计算机控制基础大作业

12.30

实验题目

无人机的控制器设计及 Matlab 仿真

实验要求

给定旋翼无人机的基本物理参数、各状态变量的初始状态和状态空间矩阵。

$$\mathrm{X}=\left(x,y,\Delta z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},\phi,\theta,\Delta\,\psi,p,q,r\right)^{\mathrm{T}}$$

$$U=\left(\Delta u_1,u_2,u_3,u_4\right)^T$$

$$Y=\left(x,y,\Delta z,\Delta\psi\right)^T$$

状态空间方程为:

$$\begin{cases}\dot{X}=AX+BU\\ \quad Y=CX\end{cases}$$

其中 A,B,C为常量矩阵已知，$\Delta z=z-z_d,\Delta\psi=\psi-\psi_{\mathrm{d}},\Delta \mathrm{u}_1=u_1-mg$。要求解决无人机运动系统的相关设计问题，并对稳定性等要素进行确定。包括:

- 系统的稳定性判别
- 子系统的传递函数
- 比例控制器的参数选定范围
- 反馈控制器的增益范围

将运动状态简化，忽略如上升阻力等因素，计算:

- 利用根轨迹法选取 PID 控制器的参数
- 增益和相位裕度随微分时间常数的变化

考虑无人机 X 轴方向动力学子系统，由于桨叶产生的俯仰力矩不易直接获得，故考虑利用期望的俯仰角速率作为输入，得到简化的动力学系统:

- 由期望的俯仰角速率设计超前补偿器
- 跟踪期望的俯仰角

实验步骤

- 计算矩阵 A 的特征值，并判断系统的稳定性

求得 A 的特征值为:

$$\lambda=(0,0,-0.15,-0.15,-0.15,-30,0,-30,0,-15,0)^T$$

由于其中有绝对值大于 1 的特征值，故系统不稳定。

- 求出输入 $\Delta u_1(s)$ 到输出 $\Delta z(s)$ 的高度控制子系统传递函数 $G_z(s)$, 以及从输入 $u_4(s)$ 到 输出 $\Delta\psi(s)$ 的偏航角控制子系统传递函数 $G_\psi(s)$.

  首先筛选出相关变量的方程，$\Delta z = Y(3) = X(3), \frac{d}{dt}\Delta z = \frac{d}{dt}z$，因而：

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{3}{20}\frac{dz}{dt} + \frac{\Delta u_1}{0.03}$$

  同时初始状态均为零$z(0) = z'(0) = 0$，利用拉氏变换：

$$s^2 Z(s) = -\frac{3s}{20}Z(s) + \frac{100}{3}\Delta U_1(s)$$

  再利用拉氏变换得到传递函数为：

$$G_z(s) = \frac{33.33}{s^2 + 0.15s}$$

  偏航角控制子系统的求解同理，筛选出相关变量，$\Delta\psi = Y(4) = X(9), r = \frac{d\psi}{dt}$，因而：

$$\frac{d^2\Delta\psi}{dt^2} = -15\frac{d\Delta\psi}{dt} + \frac{u_4}{3\times 10^{-5}}$$

  求得传递函数为：

$$G_\psi(s) = \frac{3.333\times 10^4}{s^2 + 15s}$$

- 考虑四旋翼无人机的偏航角控制子系统 $G_\psi(s)$，求出相应的时间响应曲线：

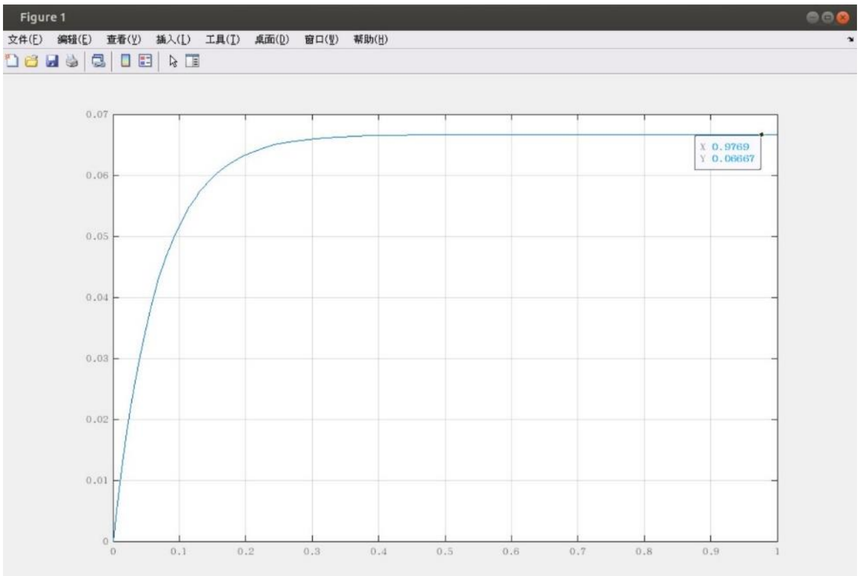
  首先求出每个输入的频域表示，记$k = 3\times 10^{-5}$，对于脉冲函数：

$$u_4(s) = k$$

  偏航角频域表示为：

$$\psi(s) = G_\psi(s)u_4(s) = \frac{1}{s^2 + 15s}$$

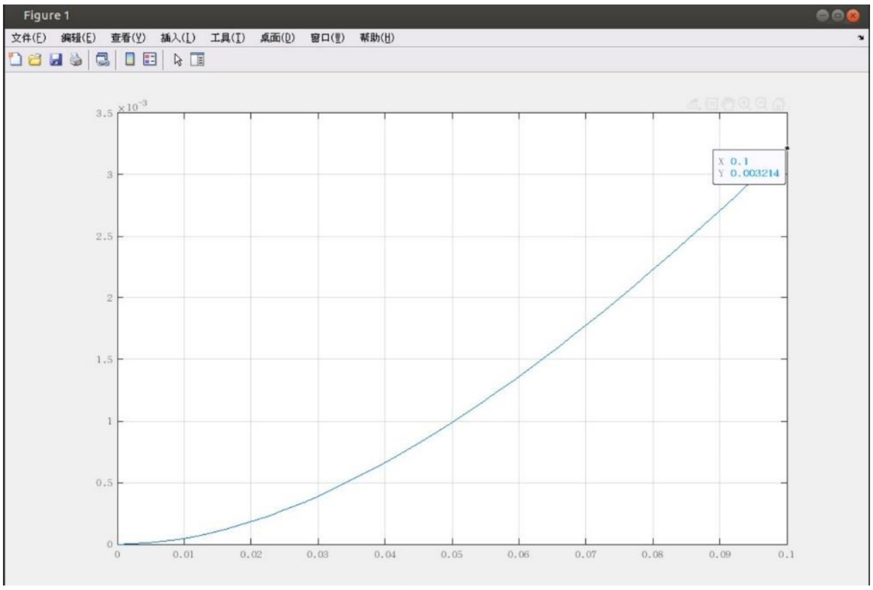
  绘制时域图像如图：



  对于阶跃输入，有：

$$u_4(s) = \frac{k}{s}$$

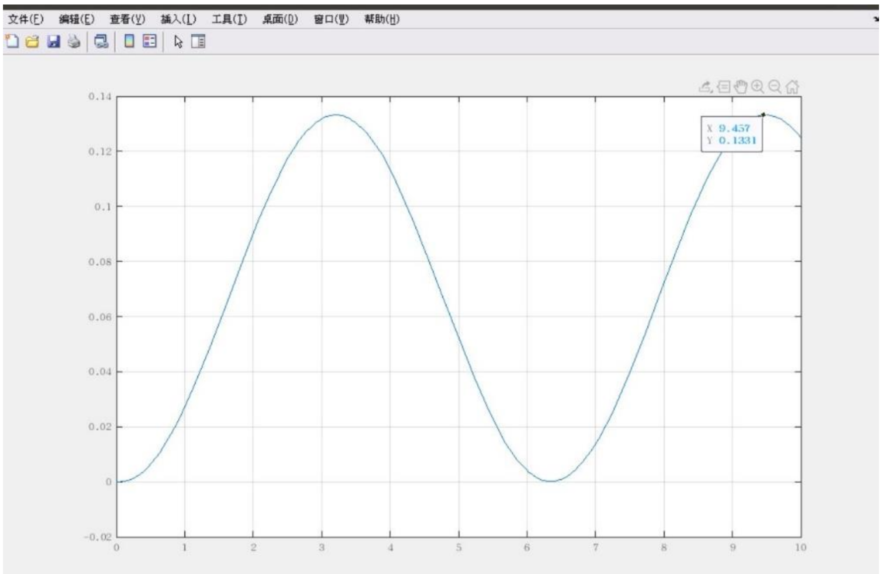
$$\psi(s)=\frac{1}{s^3+15s^2}$$



对于正弦输入，有：

$$u_4(s)=\frac{k}{s^2+1}$$

$$\psi(s)=\frac{1}{(s^2+15s)(s^2+1)}$$



通过观察阶跃信号的输出图像，可知稳态值为 0.06667；
另一方面，由终值定理：

$$\lim_{t\to+\infty}f(t)=\lim_{s\to0^+}s\Psi(s)=\left.\frac{1}{s+15}\right|_{s=0}=0.06667$$

二者结论相符。

- 考虑四旋翼无人机的高度控制子系统$G_z(s)$，假设选取比例控制器$\Delta u_1=-k\Delta z$，选取增益 k 使得高度时间响应曲线满足给定要求，用 Matlab 绘制高度时间响应曲线：
  由状态空间方程，代入$\Delta u_1=-k\Delta z$：

$$\frac{d^2}{dt^2}\Delta z = -\frac{3}{20}\frac{d}{dt}\Delta z + \frac{-k}{0.03}\Delta z$$

考虑零输入响应，有特征方程：

$$60\lambda^2 + 9\lambda + 2000k = 0$$

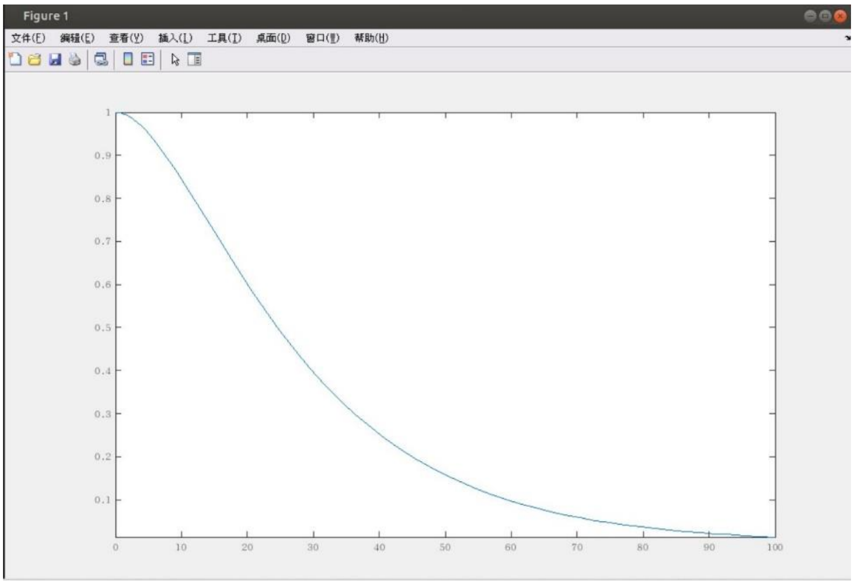
常系数的二阶线性微分方程有三类解，记$k_0 = \frac{k_z^2}{4m} = 1.5 \times 10^{-4}$，则：

$$\begin{cases} \Delta z = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, 0 < k < k_0 \\ \Delta z = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda_2 t}), k = k_0 \\ \Delta z = (C_1 \cos\beta t + C_2 sin\beta t)e^{\alpha t}, k > k_0 \end{cases}$$

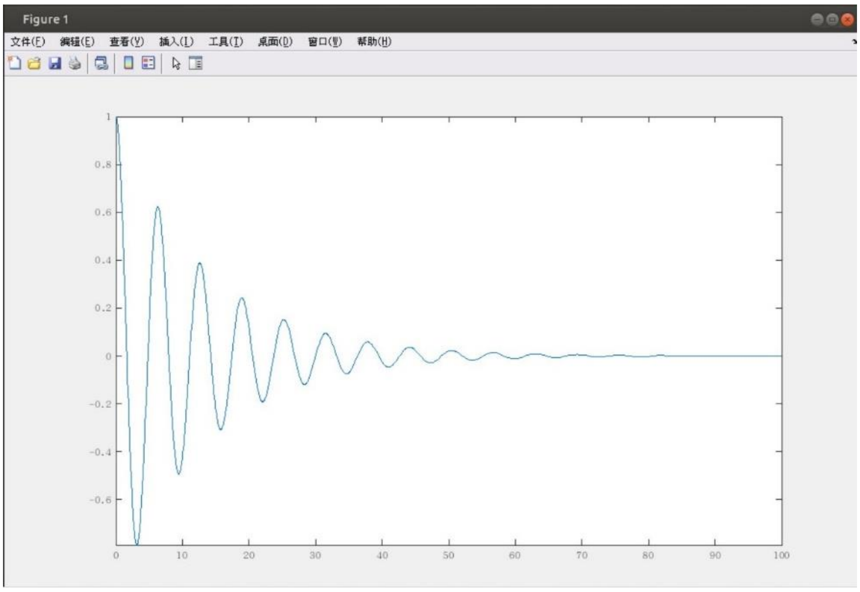
其中$\lambda_1, \lambda_2 < 0$，终态一定收敛，即高度子系统的状态函数不可能发散；又因为初始状态的为零，函数形式上不含有常数项，故不可能收敛到非零的常值。

因而条件(1)，条件(2)均无解。

对于条件(3)，可知对应第二类，这里取$k = k_0 = 1.5 \times 10^{-4}$。由图像知满足条件；



对于条件(4)，可知对应第三类，这里取$k = 3 \times 10^{-2}$。由图像知满足条件；



- 考虑忽略阻力系数的高度控制子系统$\Delta Z(s)=\frac{2-Ts}{ms^2(2+Ts)}\Delta U_1(s)$，是否存在合适的增益范围，使得在反馈控制器 $K(s)$ 下高度子系统是稳定的，用 Matlab 绘制高度时间响应曲线：

■ $K(s)=k_p$

此时闭环传递函数为：

$$G_c(s)=\frac{2-Ts}{k_p(2-Ts)+ms^2(2+Ts)}$$

由劳斯判据：

$$\begin{array}{ccc} s^3 & mT & -k_pT \\ s^2 & 2m & 2k_p \\ s & -2k_pT & 0 \end{array}$$

可知在$k_p>0$时不存在合适的增益范围使得系统稳定。

■ $K(s)=k_p+k_ds$

此时闭环传递函数为：

$$G_c(s)=\frac{2-Ts}{(k_p+k_ds)(2-Ts)+ms^2(2+Ts)}$$

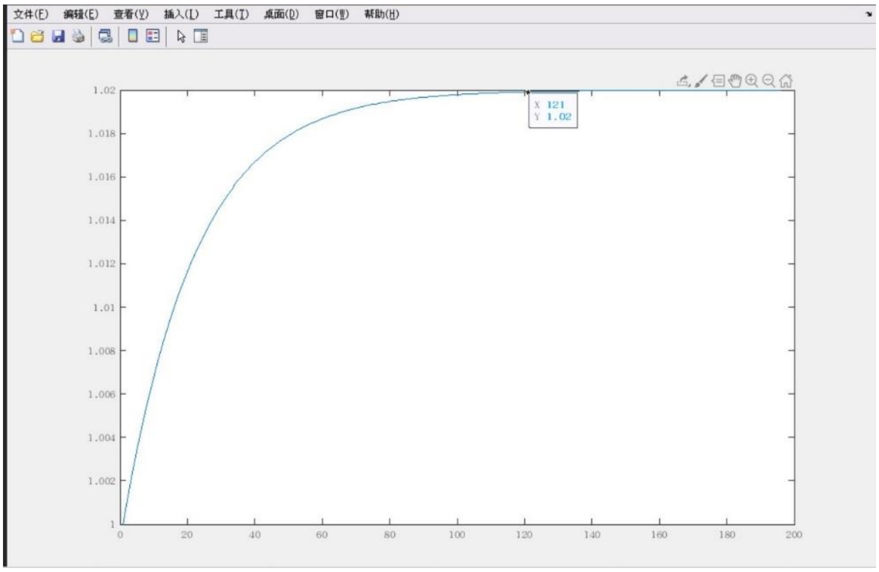
由劳斯判据：

$$\begin{array}{ccc} s^3 & mT & 2k_d-Tk_p \\ s^2 & 2m-k_dT & 2k_p \\ s & 2k_d-Tk_p-\dfrac{2mk_pT}{2m-k_dT} & 0 \\ s^0 & 2k_p & \end{array}$$

联立得到：

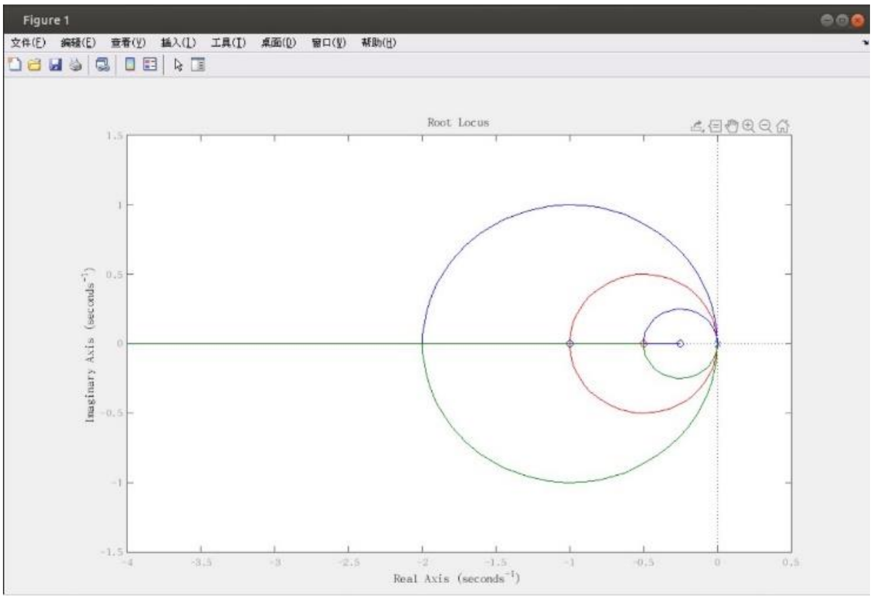
$$\begin{cases} k_d<60 \\ k_p<2000\times\dfrac{k_d^2-60k_d}{k_d-120} \\ k_p>0 \end{cases}$$

其中$T=1\times10^{-3}s$，我们取$k_p=50,k_d=30$，输入单位阶跃信号，得到如图时域响应，由图像可知满足稳定性要求：

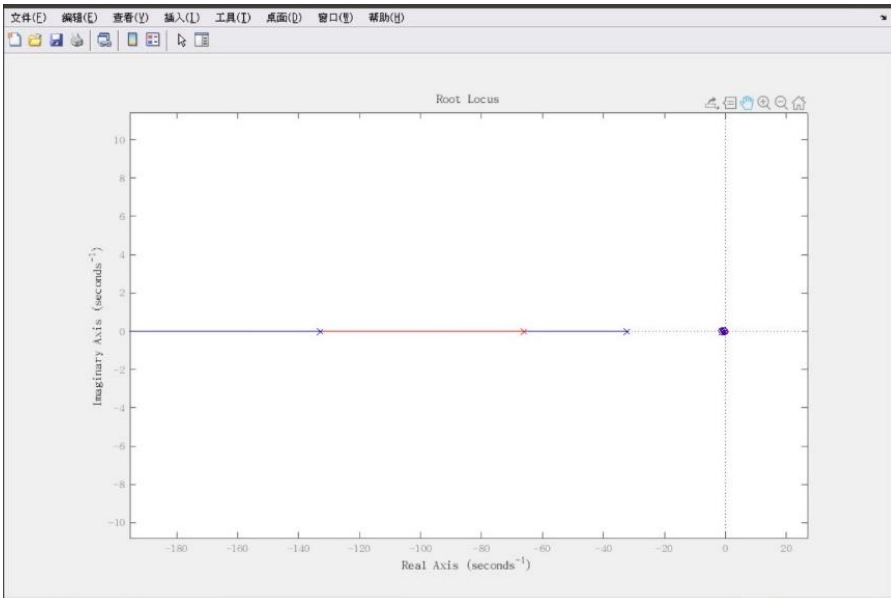


- 考虑忽略阻力系数的高度控制子系统$\Delta Z(s)=\frac{1}{ms^2}\Delta U_1(s)$，研究 PD 和 PI 控制器对高

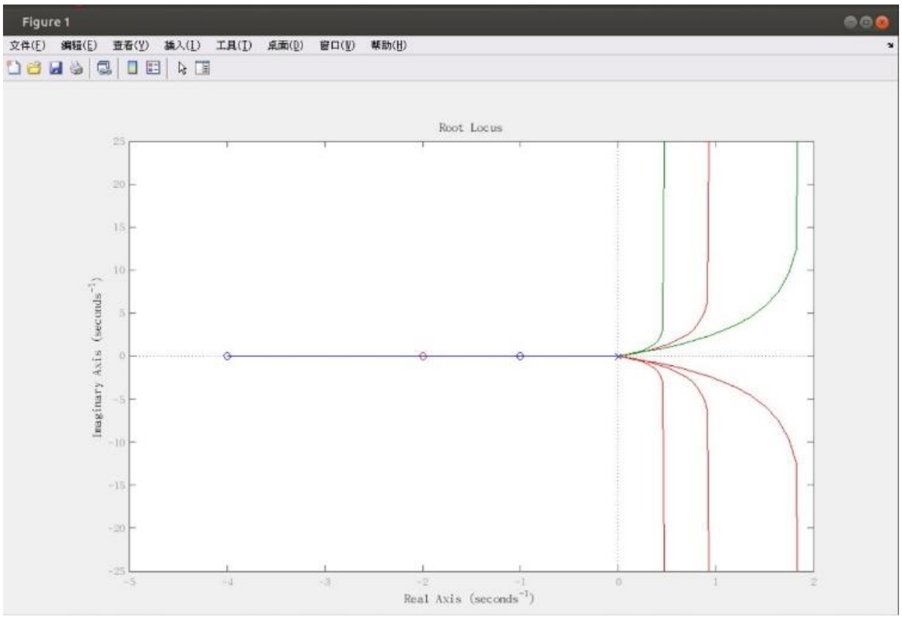
度控制子系统的稳定性及性能的影响，调用 matlab 绘制系统以k_p为变化参数的根轨迹。对于 PD 控制器，随着时间常量的变化，根轨迹的变化如图所示：



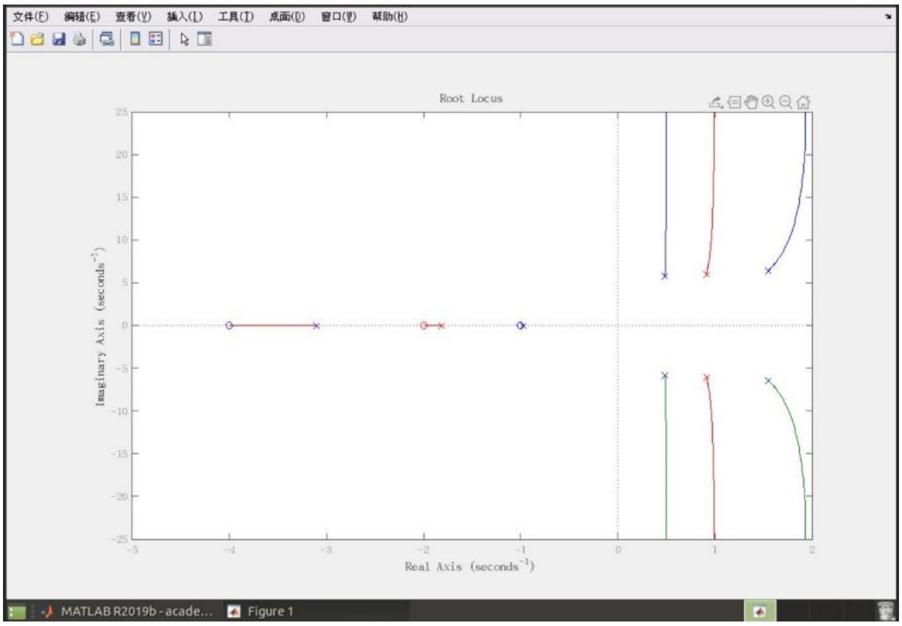
对应的闭环传递函数的零点极点偏移情况：



对于 PI 控制器，随着p_i的变化，根轨迹的变化如图所示：



对应的闭环传递函数的零点极点偏移情况：



根据上述根轨迹的图形可以观察到零点极点分布的偏移情况：

1. PD 控制器可以使得闭环系统稳定：此时开环系统的根轨迹全部位于 s 左半平面，无论增益怎么改变，特征根全部具有负实部，则系统就是稳定的。
2. 当微分时间常数T_d增大时，PD 控制器的闭环系统的极点取共轭点的部分向平面右侧偏移，绝对值趋向于原点，对应的 K 值不断减小；实轴上的点对应 K 值不断增大。
3. PI 控制器可以使得闭环系统稳定：观察到闭环系统的根轨迹在左半平面的实轴上存在，且随着p_i的增大而向左侧偏移，故一定存在对应的k_p使得闭环系统稳定。
4. 当积分时间常数p_i增大时，PI 控制器的闭环系统的共轭极点绝对值不断增大，远离原点，实轴上的极点绝对值不断增大并远离原点，向平面左侧偏移。

- 考虑带阻力的高度控制子系统$\Delta Z(s)=\frac{1}{ms(s+\frac{k_z}{m})}\Delta U_1(s)$，针对不同的微分时间常数$T_d$，调用 matlab 的 bode 指令绘制开环传递函数的伯德图。

已知开环传递函数为:

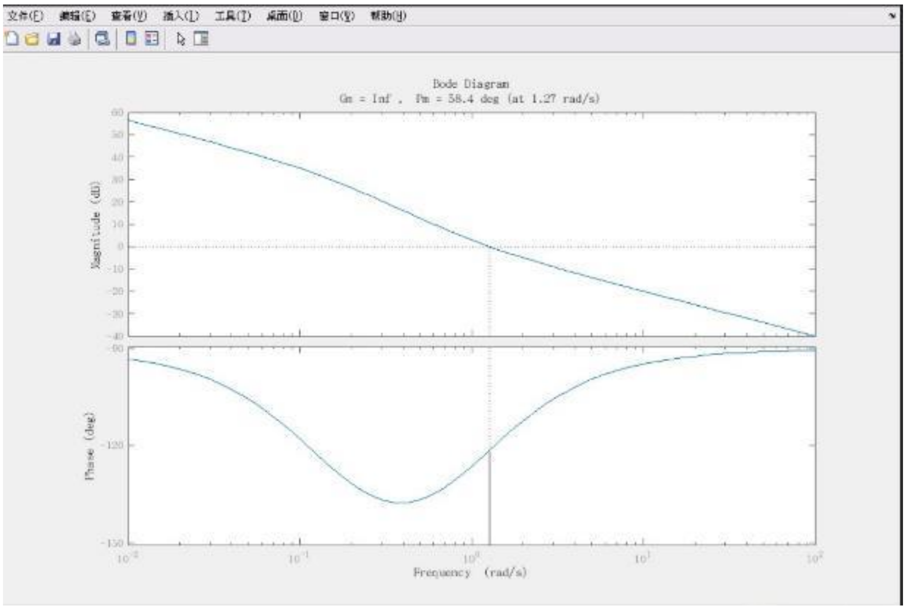
$$\mathrm{G_{PD}}(s)=\frac{k_p(T_d s+1)}{ms(s+\frac{k_z}{m})}$$

化为伯德形式:

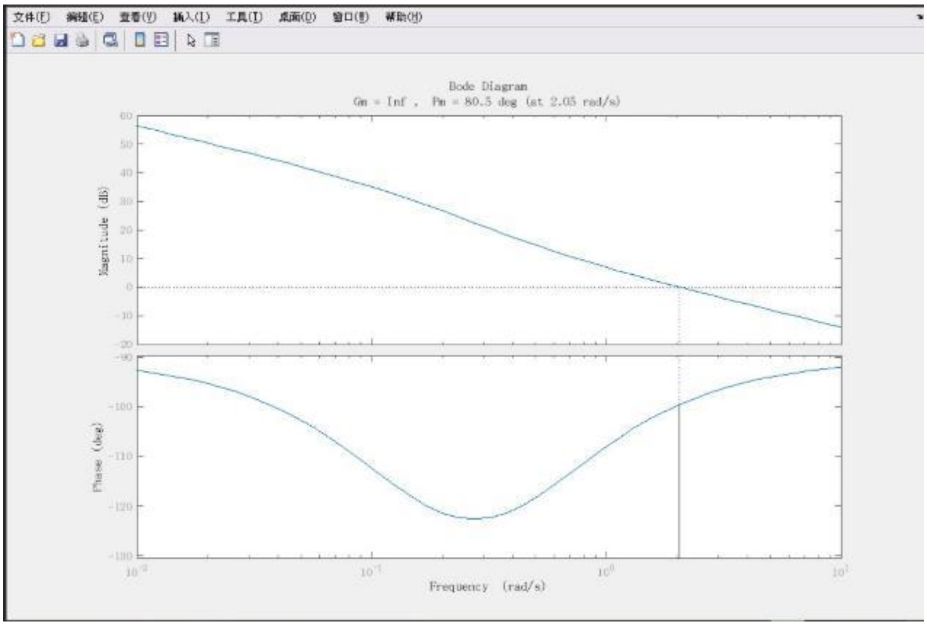
$$G_{pd}(jw)=\frac{k_p T_d jw+k_p}{-mw^2+k_z jw}$$

得到伯德图:

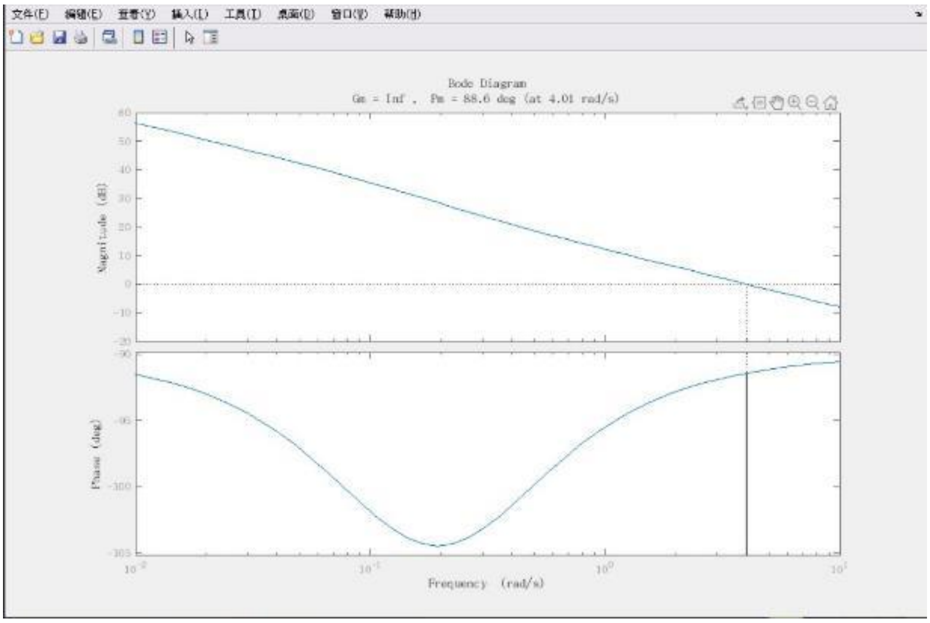
Td=1s



Td=2s;



Td=4s;



观察可得知，随着时间常量 Td 的增大，增益裕度保持为无穷，相位裕度持续增大。

- 当偏航角为零时，无人机在 X 方向的动力学可以通过一个单输入单输出系统描述，以期望的俯仰角速率q_{ref}作为输入，得到：

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{k_x}{m} & g \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} q$$

设计如下形式的超前补偿器:$K(s) = \frac{k(Ts+1)}{\alpha Ts+1}, 0.1 \le \alpha < 1$，满足给定的要求，并用 matlab 绘制单位阶跃响应曲线。

首先由时域上的微分方程：

$$\ddot{x} = -\frac{k_x}{m}\dot{x} + g\theta$$

初始为零状态，又因为$\dot{\theta} = q$，两边求导，由拉氏变换得到：

$$s^3X(s) = -0.15s^2X(s) + 9.81Q(s)$$

传递函数为：

$$G_x(s) = \frac{9.81}{s^3 + 0.15s^2}$$

串联超前补偿器后，开环传递函数为：

$$G_o(s) = \frac{9.81k(Ts+1)}{s^2(s+0.15)(\alpha Ts+1)}, \alpha \in [0.1, 1)$$

为 II 型系统，故对于阶跃输入的稳态误差始终为零，条件(2)始终满足。

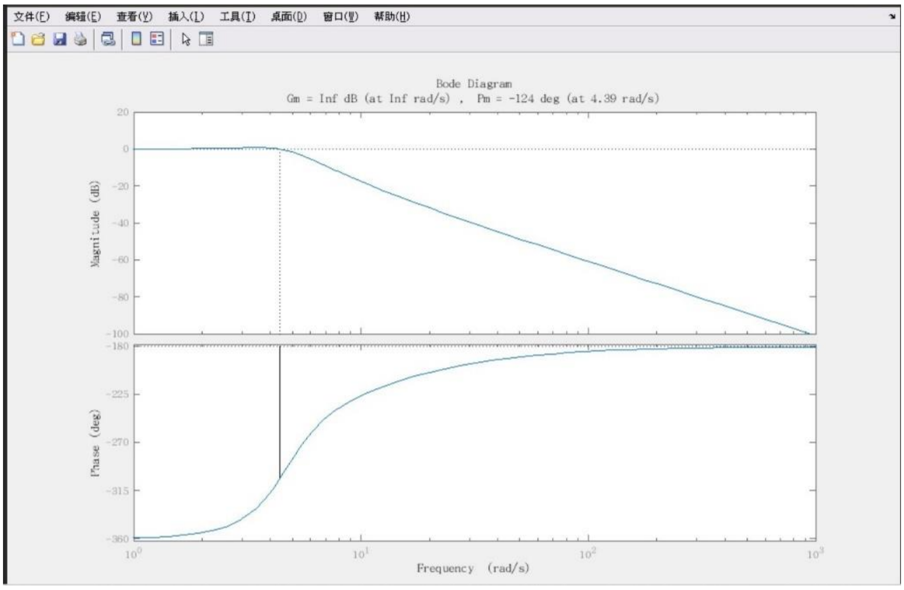
其闭环系统的特征方程为：

$$\alpha Ts^4 + (0.15\alpha T + 1)s^3 + 0.15s^2 + 9.81kTs + 9.81k = 0$$

由劳斯判据：

$$\begin{array}{llll}
s^4 & \alpha T & 0.15 & 9.81k \\
s^3 & 0.15\alpha T+1 & 9.81kT & \\
s^2 & \dfrac{9.81\alpha T^2 k}{-0.15\alpha T-1}+0.15 & 9.81k & \\
s^1 & \dfrac{(0.15\alpha T+1)\cdot 9.81k}{\dfrac{9.81\alpha T^2 k}{0.15\alpha T+1}-0.15} & & \\
s^0 & 9.81k & &
\end{array}$$

要求第一项均大于零，得到限制条件。考虑在未添加补偿器时的闭环系统，伯德图如下：



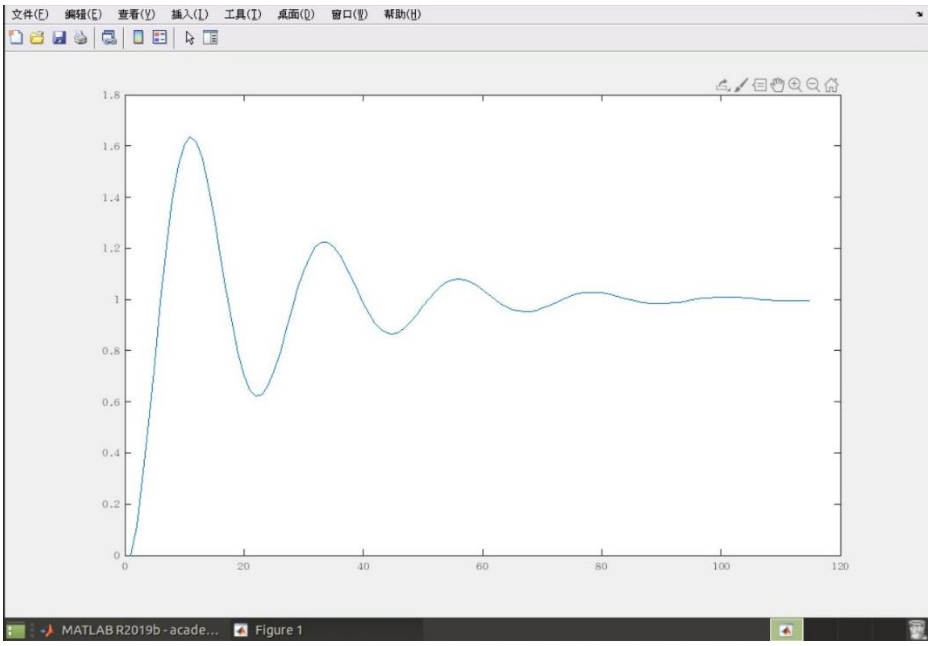
我们取零点转折频率$\frac{1}{T}=0.05$，极点转折频率$\frac{1}{\alpha T}=0.5$。带入参数，为满足条件(4)，有解：

$$\begin{cases} T=20 \\ \alpha=0.1 \\ k=2\times 10^{-5} \end{cases}$$

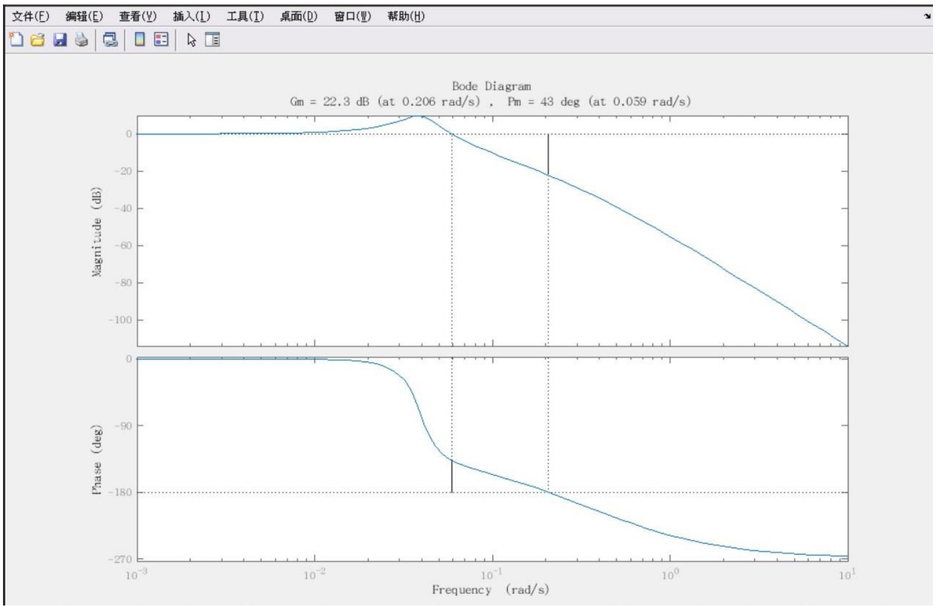
候选的补偿器为

$$D(s)=2\times 10^{-5}\frac{20s+1}{2s+1}$$

此时极点均位于左半平面，对于阶跃响应是收敛的，满足条件（1）：



由伯德图得知相位裕度为 43.03,穿越频率为 0.2061，满足条件（4）:



不存在同时满足四个条件的超前补偿器设计方案，因为条件（3）与条件（4）冲突。

- 采用级联控制结构实现对 X 轴方向的控制，并设计超前补偿器：$K_{out}(s)=\frac{k(Ts+1)}{\alpha Ts+1}, 0.1\le\alpha<1$，使得无人机子系统满足给要求，用 matlab 绘制单位阶跃响应曲线，并和上一题中的闭环系统性能进行比较。

对于输入期望的俯仰角，传递函数改为：

$$\widetilde{G_x}(s)=\frac{9.81}{s^2+0.15s}$$

由已知条件得到：

$$[\theta_{ref}(s)-\theta(s)]\frac{5}{s}=\theta(s)$$

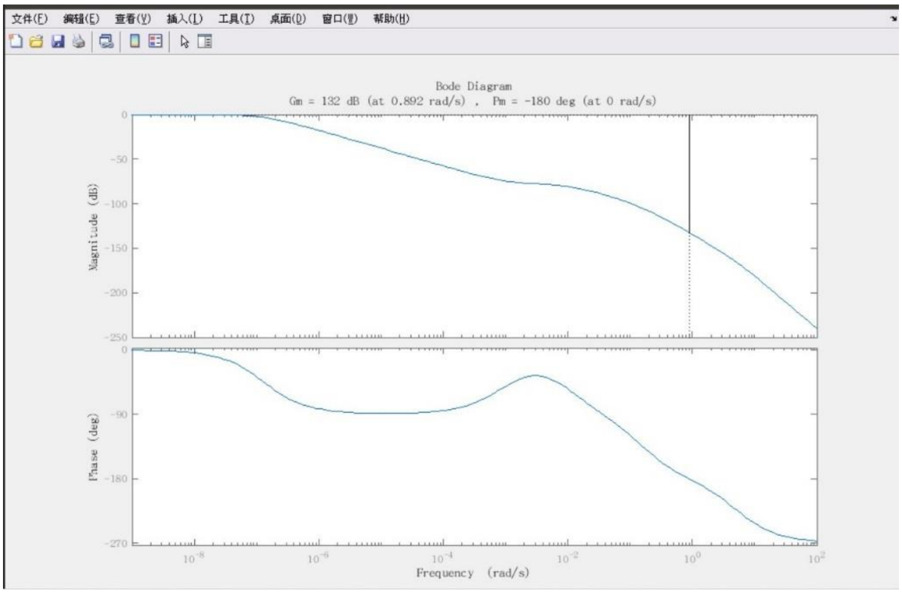
解得：

$$G_{out}(s)=\tilde{G}(s)\cdot\frac{5}{s+5}=\frac{49.05}{s(s+0.15)(s+5)}$$

此时开环系统传递函数为:

$$\widetilde{G_o}(s)=K_{out}(s)G_{out}(s)=\frac{49.05k(Ts+1)}{s(s+0.15)(s+5)(\alpha Ts+1)}$$

处理手法同上。由于含有s^{-1}项，是 I 型系统，对于阶跃信号误差始终为零，要求（2）已经得到满足。下考虑要求（3），未添加补偿器时，闭环系统的伯德图如下:



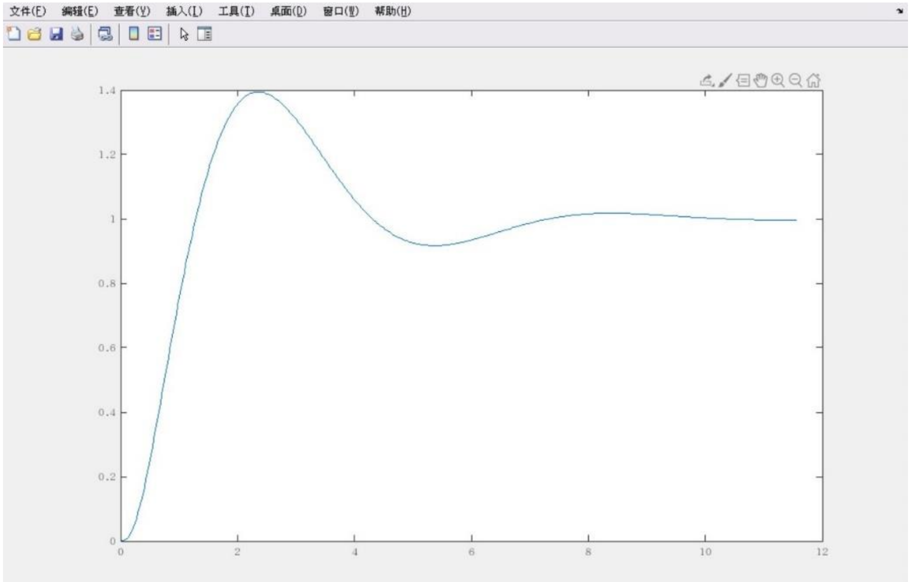
我们取零点转折频率$\frac{1}{T}=1$，极点转折频率$\frac{1}{\alpha T}=0.1$。带入参数，为满足条件(4)，有解:

$$\begin{cases}T=1\\ \alpha=0.1\\ k=0.1\end{cases}$$

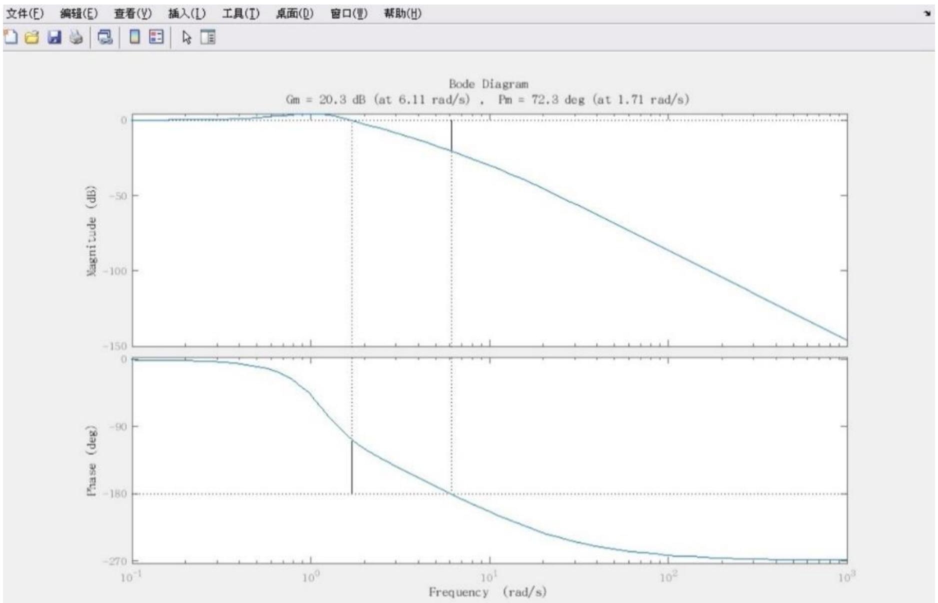
候选的补偿器为

$$D(s)=0.1\cdot\frac{s+1}{\frac{s}{10}+1}$$

此时极点均位于左半平面，满足条件（1），对于阶跃响应是收敛的:



同时伯德图显示穿越频率为$\omega_{cg} = 6.107 > 1.5$，满足条件（3）。



再从时域图中测量得到超调量为$OS = 39.42\%$，上升时间为$t_p = 2.367$,与第八题中的闭环系统相比较：第八题中的闭环系统设计参数：超调量为$OS = 66.85\%$，上升时间为$t_p = 73.01$。二者稳态值均为 1。显然第九题中闭环系统性能更好，该设计方案更加符合工业需求。

代码实现

- 计算矩阵 A 的特征值，并判断系统的稳定性

```
[eigVecMat,eigValMat]= eig(A);
eigVal=diag(eigValMat);
```

- 考虑四旋翼无人机的偏航角控制子系统 $G_\psi(s)$，求出相应的时间响应曲线：

```
k1=(1/3)*1e-5;
```

```
k2=3e-5;
Gpsi_s=k1/(s^2+15*s);
Us=[k2  k2/s  k2/(s^2+1)];
Psi_s=Gpsi_s.*Us;
Psi_t=ilaplace(Psi_s,s,t);

figure;
hold on;
fplot(Psi_t,[0,t_upper]);
hold off;
grid on;
box on;
```

- 考虑四旋翼无人机的高度控制子系统$G_z(s)$，假设选取比例控制器$\Delta u_1 = -k\Delta z$，用 Matlab 绘制高度时间响应曲线：

```
    syms t y;
    eq=dsolve('D2y+0.15*Dy+0.005*y=0','y(0)=1,Dy(0)=0','t');
    fplot(eq,[0 100]);
```

- 考虑忽略阻力系数的高度控制子系统$\Delta Z(s) = \frac{2-Ts}{ms^2(2+Ts)}\Delta U_1(s)$，用 Matlab 绘制高度时间响应曲线：

```
function Q5(kp,kd)
    T=1e-3;
    m=0.03;
    num=[-T,2];
    z0=1;
    den=[m*T, 2*m-T*kd, 2*kd-kp*T, 2*kp];
    sysG=tf(num,den);
    z_t=step(sysG)+z0;
    plot(z_t);
end
```

- 考虑忽略阻力系数的高度控制子系统$\Delta Z(s) = \frac{1}{ms^2}\Delta U_1(s)$，研究 PD 和 PI 控制器对高度控制子系统的稳定性及性能的影响，调用 matlab 绘制系统以k_p为变化参数的根轨迹。

```
Td=[1,2,4];
Pi=[1,2,4];
color=['-r','-b','-g'];
sysG_pd=tf(0).*ones(1,3);
sysG_pi=tf(0).*ones(1,3);
for i =1:3
    sysG_pd(i)=tf([Td(i),1],[const_m,0,0]);
    sysG_pi(i)=tf([1,Pi(i)],[const_m,0,0,0]);
end
figure;
```

```
hold on;
for i=1:3
    rlocus(sysG_pi(i),color(i));
end
hold off;
```

- 考虑带阻力的高度控制子系统$\Delta Z(s)=\frac{1}{ms(s+\frac{k_z}{m})}\Delta U_1(s)$，针对微分时间常数$T_d$，利用 matlab 绘制开环传递函数的伯德图：

```
kp=0.03;
Td=1;  %change for 1,2,4
sysG_pd=tf([kp*Td,kp],[9.81,4.5e-3,0]);
bode(sysG_pd)
margin(sysG_pd)
```

计算闭环传递函数的零点极点偏移：

```
figure;
hold on;
for i=1:3
    sysG_c_pd(i)=feedback(sysG_pd(i),1);
    sysG_c_pi(i)=feedback(sysG_pi(i),1);
    rlocus(sysG_c_pd(i),color(i));
end
hold off;
```

- 以期望的俯仰角速率q_{ref}作为输入，设计超前补偿器:$K(s)=\frac{k(Ts+1)}{\alpha Ts+1}, 0.1\le\alpha<1$满足给定的要求，用 matlab 绘制单位阶跃响应曲线：

```
function [flag]=Q8(k,T,alpha)
    num=9.81*k.*[T,1];
    den=conv([1,0.15,0,0],[alpha*T,1]);
    sysGo=tf(num,den);
    sysGc=feedback(sysGo,1);
    [Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(sysGc);
    margin(sysGc);
    flag=(Pm>40 );
    fprintf('Pm=%f,Wcg=%f,If satisfy=%d\n',Pm,Wcg,flag);
    z_t=step(sysGc);
    plot(z_t);
end
```

- 采用级联控制结构实现对 X 轴方向的控制，设计超前补偿器：$K_{out}(s)=\frac{k(Ts+1)}{\alpha Ts+1}, 0.1\le\alpha<1$，使得无人机子系统满足给要求，用 matlab 绘制单位阶跃响应曲线：

```
function Q9(k,T,alpha)
    num=49.05*k.*[T,1];
    den=conv([1,0.15,0],conv([1,5],[alpha*T,1]));
```

```
    sysGo=tf(num,den);
    sysGc=feedback(sysGo,1);
    [Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(sysGc);
    finalvalue=1;
    [y,t]=step(sysGc);
    plot(t,y);
    [Ymax,k]=max(y);
    timetopeak=t(k);
    percentovershoot=100*(Ymax-finalvalue)/finalvalue;
    fprintf('Wcg=%f,tP=%f,percOS=%f\n',Wcg,timetopeak,percentovershoot);
end
```