中国科学技术大学

2018-2019学年第二学期期中考试试卷（A）

考试科目：线性代数(B1)　　　　得分：______

学生所在院系：______　　姓名：______　　学号：______

一、填空题

1. $A = S_{ij} D_i(\lambda) T_{ij}(-\lambda)$ 为三种初等方阵的乘积，则 $A^{-1} =$ ______.

2. 对 2×3 的实矩阵 A，$\det(AA^T) = 1$，则 $\det(A^TA) =$ ______.

3. 排列 $(1, 3, 5, \cdots, 2n-1, 2, 4, 6, \cdots, 2n)$ 的逆序数为 ______.

4. $\begin{vmatrix} & & a_1 & b_1 & & \\ & a_2 & & & b_2 & \\ a_3 & & & & & b_3 \\ c_1 & & & & & d_1 \\ & c_2 & & & d_2 & \\ & & c_3 & d_3 & & \end{vmatrix} =$ ______，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$ ______.

5. 向量组 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ 线性＿关，其极大线性无关组为 ______（写出一个即可）.

二、判断题

1. 对 $n\times 1$ 的列向量 $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 有 $\det(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = \det(\alpha_1+\alpha \cdots \alpha_n+\alpha)$.

2. 矩阵 A 的行向量线性无关，列向量也线性无关，则 A 可逆.

3. 对反对称方阵 A, B，AB 为反对称阵当且仅当 $AB = BA$.

4. 矩阵方程 $AX = B$ 有解当且仅当 $\mathrm{rank}(A\ B) = \mathrm{rank}\, A$

5. 若 n 阶方阵 A 可逆，则 A 为 $\mathbb{R}^n$ 中某两组基之间的过渡矩阵.

三. 设线性方程组 $\begin{cases} ay+bx=c \\ cx+az=b \\ bz+cy=a \end{cases}$ 有唯一解.

求证: $abc\neq 0$. 并求其解.

四. 证明: (1). 一个可逆上三角阵可表为一个对角阵与一个对角线全为1的上三角阵之积.

(2). 可逆上三角阵的逆仍为上三角阵.

五. 证明: 对 n 阶实方阵 A. $\operatorname{rank} A+\operatorname{rank}(I+A-A^2)\geq n$.

等号成立当且仅当 $A+A^2=A^3$.

六. 在行向量空间 $\mathbb{R}^4$ 中, $\alpha_1=(1,0,1,1)$, $\alpha_2=(2,1,0,-1)$.

(1). 将 α_1, α_2 扩充为 $\mathbb{R}^4$ 的一组基 S.

(2). 求 S 到 $\mathbb{R}^4$ 的标准基 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ 的过渡矩阵.

(3). 求向量 $\alpha=(0,1,1,0)$ 在 S 下的坐标.

七. 对 $A_{m\times n}$. $B_{p\times q}$. 定义 A 与 B 的张量积, $A\otimes B$ 为 $mp\times nq$ 的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$ 求证:

(1). $(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD)$.

(2). $\operatorname{rank} A\otimes B=\operatorname{rank} A\cdot\operatorname{rank} B$.

八 (1). 对 $A_{l\times m}$, $B_{m\times n}$, $ABx=0$ 与 $Bx=0$ 同解 当且仅当 $\operatorname{rank} AB=\operatorname{rank} B$.

(2). 对实矩阵 A, 有 $\operatorname{rank} A^TA=\operatorname{rank} A$.

中国科学技术大学

2018-2019学年第二学期期中考试试卷(B)

考试科目：线性代数(B1)　　　　得分：______

学生所在院系：______　　姓名：______　　学号：______

一、填空题

1. 对 $A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$, $\operatorname{rank}(I_m - AB) - \operatorname{rank}(I_n - BA) =$ ______

2. 给定 $A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$, $C_{m\times m}$, $\det\begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix} =$ ______

3. 列向量空间 $\mathbb{R}^4$ 中，子空间 $A = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$，$B = \left\langle \begin{pmatrix}2\\-2\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$.

   则 $\dim A\cap B =$ ____，$A\cap B$ 的一组基为 ____.

4. 使用初等变换法求出 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$ ______.

二、判断题

1. 反对称实方阵的行列式非负.

2. 对方阵 A, B, C, D, $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

3. $Ax = b$ 有唯一解 当且仅当 $Ax = 0$ 仅有零解.

4. 列向量 β 不能由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性表示 蕴涵 $\beta, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.

5. n 阶方阵 A 可通过初等行变换化为相抵标准形.

三、解下列线性方程组并讨论之

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

四. 实方阵 $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$ 满足 $AB=0$. 求证: $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \le n$.

五. (1). 对实矩阵 C, 求证存在矩阵 C', 使得 $CC'C=C$.

(2). 若矩阵方程 $AY=C$, $ZB=C$ 均有解, 则 $AXB=C$ 亦然.

六. (1). 对 n 阶实方阵 A, 若有 $A^m=0$ 对某个 m 成立, 则 $A^n=0$.

(2). 若又有 $A^T=A$, 则 $A=0$.

七. (1). 考虑每个分量均为 t 的函数的 n 阶实方阵 A. 求证:

$$\frac{d}{dt}\det A = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{da_{ij}}{dt} A_{ij},$$ 其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.

(2). 定义 $e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$

则 $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$. [提示: 考虑对 $\det e^{tA}$ 求导.]

八. 对 $0<x_1<\cdots<x_n$, $0<y_1<\cdots<y_n$. 定义广义 Vandermonde 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} x_1^{y_1} & \cdots & x_1^{y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{y_1} & \cdots & x_n^{y_n} \end{pmatrix}.$$ 求证: $\det A > 0$.