11.2.2 数量场在曲面上的积分的计算

曲面板材质量 设曲面 S 是放在 $\mathbb{R}^3$ 中一个非均匀的板材, 其质量分布 (面密度) 为连续函数 $\rho(x, y, z)$. 求此板材的质量.

合理的方法是先将板材 S 分割成有限个充分小的板材片:

$$S_1, S_2, \cdots, S_n,$$

每一片上的质量密度近似为一个常数 $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, 这里 (ξ_i, η_i, ζ_i) 为小片 S_i 上的一点, 所以小片的质量近似为 $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$, 其中 ΔS_i 是小片 S_i 的面积. 将所有这样的近似值相加就是板材总的质量的近似值:

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i.$$

当分割越分越细时, 这个和式的极限值应该就是板材的质量.

定义 1 设 S 是一张有界的光滑曲面, $f(x, y, z)$ 是定义在 S 上的函数. 用任意分法把 S 分成 n 块有面积的曲面 $S_1, S_2, \cdots, S_n$, 这些小曲面块的面积记为 ΔS_i. 在每块小曲面 S_i 上任取一点 $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, 如果下列极限

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i,$$

是一个有限数, 而且与 $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 的选择无关, 其中 λ 是所有小块曲面的最大直径, 则称函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 S 上的可积, 极限值就是它的积分值, 记成

$$\iint_S f(x, y, z) dS,$$

其中 dS 称为曲面的面积元素.

显然, 常值函数 $f = c$ 在有面积 $\sigma(S)$ 的曲面 S 上是可积的, 且 $\iint_S c\, dS = c\sigma(S)$.

定理 1 如果 f 在曲面 S 上可积, 那么 f 在 S 上有界.

定理 2 若 f 和 g 都在曲面 S 上可积, c_1, c_2 是常数, 则 $c_1 f + c_2 g$ 也在 S 上可积, 且

$$\int_S (c_1 f + c_2 g)\, dS = c_1 \int_S f\, ds + c_2 \int_S g\, dS.$$

定理 3 设 f 和 g 都在曲面 S 上可积.

(1) 若 $f \geqslant 0$, 则 $\int_S f\, dS \geqslant 0$; (2) 若 $f \geqslant g$, 则 $\int_S f\, dS \geqslant \int_S g\, dS$.

定理 4 设 S_1 和 S_2 是两片相接的可求面积的曲面, S 是由 S_1 与 S_2 拼接而成的曲面. 如果 f 在 S_1 和 S_2 上都可积, 那么 f 也在 S 上可积, 并且

$$\int_S f\, dS = \int_{S_1} f\, dS + \int_{S_2} f\, dS.$$

定义 2 集合 $E \subset \mathbb{R}^3$ 称为二维零测集, 若存在光滑映射

$$\varphi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$$

使得 φ 的像覆盖 E, 而且 E 在 φ 下的原像是 $[0,1] \times [0,1]$ 中的零测集.

定理 5 设 S 是一块可求面积的曲面, f 是 S 上有界函数, 如果 f 在 S 上的间断点全体是一个二维零测集, 则 f 在 S 上可积.

定理 6 (**积分平均值定理**) 设 S 是一块可求面积的曲面. 若 f 是 S 上连续函数, 则存在 $P_0 \in S$ 使得

$$\int_S f\, dS = f(P_0)\sigma(S).$$

这里 $\sigma(S)$ 是 S 的面积.

当光滑曲面 S 的具有参数方程表示

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k},\qquad (u,v)\in D,$$

时, 其中 D 是平面 $O'uv$ 上的有界闭区域. 设函数 $f(x,y,z)$ 在包含 S 的一个区域内连续 (有时简称函数在 S 上连续), 则它在 S 上的曲面积分是一定存在的, 而且有

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v|dudv \tag{11.1}$$

$$=\iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv. \tag{11.2}$$

特别, 如果光滑曲面 S 由直角坐标方程 $z=z(x,y)$, $(x,y)\in D$ 给出, 则有

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy.$$

例 1 设 S 是第一卦限的球面 $x^2+y^2+z^2=R^2\,(x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$，计算曲面积分 $\iint_S (x^2+y^2)dS$.

解 将球面 S 表示为参数方程

$$x=R\sin\theta\cos\varphi,\quad y=R\sin\theta\sin\varphi,\quad z=R\cos\theta,$$

则 θ,φ 的变化范围是平面 $O'\theta\varphi$ 上的矩形 D'

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

而球面的面积元素为

$$dS=R^2\sin\theta d\theta d\varphi,$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_S (x^2+y^2)dS &= \iint_{D'} R^2\sin^2\theta\cdot R^2\sin\theta d\theta d\varphi\\ &= R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta=\frac{1}{3}\pi R^4.\end{aligned}$$

解法2 这个积分也可以从对称性方面考虑, 因为在 S 上, x^2, y^2, z^2 的积分是一样的, 所以

$$\begin{aligned}\iint_S (x^2+y^2)dS &= 2\iint_S x^2 dS \\ &= \frac{2}{3}\iint_S (x^2+y^2+z^2)dS \\ &= \frac{2R^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \\ &= \frac{1}{3}\pi R^4.\end{aligned}$$

例 2 设 S 是锥面 $z^2=k^2(x^2+y^2)\ (z\geqslant 0)$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax\ (a>0)$ 所截得的曲面, 计算曲面积分 $\iint_S (y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)dS$.

解 所给曲面 S 的面积元素是

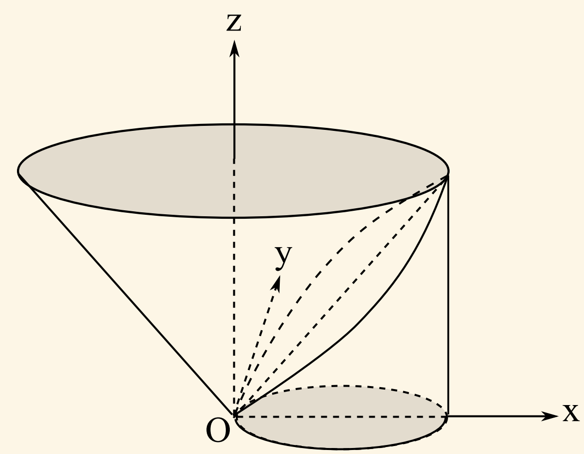
$$dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=\sqrt{1+k^2}dxdy.$$

并且 S 在平面 Oxy 上的投影区域 D 是圆

$$x^2+y^2\leqslant 2ax,$$

于是算得

$$\begin{aligned}&\iint_S (y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)dS\\ =&\sqrt{1+k^2}\iint_D \left(k^2(x^2+y^2)^2+x^2y^2\right)dxdy\\ =&2\sqrt{1+k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi} r^5(k^2+\cos^2\varphi\sin^2\varphi)dr\\ =&\frac{\pi}{24}a^6(80k^2+7)\sqrt{1+k^2}.\end{aligned}$$



例 3 设 S 是柱面 $x^2+y^2=a^2$ 被平面 $z=0$ 和 $z=h$ $(h>0)$ 所截下的一块柱面. 计算曲面积分 $\iint_S (x^4+y^4)\,dS$.

解 利用柱面参数方程. S 的参数方程为

$$\vec{r}=(a\cos\varphi,\ a\sin\varphi,\ z),\ (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant z\leqslant h).$$

因为

$$\begin{aligned}\vec{r}'_\varphi &= (-a\sin\varphi,\ a\cos\varphi,\ 0),\\ \vec{r}'_z &= (0,0,1),\end{aligned}$$

所以

$$E=a^2,\ F=0,\ G=1.$$

因为这个柱面关于 x,y 对称, 所以

$$\iint_S x^4\,dS=\iint_S y^4\,dS.$$

因此有

$$\begin{aligned}\iint_S (x^4+y^4)\,dS &= 2\iint_S y^4\,dS \\ &= 2\iint\limits_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\\ 0\leqslant z\leqslant h}} a^4\sin^4\varphi\cdot a\,d\varphi dz \\ &= 8a^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^h dz \\ &= 8a^5\cdot\left(\frac{3!!}{4!!}\,\frac{\pi}{2}\right)\cdot h \\ &= \frac{3}{2}\pi h a^5.\end{aligned}$$