2016–2017学年第一学期期中考试试题

考试科目：线性代数B1　　考试时间：2016.12.3　　得分：________

学生所在系：__________　　姓名：__________　　学号：__________

一、填空题【每题4分，共20分】 $|A-2B| = (-\alpha_1, -\alpha_2, \beta_1 - 2\beta_2) = (-\alpha_1, -\alpha_2, \beta_1) - 2(-\alpha_1, -\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1) - 2(\alpha_1, \alpha_2, \beta_2)$

$= |A| - 2|B| = -2.$

1. 设矩阵$A = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1\end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix}$，其中$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 均为3维列向量，并且$|A| = 1$, $|A-2B| = -2$, 则$|B| =$ $\underline{3/2}$。

2. 设矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$，$A^T$是$A$的转置矩阵，则矩阵$A^TA$的秩等于 $\underline{2}$。 $\mathrm{rank}(A^TA) = \mathrm{rank}(A)$

$\Leftrightarrow$ $AX=0$ 与 $A^TAX=0$ 同解.

$(\Rightarrow)$ $AX=0$，两侧左乘A^T，

$A^TAX=0$. 则 $AX=0$ 的解都是 $A^TAX=0$ 的解.

$(\Leftarrow)$ $A^TAX=0$，两侧左乘 X^T，

$X^TA^TAX=0$，即 $(AX)^T(AX)=0$. 令 $Y=AX$，

则 $Y^TY=0$.

记 $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

则 $Y^TY = 0 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$

$\therefore Y=0$. 则 $A^TAX=0$ 的解都是 $AX=0$ 的解.

3. 以$\mathbb{R}^3$中三个向量$e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (2,3,1)$, $e_3 = (0,0,1)$为基,向量$(2,5,1)$的坐标是 $\underline{(-4,3,2)^T}$。 $(2,5,1) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$，解方程.

4. 设A为4阶方阵，A^*为A的伴随矩阵。如果A的秩为2，则$A^*X = 0$的解空间的维数为 $\underline{4}$。

$\mathrm{rank}(A^*) = \begin{cases} n & \mathrm{rank}(A)=n \\ 1 & \mathrm{rank}(A)=n-1 \\ 0 & \mathrm{rank}(A)\le n-2 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{rank}(A^*)=0$

5. 设$A = \begin{pmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 3 & -1 \\ 1 & 1 & x & 2 \\ x & 1 & 2 & x \end{pmatrix}$，$f(x) = \det(A)$，则$f(x)$中$x^3$的系数为 $\underline{-4}$。 展开计算.

二、判断题【判断下列命题是否正确，并简要说明理由。每题5分，共20分】

1. 若非齐次线性方程组$Ax = b$对应的齐次线性方程组$Ax = 0$只有零解,则$Ax = b$有唯一解。

× 当A不为方阵时，不能保证 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A, b)$

2. 若矩阵A, B满足AB, BA都有定义，则$\det(AB) = \det(BA)$。

× 举反例

只有A、B为方阵时才满足 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

3. 若向量组$\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m$可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s$线性表示，则向量组$\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m$线性相关。

× $m>s$，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 一定线性相关

$m \le s$，该结论不一定成立.

举反例 $\alpha_i = e_i$，取β_i为α_i中的子集 $\Rightarrow$ β_i线性无关.

4. 设$\mathbb{R}^{n\times n}$是所有n 阶实方阵按照矩阵线性运算所构成的实数域上的线性空间，W是所有迹等于零的n 阶实方阵构成的集合，则W是$\mathbb{R}^{n\times n}$的子空间。

√ $\forall A, B \in W$, $\lambda \in F$

$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = 0$

$\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}(A) = 0$

$\therefore W$为$\mathbb{R}^{n\times n}$的子空间，得证.

三、【12分】

设n阶方阵$A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & & & \\ & 1 & \frac{1}{2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \frac{1}{2} \\ & & & & 1\end{pmatrix}$，求$A$的逆矩阵。

(1)

$$(A,I)\xrightarrow{-\frac{1}{2}r_n\to r_{n-1}}\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1 & \frac{1}{2} & & & & 1 & & & & \\ & 1 & \frac{1}{2} & & & & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & & & & 1 & -\frac{1}{2} \\ & & & & 1 & & & & & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}r_{n-1}\to r_{n-2}}\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}1 & \frac{1}{2} & & & & & 1 & & & & & \\ & 1 & \frac{1}{2} & & & & & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & & \ddots & & & \\ & & & 1 & 0 & & & & & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ & & & & 1 & 0 & & & & & 1 & -\frac{1}{2} \\ & & & & & 1 & & & & & & 1\end{array}\right]$$

逆矩阵为

$$\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \cdots & (-\frac{1}{2})^{n-1} \\ & 1 & -\frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{4} \\ & & & \ddots & -\frac{1}{2} \\ & & & & 1\end{bmatrix}$$

(2). 伴随矩阵. $AA^*=\det(A)I$. $\Rightarrow$ $A^{-1}=\dfrac{A^*}{\det(A)}=A^*$.

(3) 幂0矩阵.

四、【20分】设

$\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\2\\10\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}1\\0\\b\end{pmatrix}$。

试问a, b满足什么条件时，

1. β可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示，且表示方法唯一；
2. β不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示；
3. β可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示，但是表示方法不唯一，并且求出所有的表示方法。

记$A=\begin{bmatrix}a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4\end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix}a & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & 4 & b\end{bmatrix}$

1. β可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$唯一线性表示，则$Ax=b$有唯一解.

则 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=3$

$A\longrightarrow\begin{bmatrix}a+4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$，则 $a\neq -4$

$B\longrightarrow\begin{bmatrix}a+4 & 0 & 0 & 1-b \\ 2 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & b\end{bmatrix}$，

2. 若不能线性表示，则 $\mathrm{rank}(A)\neq\mathrm{rank}(B)$，$a\neq-4$时，有 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=3$

故只需 $a=-4$ 且 $1-b\neq0$，即 $a=-4$，$b\neq1$

3. 不唯一线性表示，则 $a=-4$，$b=1$，

设 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=\beta$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}2\lambda_1+\lambda_2=-1\\ \lambda_3=1\end{cases}$

$\therefore \beta=\alpha_3+t\alpha_1-(1+2t)\alpha_2$，$t\in\mathbb{R}$.

五、【14分】设$\mathbb{R}^{2\times2}$是所有2阶实方阵对于矩阵的线性运算构成的线性空间。给定一组向量

I: $A_1=\begin{pmatrix}5&0\\0&0\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}0&0\\8&5\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}0&0\\3&2\end{pmatrix}$.

1. 证明向量组(I)是线性空间$\mathbb{R}^{2\times2}$的一组基；

2. 给定线性空间$\mathbb{R}^{2\times2}$的另一组基

II: $B_1=\begin{pmatrix}9&0\\0&0\end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}, B_3=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}, B_4=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$;

求基(I)到基（II）的过渡矩阵；

1. 假设 $\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\lambda_3A_3+\lambda_4A_4=0.\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0\Rightarrow$ 线性无关.

取 $E_1=\begin{bmatrix}1&\\&\end{bmatrix}$, $E_2=\begin{bmatrix}&1\\&\end{bmatrix}$, $E_3=\begin{bmatrix}&\\1&\end{bmatrix}$, $E_4=\begin{bmatrix}&\\&1\end{bmatrix}$, 为$\mathbb{R}^{2\times2}$的一组基,

设 $(A_1,A_2,A_3,A_4)=(E_1,E_2,E_3,E_4)P$, $P=\begin{bmatrix}5&2&&\\&1&&\\&&8&3\\&&5&2\end{bmatrix}$, $\det(P)\neq0$

$\therefore$ P可逆, $\therefore$ 得证

2. $(A_1,A_2,A_3,A_4)Q=(B_1,B_2,B_3,B_4)$.

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{9}{5}&-\frac{4}{5}&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\0&2&1&0\\0&0&4&-1\\0&0&-10&3\end{bmatrix}$$

六、(14分) 设F为数域，$A\in F^{n\times n}$，且满足$A^2=I$，这里I是n阶单位阵。

1. 证明：$\mathrm{rank}(A+I)+\mathrm{rank}(A-I)=n$。

2. 设$W_1=\{\mathrm{x}\in F^n\mid A\mathrm{x}=\mathrm{x}\}$, $W_2=\{\mathrm{x}\in F^n\mid A\mathrm{x}=-\mathrm{x}\}$。证明：$W_1$及$W_2$为$F^n$的子空间，并且$W_1$的一组基与$W_2$的一组基合并起来构成$F^n$的一组基。

1. $\mathrm{rank}(I+A)+\mathrm{rank}(I-A)\geq\mathrm{rank}(I+A+I-A)=\mathrm{rank}(2I)=n$

$A^2=I\Rightarrow(A-I)(A+I)=0\Rightarrow\mathrm{rank}(A-I)+\mathrm{rank}(A+I)\leq\mathrm{rank}(I-A^2)+n=n.$

$\Rightarrow\mathrm{rank}(I+A)+\mathrm{rank}(I-A)=n.$

2. $\left.\begin{aligned}&\forall x_1,x_2\in W_1,\lambda\in F,\quad A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2=x_1+x_2\Rightarrow x_1+x_2\in W_1\\&A(\lambda x_1)=\lambda Ax_1=\lambda x_1\Rightarrow\lambda x_1\in W_1\end{aligned}\right\}\Rightarrow W_1$ 为子空间

同理 W_2 为子空间.

$\begin{cases}W_1\cap W_2=\{0\}\\\dim(W_1)+\dim(W_2)=n\end{cases}$ 由1的结论.