2016–2017学年第一学期期中考试试题

考试科目：线性代数B1　　考试时间：2016.12.3　　得分：__________

学生所在系：______________　　姓名：______________　　学号：____________

一、 填空题【每题4分，共20分】

1. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix}$, 其中$\alpha_1$, α_2, β_1, β_2 均为3维列向量，并且$|A|=1$, $|A-2B|=-2$, 则$|B|=$________。

2. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$, A^T 是A的转置矩阵，则矩阵A^TA的秩等于________。

3. 以$\mathbb{R}^3$中三个向量$\mathbf{e}_1=(1,1,1),\mathbf{e}_2=(2,3,1),\mathbf{e}_3=(0,0,1)$为基,向量$(2,5,1)$的坐标是______________。

4. 设A为4阶方阵，A^*为A的伴随矩阵。如果A的秩为2，则$A^*X=0$的解空间的维数为________。

5. 设$A=\begin{pmatrix}2x & x & 1 & 2\\ 1 & x & 3 & -1\\ 1 & 1 & x & 2\\ x & 1 & 2 & x\end{pmatrix}$，$f(x)=\det(A)$，则$f(x)$中$x^3$的系数为_________。

二、 判断题【判断下列命题是否正确，并简要说明理由。每题5分，共20分】

1. 若非齐次线性方程组$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$对应的齐次线性方程组$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$只有零解,则$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$有唯一解。

2. 若矩阵A, B满足AB, BA都有定义，则$\det(AB) = \det(BA)$。

3. 若向量组$\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m$可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s$线性表示，则向量组$\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m$线性相关。

4. 设$\mathbb{R}^{n\times n}$是所有n 阶实方阵按照矩阵线性运算所构成的实数域上的线性空间，W是所有迹等于零的n 阶实方阵构成的集合，则W是$\mathbb{R}^{n\times n}$的子空间。

三、【12分】

设n 阶方阵$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & & & \\ & 1 & \frac{1}{2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \frac{1}{2} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$，求$A$ 的逆矩阵。

四、【20分】设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\2\\10\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\0\\b\end{pmatrix}。$$

试问a, b 满足什么条件时，

1. β 可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，且表示方法唯一；

2. β 不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示；

3. β 可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，但是表示方法不唯一，并且求出所有的表示方法。

五、【14分】设$\mathbb{R}^{2\times 2}$是所有2阶实方阵对于矩阵的线性运算构成的线性空间。给定一组向量

I: $A_1=\begin{pmatrix}5&0\\0&0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}0&0\\8&5\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}0&0\\3&2\end{pmatrix}$.

1. 证明向量组(I)是线性空间$\mathbb{R}^{2\times 2}$的一组基；

2. 给定线性空间$\mathbb{R}^{2\times 2}$的另一组基

II: $B_1=\begin{pmatrix}9&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$, $B_3=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$, $B_4=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$;

求基(I)到基（II）的过渡矩阵；

六、 (14分) 设F为数域，$A \in F^{n\times n}$，且满足$A^2 = I$，这里I是n阶单位阵。

1. 证明：$\operatorname{rank}(A+I) + \operatorname{rank}(A-I) = n$。

2. 设$W_1 = \{\mathbf{x} \in F^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{x}\}$, $W_2 = \{\mathbf{x} \in F^n \mid A\mathbf{x} = -\mathbf{x}\}$。证明：$W_1$及$W_2$为$F^n$的子空间，并且$W_1$的一组基与$W_2$的一组基合并起来构成$F^n$的一组基。