2018线性代数期中B试卷参考答案

一（每空5分） (1) $C = P_1AP_2$.　(2) 2.　(3) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \frac{1}{e} \\ \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & 2\mathbf{B}^* \\ 3\mathbf{A}^* & \mathbf{O} \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$　(6) 6

二（每题5分，判断对错2分+理由3分）

(1) 错误. 设$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$，则$\mathbf{C}$的行向量$(1,-2)$不能由$\mathbf{A}$的行向量线性表示. 若改为“列向量等价”才正确.

(2) 错误. 方程个数与变元个数一样多，且有唯一解时，才能用Cramer法则.

(3) 错误. 当$\{\alpha_i\}$线性相关时未必，例如所有的α_i均为零向量，而某个β_j不为0.

(4) 错误。V对加法不封闭：两个奇异矩阵之和可以是可逆的.

三 $(6+6)$、解 $det(\mathbf{A}) = -1, \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

四、解:

1. 对于方程组$\mathbf{A}\xi_2 = \xi_1$, 考虑增广矩阵及其初等行变换

$$(\mathbf{A}, \xi_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

故通解为$\xi_2 = (\frac{k_1-1}{2}, \frac{-k_1+1}{2}, k_1)$, 其中$k_1$ 为任意常数.（4分）

对于方程组$\mathbf{A}^2\xi_3 = \xi_1$, 考虑增广矩阵及其初等行变换

$$(\mathbf{A}^2, \xi_1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

通解为$\xi_3=(-k_2-\frac{1}{2},k_2,k_3)$, 其中$k_2,k_3$ 为任意常数.（8分）

2. $|\xi_1,\xi_2,\xi_3|=\begin{vmatrix}-1 & \frac{k_1-1}{2} & -k_2-\frac{1}{2}\\ 1 & \frac{-k_1+1}{2} & k_2\\ -2 & k_1 & k_3\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq 0$. 故这三个三维列向量线性无关.（12分）

.

五、解: 由已知,齐次方程组$\mathbf{A}x=\mathbf{O}$至少有两个线性无关的解$\eta_1-\eta_2,\eta_1-\eta_3$（4分）.
于是其解空间V的维数$dim(V)=3-rank(\mathbf{A})\geq 2$，进而$rank(\mathbf{A})\leq 1$（6分）.
而$\mathbf{A}\neq\mathbf{O}$，否则$\mathbf{A}x=\beta$会无解. 故$rank(A)=1$（8分）.
于是齐次线性方程组的解空间为$3-rank(\mathbf{A})=2$维，$\eta_1-\eta_2,\eta_1-\eta_3$即为一个基础解系（10分）.
故$\mathbf{A}x=\beta$的通解为$k_1(\eta_1-\eta_2)+k_2(\eta_1-\eta_3)+\eta_1$，其中$k_1,k_2$为任意常数.（12 分）

六、解:（1）只需验证V对加法与数乘满足封闭性:

$\forall\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2\in V,\lambda\in\mathbb{R}$有$\begin{cases}\mathbf{AB}_1=\mathbf{B}_1\mathbf{A}\\ \mathbf{AB}_2=\mathbf{B}_2\mathbf{A}\end{cases}\Longrightarrow\mathbf{A}(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2)=(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2)\mathbf{A}\Longrightarrow$ $\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2\in V$，同时$\mathbf{A}(\lambda\mathbf{B}_1)=\lambda\mathbf{AB}_1=(\lambda\mathbf{B}_1)\mathbf{A}\Longrightarrow\lambda\mathbf{B}_1\in V$.（4分）

(2)$\forall\mathbf{B}\in V$有$\mathbf{P}^{-1}\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\mathbf{P}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{P}^{-1}\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\mathbf{P}\Longrightarrow$ $\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)(\mathbf{PBP}^{-1})=(\mathbf{PBP}^{-1})\cdot\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$（6分）.

设$\mathbf{PBP}^{-1}=\mathbf{M}=(m_{ij})_{n\times n}$，则$\lambda_i m_{ij}=m_{ij}\lambda_j,\forall 1\leq i,j\leq n$. 由于$\{\lambda_i\}_{1\leq i\leq n}$两两不等，故当$i\neq j$时$m_{ij}=0$，即$\mathbf{M}$为对角阵（9分）.

反之，当$\mathbf{M}=\mathbf{PBP}^{-1}$为对角阵时，$\mathbf{B}\in V$. 故$V=\mathbf{P}\{\mathbf{M}:\mathbf{M}$为对角阵$\}\mathbf{P}^{-1}$. 于是$V$的一组基为$\{\alpha_i\}_{1\leq i\leq n}$, 其中$\alpha_i=\mathbf{P}\operatorname{diag}(0,0,\cdots,1,0,\cdots,0)\mathbf{P}^{-1}$; 其维数为$n$（12分）.