

数学分析A2 第二次单元测试

学生所在系: 姓名: 学号: 总分:

2018年5月23日

一、改换累次积分的次序(每小题8分)

得分

(1) $\int_0^1 dy \int_{y^2-1}^{1-y} f(x,y) dx .$

(2) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z) dz$ 将其积分次序 $z \rightarrow y \rightarrow x$ 改变为 $x \rightarrow y \rightarrow z$.

二、(10分)

得分

计算累次积分 $\int_0^e dy \int_1^2 \frac{\ln x}{e^x} dx + \int_e^{e^2} dy \int_{\ln y}^2 \frac{\ln x}{e^x} dx .$

三、(10分)

得分

计算积分 $\iint_D (2\sqrt{x} - \sqrt{y}) dx dy$, 其中 $D = \{(x,y) : x,y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}$.

四、(每小题8分)

得分

Ω 为曲线 $\begin{cases} x^2 = 2z \\ y = 0 \end{cases}$, 绕 z 轴旋转一周生成的曲面与 $z = 1, z = 2$ 所围成的区域.

(1) 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz.$

(2) 计算 $\iiint_{\Omega} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz.$

五、(10分)

得分	
----	--

求曲线 $|\ln x| + |\ln y| = 1$ 所围平面图形的面积.

六、(10分)

得分	
----	--

求曲面 $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = 2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ ($a, b, c > 0$) 所围成立体的体积.

七、(10分)

得分	
----	--

计算 n 重积分 $\int_{[0,1]^n} \cdots \int \sin^2 \left[\frac{\pi}{2n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \right] dx_1 dx_2 \cdots dx_n$.

八、(12分)

得分	
----	--

设 $f(x, y)$ 在单位圆盘上有连续的偏导数, 且在边界上取值为零,

求 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}}{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 $D_\varepsilon = \{(x, y) : 0 < \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$.

九、(6分)

得分	
----	--

设函数 $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上有面积集合 B_1 和 B_2 上可积, $B_1 \cap B_2$ 是二维零测集,

证明 f 在 $B_1 \cup B_2$ 上可积, 而且

$$\int_{B_1 \cup B_2} f d\sigma = \int_{B_1} f d\sigma + \int_{B_2} f d\sigma.$$