. 例如，在三维空间内，一个三阶张量就好像在一个 $3 \times 3 \times 3$ 的立方体内的每一个小格子里填上数. 在电动力学的学习中，我们最多只会用到二阶张量.

如果说张量仅仅是一个具有多个分量的量，那么对于二阶张量，为什么不把每个分量一字排开，类似于普通的矢量那样，而是要放到方阵中呢？这是因为，张量的每一个是具有物理意义的，比如说弹性力学中的应力张量，受力微元有六个面，而在它的每个面上，应力的方向都有三个. 并且，张量的另一个定义是，在旋转坐标系后，它的模保持不变，这一点从矢量，也即一阶张量的旋转也可以体现出来. 所以说，张量的形式是有限制的，不能随意排开.

尽管说了这么多，还是没有解释为什么二阶张量需要写成方阵的形式，但我认为，我们应该把更多的时间放到物理上，暂时只要会计算就可以了，当然，有需求的同学可以自行查阅资料学习. 接下来，将介绍如何用方阵表示外积 (并积).

外积这个名字与内积相对应，我们知道

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_i b_i,$$

相应的

$$\boldsymbol{ab} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix},$$

从命名和结果的对比可以看出，内积的结果是一个数，“聚成一团”，外积的结果是一个方阵，拓展开来，还是非常形象的.

同样，

$$\boldsymbol{e_i e_j} = \begin{pmatrix} \delta_{i1} \\ \delta_{i2} \\ \delta_{i3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{i1}\delta_{j1} & \delta_{i1}\delta_{j2} & \delta_{i1}\delta_{j3} \\ \delta_{i2}\delta_{j1} & \delta_{i2}\delta_{j2} & \delta_{i2}\delta_{j3} \\ \delta_{i3}\delta_{j1} & \delta_{i3}\delta_{j2} & \delta_{i3}\delta_{j3} \end{pmatrix},$$

可以用一个符号来表示二阶张量，方式是 $\overleftrightarrow{T}$. 自然，单位张量

$$\overleftrightarrow{I} = \boldsymbol{e_1 e_1} + \boldsymbol{e_2 e_2} + \boldsymbol{e_3 e_3} = \delta_{ij}\boldsymbol{e_i e_j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

还有一些关于并矢的计算规则

$$(\boldsymbol{AB}) \cdot (\boldsymbol{CD}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{AD},$$

$$(\boldsymbol{AB}) : (\boldsymbol{CD}) = (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D}),$$

$$(\boldsymbol{AB}) \times (\boldsymbol{CD}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})\boldsymbol{D}.$$

第二式称作双点积，只是一个记号，没有什么特殊的，在后面关于静电势的多极展开会使用到.

3.2　稍复杂的公式

三重标积

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = a_l \boldsymbol{e_l} \cdot \epsilon_{ijk} b_i c_j \boldsymbol{e_k} = \epsilon_{ijk} a_l b_i c_j \delta_{lk} = \epsilon_{ijk} a_k b_i c_j = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

注：我们知道，混合积是具有轮换对称性的，即

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}),$$

从展开的分量可以看出，这个轮换对称性是在 ϵ_{ijk} 上体现的.

三重矢积

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),$$

证明：等号左边为

$$\begin{aligned}&\epsilon_{ijk}[a_i(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})_j\boldsymbol{e_k}]\\&=\epsilon_{ijk}a_i\epsilon_{mnj}b_mc_n\boldsymbol{e_k}\\&=-\epsilon_{jik}\epsilon_{jmn}a_ib_mc_n\boldsymbol{e_k}\\&=-(\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{km})a_ib_mc_n\boldsymbol{e_k}\\&=a_nc_nb_k\boldsymbol{e_k}-a_mb_mc_k\boldsymbol{e_k}\\&=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),\end{aligned}$$

我们还可以进一步看看这个式子的几何意义，

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}),$$

若取 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e_1}$，该式变为

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e_1}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e_1})+\boldsymbol{e_1}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{e_1}),$$

可以看出，等号右边第一项是 $\boldsymbol{b}_{\parallel}$，第二项是 $\boldsymbol{b}_{\perp}$，相当于对 $\boldsymbol{b}$ 进行正交分解.

事实上，完全可以用几何方法证明这个公式，矢量 $\boldsymbol{b}$ 和矢量 $\boldsymbol{c}$ 张成一个平面 (二者共线的时候等式两边都是零向量)，$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 就沿平面的法向量方向。而 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 又要跟这个法向量垂直，所以就回到了 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 张成的平面内. 于是根据平面向量基本定理有

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=m\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{c},$$

再进行一些计算就可以确定常数 m,n 的值.

3.3　涉及到 ∇ 的矢量公式

我们知道，∇ 算符可以看作是一个具有微分性的矢量，即

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix},$$

所以，涉及到它的矢量公式与其他的也没有什么特别之处，当然结果会有一些差异. 下面提供郭书附录中两个矢量公式的证明，其余的在作业答案中会涉及到.

1.$\nabla \cdot (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) = (\nabla \times \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{g} - \boldsymbol{f} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{g})$.

证明：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) &= \frac{\partial}{\partial x_i}(\epsilon_{jki} f_j g_k) \\ &= \epsilon_{ijk}(\frac{\partial}{\partial x_i} f_j) g_k - f_j(\epsilon_{ikj}\frac{\partial}{\partial x_i} g_k) \\ &= (\nabla \times \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{g} - \boldsymbol{f} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{g}) \end{aligned}$$

2.$\nabla \times (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) = (\boldsymbol{g} \cdot \nabla)\boldsymbol{f} + (\nabla \cdot \boldsymbol{g})\boldsymbol{f} - (\boldsymbol{f} \cdot \nabla)\boldsymbol{g} - (\nabla \cdot \boldsymbol{f})\boldsymbol{g}$.

证明：

$$\begin{aligned} \nabla \times (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) &= \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g})_j \boldsymbol{e_k} \\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnj}\frac{\partial}{\partial x_i}(f_m g_n)\boldsymbol{e_k} \\ &= -(\delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km})(\frac{\partial f_m}{\partial x_i} g_n + f_m \frac{\partial g_n}{\partial x_i})\boldsymbol{e_k} \\ &= g_i \frac{\partial f_m}{\partial x_i}\boldsymbol{e_m} + f_k \frac{\partial g_i}{\partial x_i}\boldsymbol{e_k} - \frac{\partial f_i}{\partial x_i} g_k \boldsymbol{e_k} - f_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}\boldsymbol{e_k} \\ &= (\boldsymbol{g} \cdot \nabla)\boldsymbol{f} + (\nabla \cdot \boldsymbol{g})\boldsymbol{f} - (\nabla \cdot \boldsymbol{f})\boldsymbol{g} - (\boldsymbol{f} \cdot \nabla)\boldsymbol{g}. \end{aligned}$$

3.4　曲线坐标系下的梯度，散度，旋度，拉普拉斯算子

有些时候，使用柱坐标和球坐标会更加简便，但在这种情况下，∇ 的形式也会发生变化，原因很简单———求偏导的自变量变化了. 我们可以利用链式法则来推导出在柱坐标和球坐标下梯度，散度，旋度的公式，不过比较麻烦，而比较方便的方法是通过引入拉梅 (*Lamé*) 系数来解决这一问题.

在直角坐标系 (x,y,z) 中，位矢的微分可以写为

$$d\boldsymbol{l} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k},$$

在广义坐标系 (q_1,q_2,q_3) 中

$$d\boldsymbol{l} = h_1 dq_1\hat{\boldsymbol{q}}_1 + h_2 dq_2\hat{\boldsymbol{q}}_2 + h_3 dq_3\hat{\boldsymbol{q}}_3,$$

这里的 h_1,h_2,h_3 就是拉梅系数.

注：因为在曲线坐标系中，坐标的微分不一定等于弧长微元，比如球坐标系中，$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 方向的弧长为 $rd\theta$，和 $d\theta$ 之间差了一个 r，这个系数就是所谓的拉梅系数. 实际上，拉梅系数可以认为是坐标系变换后，坐标长度伸缩的一个系数.

因为 $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}(x,y,z) = \boldsymbol{l}(q_1,q_2,q_3)$，所以

$$\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial q_1} = h_1\hat{\boldsymbol{q}}_1,$$

并且

$$\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial q_1} = \frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\hat{\boldsymbol{k}},$$

即

$$h_1\hat{\boldsymbol{q}}_1 = \frac{\partial x}{\partial q_1}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\hat{\boldsymbol{k}},$$

$$h_1 = \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial q_1})^2 + (\frac{\partial y}{\partial q_1})^2 + (\frac{\partial z}{\partial q_1})^2},$$

同理

$$h_2=\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial q_2})^2+(\frac{\partial y}{\partial q_2})^2+(\frac{\partial z}{\partial q_2})^2}, h_3=\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial q_3})^2+(\frac{\partial y}{\partial q_3})^2+(\frac{\partial z}{\partial q_3})^2},$$

这就是拉梅系数的表达式，下面介绍广义坐标下梯度散度旋度的形式.

梯度

设 f 为一标量，则在直角坐标系下，

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i=\nabla f\cdot d\boldsymbol{l},$$

在广义坐标系下，我们当然希望有同样的形式，即

$$df=\nabla^* f\cdot d\boldsymbol{l}^*=(\nabla^* f)_{q_1}h_1dq_1+(\nabla^* f)_{q_2}h_2dq_2+(\nabla^* f)_{q_3}h_3dq_3,$$

注：这里标 $*$ 是为了和直角坐标系区别开来.

所以

$$(\nabla^* f)_{q_i}=\frac{1}{h_i}\frac{\partial f}{\partial q_i},$$

在广义坐标系下，f 的梯度为

$$\nabla f=\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\hat{\boldsymbol{q_1}}+\frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\hat{\boldsymbol{q_2}}+\frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\hat{\boldsymbol{q_3}}.$$

散度

设 $\boldsymbol{f}$ 为一矢量，由散度的定义式

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\boldsymbol{f}\\
&=\lim_{\triangle V\to 0}\frac{\oiint\limits_S \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S}}{\triangle V}\\
&=\frac{(f_{q_1+dq_1}-f_{q_1})h_2dq_2h_3dq_3+(f_{q_2+dq_2}-f_{q_2})h_1dq_1h_3dq_3+(f_{q_3+dq_3}-f_{q_3})h_1dq_1h_2dq_2}{h_1dq_1h_2dq_2h_3dq_3}\\
&=\frac{\frac{\partial(f_{q_1}h_2h_3)}{\partial q_1}dq_1dq_2dq_3+\frac{\partial(f_{q_2}h_1h_3)}{\partial q_2}dq_1dq_2dq_3+\frac{\partial(f_{q_3}h_1h_2)}{\partial q_3}dq_1dq_2dq_3}{h_1dq_1h_2dq_2h_3dq_3}\\
&=\frac{1}{h_1h_2h_3}[\frac{\partial(f_{q_1}h_2h_3)}{\partial q_1}+\frac{\partial(f_{q_2}h_1h_3)}{\partial q_2}+\frac{\partial(f_{q_3}h_1h_2)}{\partial q_3}].
\end{aligned}$$

旋度

设 $\boldsymbol{f}$ 为一矢量，由旋度的定义式

$$
\begin{aligned}
&(\nabla\times\boldsymbol{f})_{q_1}\\
&=\lim_{\triangle S\to 0}\frac{\oint\limits_{L_1}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l}}{\triangle S}\\
&=\frac{[f_{q_2}(q_3)-f_{q_2}(q_3+dq_3)]h_2dq_2+[f_{q_3}(q_2+dq_2)-f_{q_3}(q_2)]h_3dq_3}{h_2dq_2h_3dq_3}\\
&=\frac{-\frac{\partial(f_{q_2}h_2)}{\partial q_3}dq_2dq_3+\frac{\partial(f_{q_3}h_3)}{\partial q_2}dq_2dq_3}{h_2dq_2h_3dq_3}\\
&=\frac{1}{h_2h_3}[-\frac{\partial(f_{q_2}h_2)}{\partial q_3}+\frac{\partial(f_{q_3}h_3)}{\partial q_2}],
\end{aligned}
$$

同理，

$$
\begin{aligned}
(\nabla\times\boldsymbol{f})_{q_2}&=\frac{1}{h_1h_3}[-\frac{\partial(f_{q_1}h_1)}{\partial q_3}+\frac{\partial(f_{q_3}h_3)}{\partial q_1}],\\
(\nabla\times\boldsymbol{f})_{q_3}&=\frac{1}{h_1h_2}[-\frac{\partial(f_{q_1}h_1)}{\partial q_2}+\frac{\partial(f_{q_2}h_2)}{\partial q_1}],
\end{aligned}
$$

写成紧凑的形式，即

$$
\nabla\times\boldsymbol{f}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\hat{\boldsymbol{q_1}} & h_2\hat{\boldsymbol{q_2}} & h_3\hat{\boldsymbol{q_3}}\\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3}\\ h_1f_{q_1} & h_2f_{q_2} & h_3f_{q_3}\end{vmatrix},
$$

拉普拉斯算子

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f&=\nabla\cdot\nabla f\\
&=\frac{1}{h_1h_2h_3}[\frac{\partial(\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}h_2h_3)}{\partial q_1}+\frac{\partial(\frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}h_1h_3)}{\partial q_2}+\frac{\partial(\frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}h_1h_2)}{\partial q_3}]\\
&=\frac{1}{h_1h_2h_3}[\frac{\partial}{\partial q_1}(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1})+\frac{\partial}{\partial q_2}(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2})+\frac{\partial}{\partial q_3}(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3})].
\end{aligned}
$$

下面以柱坐标为例子，推导其下的梯度，散度，旋度的形式：

直角坐标与柱坐标之间的关系为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

所以

$$h_1 = \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial r})^2 + (\frac{\partial y}{\partial r})^2 + (\frac{\partial z}{\partial r})^2} = 1,$$
$$h_2 = \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \theta})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \theta})^2 + (\frac{\partial z}{\partial \theta})^2} = r,$$
$$h_2 = \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial z})^2 + (\frac{\partial y}{\partial z})^2 + (\frac{\partial z}{\partial z})^2} = 1,$$

那么

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}},$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{f} = \frac{1}{r}[\frac{\partial(rf_r)}{\partial r} + \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial(rf_z)}{\partial z}],$$
$$\nabla\times\boldsymbol{f} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{r}} & r\hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_r & rf_\theta & f_z \end{vmatrix},$$
$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial z}(r\frac{\partial f}{\partial z})].$$

同理，球坐标下：

$$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r\sin\theta,$$
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}},$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{f} = \frac{1}{r^2\sin\theta}[\frac{\partial(r^2\sin\theta f_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r\sin\theta f_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(rf_\varphi)}{\partial \varphi}],$$

$$\nabla \times \boldsymbol{f} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{r}} & r\hat{\boldsymbol{\theta}} & r\sin\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ f_r & rf_\theta & r\sin\theta f_\varphi \end{vmatrix},$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2 \sin\theta}[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\theta \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi})].$$

所以，不必害怕这些繁琐的形式，我们只需要记忆坐标系对应的拉梅系数就可以了.