2017-2018 期中考试（第一学期）

一、填空 4*5'

1. 设矩阵 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1)$，$B=(\alpha_1, \alpha_2, \beta_2)$，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 均为3维列向量，并且 $|A|=1$，$|2B-A|=-2$，则 $|B|=$ ___

2. 设方阵A的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，则A的伴随矩阵 $A^*=$ ___

3. 设10阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix}$，则A的秩等于 ___

4. 设向量 $\vec{\alpha_1}=(1,2,-1)$，$\vec{\alpha_2}=(2,0,t)$，$\vec{\alpha_3}=(0,-4,5)$ 线性相关，则 $t=$ ___

5. 设 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5 \in F^5$，且 $\mathrm{rank}\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}=4$，$\mathrm{rank}\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_5\}=3$，则 $\mathrm{rank}\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4+\beta_5\}=$ ___.

二、判断题 4*5'（判对2分，理由3分，判错没分）

1. 若非齐次线性方程组 $Ax=b$ 对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解，则 $Ax=b$ 有无穷多解

2. 若矩阵A, B满足AB, BA都有定义，则 $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(BA)$

3. 若向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示，且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，则向量组 $\beta_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关

4. 若W是线性空间V的非空子集，且W不是V的子空间，则W不可能构成一个线性空间

三、(15') 设n阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix}$，其中 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$。

试判断A是否可逆，如果可逆，求出逆矩阵

3. 设10阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix}$，则A的秩等于___

4. 设向量 $\vec{\alpha_1}=(1,2,-1)$，$\vec{\alpha_2}=(2,0,t)$，$\vec{\alpha_3}=(0,-4,5)$ 线性相关，则 $t=$___

5. 设 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5\in F^5$，且 $\mathrm{rank}\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}=4$，$\mathrm{rank}\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_5\}=3$，则 $\mathrm{rank}\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4+\beta_5\}=$___。

二. 判断题 $4*5'$（判对2分，理由3分，判错没分）

1. 若非齐次线性方程组 $Ax=b$ 对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解，则 $Ax=b$ 有无穷多解

2. 若矩阵A，B满足AB，BA都有定义，则 $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(BA)$

3. 若向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则向量组 $\beta_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关

4. 若W是线性空间V的非空子集，且W不是V的子空间，则W不可能构成一个线性空间

三. (15') 设n阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix}$，其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$，

试判断A是否可逆，如果可逆，求出逆矩阵

四. (15') 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$

试问a，b满足什么条件时，$\beta$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但是表示方法不唯一，并且求出所有的表示方法

五 (15') 设 $R^{2\times 2}$ 是所有2阶实方阵对于矩阵的线性运算构成的R上的线性空间，给定两组基分别为：$\mathrm{I}$：$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$，$A_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{II}$：$B_1=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$B_2=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$，$B_3=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$，$B_4=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. 求基(I)到基(II)的过渡矩阵

2. 求在这两组基下坐标相同的向量的全体

六 (15') 已知：V是数域F上n维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 为V中两个向量组。$T=(t_{ij})_{m\times m}$ 是F上的m阶矩阵，且 $\beta_j=\sum_{i=1}^{m}t_{ij}\alpha_i$，$j=1,2,\cdots,m$。

如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，试证明：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关当且仅当T可逆