§9.5 多变量函数的 Taylor 公式与极值

9.5.1 二元函数微分中值定理

定理 1 (**二元函数微分中值定理**) 设 $f(x,y)$ 在区域 D 中可微. 若连接 $P_0=(x_0,y_0)$ 和 $P_1=(x_0+h,y_0+k)$ 的直线段 L 包含在 D 中, 则存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$f(P_1)-f(P_0)=f'_x(P(\theta))h+f'_y(P(\theta))k,$$

其中 $P(\theta)=(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$.

证明 将 $f(x,y)$ 限制在 L 上是一个一元函数:

$$\varphi(t)=f(x_0+th,y_0+tk),\ t\in[0,1].$$

因为 $f(x,y)$ 和 t 的函数 x_0+th 及 y_0+tk 都可微, 所以 $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 可微. 根据一元函数的微分中值定理, 存在 $\theta\in(0,1)$ 使得 $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta)$. 由

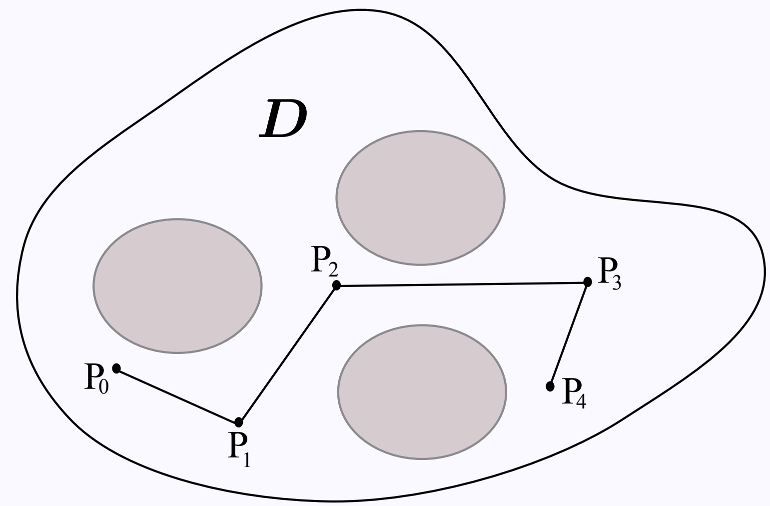
二元函数的偏导数的链式法则, 有

$$\varphi'(t) = f'_x(x_0 + th, y_0 + tk)h + f'_y(x_0 + th, y_0 + tk)k$$

于是所证成立.

推论 1 设 $f(x,y)$ 在区域 D 中可微. 若 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ 在 D 上成立, 即, 在 D 上 $df = 0$, 则 f 在 D 上是常数.

证明 取 $(x_0, y_0) \in D$. 因为区域是连通的, 所以对任意 $(x,y) \in D$, 存在包含在 D 中的折线 L 连接 (x_0, y_0) 和 (x,y). 设这条折线的顶点依次为 $P_0 = (x_0, y_0), P_1, \cdots, P_n = (x,y)$. 由于 f 的两个偏导数在 D 上为零, 根据中值定理, 有



$$f(P_j) = f(P_{j-1}),\ j = 1, 2, \cdots, n.$$

由此即得 $f(P_n) = f(P_0)$, 即,

$$f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

这说明 f 在 D 上是常数. 证毕.

设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集. 若对任意两点 $a, b \in D$, 连接 a, b 的直线段都包含于 D 中, 则称 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个**凸区域**.

将微分中值定理推广到高维空间, 可以叙述如下:

设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是凸区域, $f: D \to \mathbb{R}$ 在 D 中可微, 则对 D 中任意两点 a, b, 在连接 a, b 的直线段上存在一点 $\xi = a + \theta(b - a)$ $(0 < \theta < 1)$, 使得

$$f(b) - f(a) = Jf(\xi)(b - a).$$

注意, a, b 都理解为列向量.

注 1: 若 D 不是凸的, 则微分中值定理一般不成立.

例 1 设 $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

则 $f(x,y)$ 在 D 上可微. 取两点:

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

则 $f(b) - f(a) = 2$.

$$Jf(x,y) = \left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \right),$$

$$Jf(x,y)(b-a) = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

在 a,b 的连线上 $y=0$, 因而 $Jf(x,y)(b-a) = -\frac{2}{x^2}$. 这说明

$$f(b) - f(a) \neq Jf(x,y)(b-a).$$

注 2: 在微分中值定理中, $f: D \to \mathbb{R}$ 也不能直接推广为 $f: D \to \mathbb{R}^m$.

例 2 设 $f(t) = \binom{t^2}{t^3}$, $t \in \mathbb{R}$. 则 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, 且在 $\mathbb{R}$ 上可微.

$$Jf(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix},$$

$$f(1) - f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

显然不存在 $\theta \in (0,1)$ 使得

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\theta \\ 3\theta^2 \end{pmatrix}.$$

定理 2 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是区域, $f : D \to \mathbb{R}$ 在 D 中可微. 若在 D 中有 $Jf = 0$, 则 f 在 D 上是一个常数.

证明 当 D 是凸区域时, 结论可由中值定理推出. 现在证结论对一般的区域成立.

取 $x_0 \in D$. 只要证对任意 $y \in D$ 有 $f(x_0) = f(y)$. 因为 D 是连通的, 所以存在 D 中的曲线 L 连接 x_0 和 y. L 是 D 中一个有界闭集, 它到 D 的边界的距离 $\delta > 0$. 于是存在有限个小开球

$$B_0,\ B_1, \cdots ,\ B_k \subset D$$

使相邻的小球相交非空, 且

$$x_0 \in B_0,\ y \in B_k.$$

注意到小球是凸区域, 在每个小球上仍有 $Jf = 0$, 所以 f 在每个小球上是常数. 由于这些小球是连接着的. 因此有 $f(y) = f(x_0)$.

9.5.2 多元函数的泰勒公式

引理 1 设 k, n 是正整数, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是实数. 那么有

$$(x_1+\cdots+x_n)^k = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k} \frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!} x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}, \tag{9.1}$$

其中求和号表示要取遍所有和为 k 的非负整数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$.

说明: 此引理是牛顿二项式展开式的推广, 从下面的证明可以看出, 引理中的 $x_1, \cdots, x_n$ 也可以不是实数, 只要它们可以相加和相乘, 且加法和乘法满足交换律就可以. 比如用 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 代替 x_i 也可以. $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 称为多重指标, 记 $|\alpha| = \alpha_1+\cdots+\alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1!\cdots\alpha_n!$. 对于向量 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 记 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$. 于是 (9.1) 可表示为

$$(x_1+\cdots+x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha.$$

证明 对 n 用归纳法. 当 $n=1$ 时, 无需证明. 当 $n=2$ 时, (9.1) 就是牛顿二项式展开. 现设对于 $n-1$ 个加项的展开式成立. 因而

$$
\begin{aligned}
&(x_1+\cdots+x_n)^k \\
&= \big((x_1+\cdots+x_{n-1})+x_n\big)^k \\
&= \sum_{\alpha_n=0}^{k} \frac{k!}{\alpha_n!(k-\alpha_n)!}(x_1+\cdots+x_{n-1})^{k-\alpha_n} x_n^{\alpha_n} \\
&= \sum_{\alpha_n=0}^{k} \frac{k!}{\alpha_n!(k-\alpha_n)!} \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}=k-\alpha_n} \frac{(k-\alpha_n)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_{n-1}!} x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n} \\
&= \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k} \frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!} x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}.
\end{aligned}
$$

这就说明 (9.1) 对于 n 个加项的展开式成立. 于是引理得证.

设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是 n 元函数, 有各种偏导数, 且各种混合偏导数都连续, 此时 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 与 $\frac{\partial}{\partial x_j}$ 可相加和相乘, 加法和乘法有交换律. 对于多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 和微分算子 $D=(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n})$, 记

$$D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},\quad D^\alpha f=\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

定理 3 (Taylor **公式**) 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是一个凸区域, $f:U\to\mathbb{R}$ 并且 $f\in C^{m+1}(U)$. 再设 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 和 $a+h=(a_1+h_1,\cdots,a_n+h_n)$ 是 U 中两点. 则存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$f(a+h)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{|\alpha|=k}\frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}h^\alpha+R_m,\tag{9.2}$$

其中

$$R_m=\sum_{|\alpha|=m+1}\frac{D^\alpha f(a+\theta h)}{\alpha!}h^\alpha.\tag{9.3}$$

证明 将 f 限制到 a 与 $a+h$ 的连线上, 即令

$$\varphi(t)=f(a+th),\ t\in[0,1].$$

这是 $[0,1]$ 上有 $m+1$ 阶连续导数的一元函数. 根据一元函数 Taylor 公式, 得

$$\varphi(1)=\sum_{k=0}^{m}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}+\frac{1}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}(\theta),\ \theta\in(0,1). \tag{9.4}$$

显然 $\varphi(1)=f(a+h)$, $\varphi(0)=f(a)$. 根据求导的链式法则, 有

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=Jf(a+th)h=\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a+th)h_1+\cdots+\tfrac{\partial f}{\partial x_n}(a+th)h_n\\&=\left(h_1\tfrac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_n\tfrac{\partial}{\partial x_n}\right)f(a+th):=\varphi_1(a+th).\end{aligned}$$

这说明对 $\varphi(t)=f(a+th)$ 求导, 就是将算符 $\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ 作用到 $f(a+th)$ 上, 因此

$$\varphi''(t)=\left(h_1\tfrac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_n\tfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^2f(a+th),$$

一般地, 有

$$\varphi^{(k)}(t)=\left(h_1\tfrac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_n\tfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^kf(a+th).$$

根据引理 1, 有

$$\begin{aligned}&\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k\\=&\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k}\frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}h_1^{\alpha_1}\cdots h_n^{\alpha_n}\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\\=&\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}h^\alpha D^\alpha.\end{aligned}$$

因此

$$\varphi^{(k)}(0)=\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^\alpha f(a)h^\alpha.$$

将此代入 (9.4) 即得所证.

总之, 多元函数的 Taylor 公式的证明就是将函数限制到直线上, 然后利用一元函数的 Taylor 公式, 以及偏导数算符的加法和乘法的可交换性得到. 多元函数的 Taylor 公式的形式也与一元函数情形的公式类似.

特别重要的是 Taylor 公式中的前三项:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_i h_j + \cdots \\ &= f(a) + Jf(a)\cdot h + \frac{1}{2} hHf(a)h^T + \cdots \end{aligned}$$

其中

$$Hf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix} \tag{9.5}$$

是一个 n 阶对称方阵, 称为 f 在 a 点的 Hessian.

在原点展开的 Taylor 公式称为Maclaurin 公式.

在二元函数 $f(x,y)$ 的情形, Taylor 公式的前三项展开是

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k) &= f(x,y) + \big(f'_x(x,y)h + f'_y(x,y)k\big) \\ &\quad + \frac{1}{2}\big(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2\big) + \cdots \end{aligned} \tag{9.6}$$

其中 $A = f''_{xx}(x,y)$, $B = f''_{xy}(x,y)$, $C = f''_{yy}(x,y)$.

例 3 将函数 $f(x,y) = e^x \cos y$ 的 Maclaurin 公式展开到二次项.

解 先将 f 在 $(0,0)$ 的值以及直到二阶的偏导数都算出来.

$$\begin{gathered} f(0,0) = 1,\ f'_x(0,0) = 1,\ f'_y(0,0) = 0, \\ f''_{xx}(0,0) = 1,\ f''_{xy}(0,0) = 0,\ f''_{yy}(0,0) = -1, \end{gathered}$$

从而

$$e^x \cos y = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + R_2.$$

其中 R_2 是余项.