中国科学院大学

试题专用纸

课程编号: B11001Y-B02

课程名称: 线性代数 I-B

任课老师: 李子明

注意事项:

1. 考试时间为 180 分钟, 考试方式 闭 卷;
2. 全部答案写在答题纸上;
3. 考试结束后, 请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回.

1. .(10) 设 5×5 阶实矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

计算:$A^k, k=2,3,4,5,6.$

2. .(10 分) 计算 3×3 阶实矩阵

$$M=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&3\\4&-3&8\end{pmatrix}$$

的逆矩阵.

3. .(10 分) 设 A 和 B 是 4×4 阶矩阵,$det(A)=2$ 且 $det(B)=-1$. 计算下列行列式:

(i) $det(AB)$; (ii)$\det(3A)$; (iii) $det(B^tB)$, 其中 B^t 是 B 的转置矩阵;

(iv)$det(B^{-1}AB)$; (v)$det(A^\star B)$, 其中 $A^\star$ 是 A 的伴随矩阵.

4. .(10 分) 设有限域 $\mathbb{Z}_5=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\}$, 记方程组

$$\begin{pmatrix}\overline{1}&\overline{2}&\overline{3}&\overline{0}\\\overline{4}&\overline{2}&\overline{\alpha}&\overline{2}\\\overline{2}&\overline{0}&\overline{1}&\overline{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{0}\\\overline{0}\\\overline{0}\\\overline{0}\end{pmatrix},其中\alpha\in\mathbb{Z}_5$$

的解空间为 V, 讨论当 α 取什么值时 V 的维数等于 1? 当 α 取什么值时 V 的维数等于 2?

5. .(10 分) 设 $\mathbb{R}$ 是实数域,$GL_n(\mathbb{R})$ 是 $n\times n$ 阶可逆矩阵构成的乘法群,

$$G=\{A\in GL_n(\mathbb{R})|det(A)>0\}\quad 和\quad H=\{A\in GL_n(\mathbb{R})|det(A)\geq1\}.$$

证明: G 是 $GL_n(\mathbb{R})$ 的子群, 但 H 不是 $GL_n(\mathbb{R})$ 的子群.

6. .(10 分) 设:

$$R=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}\Big| a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

(i) 证明：R 对于矩阵加法和乘法构成交换环.

(ii) 设 $A\in R$. 证明：A 是 R 中的可逆元 $\Longleftrightarrow rank(a)=2$.

(iii)R 是不是整环？并证明你的结论.

7. .(10 分) 设 $(G,\cdot,e)$ 和 $(H,*,\epsilon)$ 是两个群,$\phi:G\to H$ 是群同态.

(i) 证明：$\mathrm{im}(\phi)$ 是 H 的子群.

(ii) 设 G 是有限阶循环群. 证明:$\mathrm{im}(\phi)$ 也是循环群, 且它的阶数整除 G 的阶.

8. (10 分) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 其中 $a_{ij}=max(i,j), i,j\in\{1,2\ldots,n\}$. 计算 $det(A)$ 的值.

9. (15 分) 设 $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是线性映射. 记 $\phi^2=\phi\circ\phi$. 证明:

(i)　$\ker(\phi)\subset\ker(\phi^2)$ 和 $\mathrm{im}(\phi^2)\subset\mathrm{im}(\phi)$.

(ii)　$\ker(\phi)=\ker(\phi^2)$ 当且仅当 $\mathrm{im}(\phi^2)=(\phi)$.

(iii)　$\dim(\ker(\phi^2))\leq 2\dim(\ker(\phi))$.

10. (5 分) 设 A 是 $m\times n$ 阶实矩阵, 且 $\mathrm{rank}(A)=r>0$. 设 A 的前 r 行 $\overrightarrow{A_1},\ldots,\overrightarrow{A_r}$ 线性无关, 且 A 的前 r 列 $\overrightarrow{A^{(1)}},\ldots,\overrightarrow{A^{(r)}}$ 线性无关. 证明:A 的前 r 行和前 r 列交叉处的元素组成的子式

$$M\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r \\ 1 & 2 & \ldots & r \end{pmatrix}\neq 0.$$