中国科学技术大学数学科学学院
2018～2019 学年第 2 学期期末考试试卷

■A 卷　　□B 卷

课程名称 线性代数 (B1)　　课程编号 001519

考试时间 2019 年 7 月 3 日　　考试形式 闭卷

姓 名 ________　学 号 ________　学 院 ________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、【25 分】填空题.

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为 ________.

(2) 设 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为 $\mathrm{diag}(1,2,3)$, 则 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为 ________.

(3) 若矩阵 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&y&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似, 则 $x=$ ________, $y=$ ________.

(4) 若实的正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素都是 $\pm\frac{1}{2n}$, 其中 n 为正整数, 则 $\boldsymbol{A}$ 的阶数为 ________.

(5) 若实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=tx_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2\sqrt{2}x_1x_2+2(t-1)x_1x_3$ 正定, 则参数 t 满足 ________.

二、【20 分】判断下面的说法是否正确. 对于正确的, 简要说明理由. 对于错误的, 举出反例加以说明.

(1) 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$ 满足相似等价关系 $\boldsymbol{A}_1 \sim \boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{A}_2 \sim \boldsymbol{B}_2$, 则 $\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 \sim \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2$.

(2) 若两个同阶实对称阵具有相同的特征多项式, 则这两个方阵相似.

(3) 在实 $m \times n$ 维矩阵空间 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 上定义 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})$. 则 $(\ ,\ )$ 是 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 上的一个内积.

(4) 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与 4 阶单位阵相合.

三、【14 分】给定 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$, 且 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$, 求非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

线

订

装

四、

四、【18 分】设实二次型 $Q(x,y,z) = -2x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4xz + 8yz$.

(1) 利用正交变换将该二次型化为标准形, 并写出相应的正交变换矩阵.

(2) 判断 $Q(x,y,z) = -1$ 在三维直角坐标系里所表示的曲面的类型.

五、【13 分】证明: n 阶全 1 方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与同阶方阵 $\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ 相似.

六、【10 分】设 V 为 n 维欧氏空间，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s \in V$. 对于 s 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{s\times s}$，其中 $a_{ij} = (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j)$，证明：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩.