计算题

1. 计算$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

2. 设n阶方阵A满足$A^2-A-2I=0$，其中I是单位阵，求A^{-1}.

3. 已知3阶矩阵A的伴随矩阵$A^*=\begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，求$A$.

4. 求方阵$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$的第4行各元素余子式之和。

5. 设$\alpha_1=(2,1,3,-1)^T,\alpha_2=(3,-1,2,0)^T,\alpha_3=(4,2,6,-2)^T,\alpha_4=(4,-3,1,1)^T$，求$\operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$。

6. 设$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求$\det(AB)$。

7. 若$\alpha_1=(a,0,c),\quad \alpha_2=(b,c,0),\quad \alpha_3=(0,a,b)$线性无关，求$a,b,c$的关系。

8. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求$A^{2019}$。

9. 设a,b,c是方程$x^3+px+q=0$的三个根，求$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$。

10. 设$X=(a_1,\cdots,a_n),Y=(b_1,\cdots,b_n)$，求$\det\left(I_n+X^T\cdot Y\right)$。

11. 设A是$n\ (n>1)$阶方阵且$\operatorname{rank}(A)<n-1$，求$A^*$。

判断题

1. 线性方程组$AX=b$有唯一解的充要条件是$AX=0$只有零解;

2. 若线性方程组$AX=b$方程个数小于未定元个数，则方程一定存在解。

3. 设A,B均为对称阵，则AB对称的充要条件为$AB=BA$;

4. 设$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，其中$m\geq n$, $\mathrm{rank}(A)=n$，则存在向量$b\in\mathbb{R}^m$使得方程组$Ax=b$只有唯一解。

5. 设$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，其中$m<n$, $\mathrm{rank}(A)=m$，则存在向量$b\in\mathbb{R}^m$使得方程组$Ax=b$只有唯一解。

6. 设向量组$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$线性无关，$\beta=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r$且$\lambda_i\neq 0$，则$\alpha_1\ldots,\alpha_{i-1},\beta,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_r$线性无关。

7. 已知$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$B\in\mathbb{R}^{n\times m}$则$\det(AB)=\det(BA)$。

8. 设$A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$且有$\mathrm{tr}\left((A-B)(A-B)^T\right)=0$，则$A=B$。

9. 设$\alpha_1\ldots,\alpha_n$是实线性空间V的一组基，则存在无穷多的$\beta\in V$，使得$\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1},\beta$是$V$的一组基。

综合题

1. 问a为何值时，$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+x_4=1\\x_1+2x_2-x_3+4x_4=2\\2x_1+9x_2-5x_3+15x_4=a\end{cases}$ 有解？并求出其所有解。

2. 已知方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_4=-6\\4x_1-x_2-x_3-x_4=1\\3x_1-x_2-x_3=3\end{cases}\quad 与\quad\begin{cases}x_1+ax_2-x_3-x_4=-5\\bx_1-x_3-2x_4=-3\\x_3-2x_4=1-c\end{cases}$$

同解，求a, b, c。

3. 设n $(n>1)$阶方阵$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求$\det(A)$及$A^{-1}$。

4. 设$\mathbb{R}^{2\times 2}$为实数域上所有2×2阶矩阵组成的集合，按矩阵的加法和数乘构成线性空间。

   (a) 证明$S=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$构成$\mathbb{R}^{2\times 2}$的一组基。

   (b) 求基S到自然基$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$的过渡矩阵$T$。

   (c) 求$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$在基$S$下的坐标。

5. 设$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$B\in\mathbb{R}^{n\times m}$，证明$n+\operatorname{rank}(I_m-AB)=m+\operatorname{rank}(I_n-BA)$。