中 国 科 学 技 术 大 学

2009—2010 学年第一学期考试试卷

考试科目:复变函数 (B 型)　　　　得分 ________

学生所在系:________　　姓名 ________　　学号 ________

一、填空题 (**每题** 3 **分，共** 18 **分**)

1. 若 $e^{i(z-2)}=2$, 则 $z=$ ________

2. $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z^{n+1}}\mathrm{d}z=$ ________ (n 为正整数).

3. 设 $f(z)=\dfrac{z\sin z}{(1-e^{2z})^3}$, 则 $\mathrm{Res}[f(z),\ 0]=$ ________

4. 已知解析函数 $f(z)$ 的实部为 x^2-y^2+2x+1 且 $f(0)=1$, 则 $f(z)=$ ________

5. $e^z-\pi z^n$($n\geq 1$ 为自然数) 在区域 $|z|<1$ 内的零点的个数为 ________

6. 设 $f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ 0 & x<0,\end{cases}$ 而 $g(x)=e^x,\ x\in(-\infty,+\infty)$,

　则 $f(x)*g(x)=$ ________

二、级数展开题 (**每题** 7 **分，共** 14 **分**)

1. 设函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(1-z)}$, 在去心园域 $0<|z|<1$ 内把 $f(z)$ 展成罗朗级数.

2. 设 $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-4)}$, 在区域 $2<|z-4|<+\infty$ 内把 $f(z)$ 展为罗朗级数.

三、积分计算题 (**每题** 8 **分，共** 40 **分**)

(1) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{e^z\sin z}{\cos z}\mathrm{d}z$;　　(2) $\displaystyle\int_{|z|=2}z^3(1-\cos\frac{1}{z})\mathrm{d}z$;

.

(3) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^3(13-z^2)}$;　　(4) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{5-3\cos\theta}$;

(5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2-2x+2)}dx$.

四、利用拉氏变换解微分方程：（每题 8 分，共 16 分）

$$(1)\ \begin{cases} y''(t)+y'(t)=1 \\ y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} y''+2y'+2y=2t \\ y(0)=1, y'(0)=-2. \end{cases}$$

五、综合证明题 (12 **分**)

设 D 是一个有界区域， $f(z)$ 是 D 上的解析函数.

1). 如果 $|f(z)| \equiv R$, 证明 $f(z)$ 一定恒为常数，这里 R 是正的实常数.

2). 换这样一种观点看上述 1): 如果 f 的值域包含于 $w-$ 复平面上半径为 R 的圆周上，则 $f(z)$ 恒为常数. 在这种观点下，我们试图推广这一结论如下： **如果 $f(z)$ 的值域包含于一条简单曲线 $w=w(t)$ 上， $t\in[0,\ 1]$，则 $f(z)$ 恒为常数**. 请判断这个猜测的正确性，如果正确请给予证明，如果错误请举反例予以说明.

参考答案

一填空题，每题 3 分

$$1.\, z=(2k\pi+2)-(\ln 2)i, \text{k 为整数}, \qquad 2.\, z=\frac{2\pi i}{n!}, \qquad 3.\, z=-\frac{1}{8}$$

$$4.\, f(z)=z^2+2z+1\,, \qquad 5.\, n \qquad 6.\, e^x$$

注：第 4 小题答成 $f(z)=x^2-y^2+2x+1+i(2xy+2y)$ 也算对

二、级数展开题 (每题 7 分)

$$1. f(z)=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty} z^n=\sum_{n=-2}^{+\infty} z^n \quad (0<|z|<1)$$

$$2.\ f(z)=\frac{1}{z-4}\,\frac{1}{2+(z-4)}=\frac{1}{z-4}\frac{\frac{1}{z-4}}{1+\frac{2}{z-4}}$$

$$=\frac{1}{(z-4)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-2}{z-4}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{(z-4)^{n+2}} \quad (2<|z-4|<+\infty)$$

三积分计算题 (每题 8 分).

(1) $f(z)=\frac{e^z\sin z}{\cos z}$ 在围道内的奇点为： $z_1=\frac{\pi}{2}, z_2=-\frac{\pi}{2}$, 则

$$\int_{|z|=2}\frac{e^z\sin z}{\cos z}dz=2\pi i\left(Res(f(z),z_1)+Res(f(z),z_2)\right)$$

$$=2\pi i\left(\frac{e^z\sin z}{(\cos z)'}\,|_{z=z_1}+\frac{e^z\sin z}{(\cos z)'}\,|_{z=z_2}\right)=\ -\mathbf{2\pi i(e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}})$$

(2) 记 $f(z)=z^3(1-\cos\frac{1}{z})$, 则 $f(z)=z^3\left(1-(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}+......)\right)$, 这样 $f(z)$ 的 z^{-1} 系数 $a_{-1}=-\frac{1}{4!}$, 由于闭路中只有唯一奇点 0 ，则原积分 $=2\pi i a_{-1}=-\frac{\pi\mathbf{i}}{\mathbf{12}}$

(3) 记 $f(z)=\frac{1}{z^3(13-z^2)}$, 闭路中只有唯一奇点 $0, Res[f(z),0]=\frac{1}{2!}\lim\limits_{z\to 0}(z^3f(z))''=\frac{1}{169}$, 这样：

$$\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^3(13-z^2)}=2\pi i Res[f(z),0]=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{169}}\pi\mathbf{i}$$

(4) 令 $z=e^{i\theta}$, 则 $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{5-3\cos\theta}=\int_{|z|=1}f(z)dz$, 其中 $f(z)=\frac{2i}{3z^2-10z+3}$,$f(z)$ 在 $|z|=1$ 内有唯一奇点 $z_1=\frac{1}{3}$, 而 $Res[f(z),\frac{1}{3}]=\lim\limits_{z\to\frac{1}{3}}\left((z-\frac{1}{3})f(z)\right)=-\frac{i}{4}$， 所以由留数定理,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{5-3\cos\theta}=\int_{|z|=1}f(z)dz=2\pi i Res[f(z),\frac{1}{3}]=2\pi i\times(-\frac{i}{4})=\frac{\pi}{\mathbf{2}}$$

(5) 取 $f(z)=\frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}$, 并取围道 $C=[-R,-r]+C_r+[r,R]+C_R$, 其中 $R>r>0$, C_r 指以原点为中心 r 为半径的上半圆，即 $C_r=\{z\mid |z|=r, Imz\geq 0\}$. C_R 类似定义。 $f(z)$ 在围道 C 内奇点为： $z_1=1+i$ 。这样由留数定理：

$\int_C f(z)dz = \int_{-R}^{-r} f(x)dx + \int_{C_r} f(z)dz + \int_r^R f(x)dx + + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i Res[f(z), z_1] \qquad (1)$,
由大圆弧原理 (引理 1) 或由约当引理 (引理 3): $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$ ，再由小圆弧引理 (引理 2): $\lim\limits_{r\to0} \int_{C_r} f(z)dz = -\pi i Res[f(z), 0] = -\frac{\pi i}{2}$ ，而
$2\pi i Res[f(z), z_1] = 2\pi i \lim\limits_{z\to z_1} (z - z_1)f(z) = \frac{\pi}{2}e^{-1}((\cos 1 + \sin 1) + i(\sin 1 - \cos 1))$, 这样结合 (1) 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2 + 2x + 5)} - \frac{\pi i}{5} = \frac{\pi}{10}e^{-2}((-\cos 1 - 2\sin 1) + i(-2\cos 1 + \sin 1)).$$

最后比较虚部，原积分 $= \frac{\pi}{10}e^{-2}(-2\cos 1 + \sin 1) + \frac{\pi}{5}$.

五. (1) 记 $L(y(t)) = Y(p)$, 对方程作 Laplace 变换：得到：
$p^2Y(p) + pY(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow Y(p) = \frac{1}{p^2(p+1)}$, 最后利用 Laplace 反变换

$$y(t) = Res[Y(p)e^{pt}, 0] + Res[Y(p)e^{pt}, -1]$$

$Res[Y(p)e^{pt}, 0] = \lim\limits_{p\to0} \frac{e^{pt}}{(p+1)})' = t - 1$, $Res[Y(p)e^{pt}, -1] = \lim\limits_{p\to-1} (\frac{e^{pt}}{p^2}) = e^{-t}$ 所以原方程解为

$$\mathbf{y(t) = e^{-t} + t - 1}$$

(2) 记 $L(y(t)) = Y(p)$, 对方程作 Laplace 变换：得到：
$p^2Y(p) - p - 2 + 2 + 2(pY(p) - 1) + 2Y(p) = \frac{2}{p^2} \Rightarrow Y(p) = \frac{2}{(p^2+2p+2)p^2} + \frac{p}{p^2+2p+2}$,
利用化部分分式的方法， $Y(p) = -\frac{1}{2}\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\frac{1}{p^2} + \frac{\frac{3}{2}(p+1)-1}{(p+1)^2+1}$, 最后利用 Laplace 反变换并结合位移定理得到：

$$\mathbf{y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t}$$

七. 1) **证明**：如果 $|f(z)| \equiv R$, 证明 $f(z)$ 一定恒为常数，这里 R 是正的实常数. 证明：设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, 依条件： $u^2 + v^2 = R^2$, 两边分别对 x 和 y 求导得到：

$$\begin{cases} uu_x + vv_x = 0 \\ uu_y + vv_y = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

利用 C-R 方程 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, 上式变为：

$$\begin{cases} uu_x + vv_x = 0 \\ vu_x - uv_x = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

把 (2) 看成 u_x, v_x 的方程组，再因为 $u^2 + v^2 \neq 0$, 即方程组系数行列式不为 0 ，这样解得：$u_x = v_x = 0$ ，再次利用 C-R 方程，得到： $u_y = v_y = 0$, 这样 u, v 都为常数，即 $f(z)$ 一定恒为常数，证闭.

1 ）令 $H(z) = f(z) - g(z)$, 这样只要证明在 D 内 $H(z)$ 恒等于 0 ，首先，依条件，$H(a_n) = f(a_n) - g(a_n) = 0, n = 0, 1, 2......$, 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, 且 $H(z)$ 在 a 点连续，所以 $H(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} H(a_n) = 0$, 这样 a 是 H(z) 的一个零点，并且不是孤立的.

2) 我们以下证明存在 a 的一个领域 S 使得在 S 内 $H(z)$ 恒等于 0. 用反证法，假定不然，则 $H(z) = (z - a)^m\varphi(z)$, 其中 m 为某一正整数，而 $\varphi(z)$ 解析， $\varphi(a) \neq 0$, 由连续性，存在

a 的一个领域 v, 在 v 中 $\varphi(z) \neq 0$, 这样在 v 内除 a 点外都有 $H(z) \neq 0$, 这说明 a 是孤立零点。这与 a 不是孤立零点矛盾。这样我们就证明了存在 a 的一个领域 S 使得 $H(z)$ 恒等于 0.

3) 最后，对与 D 内任意一点 z_0, 我们总可找折线 L 连接 a 和 z_0, 利用滚圆法 (即利用 a 为中心可作圆 S_1, 使 S_1 内 H(z) 恒为 0，然后再利用 S_1 与折线 L 的交点再作圆 S_2, 使 S_2 内 H(z) 恒为 0, 一直作下去直到最后一个圆包含了 z_0) 可证明 $H(z_0) = H(a) = 0$, 这样就证明了结论。

注：以上前两步已正确论述，而在第三步未详细论述滚圆法的不扣分。