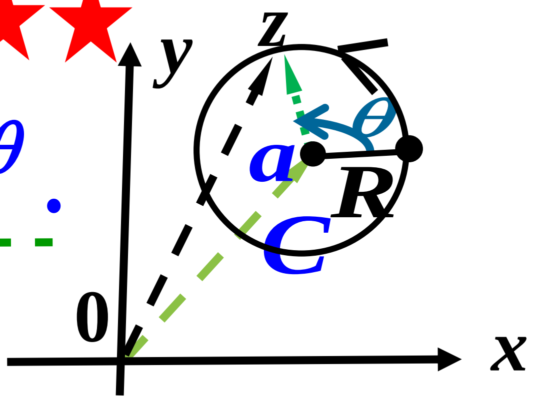
例2(P52) 求 $\int_C \frac{1}{(z-a)^n}\mathrm{d}z$, n 为整数,

C 为以复数a为中心、$R>0$为半径的圆周,逆时针方向(正向).

解 $C:\ |z-a|=R$, 故 $z-a=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, ★★★★★

故 $C:\ z=a+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0\le\theta<2\pi$. $z'(\theta)=R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.



$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{z'(\theta)}{\{z(\theta)-a\}^n}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n}(R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta.$$

1) $n=1$时, $\int_C \frac{1}{z-a}\mathrm{d}z=\mathrm{i}\int_0^{2\pi}1\mathrm{d}\theta=2\pi\mathrm{i}$.

2) $n\neq1$且n为整数时,

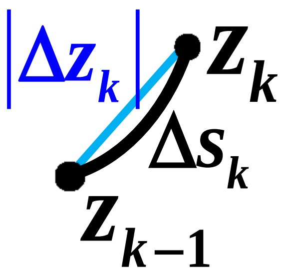
$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n}\mathrm{d}z=\mathrm{i}R^{1-n}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)\theta}\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}R^{1-n}\cdot\left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)\theta}}{\mathrm{i}(1-n)}\right|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}=0.\ \#$$

背熟此结论!!!

(5) $\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s$；（积分估算） (3.3)

证明 在复积分定义中取模得，

$|\Delta z_k| = |z_k - z_{k-1}| \le \Delta s_k$， Δs_k指C上 $z_{k-1}z_k$的弧长，



故 $\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||\Delta z_k| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\Delta s_k$.

令$n \to +\infty$, $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}\{|\Delta z_k|\} \to 0$，得不等式(3.3). #

• 若$C: z(t) = x(t) + \mathrm{i}\,y(t)$, $a \le t \le b$,

$\boxed{z'(t) \triangleq x'(t) + \mathrm{i}\,y'(t)}$

$\boxed{\mathrm{d}z = z'(t)\,\mathrm{d}t}$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t = |z'(t)|\,\mathrm{d}t \triangleq |\mathrm{d}z|,$$

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s \triangleq \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| \equiv \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

★★★★★

(5) 设$f(z)$在曲线C上连续, 则 $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s$(第一类曲线积分). (3) (P50)

若$C: z(t)=x(t)+\mathrm{i}\,y(t),\ a\le t\le b,\ z'(t)=x'(t)+\mathrm{i}\,y'(t)$,

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \equiv \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| \equiv \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|\mathrm{d}t.$$ ★★★★★

(6) 长大不等式:

设曲线 C 的长度为 L, 若在 C 上$|f(z)|\le A$, 则

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le AL. \qquad (3.4)$$

证明: 由(3.3)得 $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \le A\int_C 1\mathrm{d}s = AL.$ #

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \equiv \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| \equiv \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|\mathrm{d}t \le \left\{\sup_{z\in C}|f(z)|\right\}\cdot(C\text{的长度}). \quad (3.3)$$

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s \equiv \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| \equiv \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|\,\mathrm{d}t \le \left\{\sup_{z\in C}|f(z)|\right\}\cdot(C\text{的长度}). \quad (3.3)$$

例 证明: $\left|\int_1^{1+\mathrm{i}}\left(x^2+2\mathrm{i}\,y^2\right)\mathrm{d}z\right| \le \left(\sqrt{5}\right)$, 积分路径是直线段.

解 设线段C : $z(t)=z_1t+z_0,\quad 0\le t\le 1$, 起点$z(0)=z_0=\ 1$, ($z_0=$起点),

终点 $z(1)=z_1+z_0=1+\mathrm{i}$, $z_1=(1+\mathrm{i})-1=\mathrm{i}$, ($z_1=$终点$-$起点).

故 $z(t)=\mathrm{i}\,t+1,\ \ 0\le t\le 1,\quad z'(t)=\mathrm{i}.$ 当$0\le t\le 1$时, $0\le t^4\le 1$,

$$\left|\int_1^{1+\mathrm{i}}\left(x^2+2\mathrm{i}\,y^2\right)\mathrm{d}z\right| \le \int_0^1\left|1^2+2\mathrm{i}\,t^2\right||z'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1\left(\sqrt{1+4t^4}\right)|\mathrm{i}|\,\mathrm{d}t$$

$$\le \int_0^1\left(\sqrt{1+4}\right)\mathrm{d}t = \left(\sqrt{5}\right). \quad \#$$

线段参数方程: $z=$ (终点$-$起点)$t+$起点, $0\le t\le 1$.

例 设 C 为从1到点 $4+4\mathrm{i}$ 的直线段，试求积分 $\int_C \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,z}}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z$ 模的一个上界.

1). 先写C参数方程. 2). 在C上估算被积函数模. 3). 利用积分估值不等式或长大不等式.

解 设线段C : $\underline{z(t)=\{(4+4\mathrm{i})-1\}t+1=}(3+4\mathrm{i})t+1,\quad 0\le t\le 1$， $z'(t)=3+4\mathrm{i}$.

在 C 上，$\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,z}}{z-\mathrm{i}}\right| = \frac{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3t+1)}|}{|3t+1+\mathrm{i}(4t-1)|} = \frac{1}{\sqrt{(3t+1)^2+(4t-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{25t^2-2t+2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{25\left(t-\frac{1}{25}\right)^2+\frac{49}{25}}} \le \frac{5}{7},\quad \left(t=\tfrac{1}{25}\in(0,1)\right).$$

故 $\left|\int_C \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,z}}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z\right| \le \frac{5}{7}\cdot\left|(4+4\mathrm{i})-1\right| = \frac{5}{7}|3+4\mathrm{i}| = \frac{25}{7}$. #

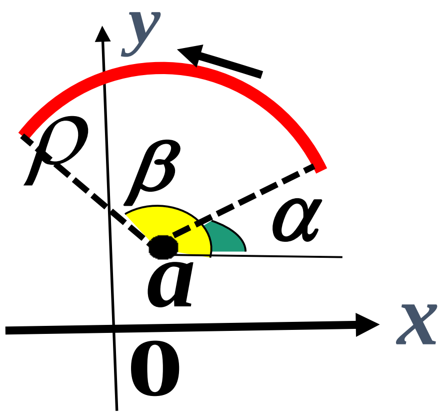
$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \equiv \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| \equiv \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|\mathrm{d}t \le \left\{\max_{z\in C}|f(z)|\right\}\cdot(C\text{的长度}).\quad (3.3)$$

线段参数方程: $z=(\text{终点}-\text{起点})t+\text{起点},\ 0\le t\le 1.$

例4(P53-54) 设$\rho>0$充分小，$f(z)$在 $C_\rho: z=a+\rho e^{i\theta}, \alpha\le\theta\le\beta$上连续，

且 $\underline{\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k}$, 则

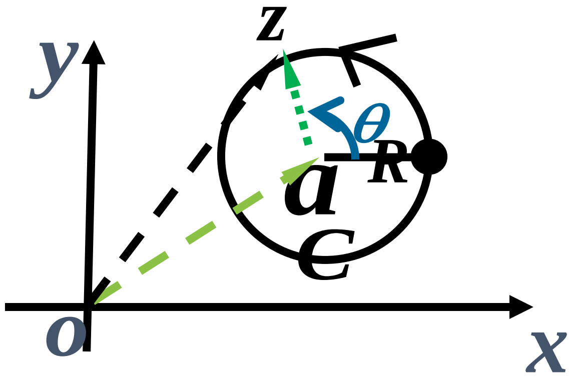
$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\,dz = \underline{i(\beta-\alpha)k}. \quad (3.6)$$



思路：先把右端与f 无关的部分$i(\beta-\alpha)$表示成某函数沿C_ρ的积分值.

设$C: |z-a|=R$, 逆时针方向, 则由P52例2得, $\int_C \frac{dz}{z-a}=2\pi i.$

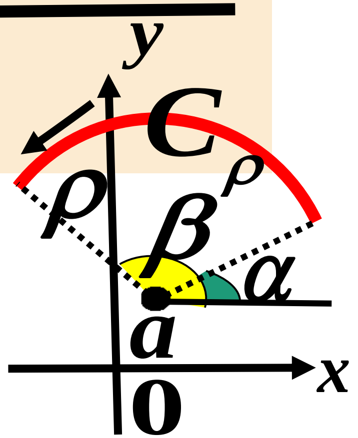
故猜测：$\int_{C_\rho}\frac{dz}{z-a}=i(\beta-\alpha).$



首先用参数法证明此猜测.

例4(P53-54). 设$\rho>0$充分小，$f(z)$在 C_ρ： $z=a+\rho e^{i\theta}, \alpha\le\theta\le\beta$上连续，

$\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k$, 则 $\lim\limits_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}(\beta-\alpha)k$. (3.6)



证明: $\displaystyle\int_{C_\rho}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=\int_\alpha^\beta\frac{1}{\rho e^{\mathrm{i}\theta}}(\rho\,\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}\int_\alpha^\beta 1\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}(\beta-\alpha).$

故$\displaystyle\left|\int_{C_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z-\mathrm{i}(\beta-\alpha)k\right|=\left|\int_{C_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z-k\int_{C_\rho}\frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z\right|$

$$=\left|\int_{C_\rho}\frac{(z-a)f(z)-k}{z-a}\,\mathrm{d}z\right|\le\int_\alpha^\beta\frac{\left|(z(\theta)-a)f(z(\theta))-k\right|}{\cancel{\left|\rho e^{\mathrm{i}\theta}\right|}}\cancel{\left|\rho\,\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\theta}\right|}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta\left|(z(\theta)-a)f(z(\theta))-k\right|\mathrm{d}\theta.\quad(*)$$

(P67)第7题仿照此例证明.

由条件知，$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$, 当$\rho=|z-a|<\delta$时，

$\left|(z-a)f(z)-k\right|\le\dfrac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$，故(*)右边$\le\dfrac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\cdot(\beta-\alpha)=\varepsilon$. 故 (3.6)成立. #

熟记本题及(P67)第7题的结论.

在第六章需要用到这些结论.

3.2 柯西积分定理(P54定理2)

定理2(P54) 柯西积分定理

设 D 是由简单闭曲线(简称闭路) C 围成的单连通区域，

$f(z)$在闭域$\bar{D}=D+C$上解析，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0,\quad \text{也记作} \oint_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$

注：$f(z)$在$\bar{D}=D+C$上解析是指：

$f(z)$在包含$\bar{D}$ 的某个更大的开区域G 内处处解析.

证明 $\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C (u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y)=\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y$.

对实部和虚部分别用法 Green定理(改进型),

然后再用 柯西-黎曼方程(P 28定理2).

首先回顾Green定理:

设单连通区域 D 由分段光滑曲线 L(逆时针方向)围成，

$P(x,y),Q(x,y)\in C^1(D)$, 则

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

改进的Green定理: (Gaursat 1925)

设单连通区域 D 由分段光滑曲线 L(逆时针方向)围成，

$P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上有偏导数 $\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$,

且 $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ 在 D 上连续, L 取逆时针方向， 则

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

定理2(P54)

柯西积分定理：设 D 是由简单闭曲线(简称闭路) C 围成的单连通区域，$f(z)$ 在闭域 $\bar{D}=D+C$ 上解析，则 $\int_C f(z)\,dz=0$. ★★★★★

熟记结论

证明：设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$.

因 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 解析，故 u,v 在 $\bar{D}$ 上可微，且满足C-R方程(P 28)，

故 $\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\ -\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$ 由改进的Green公式得

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C (u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\,\mathrm{d}y)=\int_C u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\mathrm{i}\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=0+\mathrm{i}0=0.\ \#$$

柯西积分定理(P 54定理2): 设 D是由简单闭曲线(简称闭路)C 围成的单连通区域,

$f(z)$在闭域$\bar{D}=D+C$上解析, 则$\int_C f(z)\,dz=0.$

$\boxed{\text{由C-R方程}}$

证明 $\int_C f(z)dz=\int_C u\,dx-v\,dy+i\int_C v\,dx+u\,dy=\iint\limits_D\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy+i\iint\limits_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy=0.$ #

例. 求(1) $\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{z-3}dz$; (2) $\int\limits_{|z-3|=1}\frac{1}{z-3}dz.$

解. (1) $\frac{1}{z-3}$除$z=3$外处处解析, $z=3$不在$|z|=1$及其内部, 故$\frac{1}{z-3}$在$|z|\le 1$上解析.

故由柯西积分定理(P 54定理2)得 $\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{z-3}dz=0.$

(2) $\frac{1}{z-3}$的奇点$z=3$在积分闭路$|z-3|=1$的内部, 不可用柯西积分定理(P 54定理2).

根据P 52例2知, $\int\limits_{|z-3|=1}\frac{1}{z-3}dz=2\pi i.$ #

例 求 $I=\oint_{|z|=1}\dfrac{\cos z}{(z-\mathrm{i}\,1.5)(z+30)}\,\mathrm{d}z$ 和 $J=\oint_{|z|=3}\mathrm{e}^{3z^2}\sin^3 z\,\mathrm{d}z$.

解 (1)由 $(z-\mathrm{i}\,1.5)(z+30)=0$ 得 I 所有奇点 $z_1=1.5\mathrm{i}$ 和 $z_2=-30$, 都不在 $|z|=1$ 及其内部,

故由柯西积分定理得 $I=0$.

(2) $\mathrm{e}^{3z^2}\sin^3 z$ 没有奇点, 故 $J=0$. #

柯西积分定理:设 D 是由简单闭曲线(简称闭路)C围成的单连通区域,

$f(z)$ 在闭域 $\bar{D}=D+C$ 上解析, 则 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$.

$\boxed{\text{定理2(P54)}}$

例. 求(1) $\oint_{|z|=1}\dfrac{1}{z-3}\,\mathrm{d}z$; (2) $\oint_{|z-3|=1}\dfrac{1}{z-3}\,\mathrm{d}z$.

解. (1) $\dfrac{1}{z-3}$ 在 $|z|\le 1$ 上解析, 故 $\oint_{|z|=1}\dfrac{1}{z-3}\,\mathrm{d}z=0$.

(2) 奇点 $z=3$ 在积分闭路 $|z-3|\le 1$ 内部, 不可用柯西积分定理(P 54定理2).

根据P 52例2知, $\oint_{|z-3|=1}\dfrac{1}{z-3}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}$. #

推论1: 设$f(z)$在单连通区域D内解析, C是D内的任意封闭曲线, 则

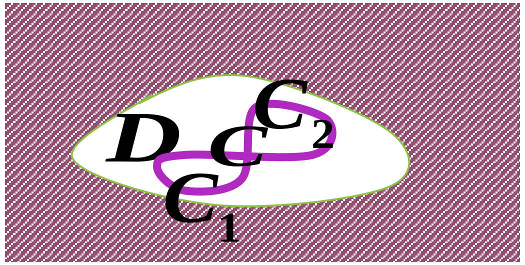
$\boxed{\text{P55}}$

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

证明: (1)若C是简单闭曲线,由柯西积分定理(P54定理2)知 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$

(2) 如果C不是简单闭曲线, 则可设C由n条简单闭曲线$C_1, C_2, \cdots, C_n$依次连接组成,

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\int_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0. \quad \#$$



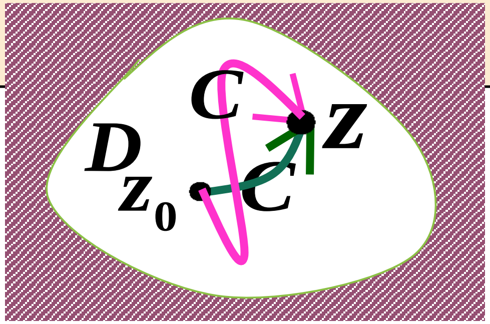
例 求 $I = \int_{|z|=1} \dfrac{\cos z}{(z - \mathrm{i}\,1.5)(z+30)}\,\mathrm{d}z$ 和 $J = \int_{|z|=3} e^{3z^2}\sin^3 z\,\mathrm{d}z.$

解 (1)由$(z-\mathrm{i}\,1.5)(z+30)=0$得I所有奇点$z_1 = \mathrm{i}\,1.5$和$z_2 = -30$, 都不在$|z|\le 1$上,

故由柯西积分定理得 $I = 0.$ (2) $e^{3z^2}\sin^3 z$没有奇点, 故 $J = 0.$

推论1(P55): 设$f(z)$在单连通区域D内解析, C是D内的任意封闭曲线, 则
$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

推论2(P55): 设$f(z)$在单连通区域D内解析,



C是D内任一条起于点z_0终于z的简单曲线, 则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \begin{cases} \text{值不依赖于路径}C, \\ \text{只由起点}z_0\text{和终点}z\text{确定,} \end{cases}$$ 记作$\displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z.$

证明: 设C是D内任意的不同于C的起于z_0终于z的简单曲线,

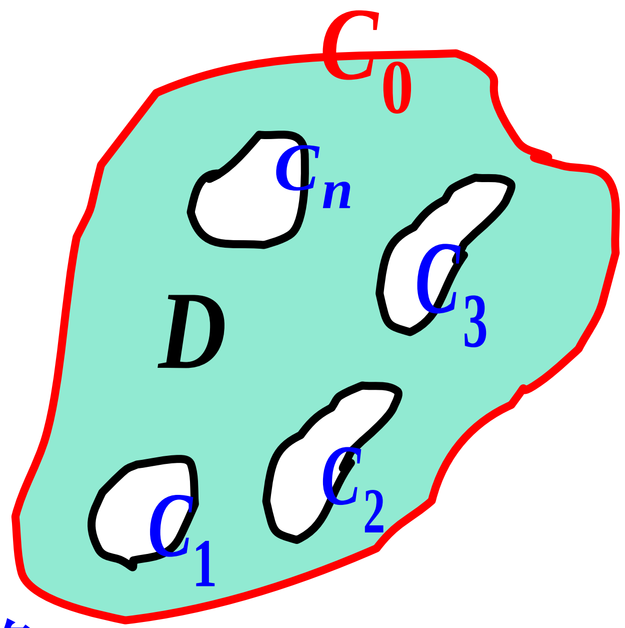
C与C^-连接组成D内一条封闭曲线. 由推论1(P55)得

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$ 因此

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z.$$

由C, C任意性知结论成立. #

复闭路定义



设 $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$为 $n+1$条简单闭曲线, 满足

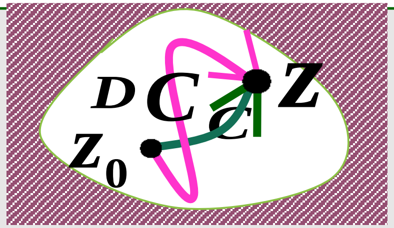
1) $C_1, C_2, \cdots, C_n$都在 C_0 的内部,

2) $C_1, C_2, \cdots, C_n$中每一条在所有其余各条的外部,

则 $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$围成一个多连通区域$D$,

(D在C_0内部, 在$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的外部),

这种多连通区域D 的全部边界C 称为一个复闭路.



推论2: 设$f(z)$在单连通区域D 内解析,

C是D 内任一条起于点z_0 终于z 的简单曲线, 则

$\int_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 值不依赖于C, 只由起点z_0和终点z 确定, 记作$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z.$

证明: 设C是D 内任意的不同于C 的起于z_0 终于z 的简单曲线,

$$\int_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta + \int_{C^-} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0.$$ 因此

$$\int_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = -\int_{C^-} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$ 由C,C任意性得结论. #

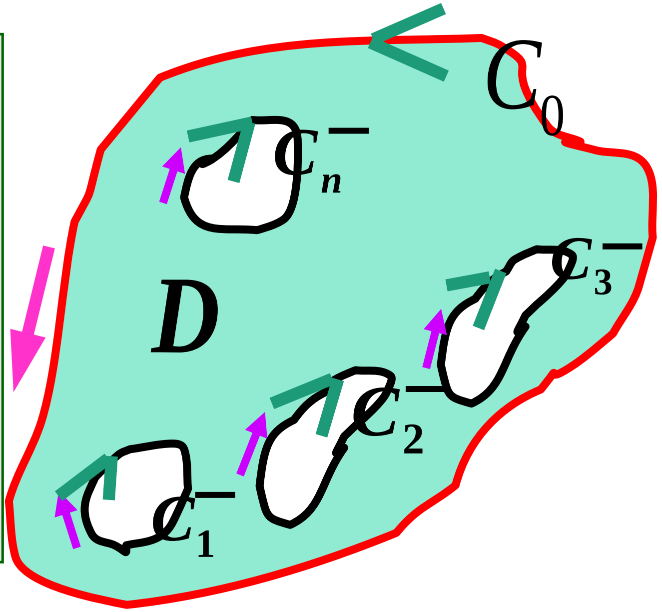
设 $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$为$n+1$条简单闭曲线,

$C_1, C_2, \cdots, C_n$都在 C_0 的内部,

$C_1, C_2, \cdots, C_n$中每一条在所有其余各条的外部,

则由 $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 围成一个多连通区域D,

由$C_0, C_1, \cdots, C_n$构成的D的全部边界C称为一个复闭路.



- 复闭路C的正向：人在 C 上行进时，

使得D的内部总在此人左边的方向，称为 C 的正向.

正向：
- 在外边界 C_0 沿逆时针方向；
- 在内边界$C_1, C_2, \cdots, C_n$上沿顺时针方向, 记为$C_1^-, C_2^-, \cdots, C_n^-$.

记复闭路 $C = C_0 + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$.

今后复积分中复闭路的方向默认为正向.

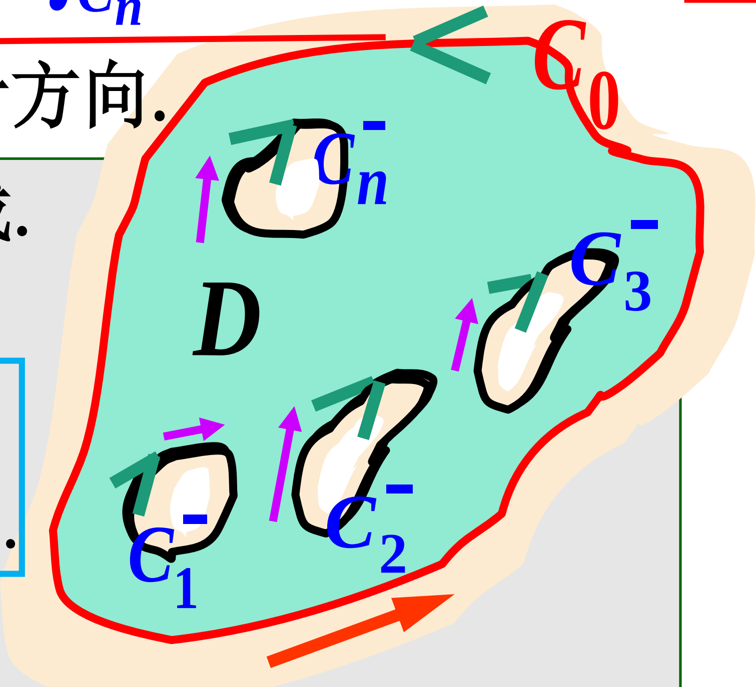
多联通区域柯西定理(P55定理3) ★★★★★

定理3(P55) 设$f(z)$在复闭路$C=C_0+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-$及其围成的多连通区域$D$内解析，即$f(z)$在$\bar{D}$上解析，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0,\ 即\int_{C_0} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2^-} f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\int_{C_n^-} f(z)\mathrm{d}z=0,$$

即 $\int_{C_0} f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z.$ ★★★ 熟记结论

注意: $C_0, C_1, \cdots, C_n$ 均取正向即逆时针方向.



复闭路 C 由闭曲线$C_0,C_1,C_2,\cdots,C_n$组成.

- 复闭路 C 的正向:
  - 外边界 C_0 : 逆时针方向;
  - 在内边界$C_1, C_2, \cdots, C_n$上沿顺时针方向.

复闭路$C=C_0+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-$.

复积分中复闭路默认为正向.

定理3(P55) 设$f(z)$在复闭路$C = C_0 + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$ 及其围成的多连通区域D 内解析, 即$f(z)$ 在$\bar{D}$上解析, 则

$$\int_C f(z)dz = 0, \text{ 即 } \int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz.$$

证明: 只证$n = 2$ 的情形, 其余类似.

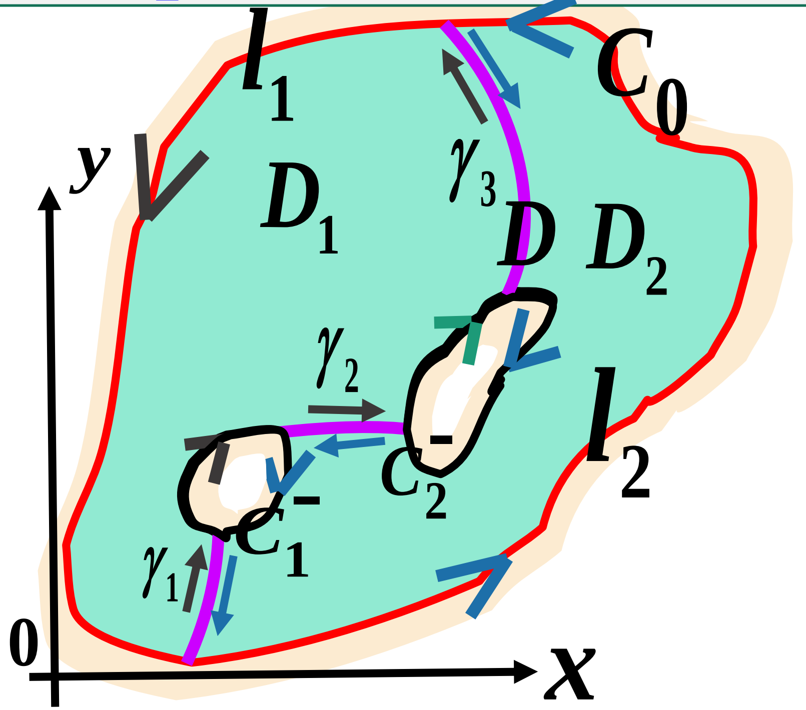
在D内, 用简单曲线γ_1 连接 C_0 和C_1 ,

γ_2连接C_1和C_2, γ_3连接C_2和C_0.

D被分成两个单连通区域D_1 和D_2 ,

用l_1记D_1的边界, 用l_2记D_2的边界,

l_1, l_2都取正向(逆时针). 由柯西积分定理,



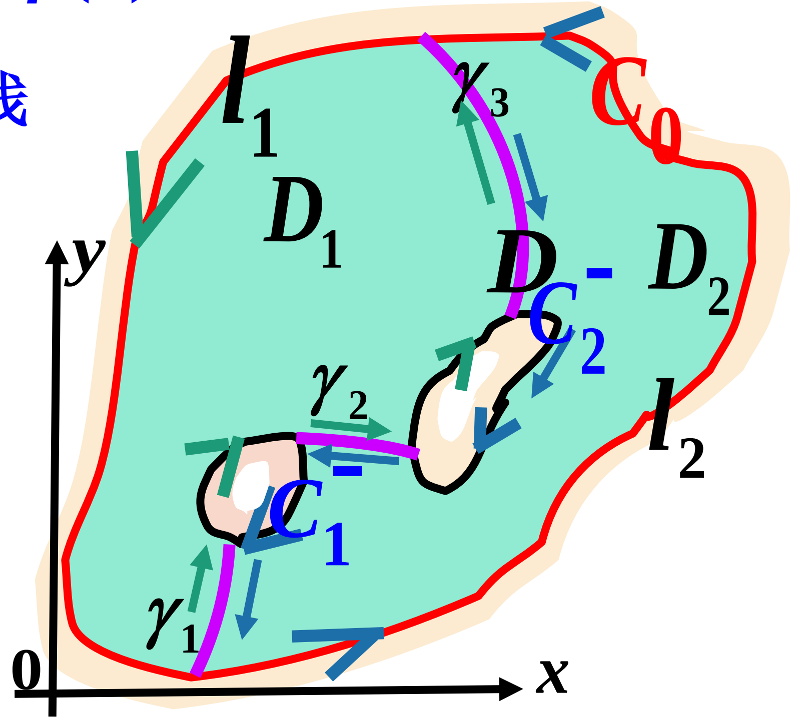
$$\int_{l_1} f(z)dz = 0, \int_{l_2} f(z)dz = 0, \text{ 故} \int_{l_1} f(z)dz + \int_{l_2} f(z)dz = 0.$$

由柯西积分定理(P54 定理2)得 $\int_{l_1} f(z)dz+\int_{l_2} f(z)dz=0+0=0.$

(1) 在 $\left(\int_{l_1} f(z)dz+\int_{l_2} f(z)dz\right)$ 中沿添加的连接线 γ_1, γ_2, γ_3 的积分，沿不同方向各积分了一次，相加后正好相互抵消.

(2) C_0, C_1^-, C_2^- 都被分成两段弧，分别出现在 l_1 和 l_2 中.

$\int_{l_1} f(z)dz$ 和 $\int_{l_2} f(z)dz$ 相加，



把沿 C_0, C_1^-, C_2^- 各自两弧段上的积分合并，得

$$\int_{l_1} f(z)dz+\int_{l_2} f(z)dz=0=\int_{C_0} f(z)dz+\int_{C_1^-} f(z)dz+\int_{C_2^-} f(z)dz=\int_C f(z)dz.$$

故 $\int_{C_0} f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz.$ $n>2$ 的情形，证明类似. #

沿外边界积分 = 沿内边界积分 + 沿内边界积分

例5(P 56) 设a是任一简单闭曲线C 的内部区域的任一内点，则

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}\,dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=1, \\ 0, & n\neq 1 \text{且} n \text{是整数}. \end{cases}$$

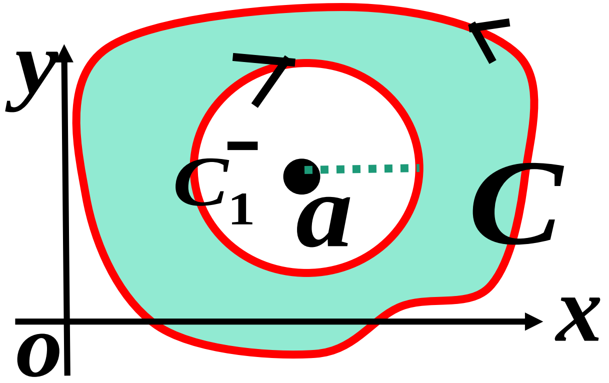
C是包含点 a 的任意简单闭曲线.

解: (1)若C是以a为中心的圆周, 则由P 52 例2 知结论成立.

(2)若C不是以a为中心的圆周，则在C 内作以a 为中心、半径充分小的圆周C_1(含在C 内部)，$C + C_1^-$ 构成复闭路.

在$C + C_1^-$ 及其内部，$z \neq a$,

故$\dfrac{1}{(z-a)^n}$在$C+C_1^-$及其内部解析,



故由P 55定理3和P 52例2得,

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}\,dz = \oint_{C_1} \frac{1}{(z-a)^n}\,dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=1, \\ 0, & n\neq 1 \text{且} n \text{是整数}. \end{cases}$$

#

(P67) 5′. 计算$\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z$, 并由此证明$\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=0.$

1) 解. $\frac{1}{z+1}$在$|z|\le\frac{1}{2}$上处处解析, 故 $\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z=0.$ (1)

(柯西积分定理)

2)证明. 再用参数法求 $\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z.$

$|z|=\frac{1}{2}$: $z(\theta)=\frac{1}{2}e^{i\theta}$, $-\pi<\theta\le\pi$, $z'(\theta)=\frac{1}{2}ie^{i\theta}$,

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\frac{1}{2}e^{i\theta}+1}\left(\frac{1}{2}ie^{i\theta}\right)\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{ie^{i\theta}(e^{-i\theta}+2)}{(e^{i\theta}+2)(e^{-i\theta}+2)}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{i+2ie^{i\theta}}{1+2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+4}\,\mathrm{d}\theta=\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-2\sin\theta}{5+4\cos\theta}}_{\text{奇函数}}\,\mathrm{d}\theta+i\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}}_{\text{偶函数}}\,\mathrm{d}\theta=i\,2\int_{0}^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.\quad(2)$$

综合(1)和(2), 得 $\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=0.$ #

此题目的不是用数学分析方法计算$\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.$

作业

P 67 – 68

3, 4, 5(参照此此PPT21页)

7 (与P 53 – 54例4的证明完全类似, 大家模仿着证明本题)

8 $\left(\text{由条件可得} \lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{zP(z)}{Q(z)}=0,\ (A=0)\text{,然后直接应用第7 题的结论即可.}\right)$

13(2)

16.
用反证法. 假设存在满足条件的函数$f(z)$,
先用柯西积分定理(P 54定理2)求$\oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z$.
再用参数法以及题中给出的$f(z)$在积分路径上的值求$\oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z$.
比较两中方法的计算结果，得出矛盾.
国庆后会讲类似的例题.

3.3 原函数

定义2(P56)(原函数的定义):

如果在区域 D 内 $F'(z)=f(z)$ 处处成立,

则称 $F(z)$ 为 $f(z)$ 在区域 D 内的一个原函数.

对区域D内的$f(z)$在什么条件下, 存在原函数$F(z)$?
原函数怎么样求? 有与微积分中积分学基本定理类似的定理.

定理4(P56) 如果 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析,

则$\forall z_0\in D$, 变上限积分函数

$F(z)\equiv\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ 是在D内的单值函数, 在D 内解析, 且

$F'(z)=f(z)$, 即$F(z)$是$f(z)$在D内的原函数.

其中变上限积分的积分路径可以是D 内任一条从z_0 到z 的简单曲线.

定理4(P56) 如果 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，则 $\forall z_0 \in D$，

$F(z) \equiv \int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$ 是在D内的单值函数，在D 内 解 析,且

$F'(z) = f(z)$， 即$F(z)$是$f(z)$在D内的原函数,

其中$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$的积分路径可以是$D$ 内任一条从z_0 到z 的简单曲线.

证明：1. 解析及可微定义+2.参数法积分+3.长大不等式.

$f(z)$在单连通区域D内解析，由柯西积分定理推论1, 2(P 55),

对D内任一闭曲线C, $\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0$, $\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$ 不依赖积分路线,

故$F(z) \equiv \int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$ 是在D内的单值函数. 由解析和可微定义知,

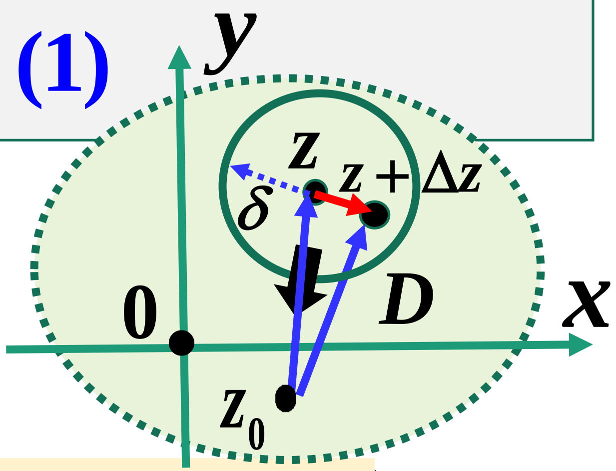
只需证：$\forall z \in D$, $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$. (1)

定理4(P56) 如果 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，则 $\forall z_0 \in D$，

$F(z) \equiv \int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$ 是在 D 内的单值解析函数，$F'(z) = f(z)$.

证明：由条件和推论1,2(P55)，$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 不依赖积分路线.

只需证：$\forall z \in D$，$\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = f(z)$. (1)



$\forall z \in D$(开)，$\exists \delta > 0$，使得以 z 为中心、δ 为半径的圆完全含在 D 内.

在此圆内任取点 $z+\Delta z$，$\Delta z \neq 0$，$|\Delta z| < \delta$.

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right)$$

$$+\int_{z}^{z_0} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

$= \dfrac{1}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ $(\to f(z)$，当 $\Delta z \to 0$.)(只需证)

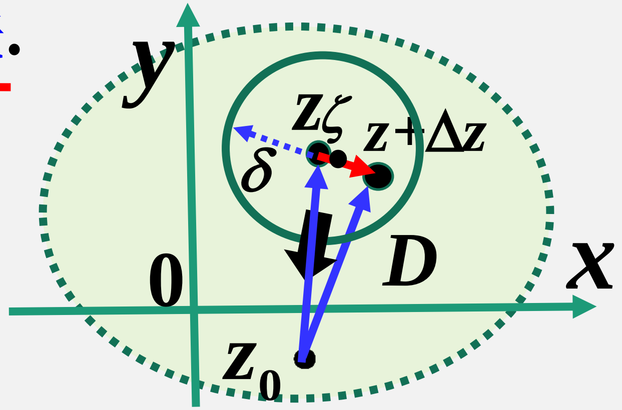
因积分不依赖积分路线.

根据条件，$f(\zeta)$在D内从z_0到z的积分与路线无关.

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right)$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta+\int_{z}^{z_0} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right)$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \ (\to f(z),\ \text{当}\Delta z\to 0.)(\text{只需证})$$



$$1=\frac{1}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} 1\,\mathrm{d}\zeta,$$ (可用参数法验证它), 故

$$\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-f(z)\right|=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\frac{f(z)}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} 1\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z}\{f(\zeta)-f(z)\}\mathrm{d}\zeta\right|.$$

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

只需证: $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta = f(z).$ **(2)**

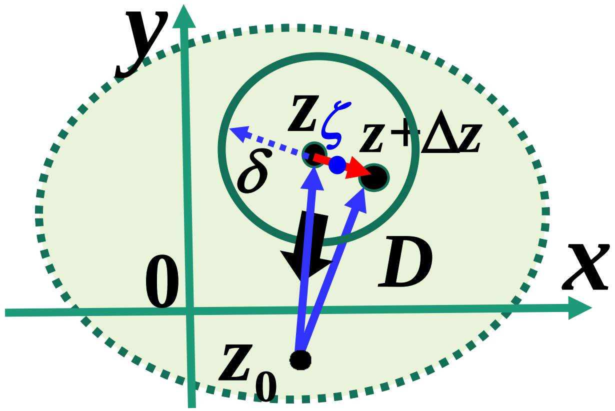
$$\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta - \frac{f(z)}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} 1\,d\zeta\right| \text{(由参数法)}$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z}\{f(\zeta)-f(z)\}\,d\zeta\right|. \quad \textbf{(3)}$$

因$f(\zeta)$在D内解析故连续, 故$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得 当$0<|\Delta z|<\delta$,

ζ在从z到$z+\Delta z$的直线段上时, $|\zeta-z|\le|\Delta z|<\delta$,

$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$. 由长大不等式得



(3)右端 $\le \frac{1}{\cancel{|\Delta z|}}\cdot\varepsilon\cdot\cancel{|(z+\Delta z)-z|}=\varepsilon.$

故 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta = f(z)$, 故 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z).$

由z任意性得, $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ 在D 内解析, $F'(z)=f(z)$. #

推论1(P 66定理8：莫雷拉(Morera)定理)：

若$f(z)$ 在区域 D 内连续，对D内任一闭曲线C有$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0$,

则 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$ 在D 内解析, $F'(z)=f(z)$.

证明：根据条件,类似于P 55推论2的证明可证明：

在D内, $\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$与积分路线无关.

用定理4(P56)证明的同样过程可以证明此推论中的结论. #

推论(P 58): 如果 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析,

$H(z)$是$f(z)$的任一原函数, $z_0\in D$,

则$\forall z\in D$, $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z=H(z)\Big|_{z_0}^{z}=H(z)-H(z_0)$. (牛顿-莱布尼兹公式)

★★★

推论(P 58): 如果 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析,

$H(z)$是$f(z)$的任一原函数, $z_0 \in D$, ★★★

则$\forall z \in D$, $F(z) \equiv \int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = H(z)\Big|_{z_0}^{z} = H(z) - H(z_0)$. (牛顿-莱布尼兹公式)

证明: 由P 56定理4, $F'(z) = f(z)$. 由条件, $H'(z) = f(z)$.

故$\{F(z) - H(z)\}' = 0$. 由P 47第8(1)题, 则$F(z) - H(z) = C$(复常数).

$F(z_0) = 0$, 故$C = -H(z_0)$. 故 $F(z) = H(z) - H(z_0)$. #

牛顿-莱布尼兹公式可以用来计算解析函数的积分(比参数法方便).

例求 $\int_{i}^{1-i}(z^2+1)dz.$

解 z^2+1 在全平面解析,

故由(P58)牛顿-莱布尼兹公式得, ★★★

$$\int_{i}^{1-i}(z^2+1)dz=\left(\frac{z^3}{3}+z\right)\Big|_{i}^{1-i}=\left\{\frac{(1-i)^3}{3}+(1-i)\right\}-\left(\frac{i^3}{3}+i\right)$$

$$=(1-i)\left\{\frac{(1-i)^2}{3}+1\right\}-\frac{i^3}{3}-i$$

$$\boxed{(1-i)^2=1+i^2-2i=-2i}$$

$$\boxed{i^3=i^2\,i=-i}$$

$$=(1-i)\left(\frac{-2i}{3}+1\right)-\frac{-i}{3}-i=\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{3}i\right)+\frac{i}{3}-i$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{7}{3}i.$$ #

例 求 $\int_0^{i} z\cos z dz.$

解 因$z\cos z$在全平面解析，故

由(P58)牛顿-莱布尼兹公式也可得分部积分公式,

故 $\int_0^{i} z\cos z dz = \int_0^{i} z d(\sin z) = (z\sin z)\Big|_0^{i} - \int_0^{i} \sin z dz$

$= (z\sin z)\Big|_0^{i} - (-\cos z)\Big|_0^{i} = (i\sin i - 0) - \{(-\cos i) - (-\cos 0)\}$

$= i\cdot i\sinh 1 - (-\cosh 1 + 1) = -\sinh 1 + \cosh 1 - 1$

$= -\dfrac{e-e^{-1}}{2} + \dfrac{e+e^{-1}}{2} - 1 = e^{-1} - 1.$ #

注意：在应用 牛-莱公式 $\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = H(z)\Big|_{z_0}^{z}$，

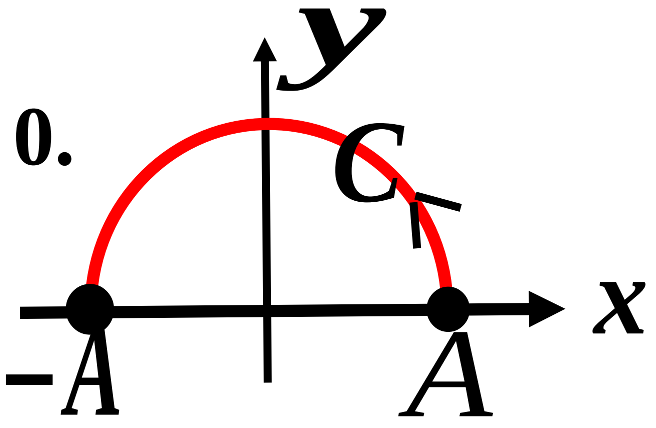
其中$H(z)$是$f(z)$在D内的任一原函数时,

须满足：$f(z)$ 在一个包含积分路径的单联通区域 D 内解析.

例3(P53) 证：$\left|\int_C e^{iz}\,dz\right| < \pi$, 设 C 为$|z| = A$上半圆周从A 到$-A$.

证2: 因e^{iz}处处处处解析, 且$e^{iz} = \left(\frac{e^{iz}}{i}\right)'$, 由3.3节(P56-58)知,

$$\int_C e^{iz}\,dz = \frac{e^{iz}}{i}\Big|_{A}^{-A} = \frac{e^{-iA}-e^{iA}}{i} = -2\sin A,\quad A > 0.$$



故 $\left|\int_C e^{iz}\,dz\right| = 2|\sin A| \le 2 < \pi$. #

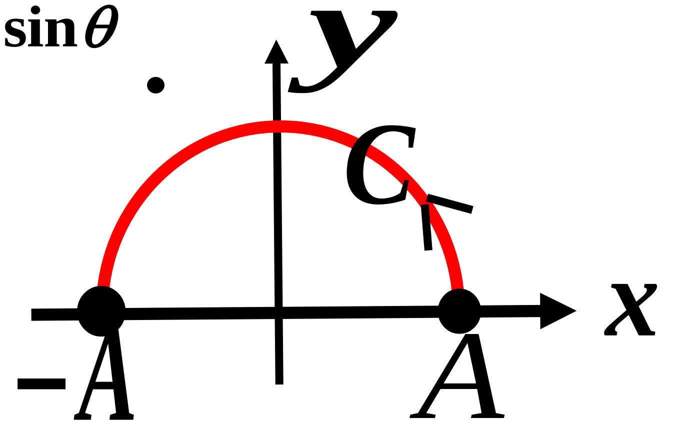
$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,ds \equiv \int_C |f(z)||dz| \equiv \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|\,dt. \quad (3.3)$$

例3(P53) 证：$\left|\int_C e^{iz}\,dz\right| < \pi$，设 C 为 $|z| = A$ 上半圆周从 A 到 $-A$.

证1：C 的参数方程为 $z = Ae^{i\theta}$，$0 \le \theta \le \pi$. 在 C 上，

$$\left|e^{iz}\right| = e^{\mathrm{Re}(iAe^{i\theta})} = e^{\mathrm{Re}(-A\sin\theta + iA\cos\theta)} = e^{-A\sin\theta}.$$

$$|z'(\theta)| = \left|Aie^{i\theta}\right| = A.$$ 根据性质(3.3)知

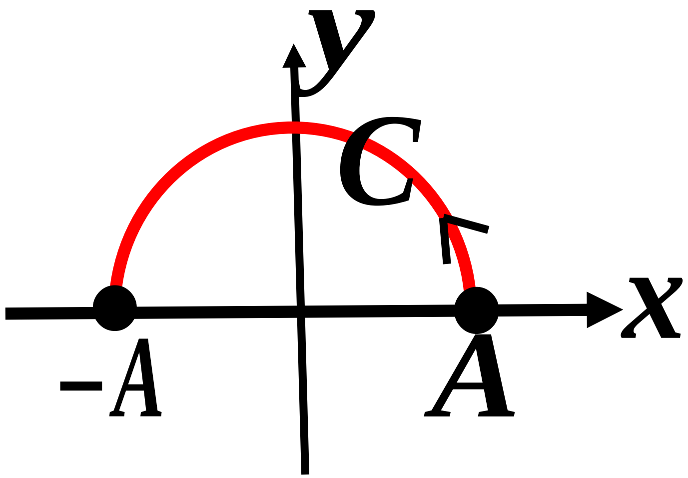


$$\left|\int_C e^{iz}\,dz\right| \le A\int_0^{\pi} e^{-A\sin\theta}\,d\theta = 2A\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A\sin\theta}\,d\theta.$$

因为 $\int_0^{\pi} e^{-A\sin\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A\sin\theta}\,d\theta + \underline{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-A\sin\theta}\,d\theta}$ （对第二项积分 令 $\theta = \pi - \theta$）

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A\sin\theta}\,d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-A\sin\theta}\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A\sin\theta}\,d\theta.$$

$$\left|\int_C e^{iz}\,dz\right| \le A\int_0^{\pi} e^{-A\sin\theta}\,d\theta = 2A\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A\sin\theta}\,d\theta.$$



当$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$时，$\frac{2}{\pi}\theta \le \sin\theta \le \theta.$

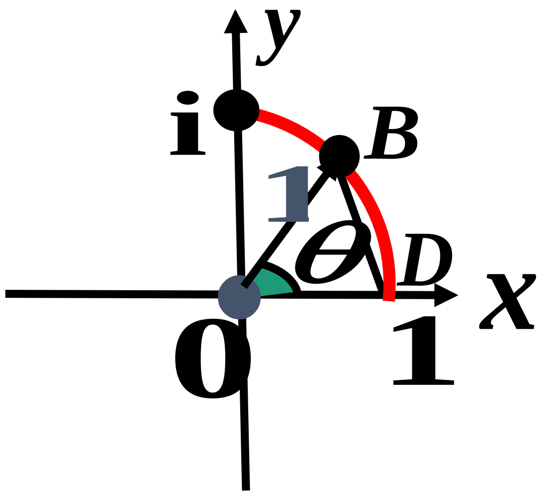
推导见此PPT的32页.

故 $e^{-A\sin\theta} \le e^{-A\frac{2}{\pi}\theta}$.

故 $\left|\int_C e^{iz}\,dz\right| \le 2A\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2A}{\pi}\theta}\,d\theta = -\pi e^{-\frac{2A}{\pi}\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\pi e^{-A} + \pi < \pi.$ #

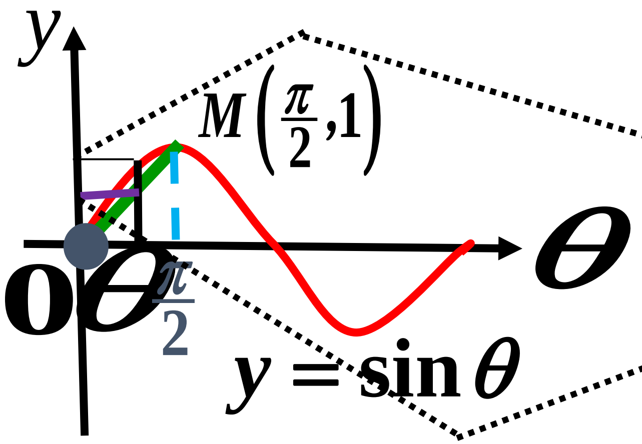
当$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$时， $\frac{2}{\pi}\theta \le \sin\theta \le \theta.$

略证：



ΔOBD的面积≤扇形OBD的面积，

$\frac{1}{2}\sin\theta \le \frac{1}{2}\theta$， 即$\sin\theta \le \theta$， $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



当$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$时, $\sin''\theta = -\sin\theta \le 0$,

故在$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\theta$ 凹, 故

$\frac{2}{\pi}\theta \le \sin\theta \le \theta.$ #

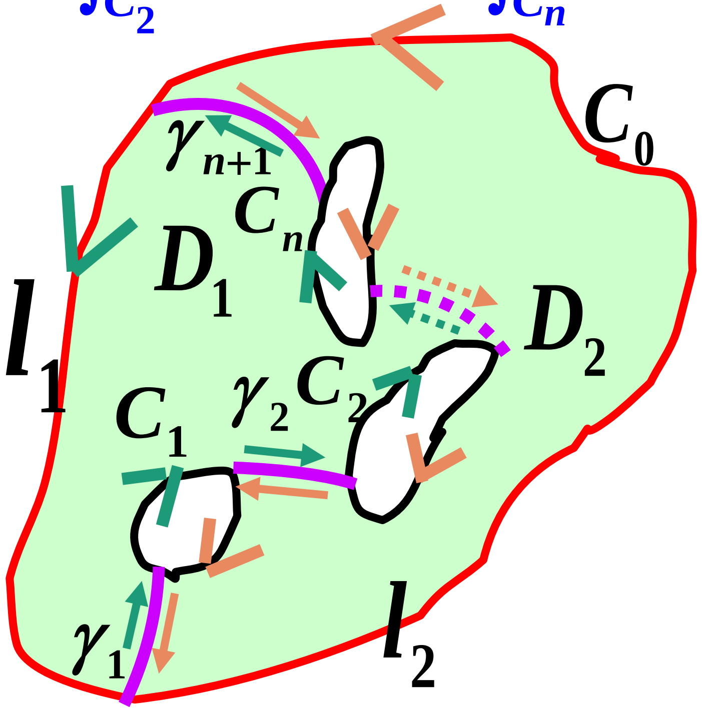
定理3(P55) 设$f(z)$在复闭路$C=C_0+C_1^-+C_2^-+\cdots C_n^-$及其所围成多连通区域$D$内解析，即$f(z)$在$\bar{D}$上解析，则

$$\int_C f(z)dz=0,\ 即\ \int_{C_0} f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz+\cdots+\int_{C_n} f(z)dz.$$

证明: 2)当$n>2$时,

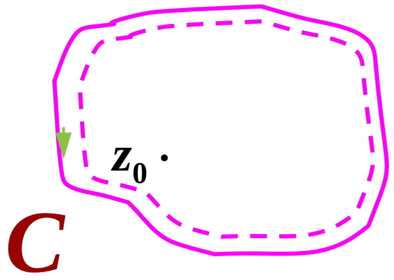
用D内简单曲线γ_1连接C_0和C_1，γ_2连接C_1和C_2，γ_3连接C_2和C_3，$\cdots$，γ_{n+1}连接C_n和C_0.

把D分成两个单连通区域D_1和D_2，用l_1记D_1的边界，用l_2记D_2的边界，l_1, l_2都取逆时针方向.



由柯西积分定理得$\int_{l_1} f(z)dz=\int_{l_2} f(z)dz=0+0=0.$

$$0=\int_{l_1} f(z)dz+\int_{l_2} f(z)dz=\int_{C_0} f(z)dz+\sum_{k=1}^{n}\int_{C_k^-} f(z)dz.$$ 故$\cdots$.#



注：

$f(z)$如果在简单闭曲线C所围成的区域D内解析，在D的闭域上$D+C$连续，那么柯西积分公式仍然成立.

柯西积分定理：设 D 是由简单闭曲线（简称闭路）C围成的单连通区域，$f(z)$在闭域$\bar{D}=D+C$上解析，则$\int_C f(z)\,dz=0.$ 定理2(P54)

例. 求 $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\cos z}{(z-i\,1.5)(z+30)}\,dz$.

解. 由$(z-1.5i)(z+30)=0$得, $z_1=1.5i$，$z_2=-30.$

z_1和z_2都不在闭圆$|z|\le 1$上, 故被积函数在$|z|\le 1$上处处解析.

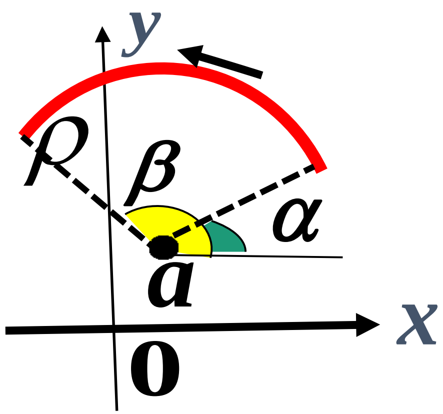
因此由柯西积分定理(P 54定理2)得

$$\int_{|z|=1}\frac{\cos z}{(z-i\,1.5)(z+30)}\,dz=0.\ \#$$

例4(P53-54). 设$\rho>0$充分小，$f(z)$在 C_ρ： $z=a+\rho e^{i\theta},\alpha\le\theta\le\beta$上连续,

$\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k$, 则 $\lim\limits_{\rho\to 0}\int_{C_\rho}f(z)\,dz=i(\beta-\alpha)k$. (3.6)

(P67)第7题仿照此例证明.



注:若$k\neq 0$,则$f(z)$在$z=a$ 不连续, $z=a$ 是$f(z)$ 的奇点.

熟记本题及(P67)第7题的结论.

在第六章需要用到这些结论.

例 设 C 为从1到点 $4+4\mathrm{i}$ 的直线段，试求积分 $\int_C \frac{e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,z}}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z$ 模的一个上界.

1). 先写C参数方程. 2). 在C上估算被积函数模. 3). 利用(3.3)或长大不等式(3.4).

解 设线段C : $z(t)=z_1t+z_0$， $0\le t\le 1$，起点$z(0)=z_0=1$，($z_0=$起点)，

终点 $z(1)=z_1+z_0=z_1+1=4+4\mathrm{i}$，$z_1=3+4\mathrm{i}$，($z_1=$终点$-$起点).

故C: $z(t)=(3+4\mathrm{i})t+1$，$0\le t\le 1$， $z'(t)=3+4\mathrm{i}$.

在 C 上，
$$\left|\frac{e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,z}}{z-\mathrm{i}}\right|=\frac{|e^{\mathrm{i}(3t+1)}|}{|3t+1+\mathrm{i}(4t-1)|}=\frac{1}{\left(\sqrt{(3t+1)^2+(4t-1)^2}\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{25t^2-2t+2}\right)}$$
$$=\frac{1}{\left(\sqrt{25\left(t-\frac{1}{25}\right)^2+\frac{49}{25}}\right)}\le\frac{5}{7},\left(t=\frac{1}{25}\in(0,1)\right).$$

故
$$\left|\int_C\frac{e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,z}}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z\right|\le\frac{5}{7}\cdot\left|1-(4+4\mathrm{i})\right|=\frac{5}{7}\left|-3-4\mathrm{i}\right|=\frac{25}{7}.\ \#$$

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\le\int_C|f(z)|\mathrm{d}s\equiv\int_C|f(z)||\mathrm{d}z|\equiv\int_a^b|f(z(t))||z'(t)|\mathrm{d}t\le\left\{\max_{z\in C}|f(z)|\right\}\cdot(C\text{的长度}).\quad(3.3)$$