

中国科学技术大学  
2016 - 2017学年第一学期期末考试试卷(A)

考试科目: 线性代数(B1) 得分: \_\_\_\_\_

学生所在院系: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_

一、【25分】填空题:

(1) 若线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = t, \end{cases}$$

有解, 则参数  $t =$  \_\_\_\_\_.

(2) 若向量  $\alpha_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\alpha_2 = (1, 2, 3)$ ,  $\alpha_3 = (2, 3, t)$  生成  $\mathbb{R}^3$  中的2维子空间, 则参数  $t =$  \_\_\_\_\_.

(3) 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $A$  的相合规范型为 \_\_\_\_\_.

(4) 二次曲面方程  $2x^2 - 3y^2 - 3z^2 - 2yz - 5 = 0$  表示的曲面类型是 \_\_\_\_\_.

(5) 实二次型  $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 2txy + 2txz + 2yz$  为正定当且仅当参数  $t$  满足 \_\_\_\_\_.

二、【25分】判断下列命题是否正确,并简要说明理由.

(1) 设 $A$ 是一个 $n$ 阶方阵,则 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^2)$ .

(2) 若0是矩阵 $A$ 的特征值,则 $A$ 一定是奇异矩阵.

(3) 设 $A$ 是一个 $n$ 阶方阵,若对任意 $n$ 维列向量 $x$ 都有 $x^T A x = 0$ ,则 $A$ 为反对称方阵.

(4) 若 $A, B$ 是 $n$ 阶正定矩阵,则 $AB$ 也是 $n$ 阶正定矩阵.

(5) 设 $A$ 是一个 $n$ 阶方阵,则 $A$ 是正交矩阵当且仅当 $A$ 的 $n$ 个行向量组成 $n$ 维实数组空

三、【14分】在 $\mathbb{R}^3$ 中定义线性变换 $\mathcal{A}(x, y, z) = (x + 2y, x - 3z, 2y - z)$ .

(1) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\alpha_2 = (1, 1, 0)$ ,  $\alpha_3 = (1, 1, 1)$ 下的表示矩阵;

(2) 是否存在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 使得 $\mathcal{A}$ 在该基下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

四、【14分】设  $V = \{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2\}$  为次数不超过2的实系数多项式构成的线性空间.

- (1) 证明:  $(f(x), g(x)) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2)$  定义了  $V$  上的一个内积.
- (2) 应用Schmidt正交化方法将向量组  $\{1, x\}$  改造成相对于(1)中所定义内积的标准交向量组.

五、【14分】设 $M$ 是 $2n$ 阶方阵

$$M = \begin{pmatrix} I & A \\ A & I \end{pmatrix},$$

其中 $A$ 是一个 $n$ 阶实方阵且满足 $A^T = A$ ,  $A^2 = I$ .

- (1) 求矩阵 $M$ 的所有特征值;
- (2) 求可逆矩阵 $P$ 使得 $P^{-1}MP$  为对角矩阵.

六、【8分】假设  $A$  和  $B$  都是  $n$  阶正定矩阵. 证明:

$$\det A \cdot \det B \leq \left( \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(AB) \right)^n$$