日期: /

第二章 位势方程

$\Delta u = f$ in Ω $\begin{cases} f=0 & \text{Laplace} \\ f\neq 0 & \text{Poisson} \end{cases}$

u 仅为 x 函数

Dirichlet $u|_{\partial\Omega} = \varphi$

Neumann $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = \varphi$

Robin $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\Big|_{\partial\Omega} = \varphi$

Rmk. 波方程 $\partial_t^2 u - \Delta u = f$，$u$ 若不随 t 变化，则此为位势方程

位势方程可视作波动方程稳态解

§2.1 调和函数

def 1. 调和函数

$u: \Omega \to R$，有2阶连续偏导数，$\Delta u = 0$

def. u 为调和函数

Recall 公式

1. $f: R^n \to R$

$\int_{R^n} f(x)\,dx = \int_0^\infty \int_{\partial B(x_0,r)} f(y)\,dS(y)\,dr$

$(y = x_0 + rw) = \int_0^\infty \int_{|w|=1} f(x_0+rw)\,dS(w)\,r^{n-1}dr$

$\int_{B_{r_0}(x_0)} f(x)\,dx = \int_0^{r_0} \int_{|w|=1} f(x_0+rw)\,dS(w)\,r^{n-1}dr$

2. $\frac{d}{dr}\int_{B(x_0,r)} f(y)\,dy = \int_{\partial B(x_0,r)} f(y)\,dS(y)$

def 2. 平均值性质

$u \in C(\Omega)$，u 满足平均值：

$\forall B_r(x) \subset \Omega$，有 $u(x) = \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} u(y)\,dy$ ①

$\Omega \in \mathbb{R}^3$，$|B_r(x)| = \frac{4}{3}\pi r^3$

u 满足第二平均值：

$\forall B_r(x) \subset \Omega$，有 $u(x) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)} u(y)\,dS(y)$ ②

$\Omega \in \mathbb{R}^3$，$|\partial B_r(x)| = 4\pi r^2$，$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{|w|=1} u(x+rw)\,dw$

claim：① $\Leftrightarrow$ ②

② $\Rightarrow$ ①：

$$\forall B_r(x) \subseteq \Omega,\ \int_{B_r(x)} u(y)\,dy = \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,\rho)} u(y)\,dS(y)\right) d\rho$$
$$\overset{②}{=} \int_0^r |\partial B(x,\rho)|\,u(x)\,d\rho$$
$$= u(x)\int_0^r |\partial B(x,\rho)|\,d\rho = u(x)\,|B(x,r)| \Rightarrow ①$$

① $\Rightarrow$ ②：　　(注意到：$|B(x,r)| = \int_0^r |\partial B(x,\rho)|\,d\rho$)

$\forall B_r(x) \subseteq \Omega$，$|B_r(x)|\,u(x) = \int_{B_r(x)} u(y)\,dy$

对 r 微分，有 $|\partial B(r,x)|\,u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS(y) \Leftrightarrow$ ②

thm 1. 调和函数 $\Rightarrow$ 平均值

$u \in C^2(\Omega)$，为 Ω 上调和函数，对任意 $B_r(x) \subseteq \Omega$，

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|}\int_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS(y)$$

pr：　$\Delta u = 0$，in Ω　$\forall B_r(x) \subset \Omega$

$$0 = \int_{B_r(x)} \Delta u\,dy = \int_{B_r(x)} \operatorname{div}(\nabla u)\,dy = \int_{\partial B(x,r)} \nabla u \cdot \vec{n}\,dS(y)$$
$$= \int_{|y-x|=r} \nabla u(y)\cdot\frac{y-x}{r}\,dS(y)$$
$$\overset{y=x+rw}{=} \int_{|w|=1} w\cdot\nabla u(x+rw)\,r^{n-1}\,dw$$ (w表示单位球面上面积元)

$$= r^{n-1}\int_{|w|=1} \frac{d}{dr}\left(u(x+rw)\right) dw$$

$$= r^{n-1}\frac{d}{dr}\int_{|w|=1} u(x+rw)\,dw$$

$$\Rightarrow \forall r,\ \int_{|w|=1} u(x+rw)\,dw = \int_{|w|=1} u(x)\,dw = |\partial B(x,1)|\,u(x)$$

故 $u(x) = \frac{1}{|\partial B(x,1)|}\int_{|w|=1} u(x+rw)\,dw$

$$\overset{y=x+rw}{=} \frac{1}{|\partial B(x,r)|}\int_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS(y)$$

thm 2. 平均值 ⇒ 调和、光滑

$u\in C(\Omega)$，满足 $\forall B_r(x)\subset\Omega$，

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|}\int_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS(y)$$

则 u 光滑且为调和函数

Recall 卷积

$$(f*g)(x) \overset{\text{def.}}{=} \int f(x-y)g(y)\,dy$$

f. g 中若一者光滑，则 $(f*g)(x)$ 光滑

pr：令 $\varphi\in C_0^\infty(B_1(0))$ (在一个紧集外恒为0)

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,dx = 1 = \int_{B_1(0)}\varphi(x)\,dx$$

$\varphi(x) = \varphi(|x|)$ (镜像、球面对称，仅为 r 函数，与角度无关)

则 $\int_0^1\int_{|w|=1}\varphi(r)r^{n-1}\,dw\,dr$

$= \omega_n\int_0^1\varphi(r)r^{n-1}\,dr$ (ω_n 表示 n 维单位球面面积)

$= 1$ (利用了镜像对称)

def：$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

$\varphi_\varepsilon\in C_0^\infty(B_\varepsilon(0))$

且 $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx \overset{x=\varepsilon y}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\,dy = 1$

日期:　　　/

claim:

$\forall x\in\Omega$, 取 $\varepsilon<\frac{1}{4}\text{dist}(x,\partial\Omega)$, 则

$u(x)=(u*\varphi_\varepsilon)(x)$

$$(u*\varphi_\varepsilon)(x)=\int_\Omega u(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy$$
$$=\int_{\Omega\cap B_\varepsilon(x)}u(y)\frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy$$
$$=\int_{B_\varepsilon(x)}u(y)\frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy$$
$$\overset{y=x+rw}{=}\int_0^\varepsilon\int_{|w|=1}u(x+rw)\frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)r^{n-1}\,dr\,dw$$
$$\overset{\frac{r}{\varepsilon}=\rho}{=}\int_0^1\int_{|w|=1}u(x+\rho\varepsilon w)\,dw\,\rho^{n-1}\varphi(\rho)\,d\rho$$

$$\int_{|w|=1}u(x+\rho\varepsilon w)\,dw=\int_{|w|=1}u(x)\,dw=\omega_n u(x)$$

故 $(u*\varphi_\varepsilon)(x)=\omega_n\int_0^1\rho^{n-1}\varphi(\rho)\,d\rho\,u(x)=u(x)$

φ_ε 光滑, 由卷积性质 u 光滑

下说明 u 调和

step 1 $u\in C^2(\Omega)$

step 2 $\Delta u=0$

claim: $\forall x, r>0$, $\int_{B_r(x)}\Delta u(y)\,dy=0$

则 $\Delta u\equiv 0$

否则, $\exists x_0$. s.t. $(\Delta u)(x_0)\neq 0$, 不妨 $=C>0$

则 $\exists r_0>0$. $(\Delta u)(x)>\frac{C}{2}$ $\forall x\in B_{r_0}(x_0)$

则 $\int_{B_{r_0}(x_0)}\Delta u(y)\,dy\geq\frac{C}{2}|B_{r_0}(x_0)|>0$

事实上, $\int_{B_r(x)}\Delta u(y)\,dy=\int_{B_r(x)}\text{div}(\nabla u)(y)\,dy=\int_{\partial B(x,r)}\nabla u\cdot\frac{y-x}{r}\,dS(y)$

$$=\int_{|w|=1}w\cdot\nabla u(x+rw)r^{n-1}\,dw=r^{n-1}\frac{d}{dr}\int_{|w|=1}u(x+rw)\,dw\underset{\text{平均值性质}}{=}0$$

Rmk. 平均值性质即函数值 = 邻域内/球面上函数值的平均

满足平均值性质仅需可积

满足调和需要二阶连续可微

调和函数必然光滑

thm 3. (Harnack 不等式)

设 u 为 Ω 上非负连续函数，u 调和，对 Ω 上任意联通紧集 V，

$\exists\ C = C(\mathrm{dist}(V,\partial\Omega), n)$, st.　　$\mathrm{dist}(V,\partial\Omega) = \inf\limits_{\substack{x\in V\\ y\in\partial\Omega}} |x-y|$

$\sup\limits_V u \le C \inf\limits_V u$

Rmk. C 与 V, n 有关，与函数 u 无关

pr:　claim: $u(y) \le C u(x)$

令 $r = \frac{1}{4}\mathrm{dist}(V,\partial\Omega)$

① $\forall x, y$ $|x-y|<r$，则 $B(x,2r) \supset B(y,r)$

($\forall z \in B(y,r)$, $|y-z|<r$

$|z-x| \le |z-y| + |y-x| < 2r$, $z \in B(x,2r)$)

u 调和，则 u 满足平均值性质

$$u(x) = \frac{1}{|B_{2r}(x)|}\int_{B_{2r}(x)} u(z)\,dz$$

$$\ge \frac{1}{2^n}\frac{1}{B_r(y)}\int_{B_r(y)} u(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{2^n}u(y) \iff u(y) \le 2^n u(x)$$

② $\forall x, y \in V$

$\exists B_1, \dots, B_N$, $B_i \cap B_{i+1} \ne \phi$，半径为 $\frac{r}{2}$，$x \in B_1$, $y \in B_N$

$\forall x_1, x_2 \in B_i$，有 $|x_1 - x_2| < r$，由①，$u(y) \le 2^{nN} u(x)$

N 仅与 V 有关

由 x, y 任意性，$\sup_{x\in V} u \le 2^{nN} \inf_{x\in V} u$

Rmk. 有限覆盖来源于 $\bigcup_{x\in V} B_{\frac{r}{2}}(x)$

thm 4、（梯度估计）

$u \in C(\overline{B_R(x_0)})$ 是调和的，则

$|Du(x_0)| \le \frac{n}{R} \max_{\overline{B_R(x_0)}} |u|$ （度量为最大分量）

pr: 设 $u \in C^1(\overline{B_R(x_0)})$

（u 调和 ⇒ $u \in C^\infty(B_R(x_0))$ 但未知边界处光滑性）

u 调和，则 u 在 B_R 上光滑 （$\overline{B_R(x_0)} = \overline{B_R}$）

故 $\partial_{x_i} u$ 也调和

由平均值性质 $\partial_{x_i} u(x_0) = \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{B_R(x_0)} \partial_{x_i} u(y)\, dy$

$$= \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{\partial B_R(x_0)} u \cdot n_i \, dS(y)$$

$$\Rightarrow |\partial_{x_i} u(x_0)| \le \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{\partial B_R(x_0)} |u(y)|\, dS(y)$$

$$\le \max_{\overline{B_R}} |u| \cdot \frac{n}{R}$$

thm 5.

若 $u \in C(\overline{B_R})$ 为非负调和函数，则

$|Du(x_0)| \le \frac{n}{R} u(x_0)$

pr: $|Du(x_0)| \le \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y)\, dS(y) = \frac{|\partial B(R, x_0)|}{|B_R(x_0)|} u(x_0) = \frac{n}{R} u(x_0)$

平均值性质

日期: /

Cor. (Liouville)

R^n上的上有界/下有界调和函数为常数

pr: $u \le M \Rightarrow u = const$

令 $v = M-u$，则 v 调和，$v \geq 0$

$\forall x_0, R>0$，对 v，$|\nabla v(x_0)| \le \frac{n}{R} v(x_0) = \frac{n}{R}(M-u(x_0))$

令 $R \to \infty$，$|\nabla v(x_0)| = 0$，则 $\nabla v \equiv 0$，即 v 为常数

§2.2 基本解和 Green 函数

def 1. 基本解

若 $\Delta u=\delta$，称 u 为基本解

δ 类似于电点荷，δ 为算子，$\langle\delta, f\rangle=f(0)$

特别地，$\Delta u=0$，$\forall x\neq 0$

想先考虑方程特殊的解的形式

镜像对称 $u(x)=u(|x|)$

$$\Delta u=\partial_r^2 u+\frac{n-1}{r}\partial_r u+\frac{1}{r^2}\Delta_s u=\partial_r^2 u+\frac{n-1}{r}\partial_r u$$

令 $v=\partial_r u$，则 $\partial_r v+\frac{n-1}{r}v=0$

$$\Rightarrow v=C_1 r^{-(n-1)}$$

$$\Rightarrow u(r)=\begin{cases} C_1 r^{-(n-2)}+C_2 & n\geq 3 \\ C_1 \ln r+C_2 & n=2 \end{cases}$$

def 2. 基本解

对 $x\in\mathbb{R}^n$，$x\neq 0$，$\Gamma(x)=\begin{cases} \frac{-1}{2\pi}\ln|x| & n=2 \\ \frac{1}{\omega_n}\frac{1}{|x|^{n-2}} & n\geq 3 \end{cases}$

Rm. $\Delta\Gamma=\delta\neq 0$

thm 1. (Green)

$u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$，则

$$\int_\Omega u\Delta v\,dx=\int_\Omega \nabla\cdot(u\nabla v)-\nabla u\cdot\nabla v\,dx=\int_{\partial\Omega}u\nabla v\cdot\vec{n}\,ds-\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\,dx$$

$$=\int_{\partial\Omega}u\cdot\frac{\partial v}{\partial n}\,ds-\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\,dx \quad (\text{第一 Green})$$

$$\int_\Omega u\Delta v-v\Delta u\,dx=\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\,ds \quad (\text{第二 Green})$$

进一步考虑方程解的表达形式

thm 2. 三维下 $\Delta u=0$ in Ω 的解

$u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$，$\Delta u=0$ in Ω

$\forall x_0\in\Omega$，有 $u(x_0)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\left[-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|x-x_0|}\right)+\frac{1}{|x-x_0|}\frac{\partial u}{\partial n}\right]ds(x)$　(*)

pr: 尝试利用Green公式，但 $\frac{1}{|x-x_0|}$ 具有奇性

在 $\Omega_\varepsilon=\Omega\setminus\overline{B_\varepsilon(x_0)}$ 用第二Green公式

事实上Laplace方程满足平移不变性，则不妨设 $x_0=0$

只需证：若 $0\in\Omega$，$u(0)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\left[-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|x|}\right)-\frac{1}{|x|}\frac{\partial u}{\partial n}\right]ds(x)$　(**)

若(*)(*)成立，对 $u(\cdot+x_0)$ 应用(**)

$$u(x_0)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial(\Omega-x_0)}\left[-u(x+x_0)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|x|}\right)-\frac{1}{|x|}\frac{\partial u}{\partial n}(x+x_0)\right]ds$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\left[-u(x)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|x-x_0|}\right)-\frac{1}{|x-x_0|}\frac{\partial u}{\partial n}\right]ds$$

在 $\Omega_2=\Omega\setminus\overline{B_\varepsilon(0)}$ 上应用第二Green，对 u，$v=\frac{1}{4\pi|x|}$

$$\int_{\Omega_2}(u\Delta v-v\Delta u)dx=0$$
$$=\int_{\partial\Omega_2}u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\,ds$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|x|}\right)-\frac{1}{|x|}\frac{\partial u}{\partial n}\,ds-\underbrace{\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_\varepsilon}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|x|}\right)-\frac{1}{|x|}\frac{\partial u}{\partial n}\,ds}_{\triangleq I}$$

$$I=\frac{1}{4\pi}\int_{|x|=\varepsilon}u\cdot\frac{-1}{r^2}\,ds-\frac{1}{4\pi}\int_{|x|=\varepsilon}\frac{1}{|x|}\frac{\partial u}{\partial n}\,ds$$
$$=\frac{-1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{|x|=\varepsilon}u(x)\,ds-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{B(0,\varepsilon)}\Delta u\,dx$$

令 $\varepsilon\to0$，$I=-u(0)$

Rmk. 也可利用估计

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{|x|=\varepsilon}u(x)-u(0)\,ds\le\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{|x|=\varepsilon}|(\nabla u)(\xi)||x|\,ds\le\max_{\xi\in\bar\Omega}|(\nabla u)(\xi)|\underbrace{\frac{\varepsilon}{4\pi\varepsilon^2}\cdot4\pi\varepsilon^2}_{\to0}$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{|x|=\varepsilon}\frac{1}{|x|}\frac{\partial u}{\partial n}ds\le\max_{x\in\bar\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|\frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot4\pi\varepsilon^2\to0$$

需要 u, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在边界的值，但通常不给定

若 g 在 Ω 内调和，$g|_{\partial\Omega} = \frac{1}{4\pi|x-x_0|}$，则对 u, g 在 Ω 上用第二 Green

$$0 = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds$$

$$\Rightarrow u(x_0) = \int_{\partial\Omega}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(g-\frac{1}{4\pi|x-x_0|}\right) - \left(g-\frac{1}{4\pi|x-x_0|}\right)\frac{\partial u}{\partial n}\right]ds$$

$$= \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial}{\partial n}\left(g-\frac{1}{4\pi|x-x_0|}\right)ds$$

令 $G(x,x_0) = -g(x) + \frac{1}{4\pi|x-x_0|}$

则 $u(x_0) = -\int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial G}{\partial n}(x,x_0)\,dS(x)$　　　Poisson 公式 (2.1)

g 的表达形式应同样被给出

def 3. Green 函数

Ω 上的算子 $-\Delta$ 的 Green 函数，满足

(1) $G(x)$ 在 Ω 内除 x_0 点外二阶连续可微且调和

(2) $G(x) = 0$, $\forall x \in \partial\Omega$

(3) $-G(x) + \frac{1}{4\pi|x-x_0|}$ 在 x_0 有限，且处二阶连续可微且调和

thm3. 性质：$G(x,x_0) = G(x_0,x)$

对 $u = G(x,a)$, $v = G(b,x)$ 在 $\Omega_\varepsilon = \Omega\setminus(\overline{B_\varepsilon(a)} \cup \overline{B_\varepsilon(b)})$ 应用第二 Green

则 $0 = \int_{\partial\Omega_\varepsilon}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds$

$$= \underbrace{\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds}_{\overset{(2)}{=}\,0} + \underbrace{\int_{|x-a|=\varepsilon}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds}_{\overset{\Delta}{=}\,A_\varepsilon} + \underbrace{\int_{|x-b|=\varepsilon}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds}_{\overset{\Delta}{=}\,B_\varepsilon}$$

$$A_\varepsilon = \underbrace{\int_{|x-a|=\varepsilon}\left[\left(u-\frac{1}{4\pi|x-a|}\right)\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial}{\partial n}\left(u-\frac{1}{4\pi|x-a|}\right)\right]ds}_{①} + \underbrace{\int_{|x-a|=\varepsilon}\frac{1}{4\pi|x-a|}\frac{\partial v}{\partial n}ds}_{②} - \underbrace{\int_{|x-a|=\varepsilon} v\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi|x-a|}\right)ds}_{③}$$

$$① = -\int_{|x-a|<\varepsilon}\left[\Delta\left(u-\frac{1}{4\pi|x-a|}\right)v - \left(u-\frac{1}{4\pi|x-a|}\right)\Delta v\right]dx = 0$$

② $= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{|x-a|=\varepsilon}\frac{\partial v}{\partial n}ds = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{|x-a|<\varepsilon}\Delta v\,dx = 0$

③ $= \int_{|x-a|=\varepsilon} v\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi r}\right)ds = \frac{-1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{|x-a|=\varepsilon} v\,ds \to -v(a) = -G(b,a)$

$$\left.\begin{aligned}&\text{即 } A_\varepsilon \to -G(b,a)\\ &\text{同理 } B_\varepsilon \to G(a,b)\end{aligned}\right\} \Rightarrow G(a,b)=G(b,a)$$

若给出了G的表达，则给出了g的表达，下考查Green函数求法

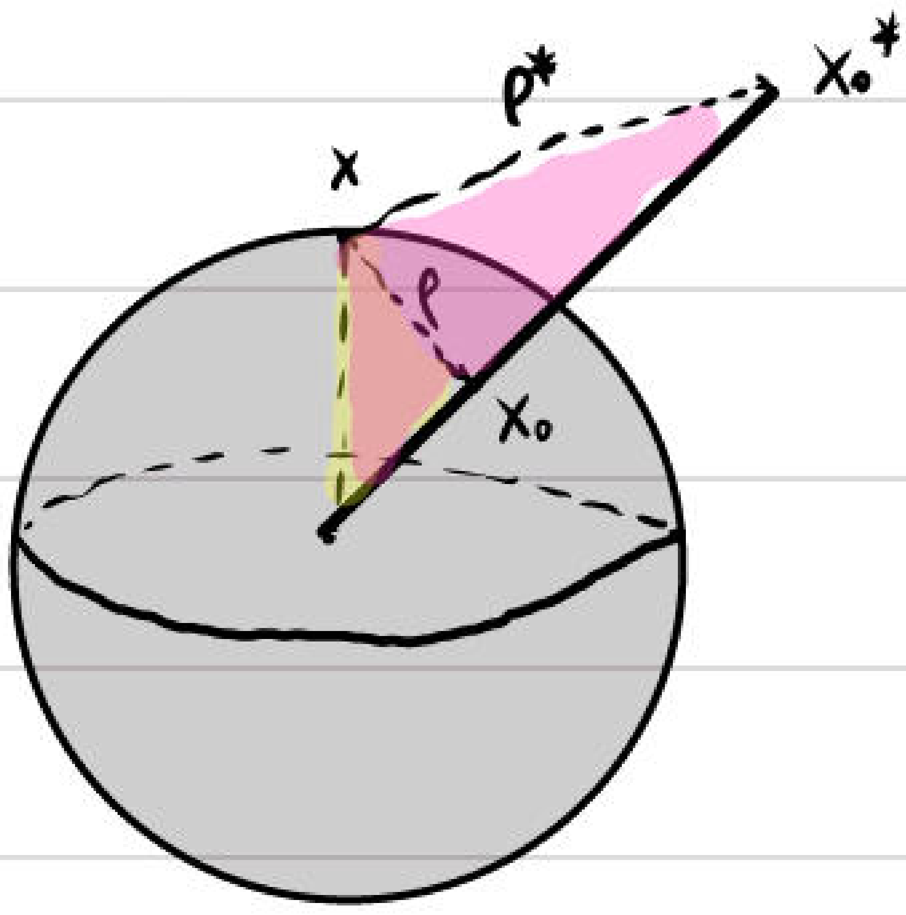
1. 半空间

取 $x_0^* = (x_0^1, x_0^2, -x_0^3)$

def $G(x,x_0) = \frac{1}{4\pi|x-x_0|} - \frac{1}{4\pi|x-x_0^*|}$

则 G 满足 (1)(2)(3)

2. $B_R(0)$



$G(x,x_0) = \frac{1}{4\pi|x-x_0|} - \frac{C}{4\pi|x-x_0^*|}$

x_0^* 在球外，此时 (1)(3) 自然满足

由(2)，$\forall |x|=R$，有 $G(x,x_0)=0$

令 $|x-x_0|=\rho$，$|x-x_0^*|=\rho^* \Rightarrow \frac{\rho^*}{\rho}=C$

若 Δ小 $\sim \Delta$大，则 $\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{|x_0^*|}{R} = \frac{R}{|x_0|}$

取 x_0^* 满足 $x_0^* = \frac{R^2}{|x_0|^2}x_0$ 即可

则 $G(x,x_0) = \frac{1}{4\pi|x-x_0|} - \frac{C}{4\pi|x-x_0^*|}$

$C = \frac{R}{|x_0|}$，$x_0^* = \frac{R^2}{|x_0|^2}x_0$ 即可

将 $B_R(0)$ 下的 Green 函数带入 (2.1)，$x\in\partial\Omega$ 时

$$\nabla G(x,x_0) = -\frac{x-x_0}{4\pi|x-x_0|^3} + \frac{C(x-x_0^*)}{4\pi|x-x_0^*|^3} = -\frac{x-x_0}{4\pi|x-x_0|^3} + \frac{|x_0|^2}{4\pi R^2}\frac{x-x_0^*}{|x-x_0|^3}$$

$$= -\frac{x}{4\pi|x-x_0|^3}\left(1-\frac{|x_0|^2}{R^2}\right) + \frac{1}{4\pi|x-x_0|^3}\left(x_0 - \frac{|x_0|^2}{R^2}x_0^*\right) = -\frac{x}{4\pi|x-x_0|^3}\left(1-\frac{|x_0|^2}{R^2}\right)$$

日期:　　　/

$$\frac{\partial G}{\partial n} = n\cdot\nabla G = \frac{x}{|x|}\cdot\left(\frac{R^2-|x_0|^2}{R^2}\frac{x}{4\pi|x-x_0|^3}\right) = \frac{R^2-|x_0|^2}{R}\frac{1}{4\pi|x-x_0|^3}$$

故 $u(x_0) = \frac{R^2-|x_0|^2}{4\pi R}\int_{|x|=R}\frac{\varphi(x)}{|x-x_0|^3}\,dS(x)$ （φ为边值）

即 $u(x) = \frac{R^2-x^2}{4\pi R}\int_{|y|=R}\frac{\varphi(y)}{|x-y|^3}\,dS(y)$ 　Poisson公式

thm 4.（Harnack不等式）

设u在$B_R(x_0)$内调和且$u\geq 0$，则

$\frac{R}{R+r}\frac{R-r}{R+r}u(x_0)\leq u(x)\leq\frac{R}{R-r}\frac{R+r}{R-r}u(x_0)$，其中 $r=|x-x_0|<R$

Rmk、2.1中也有Harnack不等式，均说明连通紧集中所有两点处函数值可互相比较，区别在于该thm给出了具体的界

pr: 不妨设 $x_0=0$（平移不变性）

则 $r=|x|<R$，只需证:

$$\frac{R}{R+r}\frac{R-r}{R+r}u(0)\leq u(x)\leq\frac{R}{R-r}\frac{R+r}{R-r}u(0)$$

由Poisson公式，$u(x) = \frac{R^2-x^2}{4\pi R}\int_{|y|=R}\frac{u(y)}{|x-y|^3}\,dS(y)$

由于 $R-r\leq|x-y|\leq R+r$，则

$$\frac{R^2-r^2}{4\pi R}\frac{1}{(R+r)^3}\int_{|y|=R}u(y)\,dS(y)\leq u(x)\leq\frac{R^2-r^2}{4\pi R}\frac{1}{(R-r)^3}\int_{|y|=R}u(y)\,dS(y)$$

u调和，由平均值性质，则 $\int_{|y|=R}u(y)\,dS(y) = 4\pi R^2u(0)$

$$\frac{R(R^2-r^2)}{(R+r)^3}u(0)\leq u(x)\leq\frac{R(R^2-r^2)}{(R-r)^3}u(0)$$ 即证

§2.3 极值原理和最大模估计

考虑方程 $\mathcal{L}u=-\Delta u+c(x)u=f(x)$, $c(x)\geq 0$, $x\in\Omega$

thm 1. 弱极大值原理

$c(x)\geq 0$, $f(x)<0$. $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$, 且满足以上方程, 则

$u(x)$ 不能在 Ω 上达到它在 $\bar{\Omega}$ 上的非负最大值,

即 $u(x)$ 仅能在 $\partial\Omega$ 上达到非负最大值

(注意, 并不意味在边界上一定能取到非负最大值)

pr: 假设 u 在 $x_0\in\Omega$ 达到非负最大值 $M\geq 0$

则 $(\nabla u)(x_0)=0$, $(\Delta u)(x_0)=tr(\text{Hesse}\,u(x_0))\leq 0$

$(\mathcal{L}u)(x_0)=-\Delta u(x_0)+c(x_0)u(x_0)\geq 0$ 与 $f(x)<0$ 矛盾

thm 2.

$c(x)\geq 0$, $f(x)\leq 0$. $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$, 且满足以上方程

且在 $\bar{\Omega}$ 上存在正的最大值, 则 $u(x)$ 必在 $\partial\Omega$ 上到达在 $\bar{\Omega}$ 上的非负最大值

且 $\max\limits_{x\in\bar{\Omega}} u(x)\leq\max\limits_{\partial\Omega} u^+(x)$

$u^+=\max\{u(x),0\}$

pr: 不妨设 $0\in\Omega$, 令 $d=\text{diam}\,\Omega$

令 $v(x)=-(d^2-|x|^2)\leq 0$ $\quad u^\varepsilon(x)=u(x)+\varepsilon v(x)$

$\mathcal{L}u^\varepsilon=\mathcal{L}u+\varepsilon\mathcal{L}v=f+\varepsilon(-\Delta(-d^2+|x|^2)+c(x)(-d^2+|x|^2))$

$=f-2n\varepsilon+\varepsilon c(x)(-d^2+|x|^2)<0$

应用 thm 1.

$\max\limits_{\bar{\Omega}} u-\varepsilon d^2=\max\limits_{\bar{\Omega}}(u-\varepsilon d^2)\leq\max\limits_{\bar{\Omega}} u_\varepsilon\leq\max\limits_{\partial\Omega}(u+\varepsilon v)^+\leq\max\limits_{\partial\Omega} u^+$

令 $\varepsilon\to 0$. $\max\limits_{\bar{\Omega}} u\leq\max\limits_{\partial\Omega} u^+$

日期:　　/

Rmk. 若 u 在 Ω 上最大值为负数，与 thm 1.2 无关

下面我们应证明强极大值原理.

thm 3. (Hopf 引理)

设 B_R 为 R^n $(n=2,3)$ 上以 R 为半径的球，在 B_R 上 $c(x)\geq 0$ 有界,

若 $u\in C^2(B_R)\cap C^1(\overline{B_R})$ 满足

(1) $Lu=-\Delta u+c(x)u\leq 0$, $x\in B_R$

(2) $\exists x_0\in\partial B_R$, s.t. u 在 x_0 处达到 $\overline{B_R}$ 上的非负最大值

即 $u(x_0)=\max\limits_{\overline{B_R}} u\geq 0$　且当 $x\in B_R$ 时, $u(x)<u(x_0)$,

则

$\left.\frac{\partial u}{\partial \mu}\right|_{x=x_0}>0$, μ 与 ∂B_R 在 x_0 点单位外法向量 n 夹角小于 $\frac{\pi}{2}$

pr: 由 (2) 易知 $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x=x_0}\geq 0$

令 $v(x)=e^{-\alpha|x|^2}-e^{-\alpha R^2}$　$\alpha>0$ 待定

$$w(x)=u(x)-u(x_0)+\varepsilon v(x)\qquad \varepsilon>0$$

$$\nabla v=e^{-\alpha|x|^2}\cdot(-2\alpha\vec{x})$$

$$\Delta v=\sum_i \partial x_i(-2\alpha x_i e^{-\alpha|x|^2})=\sum_i(-2\alpha+4\alpha^2x_i^2)e^{-\alpha|x|^2}$$
$$=(-2\alpha n+4\alpha^2|x|^2)e^{-\alpha|x|^2}$$

$$Lw=Lu-c(x)u(x_0)+\varepsilon Lv$$
$$=Lu-c(x)u(x_0)+\varepsilon\left[(-4|\alpha|^2|x|^2+2\alpha n)e^{-\alpha|x|^2}+c(x)(e^{-\alpha|x|^2}-e^{-\alpha R^2})\right]$$
$$=\underset{\leq 0}{Lu}-\underset{\leq 0}{c(x)u(x_0)}+\underset{>0}{\varepsilon}\left[(-4|\alpha|^2|x|^2+2\alpha n+c(x))e^{-\alpha|x|^2}-\underset{\geq 0}{c(x)e^{-\alpha R^2}}\right]$$
$$\leq\varepsilon(-4|\alpha|^2|x|^2+2\alpha n+C)e^{-\alpha|x|^2}\qquad C\text{ 为 }c(x)\text{ 的界}$$

在 $B_R^* = \{\frac{R}{2} \le |x| \le R\}$ 上做估计,

$\le \varepsilon(-R^2\alpha^2 + 2\alpha n + c) e^{-\alpha|x|^2}$

< 0 (α充分大)

由 thm 1, 在 B_R^* 对 w 应用极大值原理,

w在 $\overline{B_R}$ 上的非负最大值必在边界上取到

$|x| = \frac{R}{2}$ 时, $w(x) = u(x) - u(x_0) + \varepsilon(e^{-\alpha\cdot\frac{R^2}{4}} - e^{-\alpha R^2})$

$\Rightarrow w(x) \le \max\limits_{|x|=\frac{R}{2}} u(x) - u(x_0) + \varepsilon(e^{-\alpha\cdot\frac{R^2}{4}} - e^{-\alpha R^2})$

< 0 (ε充分小)

$|x| = R$时, $w(x)$ 在 x_0 处取得最大值

$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial \mu} \ge 0$

即 $\frac{\partial u}{\partial \mu} + \varepsilon\frac{\partial v}{\partial \mu} \ge 0$

而 $\frac{\partial v}{\partial \mu} = \mu\cdot\nabla v = \mu\cdot e^{-\alpha|x|^2}(-2\alpha\overline{x}) < 0$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \mu} > 0$

thm 4. 强极大值原理

假设 Ω 为 R^n 中有界联通开集, $c(x) \ge 0$ 有界

若 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 在 Ω 上满足 $Lu \le 0$, 且 u在 Ω 内达到在 $\overline{\Omega}$ 上非负最大值, 则 u 在 $\overline{\Omega}$ 上恒为常数.

pr: 令 $M = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} u(x) \ge 0$, 令 $O = \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$, 即证 $\Omega = O$

step 1. $O \ne \phi$

step 2. O闭, 即 $x_n \in O$, $x_n \to \overline{x}$, 则 $\overline{x} \in O$

u连续, 则 $u(\overline{x}) = \lim\limits_{n\to\infty} u(x_n) = M$, 则 $\overline{x} \in O$

日期:　　　/

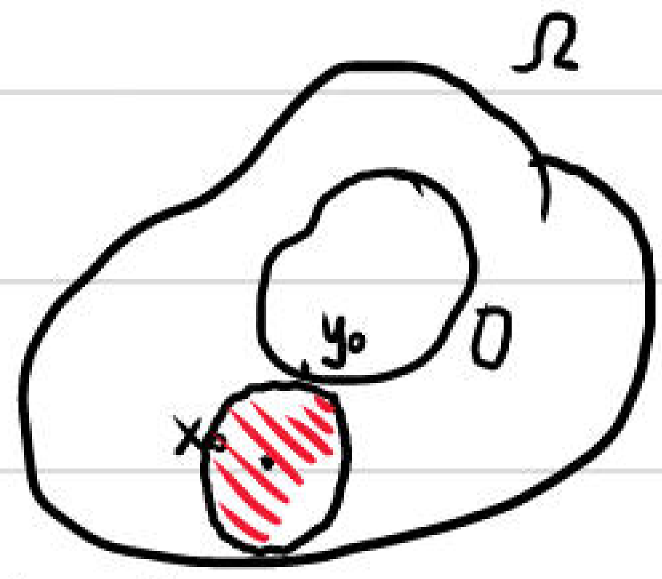
Step 3. O 开.

若不为开集. 则 $\exists\, x_0 \in \Omega \setminus O$ (Ω 开而 O 不开, $O \subseteq \Omega$)

$\Omega\setminus O$ 开, $\exists R>0$, st. $B_R(x_0)$ 与 $\partial\Omega$ 相切于 y_0

claim: ① u 在 y_0 达到 $\bar{\Omega}$ 上的非负最大值

② $\forall x \in B_R(x_0)$, $u(x) < M$



由 Hopf 引理, $\frac{\partial u}{\partial n}(y_0) > 0$

($y_0 \in \Omega$, 由于 $\Omega^c \cap O = \phi$, Ω^c, O 闭闭, $\mathrm{dist}(\Omega^c, O) > 0$)

而 $y_0 \in \Omega$ 达到最大值, $\nabla u(y_0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}(y_0) = 0$ 矛盾

则 O 为开集

综合 1.2.3 知 $O = \Omega$

Rm. ① 若 $-\Delta u < 0$. 则 u 只在边界处达到最大值.

(若在 $x_0 \in \Omega$ 处达到, 则 $-\Delta u(x_0) \geq 0$ 矛盾)

② 若 u 调和 ($u \in C(\bar{\Omega})$)(满足平均值性质), 则 u 只在 $\partial\Omega$ 达到最大值和最小值, 除非 u 为常数 (即若最大值/最小值在内部取到, 则必为常数)

pr: 不妨最大值在内部取到, 设 $M = \max\limits_{\bar{\Omega}} u(x)$

令 $O = \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$, O 非空闭

只需证 O 为开集

$\forall x_0 \in O$, $\exists B_R(x_0) \in \Omega$, 由平均值性质

$$M = u(x_0) = \frac{1}{|B_R(x_0)|}\int_{B_R(x_0)} u(y)\,dy \leq M$$

$\Rightarrow u(x) \equiv M$, $x \in B_R(x_0)$, 则 $B_R(x_0) \subseteq M$

故 O 为开集

①② 表明 $\Delta u \geq 0$, 则仅能在边界处达到最大值, 无非负性要求.

下利用极值原理证明最大模估计.

考虑 $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$ (2.41)

thm 5. 最大模估计

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 为 (2.41) 的解，则

$\max\limits_{\bar{\Omega}} |u(x)| \le G + CF$，$G = \max\limits_{\partial\Omega} |g|$，$F = \max\limits_{\bar{\Omega}} |f|$，$C = C(n, \mathrm{diam}(\Omega))$

idea. $\Delta u \ge 0$，$u|_{\partial\Omega} \le 0 \Rightarrow u \le 0$

pr: 不妨 $0 \in \Omega$，$\forall x \in \Omega$，$|x| < d$

令 $w(x) = u - (G + \frac{F}{2n}(d^2 - |x|^2))$

则 $-\Delta w = -\Delta u - F = f - F \le 0$

$w|_{\partial\Omega} = g - G - \frac{F}{2n}(d^2 - |x|^2) \le g - G \le 0$

由弱极值原理，$\max\limits_{\bar{\Omega}} w - \max\limits_{\partial\Omega} w \le 0$

$$0 \ge \max_{\bar{\Omega}} \left(u(x) - (G + \frac{F}{2n} d^2) + \frac{F}{2n} |x|^2 \right) \ge \max_{\bar{\Omega}} u(x) - (G + \frac{F}{2n} d^2)$$

$\Rightarrow u(x) \le G + \frac{d^2}{2n} F$

再令 $\tilde{w}(x) = -u - (G + \frac{F}{2n}(d^2 - |x|^2))$

则 $-\Delta \tilde{w} = -f - F \le 0$

$\tilde{w}|_{\partial\Omega} \le -g - G \le 0$

由弱极值原理，$\max\limits_{\bar{\Omega}} \tilde{w} - \max\limits_{\partial\Omega} \tilde{w} \le 0$

$\Rightarrow -u(x) \le G + \frac{d^2}{2n} F$

故 $|u(x)| \le G + \frac{d^2}{2n} F \quad \forall x \in \Omega$.

Rmk. 最大模估计蕴含解的唯一性与稳定性.

日期：　　/

设 u_1、u_2 为 (2.41) 的解，设 $v = u_1 - u_2$

则 $\begin{cases} -\Delta v = 0 \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$

由最大模估计 $\max\limits_{\bar\Omega} |v(x)| \leq 0 + C\cdot 0 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$，即唯一性

设 u_1、u_2 为

$$\begin{cases} -\Delta u = f_1 \\ u|_{\partial\Omega} = g_1 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} -\Delta u = f_2 \\ u|_{\partial\Omega} = g_2 \end{cases}$$

的解

由最大模估计 $\max\limits_{\bar\Omega} |u_1(x) - u_2(x)| \leq \max\limits_{\partial\Omega} |g_1 - g_2| + C \max\limits_{\bar\Omega} |f_1 - f_2|$

蕴含稳定性

而唯一性与稳定性可通过能量法给出

考虑方程 $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$

$$\int_\Omega u(-\Delta u)\,dx = \int_\Omega fu\,dx = \int_\Omega -\mathrm{div}(u\nabla u) + |\nabla u|^2\,dx = -\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}\,dS + \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$$

claim. (Friedrichs 不等式)

$u \in C_0^1(\Omega)$，则 $\int_\Omega |u(x)|^2 dx \leq 4d^2 \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \quad d = \mathrm{diam}(\Omega)$

则 $\int_\Omega fu\,dx \leq \varepsilon \int_\Omega |u|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega |f|^2 dx$

$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \varepsilon \cdot 4d^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega |f|^2 dx$

选取合适的 ε 可 s.t. $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq C \cdot \int_\Omega |f|^2 dx$

Rmk. 该表达式蕴含 $|\nabla u|$、$|u|$ 的控制，Poisson 方程的能量为方程两边 $\times u$.