中国科学技术大学

2019-2020 第一学期期末考试题

考试科目：随机过程（B）　　　　　　　　得分：______

学生所在系：______________ 姓名：__________ 学号：__________

（2020 年 1 月 6 日，半开卷）

一、(30 分，每空 2 分) 判断是非与填空：

（1）设 $X_0 = 0, X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i,\ (n \ge 1)$，其中 $\{\xi_i, i \ge 1\}$ 为 i.i.d.，且 $P\{\xi_i = -1\} =$

$= P\{\xi_i = 1\} = 0.5$，则 $\{X_n, n \ge 0\}$ 为：

$a.$ 独立增量过程　(　　)；　$b.$ 平稳独立增量过程　(　　)；

$c.$ 正常返马氏链（　　）；　$d.$ 瞬过马氏链　(　　)；　$e.$ $\lim\limits_{n\to\infty} P\{X_n = 0\} = 0$ 。

（2）下列函数是否为平稳过程的谱密度函数：

$a.\ S_1(\omega) = \frac{\omega^2 - 16}{\omega^4 + 11\omega^2 + 18}$　(　　)；　$b.\ S_2(\omega) = \frac{\omega^2 + 1}{\omega^4 + 5\omega^2 + 6}$　(　　)；

$c.\ S_3(\omega) = \frac{\omega^2 \cos\omega}{\omega^4 + 1}$　(　　)；　$d.\ S_4(\omega) = \frac{e^{-i|\omega|}}{\omega^2 + a^2}, (i = \sqrt{-1})$　(　　)

（3）到达某邮箱的正常电子邮件和垃圾邮件数分别是强度为 9 和 3 的泊松过程，且相互独立。则第一封邮件的平均到达时间为（　　），第一封垃圾邮件到达之前恰好到达了 k 封正常邮件的概率为（　　）。

（4）设 $\{X(t), t \ge 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，命 $X_T = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt$，则：

$E(X_T) = ($　　　$)$，$Var(X_T) = ($　　　$)$。

（5）到达某商店的顾客数 $N(t)$ 是一强度为 $\lambda(t) = 2 + t/2$ 的非齐次泊松过程，若该商店早上 8:00 开门，则午时段(11:00-13:00)没有顾客到达的概率为(　　)，午时段到达商店的平均人数为(　　)。

二、**（15 分）**设某种健康险投保者中的出险人数 $N(t)$ 为一强度为 5 的泊松过程，若以 Y_i 表示第 i 个出险者应获赔偿，并假定 $Y_i \sim U(1,3)$（均匀分布，单位：万元），且 $\{Y, i \ge 1\}$ 为 i.i.d.，试求到时刻 t 为止保险公司应付全部赔偿 $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ 的期望 $EX(t)$、方差 $Var[X(t)]$ 及矩母函数 $g_{X(t)}(s)$。(均匀分布矩母函数：$g(s) = \frac{e^{bs} - e^{as}}{(b-a)s}$)

三、**(18 分)** 圆周上有 1,2,3,4 四个位置按顺时针方向排列，一个粒子在这四个位置上(沿圆周)作随机游动。它从任何一个位置各以概率 0.5 顺时针方向或逆时针方向游动至其相邻位置，若以 $X_n = j$ 表示时刻 n 粒子处于位置 j ($j=1,2,3,4$)，则 $\{X_n, n\ge 0\}$ 为一马氏链，

（1）求该马氏链的转移概率矩阵 P 及 $P^{(2)}$，并求 $P\{X_{n+3}=3, X_{n+1}=1 \mid X_n=2\}=?$

（2）讨论该马氏链状态分类并求其平稳分布 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4)$；

（3）极限 $\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)}$ 是否存在？为什么？

四、**(12 分)** 设 $\{X_n, n\ge 0\}$ 为区间 $[0,3]$ 上的随机游动，其转移概率矩阵为：

$$P=\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

试求粒子由 k 出发而被 0 吸收的概率 p_k 及它被吸收的平均步数 v_k,（$k=1,2,3$）。

五、**(15 分)** 设 A 与 Θ 独立， $A \sim Exp(1/3)$ (指数分布)， $\Theta \sim U(0,2\pi)$ (均匀分布)，定义随机过程：

$$X(t)=A\cos(t+\Theta), \quad (t\in R)$$

（1）证明 $\{X(t),\ t\in R\}$ 为宽平稳过程；

（2）试求其功率谱密度函数 $S(\omega)$。

六、**(10 分)** 设平稳过程 $X=\{X(t),\ t\in R\}$（均值为 0）的功率谱密度函数为：

$$S(\omega)=\frac{\omega^2+3}{\omega^4+11\omega^2+28}$$

（1）试求 X 的协方差函数 $R(\tau)$；

（2）问 X 的均值是否有遍历性？为什么？

（完）