24 年数分 (B3)A 卷评分标准

1. 每题 5 分. 答案依次为: $(2021, 4047, 2022)$, -2024, 5, 正确、正确、正确

2. $\mathrm{d}\phi_A(H) = AH^{\mathrm{T}} + HA^{\mathrm{T}}$, 答案正确就给 (6 分), 答案错误至少扣 4 分. 计算过程如下: 当 $t \to 0$ 时,

$$\phi(A+tH) - \phi(A) = t(AH^{\mathrm{T}} + HA^{\mathrm{T}}) + t^2 HH^{\mathrm{T}} = t(AH^{\mathrm{T}} + HA^{\mathrm{T}}) + o(|t|)\,(6\text{ 分}).$$

3. (反证法) 假设存在 $x \in U$ 使得 $\operatorname{rank} \mathrm{d}\phi(x) = n$. 由逆映射定理, 存在以 x 为心的开球 $B \subset U$ 使得 $\phi(B) \subset \mathbb{R}^n$ 为开集 (4 分). 因为非空开集 $\phi(B)$ 必定包含立方体, 所以它的 Jordan 外测度大于零 (4 分). 另一方面, 由已知条件知 $\phi(B) \subset \phi(U) \subset f^{-1}(0)$ 且 $f^{-1}(0)$ 为 Jordan 零测集, $\phi(B)$ 也是零测集, 矛盾 (4 分).

4. (i) 约化为证: 对任意 $r > 0$, $\omega_f(P, r) \geq \delta$ (4 分). 事实上, 因 $P_n, Q_n \to P$, 当 n 充分大, $|P_n - P|$ 与 $|Q_n - P|$ 都小于 r, 于是 $\omega_f(P, r) \geq |f(P_n) - f(Q_n)| \geq r$ (4 分).
(ii) 因 $\omega_f(P) \geq \delta > 0$, 任取正整数 n, 有 $\omega_f(P, 1/n) \geq \delta$ (3 分). 由 $\omega_f(P, 1/n)$ 的定义, 存在 P_n, $Q_n \in D$ 且 $|P_n - P|, |Q_n - P| < 1/n$, 满足 $|f(P_n) - f(Q_n)| > \delta - 1/n$ (3 分). 取下极限得证 (2 分).

5. f 不可积 (6 分). 理由如下: 将 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上的零延拓仍然记作 f. 任取 $\mathbb{R}^2$ 的分割 $\pi = \{I\}$, 考虑 f 的关于 π 的 Darboux 上和与下和. 任取 π 中与 D 相交的区间 I, 那么存在 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 属于交集 I 使得 $f(x_1, y_1) = 1$, $f(x_2, y_2) = 0$(4 分). 这个事实可以分如下两种情况讨论得到:

- 假设 I 与 D 的交集只含有一个点 P, 那么 P 是方形 D 的顶点. 取 $(x_1, y_1) = P$, 任取 (x_2, y_2) 为 I 中不同于 P 的点即可.
- 假设 I 与 D 的交集包含两个以上的点, 那么 $I \cap D$ 要么包含 ∂D 上的一条线段、要么它有内点. 对于前者, 利用有理数集合与无理数集合均在 $\mathbb{R}$ 中稠密, 存在 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 使得 $x_1 + y_1 \in \mathbb{Q}, x_2 + y_2 \notin \mathbb{Q}$, 从而 $f(x_1, y_1) = 1, f(x_2, y_2) = 0$. 对于后者可以类似验证.

由上述事实, 得 f 的关于 π 的 Darboux 下和是零 (1 分). 而 f 关于 π 的 Darboux 上和大于等于 D 关于 π 的外面积, 大于等于 1(1 分).

6. (i) 因为 $\mathbb{R}^4$ 的开集 $f^{-1}(a,\,b)\times(a,\,b)$ 上 C^1 函数 $F(x,y,z,t)=f(x,y,z)-t$ 满足 $F(P_0,t_0)=f(x_0,y_0,z_0)-t_0=0$ 与 $\frac{\partial F}{\partial z}(P_0,t_0)=\frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\neq 0$, 由隐函数定理, 存在以 (x_0,y_0) 为心的开圆盘 V_0, 存在充分小的正数 δ, 以及 C^1 函数 $\varphi_0: V_0\times(t_0-\delta,\,t_0+\delta)\to\mathbb{R}$, 使得 $\varphi_0(x_0,y_0,t_0)=z_0$, 且 $F\big(x,y,\varphi_0(x,y,t),t\big)=0$, 即、

$$f\big(x,y,\varphi_0(x,y,t)\big)=t \quad (1\text{ 分}).$$

对方程两边关于 t 求偏导数得, $\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}=\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{-1}$ (1 分).

定义映射 $\Phi_0: V_0\times(t_0-\delta,\,t_0+\delta)\to\mathbb{R}^3$ 为 $(x,y,t)\mapsto\big(x,y,\varphi_0(x,y,t)\big)$, 那么 $\Phi_0(x_0,y_0,t_0)=P_0$, 且它的 Jacobi 行列式为 $\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}=\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{-1}$, 后者在 (x_0,y_0,t_0) 的取值为 $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{-1}(P_0)\neq 0$(2 分).

利用逆映射定理, 适当缩小 V_0,δ, 记号不变, 便可得所求的 C^1 参数变换 Φ_0, 并且上面已求得其 Jacobi 行列式为 $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{-1}$(1 分).

由于 $\mathrm{d}\Phi$ 在 $\overline{V_0}\times[t_0-\delta,\,t_0+\delta]$ 上有界且处处可逆, $V_0\times(t_0-\delta,\,t_0+\delta)$ 在参数变换 Φ 下的像 U_0 为 Jordan 可测开集 (1 分).

(ii) 利用 (i) 中的参数变换 Φ_0、重积分换元公式以及化累次积分得,

$$\int_{U_0} g\,\mathrm{d}x=\int_{V_0\times(t_0-\delta,\,t_0+\delta)}\frac{g\circ\Phi_0}{\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t=\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}\mathrm{d}t\int_{V_0}\frac{g\circ\Phi_0}{\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|}(x,y,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (2\text{ 分}).$$

由隐函数定理, 对于任意 $t\in(t_0-\delta,\,t_0+\delta)$, 成立

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{-1},\ \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{-1}.$$

那么我们得到 $1+|\partial_x\varphi_0|^2+|\partial_y\varphi_0|^2=|\nabla f|^2\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{-2}$ (1 分). 最后, 对于任意 $t\in(t_0-\delta,\,t_0+\delta)$, 由二维参数曲面 $V_0\to f^{-1}(t)\cap U_0$ 的面积元公式

$$\mathrm{d}\sigma_t=\sqrt{1+|\partial_x\varphi_0|^2+|\partial_y\varphi_0|^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{|\nabla f|}{\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|},$$

得

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}\mathrm{d}t\int_{V_0}\frac{g\circ\Phi_0}{\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|}(x,y,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}\mathrm{d}t\int_{f^{-1}(t)\cap U_0}\frac{g}{|\nabla f|}\,\mathrm{d}\sigma_t \quad (2\text{ 分}).$$

(iii) 由于 ∇f 在 $f^{-1}[c,\,d]$ 的每点 P 处都不消失, 由 (i) 可得 P 的邻域 U_P 以及 C^1 参数变换 $\Phi_P: V_P\times$ 开区间 $\to U_P$, 这些 U_P 构成 $f^{-1}[c,\,d]$ 的开覆盖 (2 分). 利用紧致集合 $f^{-1}[c,\,d]$ 的 Heine-Borel 性质, 得证 (1 分).

(iv) 由于 $f^{-1}[c,\,d]$ 的边界为两个紧致二维 C^1 曲面之并 $f^{-1}(c)\cup f^{-1}(d)$, 它在 $\mathbb{R}^3$ 中的 Jordan 测度是零, 所以 $f^{-1}[c,\,d]$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的 Jordan 可测紧致集合 (1 分). 对于任意

$1 \le i \le n$, 由于 U_i 可测, 并集 $U_i \cup f^{-1}[c, d]$ 可测, 从而交集 $D_i = U_i \cap f^{-1}[c, d]$ 亦然. 事实上,

$$\chi_{D_i} = \chi_{U_i \cap f^{-1}[c,\,d]} = \chi_{U_i} + \chi_{f^{-1}[c,\,d]} - \chi_{U_i \cup f^{-1}[c,\,d]} \quad (1\ 分).$$

对于任意 $1 \le i \le n$, 对 g_i 在 D_i 上的限制 (仍然记作 g_i) 使用 (ii) 的积分恒等式, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_{f^{-1}[c,\,d]} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_{f^{-1}[c,\,d]} \sum_{i=1}^{n} g_i \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{D_i} g_i \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_c^d \mathrm{d}t \int_{D_i \cap f^{-1}(t)} \frac{g_i}{|\nabla f|} \,\mathrm{d}\sigma_t \\
&= \int_c^d \mathrm{d}t \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{D_i \cap f^{-1}(t)} \frac{g_i}{|\nabla f|} \,\mathrm{d}\sigma_t \right) \\
&= \int_c^d \mathrm{d}t \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{f^{-1}(t)} \frac{g_i}{|\nabla f|} \,\mathrm{d}\sigma_t \right) \\
&= \int_c^d \mathrm{d}t \left(\int_{f^{-1}(t)} \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i}{|\nabla f|} \,\mathrm{d}\sigma_t \right) \\
&= \int_c^d \mathrm{d}t \int_{f^{-1}(t)} \frac{\mathrm{d}\sigma_t}{|\nabla f|} \quad (2\ 分).
\end{aligned}$$