

先进光子物理：习题与答疑

陈思

中国科学院上海高等研究院，上海光源科学中心
中国科学院上海应用物理研究所，加速器教研室
chens@sari.ac.cn

2024.05.23

加速器光源 (一): 习题 1 ★

● 问: 梳理加速器的主要类型, 主要工作原理。

● 答: 参考讲义

按工作原理分:

➤ 直流高压型: 范式起电机, 倍压加速器

➤ 感应型: 电子感应加速器

➤ 共振型: 回旋加速器 (经典回旋, 等时性回旋, 同步回旋); 同步环形加速器; 射频直线加速器 (行波、驻波)

按加速粒子分:

➤ 轻子加速器: 正负电子, 正负缪子

➤ 强子加速器: 正反质子, 离子

按加速能量分:

➤ 低能 (<0.1 GeV), 中能 ($0.1\sim$ GeV), 高能 ($1\sim 100$ GeV), 超高能 (>100 GeV)

按使用途径分:

➤ 粒子物理与核物理研究: 对撞机、重离子加速器等

➤ 同步辐射光源, 散裂中子源等

➤ 医用加速器: 医用电子加速器, 质子和重离子治癌

➤ 工业用加速器: ADS, 加速器辐照等

➤ 其他用途

加速器光源 (一): 习题 2 ★

● 问: 回旋加速器能量限制的原因? 怎样克服?

● 答:

➤ 能量限制原因: 相对论效应导致粒子回旋频率发生变化, 与加速电场之间出现滑相, 能量增益降低。

➤ 克服方法: 调变回旋磁场分布或加速电场频率, 维持准共振条件。

➤ 加速电场频率变化与粒子回旋频率变化之间的关系满足

$$\frac{\Delta f_{rf}}{f_{rf}} = \frac{\Delta f_s}{f_s} + \frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta B_s}{B_s} + \frac{\Delta k}{k} - \frac{\Delta \mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_s}$$

其中, 磁场分布及同步粒子能量变化满足

$$\Delta \mathcal{E}_s = ZeV_a \cos(\varphi_s), \quad \Delta B_s = \frac{\partial B_s}{\partial t}(\Delta t_s)_1 + \frac{\partial B_s}{\partial r}(\Delta r_s)_1$$

➤ 代入后得

$$\frac{ZeV_a \cos(\varphi_s)}{\mathcal{E}_s} = \frac{1}{B_s} \frac{\partial B_s}{\partial t}(\Delta t_s)_1 + \frac{1}{B_s} \frac{\partial B_s}{\partial r}(\Delta r_s)_1 + \frac{(\Delta k)_1}{k} - \frac{(\Delta \omega_{rf})_1}{\omega_{rf}}$$

➤ 等时回旋加速器: $\partial B_s / \partial t$, Δk , $\Delta \omega_{rf}$ 均为零, 调变 $\partial B_s / \partial r$;

➤ 同步回旋加速器: $\partial B_s / \partial t$, $\partial B_s / \partial r$ 和 Δk 均为 0, 仅调变相位 $\Delta \omega_{rf}$;

➤ 质子同步加速器: Δk , $\partial B_s / \partial r$ 为 0, 调变 $\Delta \omega_{rf}$ 同时调变 $\partial B_s / \partial t$, 维持回转半径 ρ_c 不变;

➤ 电子同步加速器: 其他均不变, 仅需调变 $\partial B_s / \partial t$ 。

加速器光源 (一): 习题 3 ★

● 问: 电子回旋加速器的准共振条件如何满足?

● 答:

- 电子静止质量很小, 相对论效应导致的滑相效应更加显著
- 经典电子回旋加速器轨道为一系列相切的圆。用微波谐振腔代替 D 型盒电极。
- $\Delta f_{rf} = 0$, $\Delta B_s = 0$, 调变倍频系数 Δk 以满足准共振加速条件

$$\frac{\Delta \mathcal{E}_s}{\mathcal{E}} = \frac{\Delta k}{k}$$

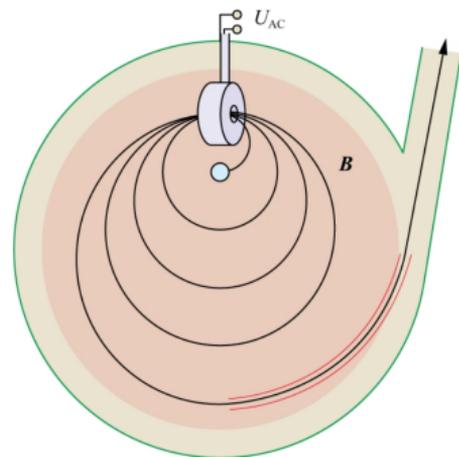
- 电子注入能量 W_i , 能量增益每圈 ΔW , 则其在第 1 圈的回旋时间

$$T_{s1} = \frac{2\pi(\mathcal{E}_0 + W_i + \Delta W)}{ec^2 B} = k_1 T_{rf}$$

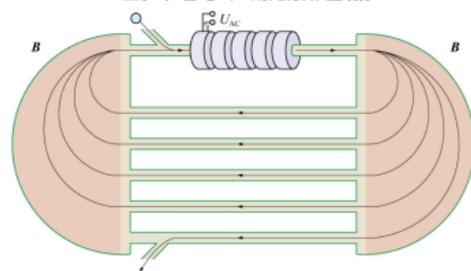
第 n 圈的回旋时间

$$T_{sn} = \frac{2\pi(\mathcal{E}_0 + W_i + n\Delta W)}{ec^2 B} = k_n T_{rf} \implies \Delta T_s = \frac{2\pi\Delta W}{ec^2 B} = \Delta k T_{rf}$$

- 稳定持续加速要求 k_1 为大于 1 的整数, Δk 为正整数。不同的 k_1 与 Δk 组合为不同的加速模式, 其中最稳定的基模为 $k_1 = 2$, $\Delta k = 1$ 的模式, 即电子注入动能为 0, 每圈加速的 $\Delta W = \mathcal{E}_0$ 。
- 跑道型电子回旋加速器相较经典电子回旋加速器的优点。



经典电子回旋加速器



跑道型电子回旋加速器

加速器光源 (一): 习题 4

• 问: 自稳相原理: 当 $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_{si} + NZeV_a \sin \varphi_s$ 时, 相运动方程?

• 答:

➤ 假定具有 $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{si}$, 但 $\varphi_i = \varpi \neq \varphi_s$ 的非同步粒子, 其经过一次加速后, 获得的能量相对于同步粒子的能量偏差的变化率

$$\frac{\Delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_s)}{\Delta N} = \frac{\Delta(\Delta\mathcal{E})}{\Delta N} = ZeV_a (\sin \varphi - \sin \varphi_s) \xrightarrow{\text{改写为微分形式}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta\mathcal{E}}{\omega_s} \right) = \frac{GZeV_a}{2\pi} (\sin \varphi - \sin \varphi_s)$$

➤ 与相位偏差变化率方程联立可得此时的相运动方程

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_s}{k\pi\omega_s\Gamma} \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathcal{E}_s}{k\omega_s^2\Gamma} \dot{\varphi} \right) = \frac{GZeV_a}{2\pi} (\sin \varphi - \sin \varphi_s)$$

➤ 类似地, 考虑小振幅相运动 $|\Delta\varphi| = |\varphi - \varphi_s| \ll 1$, 有 $\sin \varphi - \sin \varphi_s = \sin(\varphi_s + \Delta\varphi) - \sin \varphi_s \approx \Delta\varphi \cdot \cos \varphi_s$, 可得简谐运动方程形式的相运动方程

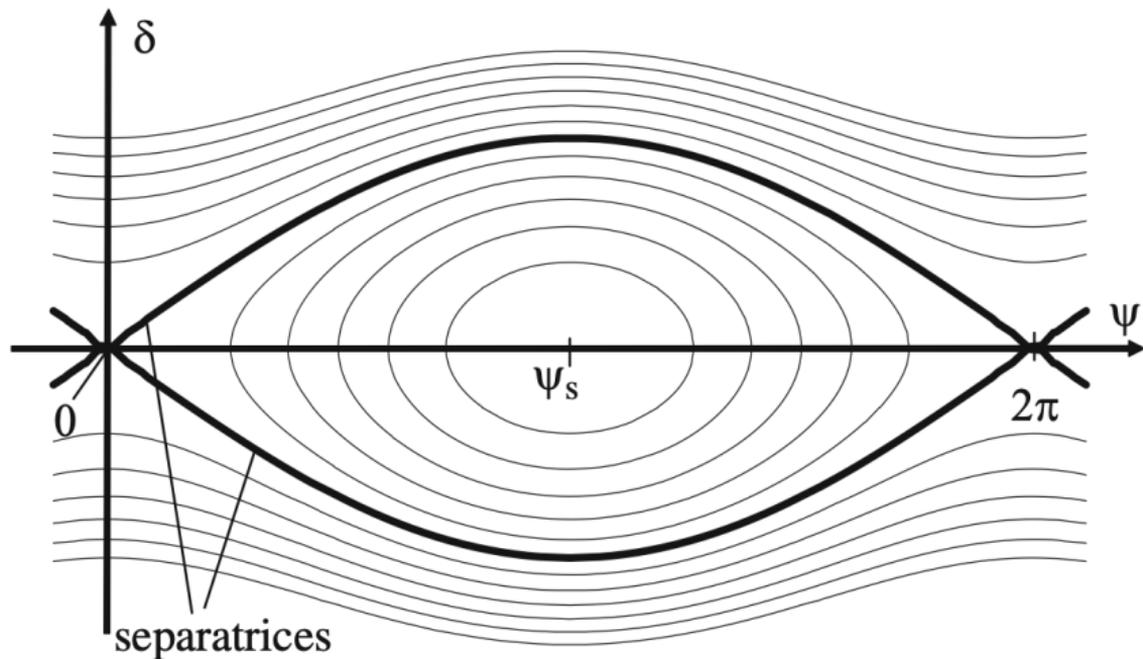
$$\frac{d^2\Delta\varphi}{dt^2} + \Omega^2\Delta\varphi = \frac{d^2\Delta\varphi}{dt^2} + (2\pi\nu_s)^2\Delta\varphi = 0$$

其中

$$\Omega = \omega_s \sqrt{-\frac{kGZe\Gamma V_a}{2\pi\mathcal{E}_s} \cos \varphi_s} \xrightarrow{\text{高能电子储存环}} \nu_s = \frac{\Omega}{2\pi} = \sqrt{-\frac{\eta h e V_a}{2\pi\mathcal{E}_s} \cos \varphi_s} \approx \sqrt{-\frac{\alpha_p h e V_a}{2\pi\mathcal{E}_s} \cos \varphi_s}$$

加速器光源 (一): 习题 4

- 接上页。稳定相振荡的条件是 Ω 或 ν_s 为实数。因此，
 - 当 $\eta < 0$, 即 $\gamma_t > \gamma$, $\cos \varphi_s > 0$, $\varphi_s \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时, 运动是稳定的。
 - 当 $\eta > 0$, 即 $\gamma_t < \gamma$, $\cos \varphi_s < 0$, $\varphi_s \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 时, 运动是稳定的。



加速器光源 (一): 习题 5

- 问: 弱聚焦原理中, 径向力与磁铁梯度的关系推导, 得到径向稳定性条件
- 答:

➤ 粒子受到的径向作用力

$$F_r = F_C + F_L = \frac{mv_\theta^2}{r} + Ze v_\theta B_y \xrightarrow[\text{附近分别级数展开}]{\text{在参考轨道 } r=r_c} \begin{cases} F_C = \frac{mv_\theta^2}{r} = \frac{mv_\theta^2}{r_c(1+x/r_c)} = \frac{mv_\theta^2}{r_c} \left(1 - \frac{x}{r_c} + \dots\right) \\ F_L = Ze v_\theta B_y = Ze v_\theta B_0 \left[1 + \frac{1}{B_0} \left(\frac{\partial B_y}{\partial r}\right)_c \cdot x + \dots\right] \end{cases}$$

其中 $x = r - r_c$ 。利用平衡轨道的定义, 有

$$Ze v_\theta B_0 = -\frac{mv_\theta^2}{r_c}$$

➤ 忽略 x 的高阶项, 代入径向作用力公式, 可得

$$F_r = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dr}{dt} \right) = -\frac{mv_\theta^2}{r_c^2} \left[1 + \frac{r_c}{B_0} \left(\frac{\partial B_y}{\partial r} \right)_c \right] x = -m\omega_c^2 \cdot (1 - n)x$$

➤ 根据径向稳定性条件, 即 F_r 与 x 符号相反, 可以得到

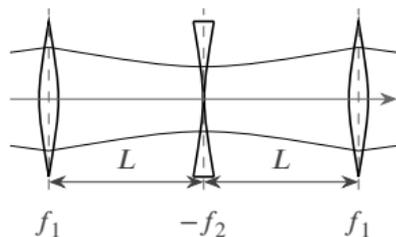
$$n < 1$$

加速器光源 (一): 习题 6

● 问: 强聚焦原理中, FODO 透镜组不散焦与不过聚焦条件

● 答:

▶ 如右图所示 FODO 透镜组, 由两个聚焦透镜 F 和之间一个散焦透镜 D 组成, 相邻两透镜之间漂移段 O 距离 L , 聚焦透镜焦距 f_1 , 散焦透镜焦距 f_2 , 则该透镜组传输矩阵为



$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{2L}{f_1} - \frac{L}{f_2} + \frac{L^2}{f_1 f_2} & 2L - \frac{L^2}{f_2} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{2L}{f_1^2} + \frac{2L}{f_1 f_2} - \frac{L^2}{f_1^2 f_2} & 1 - \frac{2L}{f_1} - \frac{L}{f_2} + \frac{L^2}{f_1 f_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{2L}{f_1} + \frac{L}{f_2} + \frac{L^2}{f_1 f_2} & 2L + \frac{L^2}{f_2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{2L}{f_1^2} + \frac{2L}{f_1 f_2} + \frac{L^2}{f_1^2 f_2} & 1 + \frac{2L}{f_1} + \frac{L}{f_2} + \frac{L^2}{f_1 f_2} \end{bmatrix}$$

加速器光源 (一): 习题 6

● 接上页

- 由以上传输矩阵, 并根据传输矩阵稳定性条件, 可得其水平 x 和垂直 y 方向的迹分别为

$$\text{Tr}(M)_x = 2 \left(1 - \frac{2L}{f_1} - \frac{L}{f_2} + \frac{L^2}{f_1 f_2} \right) = 2 \cos \psi_x, \quad \text{Tr}(M)_y = 2 \left(1 + \frac{2L}{f_1} + \frac{L}{f_2} + \frac{L^2}{f_1 f_2} \right) = 2 \cos \psi_y$$

其中 $\psi_{x,y}$ 分别为 x 和 y 方向的横向振荡相移。

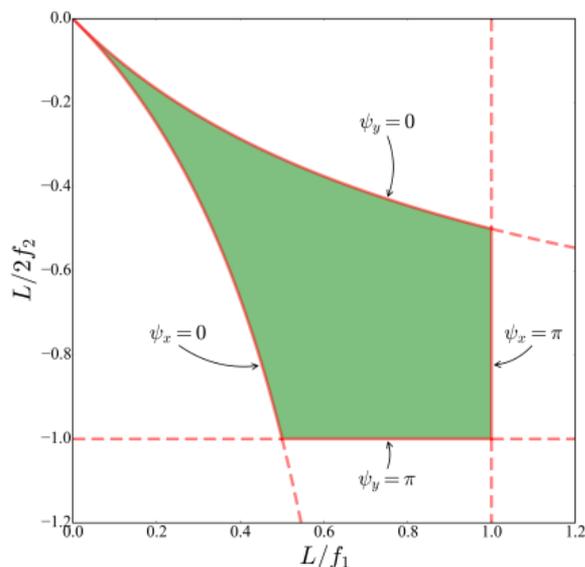
- 横向稳定性条件要求 $-1 \leq \frac{1}{2} \text{Tr}(M) \leq 1$, 对于 x 方向和 y 方向分别有

$$0 \leq \frac{L}{f_1} + \frac{L}{2f_2} - \frac{L^2}{2f_1 f_2} \leq 1,$$
$$-1 \leq \frac{L}{f_1} + \frac{L}{2f_2} + \frac{L^2}{2f_1 f_2} \leq 0$$

$$\left| \frac{L}{f_1} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{L}{2f_2} \right| \leq 1, \quad \frac{L}{f_1} \frac{L}{2f_2} \leq 0$$

以上不等式取等号时, 即为横向振荡稳定区的边界

- The lower and the upper boundaries of the shaded area correspond to $\psi_{x,y} = 0$ or π respectively.



加速器光源 (一): 习题 6

- 问: 强聚焦原理中, FODO 透镜组不散焦与不过聚焦条件
- 答:

➤ 考虑上述透镜组一种特例, 即一个对称的 FODO 结构, 由两个焦距为 $f_1 = 2f$ 的聚焦透镜和两者中间的一个焦距为 $f_2 = -f$ 的散焦透镜组成, 两相邻透镜之间间距为 L , 则其传输矩阵为

$$M(FODO) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{L^2}{2f^2} & 2L + \frac{L^2}{f} & 0 & 0 \\ -\frac{L}{2f^2} \left(1 - \frac{L}{2f}\right) & 1 - \frac{L^2}{2f^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{L^2}{2f^2} & 2L - \frac{L^2}{f} \\ 0 & 0 & -\frac{L}{2f^2} \left(1 + \frac{L}{2f}\right) & 1 - \frac{L^2}{2f^2} \end{bmatrix}$$

➤ In general, the stability of betatron motion is described by $|\cos \psi_x| \leq 1$ and $|\cos \psi_y| \leq 1$ for any type of accelerator lattice or repetitive transport line.

加速器光源 (二): 习题 1 ★

- 问: 若一块扇形二极铁的弧长为 L , 可以使束流偏转 θ [rad] 角, 求该扇形二极铁的弦长及弧弦差, 并写出其横向传输矩阵。考虑束流动量分散的情况下, 上述扇形二极铁的横向传输矩阵应如何修改?
- 答:
 - 根据弧长和角度可以得到偏转半径 $\rho = L/\theta$, 则其弦长与弧弦差分别为

$$\text{弦长 } l = 2\rho \sin \frac{\theta}{2} = L \frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2}, \quad \text{弧弦差 } L - l = L \left[1 - \frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2} \right]$$

- 横向传输矩阵为

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & L \frac{\sin \theta}{\theta} & 0 & 0 \\ \frac{\theta \sin \theta}{L} & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{bmatrix}_1$$

加速器光源 (二): 习题 1 ★

● 接上页。

- 假设偏转方向为 x 方向, 考虑到动量分散 $\delta \equiv \Delta p/p_0 \ll 1$ 的情况下, 偏转磁铁中粒子在 x 方向的运动方程

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \left[\frac{qB_y}{p_0(1+\delta)} R - 1 \right] = 0 \implies \frac{d^2x}{d\theta^2} + (1-n)x = \rho\delta$$

其通解可以写成

$$x(\theta) = A \cos(\theta\sqrt{1-n}) + B \sin(\theta\sqrt{1-n}) + \rho\delta/(1-n)$$

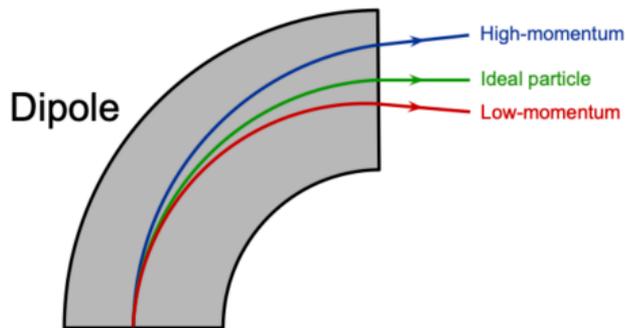
$$\frac{dx}{d\theta} = \sqrt{1-n} \left[-A \sin(\theta\sqrt{1-n}) + B \cos(\theta\sqrt{1-n}) \right]$$

- 系数 A , B 由初始条件 (x_0, x'_0) 决定, 即

$$A = x_0 - \rho\delta/(1-n), \quad B = \rho x'_0/\sqrt{1-n}$$

- 将系数 A , B 代入通解, 并考虑到对于纯偏转的扇形二极磁铁 $n=0$, 将其改写为 3×3 传输矩阵, 有

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta & \rho(1 - \cos \theta) \\ \frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{bmatrix}_1$$



加速器光源 (二): 习题 2

- 问: 推导漂移段、二极铁、四极铁对纵向相空间坐标 (z, δ) 的传输矩阵形式, 并写出对应的六维相空间坐标的完整传输矩阵形式。

- 答: 漂移段:

- 速度为 βc 的参考粒子穿过长度为 L 的漂移段所需时间 $t = L/\beta c$ 。与参考粒子存在速度偏差 $\Delta\beta/\beta$ 的粒子, 到达该漂移段出口的时间比 t 相差 Δt 。当 $\Delta\beta/\beta > 0$ 时, 粒子更早到达 $\Delta t < 0$, 相反则更晚到达 $\Delta t > 0$

$$\Delta t = -\frac{L}{\beta c} \frac{\Delta\beta}{\beta}$$

转换成与参考粒子到达时间相同时, 纵向位置的偏差, 注意当 $\Delta t < 0$ 时, $\Delta z > 0$, 反之亦然

$$\Delta z = -\beta c \Delta t = L \frac{\Delta\beta}{\beta} = \frac{L}{\beta^2 \gamma^2} \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = R_{56} \delta$$

- 漂移段无色散效应。因此, 漂移段的六维相空间传输矩阵为

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ z \\ \delta \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{L}{\beta^2 \gamma^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ z \\ \delta \end{bmatrix}_0$$

加速器光源 (二): 习题 2

- 接上页。四极磁铁

- ▶ 长度为 L 的四极磁铁在纵向相空间上可以处理为相同长度的漂移段, 故四极磁铁的六维相空间传输矩阵为 (以聚焦四极磁铁为例, 散焦四极磁铁类似)

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ z \\ \delta \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} \cos \sqrt{KL} & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{KL} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{K} \sin \sqrt{KL} & \cos \sqrt{KL} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh \sqrt{KL} & \frac{1}{\sqrt{K}} \sinh \sqrt{KL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{K} \sinh \sqrt{KL} & \cosh \sqrt{KL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{L}{\beta^2 \gamma^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ z \\ \delta \end{bmatrix}_0$$

- ▶ 低能情况下漂移段的 R_{56} 不能忽略, 但对于 γ 较大的高能粒子, 通常近似采用 $R_{56} \approx 0$, 如同步辐射储存环等高能电子加速器装置

加速器光源 (二): 习题 2

- 接上页。

- 对于扇形二极磁铁, 不仅存在色散效应 $R_{16}, R_{26} \neq 0$, 由于不同能量粒子到达时间也不同, 存在固有的 (z, δ) 之间的耦合关系, 即 R_{56} 中存在与粒子的中心能量 γ 高低无关的项。
- 同时, 由于不同横向入射位置和角度的粒子的路径长度不同, 到达时间也不相同, 故存在 $(x, x'; z)$ 之间的耦合, 即 $R_{51}, R_{52} \neq 0$ 。
- 对于对称的扇形二极磁铁, 其包含边缘场聚焦六维相空间传输矩阵表示为 (具体推导过程请参考 Karl L. Brown, SLAC-R-075, 1982, Section III)

$$\begin{bmatrix} \cos k_x L & \frac{1}{k_x} \sin k_x L & 0 & 0 & 0 & \frac{h}{k_x^2} (1 - \cos k_x L) \\ -k_x \sin k_x L & \cos k_x L & 0 & 0 & 0 & \frac{h}{k_x} \sin k_x L \\ 0 & 0 & \cos k_y L & \frac{1}{k_y} \sin k_y L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_y \sin k_y L & \cos k_y L & 0 & 0 \\ \frac{h}{k_x^2} (1 - \cos k_x L) & \frac{h}{k_x} \sin k_x L & 0 & 0 & 1 & \frac{h^2}{k_x^3} (k_x L - \sin k_x L) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中偏转角度 $\theta = L/\rho_0 = hL$, $h = 1/\rho_0$, $k_x^2 = (1-n)h^2$, $k_y^2 = nh^2$ 。

加速器光源 (二): 习题 3 ★

● 问: 粒子数占比 F 为 99.9% 和 99.99% 时, 发射度的表达式?

● 答:

➤ 束团横向 RMS 尺寸 σ_u , 包络函数 β_u , 粒子数占比 F , 相应的发射度定义:

$$\varepsilon_F = -2\pi \frac{\sigma_u^2}{\beta_u} \ln(1 - F)$$

➤ 当 $F = 99\%$ 时, 代入到发射度定义中得到

$$\sigma_F(99\%) \approx 2 \times 4.61\pi\sigma_u^2/\beta_u$$

➤ 当 $F = 99.9\%$ 时, 代入到发射度定义中得到

$$\sigma_F(99.9\%) \approx 2 \times 6.91\pi\sigma_u^2/\beta_u$$

➤ 当 $F = 99.99\%$ 时, 代入到发射度定义中得到

$$\sigma_F(99.99\%) \approx 2 \times 9.21\pi\sigma_u^2/\beta_u$$

加速器光源 (二): 习题 4 ★

- 问: 上海光源储存环束流能量为 3.5 GeV, 轨道半径为 65 m, 则电子回旋一圈后, 高频腔需对其补充多少能量?
- 答:
 - 对于单个电子, 每圈因同步辐射导致的能量损失

$$U_0 = 0.08846 \text{ [MeV]} \frac{(\mathcal{E} \text{ [GeV]})^4}{\rho \text{ [m]}}$$

将上海光源储存环参数代入, 可得

$$U_0 = 0.08846 \text{ [MeV]} \frac{(3.5 \text{ [GeV]})^4}{65 \text{ [m]}} \approx 0.204 \text{ [MeV]}$$

上海光源储存环的平均流强约为 240 mA, 则每圈从二极磁铁中总辐射出的总功率

$$P_B = I_B U_0 / e = 0.24 \text{ [A]} \times 0.204 \text{ [MV]} \approx 48.96 \text{ kW}$$

加速器光源 (二): 习题 5

- 问: 对于质子环形加速器, 一圈同步辐射能量损失的公式该如何改写? 计算 LHC 中能量为 7 TeV 的质子束流每圈同步辐射损失的能量。已知 LHC 二极铁最大磁场强度为 10 T。

答:

- 对于电荷量为 $|e|$, 静止质量为 \mathcal{E}_0 的单个质子, 每一圈的同步辐射能量损失

$$U_0 = \frac{e^2}{3\epsilon_0} \frac{\beta^3 \gamma^4}{\rho} \xrightarrow{r_p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_p c^2}} U_0 \approx \frac{4\pi r_p m_p c^2 \gamma^4}{3\rho} = \frac{4\pi}{3} \frac{r_p}{(m_p c^2)^3} \frac{\mathcal{E}^4}{\rho} = C_\gamma^p \frac{\mathcal{E}^4}{\rho}$$

- 将经典质子半径 $r_p \approx 1.534698 \times 10^{-18}$ m, 及质子静止质量 $\mathcal{E}_{p0} \approx 938.27201$ MeV 代入, 可得

$$C_\gamma^p = \frac{4\pi}{3} \frac{r_p}{\mathcal{E}_{p0}^3} \approx 7.783 \times 10^{-18} \text{ [m} \cdot \text{GeV}^{-3}\text{]}$$

- 假设储存环为磁场为 B 的等磁环 (isomagnetic ring), 则由 $\rho = B\rho/B$ 以及 $cp = \beta\mathcal{E}$, 代入可得

$$U_0 = C_\gamma^p \frac{\mathcal{E}^4 B}{B\rho} \approx C_\gamma^p \frac{\mathcal{E}^4 B}{3.3356 pc} = \frac{C_\gamma^p}{3.3356} \frac{B}{\beta} \mathcal{E}^3 \text{ [GeV]}$$

- 对于 LHC, $\mathcal{E} = 7000$ GeV, $\beta \sim 1$, 磁场按其最大磁场强度 $B \sim 10$ T 计算, 则每圈的同步辐射能量损失

$$U_0 \approx 8.003 \times 10^{-6} \text{ GeV} = 8.003 \text{ keV}$$

加速器光源 (二): 习题 6 ★

- 问: 简述辐射阻尼与量子激发以及两者如何平衡?
- 答: 参考讲义
 - 同步辐射阻尼: 储存环中同步辐射过程对电子束能量振荡、同步振荡、横向振荡振幅的阻尼效应。
 - a 能量振荡阻尼: 能量较高的电子同步辐射中损失更多能量, 能量较低电子则损失更少能量。
 - b 同步振荡阻尼: 不同能量电子路径长度不同, 在高频腔中占据相位不同, 因而产生同步振荡。由于能量振荡阻尼, 导致同步振荡振幅相应减小。
 - c 横向振荡阻尼: 同步辐射过程本身不会阻尼横向振荡, 但当电子通过加速腔时, 由于加速动量方向仅在纵向, 故导致横向方向散角减小, 相应发射度减小, 故横向振荡阻尼发生在高频加速腔前后。
 - 辐射量子激发: 同步辐射中光量子的发射又是一种随机的过程。电子能量因光量子的发射而不连续地改变, 则会扰动电子的轨道, 导致微小的能量振荡。许多小扰动的积累, 会引起能量振荡的增长。
 - 电子束团在高能储存环中运动, 由于辐射效应使粒子的振荡具有辐射阻尼和量子激发两个过程。前者导致电子振荡衰减, 后者则激发新的电子振荡。最终的平衡结果, 是电子束团具有一个稳定的分布, 因而具有一定的能散分布和横纵向尺寸。这些平衡态参数取决于储存环的 lattice 设计, 是储存环的内禀参数, 与束流注入参数无关。

加速器光源 (二): 习题 7

- 问: 苹果飞船总部是一座周长约 1.6 公里的环形建筑, 上海同步辐射光源 SSRF 的主储存环周长约 432 米。若在苹果飞船总部内建设一台平衡能散与 SSRF 相同 (1×10^{-3}) 的电子储存环 (苹果光源), 设 $D \approx 0$, 则其能量约为多少? 若上述光源的工作点分别为 $v_x|v_y \approx 51|16$, 试估算其束团宽度和高度 (不考虑色散项)。

答:

- 参考平衡能散的定义, 在储存环最高能量 $\hat{\gamma}$ 以下, 平衡能散和储存环半径有

$$\begin{aligned}\sigma_\delta &\propto \gamma, \quad \gamma \leq \hat{\gamma} \\ \rho &\propto \hat{\gamma}^2\end{aligned}$$

以此半径设计储存环, 则平衡能散的最大值 σ_δ 成为一个普适常数, 无论环的规模有多大。

- SSRF 束流能量约为 3.5 GeV。以苹果飞船总部建筑的规模, 建设一台平衡能散与 SSRF 相同的“苹果光源 (MacLS)”, 则根据上述比例关系, 可得

$$\frac{\hat{\gamma}_{MacLS}^2}{\hat{\gamma}_{SSRF}^2} = \frac{\rho_{MacLS}}{\rho_{SSRF}} \Rightarrow \hat{\gamma}_{MacLS} \approx \sqrt{1.6/0.432} \hat{\gamma}_{SSRF} \Rightarrow \mathcal{E}_{MacLS} \approx 6.74 \text{ GeV}$$

- 周长 $C = 1.6 \text{ km}$ 的储存环, 其半径 $R = C/2\pi \approx 254.6 \text{ m}$, 按上述的束流能量及工作点, 代入可得

$$\sigma_{x\beta} \approx \frac{\sqrt{2}R}{v_x^2} \sigma_\delta \approx 138.4 \text{ } \mu\text{m}, \quad \sigma_{y\beta} = \sqrt{\epsilon_y \beta_y} \approx \sqrt{C_q \frac{R}{2v_y^2} \frac{R}{v_y}} \approx 1.74 \text{ } \mu\text{m}$$

加速器光源 (三): 习题 1

- 问: 上海软 X 射线自由电子激光: 电子束能量量 $\mathcal{E} = 1.5 \text{ GeV}$ 、电荷量 $Q \sim 500 \text{ pC}$ 、峰值流强 $I_{pk} \sim 800 \text{ A}$ 、归一化发射度 $\varepsilon_n \sim 1.5 \text{ mm}\cdot\text{mrad}$ 、波荡器周期 $\lambda_u = 16 \text{ mm}$ 、波荡器中平均 β 函数为 10 m 。如果用于产生 $\lambda_\ell = 2 \text{ nm}$ 波长 FEL 辐射, 请计算出波荡器参数 K 、Pierce 参数 ρ 、以及一维条件下的增益长度 L_{g0} 、饱和功率 P_{sat} 、饱和总长度 L_{sat} 。

答:

➤ 电子束能量 $\mathcal{E} = 1.5 \text{ GeV} \rightarrow \gamma \approx \mathcal{E}/\mathcal{E}_0 = 2395.42$ 。

➤ 波荡器参数

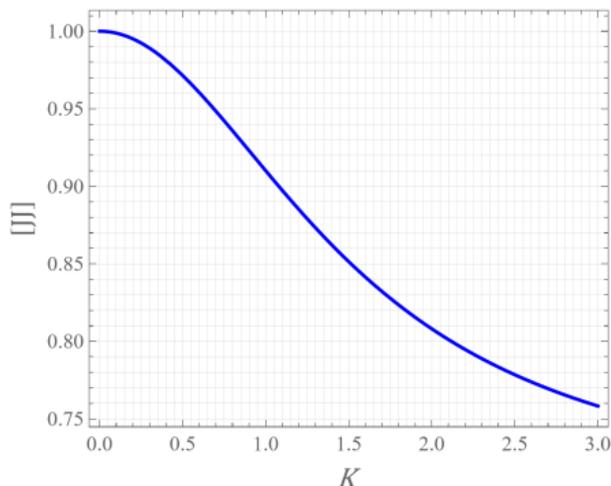
$$\lambda_\ell = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} \right) \Rightarrow K = \left[4\gamma^2 \frac{\lambda_\ell}{\lambda_u} - 2 \right]^{1/2} \approx 1.52$$

由右图可以得到 $[J] \approx 0.85$, 故 $\hat{K} = K[J] \approx 1.29$

➤ $A_b = 2\pi\sigma^2$, $\sigma = \sqrt{\frac{\beta\varepsilon_n}{\gamma}}$, $k_u = \frac{2\pi}{\lambda_u}$,

代入得 Pierce 参数

$$\rho_{FEL} = \left[\frac{\mu_0 e^2 \hat{K}^2 n_e}{32\gamma_r^3 m_e k_u^2} \right]^{1/3} = \left[\frac{\pi I_{pk}}{8 I_A} \frac{\hat{K}^2}{\gamma_r^3 k_u^2 A_b} \right]^{1/3} \approx 6.26 \times 10^{-4}$$



波荡器参数 K 修正因子 $[J]$

加速器光源 (三): 习题 1

- 接上页。

- 1-D 功率增益长度

$$L_{g0} \equiv \frac{1}{4\pi\sqrt{3}} \frac{\lambda_u}{\rho_{FEL}} \approx 1.17 \text{ m}$$

- 束流功率 $P_b[\text{GW}] = \mathcal{E}[\text{GeV}]I[\text{A}]$, 代入得饱和功率

$$P_{sat} \approx \rho_{FEL} P_b \approx 0.75 \text{ GW}$$

- 饱和长度

$$L_{sat} \approx 20L_{g0} \approx 23.47 \text{ m}$$

复习重点

- 加速器的基本分类：
 - 加速器光源 (一): 习题一
- 各种加速器的基本原理：
 - 电子感应加速器；直线加速器（漂移段型、行波管、驻波腔）；回旋加速器；同步加速器；等
- 基础计算知识：
 - 相对论相关：洛伦兹因子、静能、动量、动能、总能量的概念及其计算关系；洛伦兹变换；
 - 洛伦兹力方程；磁刚度定义与计算
- 自稳相原理相关：
 - 准共振加速条件；经典回旋加速器的局限；同步粒子与非同步粒子；平衡相位与能量增益的关系；
 - 自动稳相原理的物理图像；相运动方程和能量变化率方程；小振幅相运动；纵向振荡波数；相图；
- 弱聚焦原理相关：
 - 磁场径向变化率 n 的定义；轴向/径向稳定性条件推导及其物理图像；
- 强聚焦原理相关：包含储存环物理中粒子横向运动部分
 - 强聚焦与弱聚焦的区别；光学透镜组不散焦与不过聚焦条件；领带图；
 - 自然坐标系、参考轨道、闭合轨道、Betatron 振荡的概念；束流与六维相空间坐标的概念
 - Hill's 方程组；聚焦参数 $K_{x,y}$ 定义及与磁场梯度的换算；Hill's 方程组分段解法；不同元件 $K_{x,y}$ 的形式；

复习重点

- 强聚焦原理相关：包含储存环物理中粒子横向运动部分（接上页）
 - 传输矩阵的概念；**漂移段、四极磁铁、二极磁铁、边缘场传输矩阵形式**；**传输矩阵的稳定性判据**；
 - Hill's 方程组周期解法；**Courant-Snyder 参数 (Twiss 参数)**；**横向振荡相移、工作点**；**用 Twiss 参数表示传输矩阵**；
 - 动量分散与色散函数的概念；**滑相因子 η** ；**动量压缩因子 α_p** ；
 - **横向相空间与发射度**；相椭圆；**几何发射度、归一化发射度与束团尺寸**；**由粒子数占比定义的发射度 ϵ_F**
- 粒子对撞机相关：
 - **质心坐标系、有效作用能、等效静止靶动能**；
- 同步辐射物理相关：
 - 同步辐射基本原理；弯铁辐射特点；弯铁辐射、扭摆器辐射、波荡器辐射；
 - **同步辐射功率**；**同步辐射能量损失**；
 - 辐射阻尼与量子激发的**基本概念**与**物理图像**；**自然能散、自然发射度**；减小储存环发射度的方法；
- 自由电子激光基本概念：
 - 自由电子激光与传统激光的区别；国际、国内主要的自由电子激光装置；
 - **波荡器参数 K 的定义**；扭摆器、波荡器；电子在平面磁场波荡器中的运动；**波荡器辐射波长**；
 - **共振关系**，定性与定量推导；

复习重点

- 低增益 FEL:
 - 摆方程组及物理意义；修正波荡器参数 K_{eff} ；
 - 有质动力势，相运动；
 - 增益与 Madey 定理；
- 1-D 高增益 FEL:
 - 从低增益到高增益的变化；群聚与指数增益；群聚因子；
 - FEL 三阶方程；增益系数；FEL 参数/Pierce 参数及其物理意义；
 - FEL 一元三次方程及其独立解；功率增益长度；指数增益与饱和功率；
 - SASE-FEL；滑移、相干长度、模式数；纵向相干性——时域、频域；
- 高增益 FEL 中的 3-D 修正：
 - 衍射效应与光导的概念；横向相干性；
 - 3-D 增益长度：Ming Xie 公式
- FEL 先进概念：
 - SASE-FEL 的优点与缺点；
 - 全相干 XFEL 的主要实现方向：自种子、外种子 (HGHG, EEHG, PEHG, 级联)、XFEL0；
 - 性能多样性发展方向：高重频、双色/多色、极化控制、fresh-slice、大带宽、超短/超快等。

谢谢倾听！

