2018–2019学年第一学期期终考试试题

考试科目：线性代数B1　　考试时间：2019.01.14　　得分：________

学生所在系：________　　姓名：________　　学号：________

一、填空题【每空4分，共24分】

直接乘 or $A=I+B$　$B=\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$

$A^4=(I+B)^4$　$B^2=I$

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$。

2. 向量组$\alpha_1=(1,1,1,1)$, $\alpha_2=(1,2,3,4)$, $\alpha_3=(2,3,4,5)$, $\alpha_4=(1,-2,2,-1)$的秩= 3 。

3. 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$

$\lambda=1, \lambda=-2$ ...

有无穷多解，则λ= 1 。

4. 设A, B均为n阶矩阵，且存在可逆矩阵P, 使得$B=P^{-1}AP-PAP^{-1}+I$。如果$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为$B$的$n$个特征值，则$\sum\limits_{1\le i\le n}\lambda_i =$ n. 。

5. 实二次型$x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$的正惯性指数为________。

6. 设实二次型$Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2-2tx_1x_2-2x_1x_3$是正定的，则$t$的取值范围为 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$ 。

5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　$|\lambda I-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$　$r=1$

$\lambda=5,-1,-1$　$s=2$

6. $A=\begin{pmatrix} 1 & -t & -1 \\ -t & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 各阶顺序主子式>0 ...

二、 判断题【判断下列命题是否正确，并简要说明理由。每题5分，共20分】

对.

1. 若0为矩阵A的特征值，则A一定不可逆。

T. $\because \det(A)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=0$ $\therefore A$不可逆.

错.

2. 若f为线性空间V上的一个线性变换，且f在V的某组基下的矩阵为$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

则在V中存在一组基，使得f 在这组基下的矩阵为对角阵。

线性变换在不同基下的矩阵是相似的. 而 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 不能相似于对角阵. $\therefore$ 不可满足条件的基.

3. 设$V=\{a_0+a_1x+a_2x^2|a_i\in\mathbf{R}, i=0,1,2\}$, 即次数不超过2的实系数多项式构成的$\mathbf{R}$上的线性空间。若对任意$f(x),g(x)\in V$ 定义

$$(f(x),g(x))=f(0)g(0),$$

则此二元运算$(,)$可以成为V上的一个内积。

错. 令 $f(x)=a_1x+a_2x^2$ 且 $a_1,a_2\neq 0$ 时 $f(0)=0$.

$(f(x),f(x))=0$

$\therefore$ 正定性不满足

4. 设$2n$ 阶实对称矩阵$A=\begin{pmatrix} A_1 & B \\ C & A_2 \end{pmatrix}$，其中$A_1$，$A_2$ 均为n阶方阵。若A正定，则A_1+A_2也正定。

对. $\because$ A正定 $\Leftrightarrow$ 各阶主子式>0 $\Rightarrow$ A_1的各阶顺序主子式>0

$\Rightarrow A_2$ ......

$A^T=A \Rightarrow A_1^T=A_1$, $A_2^T=A_2$.

$\therefore A_1, A_2$ 正定. 因此 A_1+A_2 也正定

$(x^T(A_1+A_2)x>0)$

三、【10分】

设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$为非齐次线性方程组$\mathbf{AX}=\mathbf{b}$的3个解。

1. 求$\mathbf{AX}=\mathbf{0}$的通解；

2. 求$\mathbf{AX}=\mathbf{b}$的通解；

3. 求出满足题设条件的一个非齐次线性方程组。

1. 令 $\beta_1=\alpha_1-\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\beta_2=\alpha_1-\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ β_1,β_2无关.

β_1,β_2是 $AX=0$ 的两个线性无关的解. ∴ $AX=0$ 的解空间维数 ≥ 2. $r(A)\leq 1$. 而∵ $AX=b$ 有解 ∴ $A\neq 0$.

∴ $r(A)\geq 1$　∴ $r(A)=1$

∴ $AX=0$ 的通解为：$\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2$. λ_1,λ_2 为任意常数.

2. $AX=b$ 的通解为：$\alpha_1+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2$

3. 由通解：$\alpha_1+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\lambda_2\\1+\lambda_1\\-\lambda_1-\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

故. $x_1+x_2+x_3=2$ 即为所求.

四、【15分】

设(I): $\alpha_1=(1,\ 0,\ 0)^T$, $\alpha_2=(0,\ 1,\ 0)^T$, $\alpha_3=(0,\ 0,\ 1)^T$;

(II): $\beta_1=(-1,\ 0,\ 1)^T$, $\beta_2=(0,\ 1,\ 1)^T$, $\beta_3=(2,\ -1,\ -2)^T$

分别为$\mathbf{R}^3$的两组基。设σ为$\mathbf{R}^3$上的一个线性变换，并且

$\sigma(\beta_1)=(1,\ 0,\ -3)^T$, $\sigma(\beta_2)=(0,\ -1,\ -1)^T$, $\sigma(\beta_3)=(-5,\ -1,\ 0)^T$。

请分别求出σ 在（I）、（II）这两组基下的矩阵。

解：设从 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 $\beta_1\beta_2\beta_3$ 的过渡矩阵为 T.

即 $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)T\ (=E\cdot T)$

$\therefore T=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)$.　　初等变换法求 T^{-1}

则从 $\{\beta_i\}$ 到 $\{\alpha_i\}$ 的过渡矩阵为 $T^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

设 σ 在基 $\{\alpha_i\}$ 下的矩阵为 A.

$\{\beta_i\}$ — — B.

$\because \sigma(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)B=\begin{pmatrix}1&0&-5\\0&-1&-1\\-3&-1&0\end{pmatrix}$

$\therefore B=T^{-1}\begin{pmatrix}1&0&-5\\0&-1&-1\\-3&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&0&-3\\-2&-1&-5\\-2&0&-4\end{pmatrix}$

$\sigma(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)A$　　$\because(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)T$

$=\sigma(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)T^{-1}=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)BT^{-1}=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)TBT^{-1}$

$\therefore A=TBT^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-5\\0&-1&-1\\-3&-1&0\end{pmatrix}T^{-1}=\begin{pmatrix}-4&3&-3\\-2&1&-2\\-4&6&-7\end{pmatrix}$

五、【15分】

设实二次型

$$Q(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$$

可以经过正交变换$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathbf{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$化为标准型$y_2^2+2y_3^2$.

1. 确定a和b的取值;

2. 求出满足题设条件的一个正交变换。

解: 1、对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix}$

特征值为 $0, 1, 2, \cancel{0}$. $\therefore \det(A)=0 \to -(a-b)^2=0$.

又 $\det(A-I)=0 \Rightarrow 2ab=0$ $\therefore a=b=0$.

2. $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

$\lambda=0$时 $(0I-A)X=0$. 基础解系 单位化后 $X_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\lambda=1$ $(I-A)X=0$ . . . . . $X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\lambda=2$ $(2I-A)X=0$ — — — $X_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\therefore P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

先讨论特殊情况　　特殊情况 1. $\lambda=0$ 全为0 $A=0$.

2. 特征值全为2，则可逆. $A^2=2A \Rightarrow A=2I$.

六、【8分】

设A为n阶复方阵，且$A^2=2A$。求证：A相似于对角阵。

解：$\because A(2I-A)=0$ $\therefore$ 可得. $r(2I-A)+r(A)\leq n$.

又 $r(2I-A)+r(A)\geqslant r(2I-A+A)=r(2I)=n$.

$\therefore r(A)+r(2I-A)=n$. $A^2=2A \Rightarrow \lambda^2=2\lambda$.

A的特征值为 $0, 2$. 设 $r(A)=r$. 则 $r(2I-A)=n-r$.

$V_{\lambda=0}$ $(0I-A)X=0$ $\dim V_{\lambda=0}=n-r$ 维　$n-r$个无关特征向量

$V_{\lambda=2}$ $(2I-A)X=0$ $\dim V_{\lambda=2}=r$ 维.　r个 —

$\therefore A$有n个线性无关的特征向量 $\therefore A$可相似于对角阵.

七、【8分】

设A 为n阶正定矩阵，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$为$\mathbf{R}^n$中的$s$个非零向量，且满足

$$\alpha_i^T A\alpha_j = 0,\ \ 1\leq i<j\leq s$$

求证：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关。

$(A^T=A)$

解：A正定. 一般 $\alpha_i^TA\alpha_i>0$ $\alpha_i\neq\theta$.

由 $\alpha_i^TA\alpha_j=0$ $1\leq i<j\leq s$ 转置得：$\alpha_i^TA\alpha_j=0$ $1\leq j<i\leq s$

$(\therefore \alpha_i^TA\alpha_j=0\ \forall\ i\neq j)$ $i, j=1\sim s$.

令. $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\theta$　(证 $k_i=0$)

则 $(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)^TA(k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s)=0$

展开得：$k_1^2\alpha_1^TA\alpha_1+k_2^2\alpha_2^TA\alpha_2+\cdots+k_s^2\alpha_s^TA\alpha_s=0$

$\Rightarrow k_i=0$ $i=1\sim s$. $\therefore \alpha_1\cdots\alpha_s$ 无关.