中 国 科 学 技 术 大 学
2009 - 2010学年第二学期期中考试试卷

考试科目： 线性代数 得分：________________

学生所在系：______________ 姓名：______________ 学号：______________

装订线 答题时不要超过此线

一.【共40分】填空题

1. 已知空间直角坐标系中两向量$\mathbf{a}=(4,-3,0)$和$\mathbf{b}=(4,3,-2)$，则以$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$为两边的三角形的面积为________________。

2. 以$A(1,0,2), B(1,-1,0), C(2,2,-1)$和$D(-2,-1,4)$为顶点的四面体的体积为________________。

3. 两平行平面$2x+3y+4z+5=0$和$2x+3y+4z+17=0$之间的距离为________________。

4. 直角坐标系中过直线$\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-3}$且平行于$z$轴的平面方程为______________________。

5. 设$A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$，记$A_{ij}$为元素$a_{ij}$的代数余子式，
则$A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41}=$______________。

6. 对线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 9, \\ -x_1 + x_2 - 8x_3 + 8x_4 = -27, \end{cases}$$
已知系数方阵的行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & -8 & 8 \end{vmatrix}=72$，则解$x_4=$____________。

7. 设A为4阶方阵，且$|A|=3$，则$|A^{-1}|=$____________，$|A^2|=$____________，A的伴随矩阵A^*的行列式$|A^*|=$____________。
8. 设矩阵$B=(b_{ij})_{3\times 3}$满足$B^*=B^T$，其中B^*为B的伴随矩阵，B^T为B的转置矩阵。若b_{11},b_{12},b_{13}为3个相等的非零正数，则$b_{11}=$____________。

二. 【12分】若3阶方阵A和B满足关系式$A^{-1}BA=6A+BA$，且$A=\begin{pmatrix}1/4&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/7\end{pmatrix}$，试求$B$。

三. 【12分】求矩阵$A=\begin{pmatrix}1/4&1/4&1/4&1/4\\1/4&1/4&-1/4&-1/4\\1/4&-1/4&-1/4&1/4\\1/4&-1/4&1/4&-1/4\end{pmatrix}$的逆。

四. 【12分】设直线$l:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$在平面$\pi: x-y+2z=0$上的投影为直线$l_0$。

(a) 求直线l_0的方程;

(b) 求l_0绕坐标y轴旋转一周所成曲面的方程。

五. 【12分】已知向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\in\mathbb{R}^n$线性无关，试证明：向量组$\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$，$\mathbf{b}_2=\mathbf{a}_1+3\mathbf{a}_2+5\mathbf{a}_3$，$\mathbf{b}_3=\mathbf{a}_1+9\mathbf{a}_2+25\mathbf{a}_3$线性无关。

六. 【12分】设$\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m\in F^n$为一组列向量，$A=(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m)$是以$\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m$为列构成的$n\times m$阶矩阵。$A$经过一系列的初等行变换后变为矩阵$B=(\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_m)$，这里$\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_m\in F^n$为矩阵$B$的列。试证明：若$\{\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_r\}$为$\{\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m\}$的极大无关组，则$\{\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_r\}$为$\{\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_m\}$的极大无关组。