中 国 科 学 技 术 大 学

2016—2017学年第一学期考试试卷

考试科目 概率论与数理统计(B)　　　得分 ____________

所在系 _______　　姓名 ____________　　学号 ____________

考试时间: 2017年1月3日上午8:30–10:30;　使用简单计算器

装 …………… 订 …………… 线

一. (30分, 每小题均3分) 填空题或单选题, 答案可以直接写在试卷上.

1. 设A和B为随机事件, $\mathrm{P}(A) = 0.4, \mathrm{P}(B) = 0.3, \mathrm{P}(A|B) = 0.4$, 则(　).
(A) A与B相互独立　　(B) A与B互斥
(C) $A \supset B$　　(D) $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$

2. 甲乙二人进行网球比赛, 每回合胜者得 1 分, 且每回合甲胜的概率为 $p(0 < p < 1)$, 乙胜的概率为 $1 - p$, 比赛进行到有一人比另外一个人多 2 分就终止, 多 2 分者最终获胜, 则甲最终获胜的概率为__________.

3. 设随机变量X服从参数为λ的Poisson分布, 且已知$\mathrm{P}(X = 1) = \mathrm{P}(X = 2)$, 则$X$取值为 3 的概率为__________.

4. 设随机变量X和Y均服从正态分布$N(0, \sigma^2)$, 且已知$\mathrm{P}(X \le 2,\ Y \le -2) = 0.25$, 则$\mathrm{P}(X > 2, Y > -2) =$ __________.

5. 设X和Y相互独立且分别服从均值为 1 和 1/4 的指数分布, 则$\mathrm{P}(X < Y) =$ ______.

6. 设随机变量X_1和X_2相互独立, 方差均存在, 且概率密度函数分别为$f_1(x)$和$f_2(x)$. 若Y_1的概率密度函数为$[f_1(y) + f_2(y)]/2$, 而$Y_2 = (X_1 + X_2)/2$, 则(　).
(A) $\mathrm{E}[Y_1] > \mathrm{E}[Y_2], \mathrm{Var}[Y_1] > \mathrm{Var}[Y_2]$　　(B) $\mathrm{E}[Y_1] = \mathrm{E}[Y_2], \mathrm{Var}[Y_1] = \mathrm{Var}[Y_2]$
(C) $\mathrm{E}[Y_1] = \mathrm{E}[Y_2], \mathrm{Var}[Y_1] < \mathrm{Var}[Y_2]$　　(D) $\mathrm{E}[Y_1] = \mathrm{E}[Y_2], \mathrm{Var}[Y_1] > \mathrm{Var}[Y_2]$

7. 在假设检验中, 下列关于拒绝域和接受域说法错误的是(　).
(A) 与显著性水平 α 有关　　(B) 与所构造的统计量的分布有关
(C) 随样本观测值的不同而改变　　(D) 互不相交

8. 设X_1, X_2, X_3, X_4为来自总体$N(1, \sigma^2)$的一组简单随机样本, 则$T = \frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_3 + X_4 - 2)^2}$的分布为(　).
(A) t_1　　(B) $F_{1,1}$　　(C) $F_{2,2}$　　(D) 以上皆不正确.

9. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自二项总体$B(n, p)$的一组简单随机样本, 且记 $\overline{X}$ 和 S^2 为样本均值和样本方差. 若 $\overline{X} + kS^2$ 为 np^2 的一个无偏估计, 则常数 $k =$ __________.

10. 设正态总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中参数 μ 和 σ^2 均未知. 若样本容量 n 和置信系数 $1 - \alpha$ 均保持不变, 对于不同的样本观测值, 则总体均值 μ 的置信区间长度(　).
(A) 始终保持不变　　(B) 与 μ 的真值有关
(C) 与样本均值有关　　(D) 不固定.

二. (11分) 设二维随机向量 (X,Y) 的概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} Ax^2, & 0<|x|<y<1; \\ 0, & 其它. \end{cases}$

试求常数 A 的值及条件概率 $\mathrm{P}(X\le 0.25|Y=0.5)$.

三. (16分) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 X 的概率分布为 $\mathrm{P}(X=0)=\mathrm{P}(X=2)=0.5$, Y的概率密度函数为$f(y)=\begin{cases} 2y, & 0<y<1; \\ 0, & 其它. \end{cases}$

1. 求 $\mathrm{P}(Y\le \mathrm{E}Y)$;

2. 求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数.

四. (15分) 某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体进行 n 次测量, 该物体的质量 μ 是已知的. 设 n 次测量结果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$, 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|$, $i=1,2,\cdots,n$. 现利用这些绝对误差来估计标准差 σ.

1. 求 Z_i 的概率密度函数;

2. 利用一阶矩求 σ 的矩估计量;

3. 求 σ 的极大似然估计量.

五. (18分) 在质量管理中, 产品的优良性和稳定性可以分别用均值和方差来体现. 要比较甲乙两厂所生产的电视机的质量是否有差异, 对两厂所生产的各 10 台产品的使用情况进行了追踪调查, 得到这 20 台电视机的寿命(单位: 年)数据如下:

甲	8	7	9	5	12	10	9	10	8	7
乙	10	8	5	7	8	7	11	4	5	6

设电视机的寿命服从正态分布, 利用假设检验的知识判断两厂所生产电视机的寿命是否有显著差异(显著性水平取 $\alpha=0.05$).

六. (10分) 对截止目前为止一共 44 位美国总统(含候任总统Trump)的星座进行分析, 发现十二星座中天蝎座和水瓶座各有 5 人, 双子座和射手座各有 3 人, 处女座和白羊座各有两人, 而其余星座均有 4 人. 于是有人宣称有些星座擅长当美国总统, 而有些星座则不擅长. 结合你所学的知识, 说明该说法是否有统计学上的依据?(显著性水平取 $\alpha=0.05$)

附录: 上分位数表

$F_{10,10}(0.025)=3.72$, $F_{9,9}(0.025)=4.03$, $F_{10,10}(0.05)=2.98$, $F_{9,9}(0.05)=3.18$,

$t_{20}(0.025)=2.086$, $t_{19}(0.025)=2.093$, $t_{18}(0.025)=2.101$, $\chi^2_{11}(0.05)=24.725$.

参考答案

一. 每小题3分

1. A **2.** $p^2/[p^2+(1-p)^2]$ 或 $p^2/(1-2p+2p^2)$ **3.** $\frac{4}{3}e^{-2}$ 或 0.18 **4.** 0.25 或 $1/4$

5. 0.2 或 $1/5$ **6.** D **7.** C **8.** B **9.** -1 **10.** D

二. 常数$A=6$. (5分)

由$f_Y(y)=4y^3, 0<y<1$及$f_{X|Y}(x|y)=\frac{3x^2}{2y^3}$, $-y<x<y$, 可知$f_{X|Y}(x|\frac{1}{2})=12x^2, -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$. 故

$$\mathrm{P}(X\le 1/4|Y=1/2)=\int_{-1/2}^{1/4}12x^2\mathrm{d}x=\frac{9}{16}.\quad (6分)$$

三. **1.** 由$\mathrm{E}Y=\frac{2}{3}$, 知$\mathrm{P}(Y\le \mathrm{E}Y)=\int_0^{2/3}2y\mathrm{d}y=4/9$. (6分)

2. 对任意$0<z<3$, 由全概率公式可知

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Z\le z) &= \frac{1}{2}\mathrm{P}(Y\le z)+\frac{1}{2}\mathrm{P}(Y\le z-2)\\ &= \begin{cases} z^2/2, & 0\le z<1;\\ 1/2, & 1\le z<2;\\ ((z-2)^2+1)/2, & 2\le z<3.\end{cases}\quad (5分)\end{aligned}$$

从而Z的概率密度函数为

$$l(z)=\begin{cases} z, & 0\le z<1;\\ z-2, & 2\le z<3;\\ 0, & 其它.\end{cases}\quad (5分)$$

四. **1.** 概率密度函数为$f(z)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{z^2}{2\sigma^2}\}$, $z>0$. (5分)

2. 由于$\mathrm{E}[Z_i]=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$, 故$\sigma$的矩估计量为$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\overline{Z}$, 其中$\overline{Z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i$. (5分)

3. 由对数似然函数为$l(\sigma)=c-n\ln\sigma-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n z_i^2$, 其中$c$为一与$\sigma$无关的常数, 令$\frac{\mathrm{d}l(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}=0$, 可知$\sigma$的极大似然估计量为$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i^2}$.

五. 由样本观测值得$\bar{x}=8.5, s_1^2=3.83, n_1=10; \bar{y}=7.1, s_2^2=4.99, n_2=10$. (4分)

先检验两总体的方差是否相等. 此时$F=\frac{3.83}{4.99}=0.768$, 而由附表可得$F_{9,9}(0.025)=4.03, F_{9,9}(0.975)=1/4.03=0.248$. 因为$0.248<F<4.03$, 我们可以认为两总体方差相等. (7分)

再检验两总体均值是否相等. 此时$s_w^2=4.411$, 而统计量$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}}=-1.235$. 故由$|t|<t_{18}(0.025)=2.101$, 我们也可认为两总体均值相等. 综上可知, 我们可以认为两厂所生产电视机的寿命没有显著性差异. (7分)

六. 首先建立假设H_0 : 每个星座当上美国总统的可能性是一样的. 计算χ^2统计量的值为$2.91<\chi^2_{11}(0.05)=24.725$. 接受$H_0$, 故我们可以认为该说法没有统计学上的依据.