2018年4月中国大学先修课程（CAP）考试试题

考试科目：解析几何与线性代数 (A卷)

考试时间：180 分钟　　分总：100 分

注：所有答案写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上无效。

一、填空题（每小题5分, 共25分）

1. 将平面上的正 n 边形, 旋转一个大于零的角度后与原图形重合, 则这样的旋转共有__________种.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^9=$ ______________.

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 已知 $|\boldsymbol{A}|=2$, $|\boldsymbol{B}|=-3$, 则 $|2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}|=$ __________.

4. 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_2x_3$, 则 f 的规范形为______________.

5. 设 W_1 与 W_2 是 $\mathbb{R}^4$ 中的子空间, $W_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$, $\dim W_2=2$, 且 $W_2\not\subseteq W_1$. 则 $\dim(W_1\cap W_2)=$ __________.

二、计算题（共60分）

6. (10分) 在空间直角坐标系中设点 $A=(1,2,3)$ 和 $B=(3,4,5)$. 求过线段 AB 中点且与线段 AB 垂直的平面方程.

7. (15分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -3\\ 1 & -1 & -2 & 3\end{bmatrix}$, 求 4×3 型矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$

且矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$.

8. (20分) 设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{bmatrix}$.

   (i) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

   (ii) 是否存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$? 若存在, 给出一个这样的矩阵 $\boldsymbol{C}$.

9. (15分) 设 $\mathbb{R}_4[x]$ 为全体次数小于 4 的实系数多项式组成的实数域上线性空间. σ 为 $\mathbb{R}_4[x]$ 的线性变换. 若 σ 在基 $x^3,x^2,x,1$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

求 σ 在基 $x^3,x^3+x^2,x^3+x^2+x,x^3+x^2+x+1$ 下的矩阵.

三、证明题（共15分）

10. (15分) 设 $n>m$, $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{B}\in M_{(n-m)\times n}(\mathbb{R})$. 令 V_1 与 V_2 分别为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解空间. 证明: $\mathbb{R}^n=V_1\oplus V_2$ 的充分必要条件为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Cx}=\boldsymbol{0}$ 只有零解, 其中 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$.