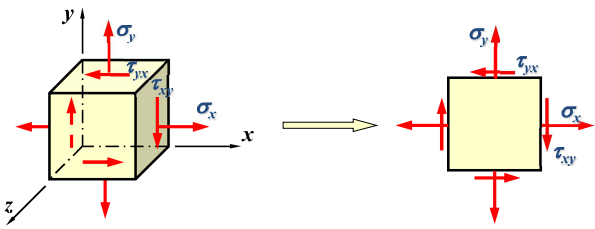
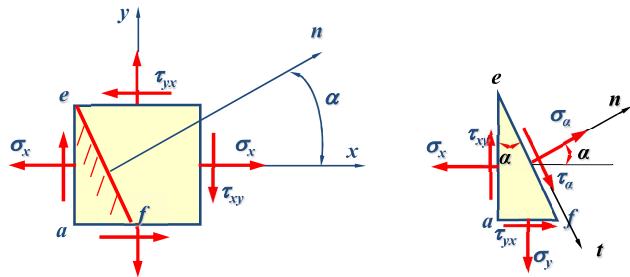


## § 7-2 平面应力状态分析-解析法 (Analysis of plane stress-state)



平面应力状态的普遍形式如图所示.单元体上有  $\sigma_x, \tau_{xy}$  和  $\sigma_y, \tau_{yx}$



### 2. 符号的确定 (Sign convention)

- (1) 由x轴转到外法线n, 逆时针转向时  $\alpha$  为正
- (2) 正应力仍规定拉应力  $\sigma$  为正
- (3) 切应力对单元体内任一点取矩, 顺时针转  $\tau$  为正

$$\sum F_t = 0 \quad \tau_\alpha dA - (\tau_{xy} dA \cos \alpha) \cos \alpha - (\sigma_x dA \cos \alpha) \sin \alpha + (\tau_{yx} dA \sin \alpha) \sin \alpha + (\sigma_y dA \sin \alpha) \cos \alpha = 0$$

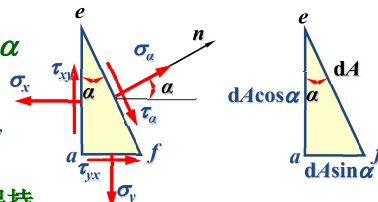
化简以上两个平衡方程最后得

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

不难看出  $\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_x + \sigma_y$

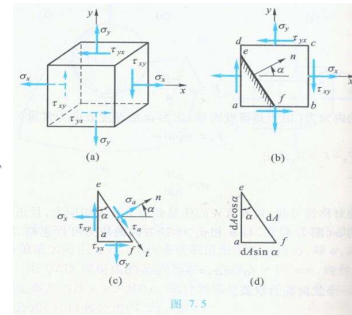
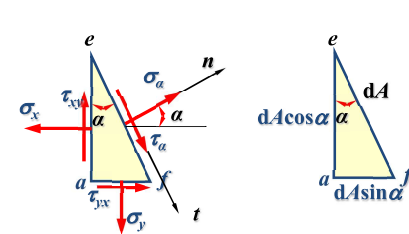
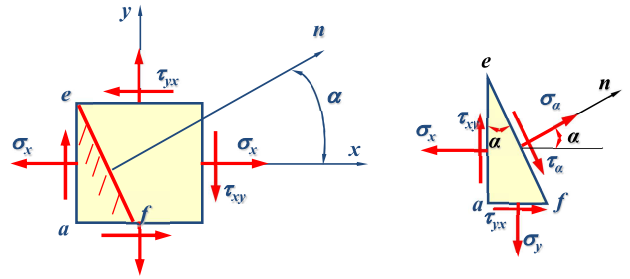
即两相互垂直面上的正应力之和保持一个常数



## 一、斜截面上的应力 (Stresses on an oblique section)

### 1. 截面法 (Section method)

假想地沿斜截面 e-f 将单元体截开, 留下左边部分的单元体 eaf 作为研究对象



### 3. 任意斜截面上的应力

设斜截面的面积为  $dA$ , a-e 的面积为  $dA \cos \alpha$ , a-f 的面积为  $dA \sin \alpha$

对研究对象列 n 和 t 方向的平衡方程得

$$\sum F_n = 0 \quad \sigma_\alpha dA + (\tau_{xy} dA \cos \alpha) \sin \alpha - (\sigma_x dA \cos \alpha) \cos \alpha + (\tau_{yx} dA \sin \alpha) \cos \alpha - (\sigma_y dA \sin \alpha) \sin \alpha = 0$$

## 二、最大正应力及方位

(Maximum normal stress and its direction)

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

### 1. 最大正应力的方位 (The direction of maximum normal stress)

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2 \left[ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \right] = 0$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \rightarrow \begin{cases} \alpha_0 \\ \alpha_0 + 90^\circ \end{cases}$$

$\alpha_0$  和  $\alpha_0 + 90^\circ$  确定两个互相垂直的平面, 一个是最大正应力所在的平面, 另一个是最小正应力所在的平面。

## 2. 最大正应力 (Maximum normal stress)

将  $\alpha_0$  和  $\alpha_0+90^\circ$  代入公式

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

得到  $\sigma_{\max}$  和  $\sigma_{\min}$  (主应力)

$$\begin{cases} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

下面还必须进一步判断  $\alpha_0$  是  $\sigma_x$  与哪一个主应力间的夹角

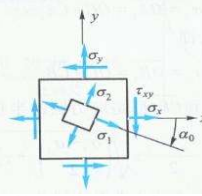
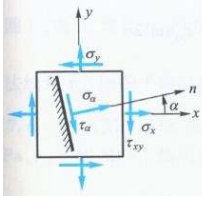
若约定  $|\alpha_0| < 45^\circ$  即  $\alpha_0$  取值在  $\pm 45^\circ$  范围内

则确定主应力方向的具体规则如下

(1) 当  $\sigma_x > \sigma_y$  时,  $\alpha_0$  是  $\sigma_x$  与  $\sigma_{\max}$  之间的夹角

(2) 当  $\sigma_x < \sigma_y$  时,  $\alpha_0$  是  $\sigma_x$  与  $\sigma_{\min}$  之间的夹角

(3) 当  $\sigma_x = \sigma_y$  时,  $\alpha_0 = 45^\circ$ , 主应力的方向可由单元体上切应力情况直观判断出来



## 二、最大切应力及方位

### (Maximum shearing stress and it's direction)

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

### 1. 最大切应力的方位 (The direction of maximum shearing stress)

$$\text{令 } \frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = 2\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha\right] = 0$$

$$\tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_1 + 90^\circ \end{cases}$$

$\alpha_1$  和  $\alpha_1+90^\circ$  确定两个互相垂直的平面, 一个是最大切应力所在的平面, 另一个是最小切应力所在的平面。

### 2. 最大切应力 (Maximum shearing stress)

将  $\alpha_1$  和  $\alpha_1+90^\circ$  代入公式

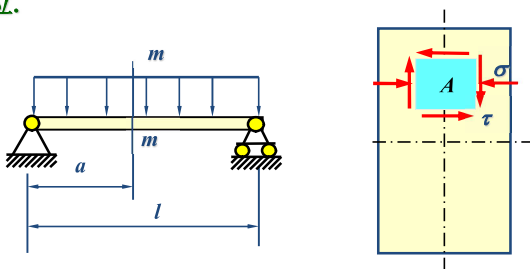
$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

$$\text{得到 } \tau_{\max} \text{ 和 } \tau_{\min} \begin{cases} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{cases} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\text{比较 } \tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \text{ 和 } \tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

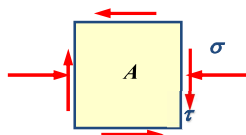
$$\text{可见 } \tan 2\alpha_0 = -\frac{1}{\tan 2\alpha_1} \quad 2\alpha_1 = 2\alpha_0 + \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\pi}{4}$$

例题4 简支梁如图所示. 已知  $m-m$  截面上  $A$  点的弯曲正应力和切应力分别为  $\sigma = -70\text{MPa}$ ,  $\tau = 50\text{MPa}$ . 确定  $A$  点的主应力及主平面的方位。



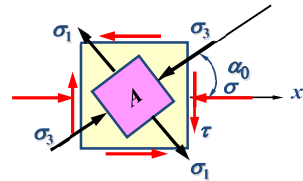
解: 把从  $A$  点处截取的单元体放大如图

$$\sigma_x = -70, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 50$$



$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times 50}{(-70) - 0} = 1.429$$

$$\alpha_0 = \begin{cases} 27.5^\circ \\ -62.5^\circ \end{cases}$$

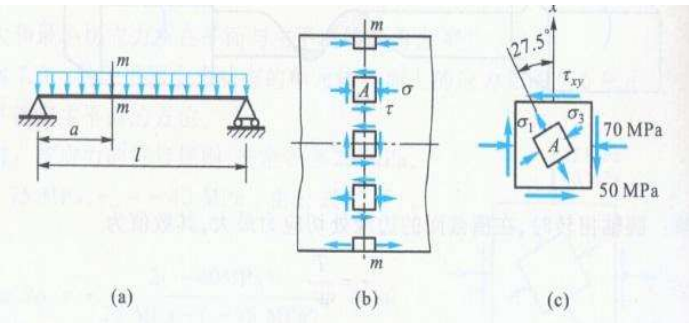


因为  $\sigma_x < \sigma_y$ , 所以  $\alpha_0 = 27.5^\circ$  与  $\sigma_{\min}$  对应

$$\begin{cases} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{cases} 26\text{MPa} \\ -96\text{MPa} \end{cases}$$

$$\sigma_1 = 26\text{MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -96\text{MPa}$$

**例 7.5** 图 7.8a 为一横力弯曲下的梁,求得截面  $m-m$  上的弯矩  $M$  及剪力  $F_s$  后,由公式(5.2)和公式(5.7)算出截面上一点  $A$  处的弯曲正应力和切应力分别为: $\sigma = -70 \text{ MPa}$ ,  $\tau = 50 \text{ MPa}$ (图 7.8b)。试确定  $A$  点的主应力及主平面的方位,并讨论同一横截面上其他点的应力状态。



**解:** 把从  $A$  点处截取的单元体放大如图 7.8c 所示。垂直方向等于零的应力是代数数值较大的应力,故选定  $x$  轴的方向垂直向上,

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = -70 \text{ MPa}, \quad \tau_{xy} = -50 \text{ MPa}$$

由公式(7.5),

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2(-50 \text{ MPa})}{0 - (-70 \text{ MPa})} = 1.429$$

$$2\alpha_0 = 55^\circ \text{ 或 } 235^\circ$$

$$\alpha_0 = 27.5^\circ \text{ 或 } 117.5^\circ$$

从  $x$  轴按逆时针方向的角度  $27.5^\circ$ , 确定  $\sigma_{\max}$  所在的主平面; 以同一方向的角度  $117.5^\circ$ , 确定  $\sigma_{\min}$  所在的另一主平面。至于这两个主应力的大小, 则可由公式(7.6)求出为

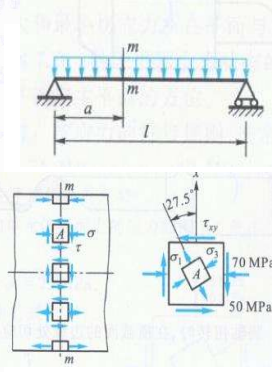
$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{aligned} \right\} = \frac{0 + (-70 \text{ MPa})}{2} \pm \sqrt{\left[ \frac{0 \text{ MPa} - (-70 \text{ MPa})}{2} \right]^2 + (-50 \text{ MPa})^2} = \begin{cases} 26 \text{ MPa} \\ -96 \text{ MPa} \end{cases}$$

按照关于主应力的记号规定,

$$\sigma_1 = 26 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -96 \text{ MPa}$$

主应力及主平面的位置已表示于图 7.8c 中。

在梁的横截面  $m-m$  上, 其他点的应力状态都可用相同的方法进行分析。截面上、下边缘处的各点为单向拉伸或压缩, 横截面即为它们的主平面。在中性轴上, 各点的应力状态为纯剪切, 主平面与梁轴成  $45^\circ$ 。从上边缘到下边缘, 各点的应力状态大致如图 7.8b 所示。



**例题5** 图示单元体, 已知  $\sigma_x = -40 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_y = 60 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{xy} = -50 \text{ MPa}$ . 试求  $e-f$  截面上的应力情况及主应力和主单元体的方位。

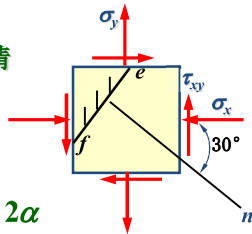
**解:** (1) 求  $e-f$  截面上的应力

$$\sigma_{-30^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$= \frac{-40 + 60}{2} + \frac{-40 - 60}{2} \cos(-60^\circ) - (-50) \sin(-60^\circ)$$

$$= -58.3 \text{ MPa}$$

$$\tau_{-30^\circ} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = \frac{-40 - 60}{2} \sin(-60^\circ) + (-50) \cos(-60^\circ) = 18.3 \text{ MPa}$$



(2) 求主应力和主单元体的方位

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times (-50)}{-40 - 60} = -1$$

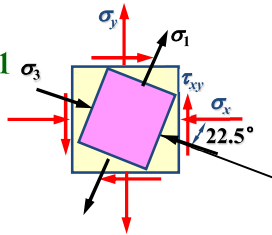
$$2\alpha_0 = -45^\circ \quad \alpha_0 = -22.5^\circ$$

$$135^\circ \quad 67.5^\circ$$

因为  $\sigma_x < \sigma_y$ , 所以  $\alpha_0 = -22.5^\circ$  与  $\sigma_{\min}$  对应

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{aligned} \right. = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{cases} 80.7 \text{ MPa} \\ -60.7 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\sigma_1 = 80.7 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -60.7 \text{ MPa}$$



**例题6** 求平面纯剪切应力状态的主应力及主平面方位。

**解:** (1) 求主平面方位

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\infty$$

$$2\alpha_0 = 90^\circ \quad \alpha_0 = 45^\circ$$

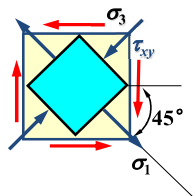
$$-90^\circ \quad -45^\circ$$

因为  $\sigma_x = \sigma_y$ , 且  $\tau_x > 0$  所以  $\alpha_0 = -45^\circ$  与  $\sigma_{\max}$  对应

(2) 求主应力

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{aligned} \right. = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \tau$$

$$\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$$



**例 7.3** 处于平面应力状态的单元体各面上的应力如图 7.6 所示。试求主应力并确定主平面的方位。

**解:** 按应力的符号规则, 选定  $\sigma_x = 25 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_y = -75 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{xy} = -40 \text{ MPa}$ 。由公式(7.5), 得

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2(-40 \text{ MPa})}{25 \text{ MPa} - (-75 \text{ MPa})} = 0.80$$

$$2\alpha_0 = 38.66^\circ \text{ 或 } 218.66^\circ$$

$$\alpha_0 = 19.33^\circ \text{ 或 } 109.33^\circ$$

以  $\alpha_0 = 19.33^\circ$  和  $\alpha_0 = 109.33^\circ$  分别代入公式

$$(7.3), \text{ 求出主应力为}$$

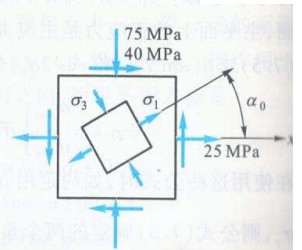
$$\sigma_{19.33^\circ} = \frac{25 + (-75)}{2} \text{ MPa} + \frac{25 - (-75)}{2} \text{ MPa} \times \cos 38.66^\circ - (-40 \text{ MPa}) \times \sin 38.66^\circ = 39 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{109.33^\circ} = \frac{25 + (-75)}{2} \text{ MPa} + \frac{25 - (-75)}{2} \text{ MPa} \times \cos 218.66^\circ - (-40 \text{ MPa}) \times \sin 218.66^\circ = -89 \text{ MPa}$$

可见在由  $\alpha_0 = 19.33^\circ$  确定的主平面上, 作用着主应力  $\sigma_{\max} = 39 \text{ MPa}$ ; 在由  $\alpha_0 = 109.33^\circ$  确定的主平面上, 作用着主应力  $\sigma_{\min} = -89 \text{ MPa}$ 。按照主应力的记号规定,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , 单元体的三个主应力分别是

$$\sigma_1 = 39 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -89 \text{ MPa}$$

也可联合使用公式(7.5)和公式(7.6)来确定主平面的位置和主应力的数值。例 7.4 和例 7.5 就采用这一方法。





**例 7.4** 讨论圆轴扭转时的应力状态,并分析铸铁试样受扭时的破坏现象。

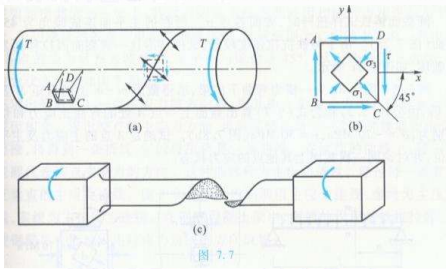


图 7.7

**解:** 圆轴扭转时,在横截面的边缘处切应力最大,其数值为

$$\tau = \frac{T}{W_t} \quad (e)$$

在圆轴的表层,按图 7.7a 所示方式取出单元体 ABCD,单元体各面上的应力如图 7.7b 所示,

$$\sigma_x = \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau \quad (f)$$

这就是 § 3.3 所讨论的纯剪切应力状态。把式 (f) 代入公式 (7.6), 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{aligned} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \tau$$

由公式 (7.5),

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \rightarrow -\infty$$

$$2\alpha_0 = -90^\circ \quad \text{或} \quad -270^\circ$$

$$\alpha_0 = -45^\circ \quad \text{或} \quad -135^\circ$$

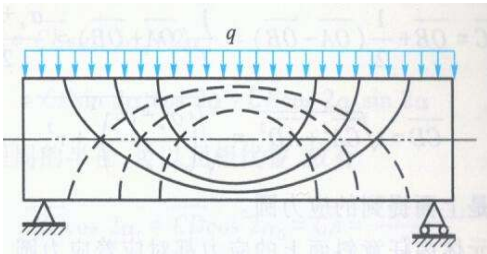
以上结果表明,从 x 轴量起,由  $\alpha_0 = -45^\circ$  (顺时针方向) 所确定的主平面上的主应力为  $\sigma_{\max}$ , 而由  $\alpha_0 = -135^\circ$  所确定的主平面上的主应力为  $\sigma_{\min}$ 。按照主应力的记号规定,

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \sigma_{\min} = -\tau$$

所以,纯剪切的两个主应力的绝对值相等,都等于切应力  $\tau$ , 但一为拉应力,另一为压应力。

圆截面铸铁试样扭转时,表面各点  $\sigma_{\max}$  所在的主平面连成倾角为  $45^\circ$  的螺旋面 (图 7.7a)。由于铸铁抗拉强度较低,试件将沿这一螺旋面因拉伸而发生断裂破坏,如图 7.7c 所示。

在求出梁截面上一点主应力的方向后,把其中一个主应力的方向延长与相邻横截面相交。求出交点的主应力方向,再将其延长与下一个相邻横截面相交。依次类推,将得到一条折线,它的极限将是一条曲线。在这样的曲线上,任一点的切线即代表该点主应力的方向。这种曲线称为主应力迹线。经过每一点有两条相互垂直的主应力迹线。图 7.9 表示梁内的两组主应力迹线,虚线为主压应力迹线,实线为主拉应力迹线。在钢筋混凝土梁中,钢筋的作用是抵抗拉伸,所以应使钢筋尽可能地沿主拉应力迹线的方向放置。



$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

因为  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  皆为已知量,所以上式是一个以  $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$  为变量的圆周方程。当斜截面随方位角  $\alpha$  变化时,其上的应力  $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$  在  $\sigma$ - $\tau$  直角坐标系内的轨迹是一个圆。

1. 圆心的坐标 (Coordinate of circle center)  $C\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$

2. 圆的半径 (Radius of circle)  $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

此圆习惯上称为 **应力圆** (plane stress circle), 或称为 **莫尔圆** (Mohr's circle)

### § 7-3 平面应力状态分析-图解法 (Analysis of plane stress-state with graphical means)

#### 一、莫尔圆 (Mohr's circle)

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

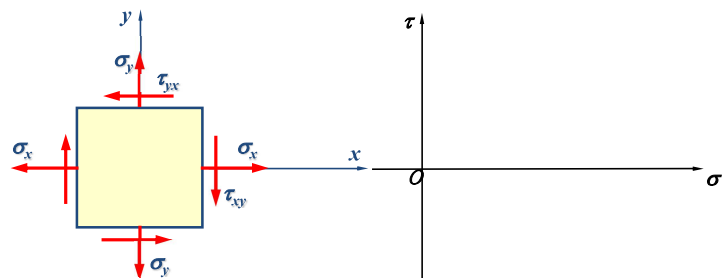
将斜截面应力计算公式改写为

$$\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

把上面两式等号两边平方,然后相加便可消去  $\alpha$ , 得

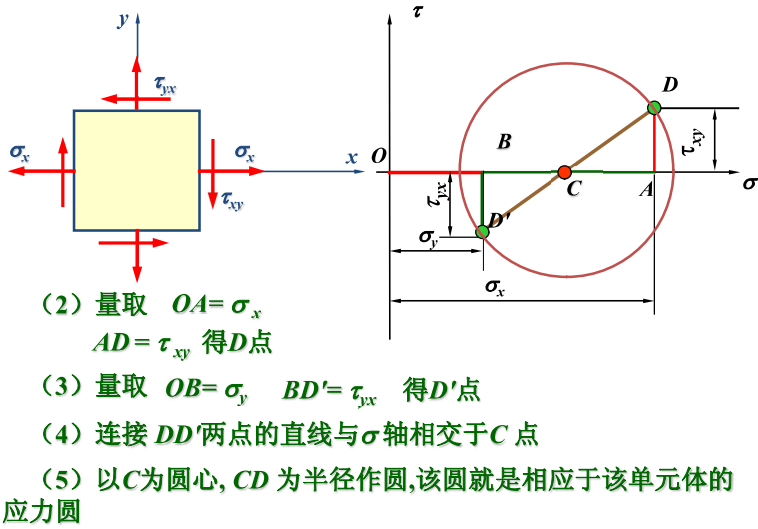
#### 二、应力圆作法 (The method for drawing a stress circle)



##### 1. 步骤 (Steps)

(1) 建  $\sigma$ - $\tau$  坐标系, 选定比例尺





## 2. 证明(Prove)

(1) 该圆的圆心  $C$  点到坐标原点的距离为

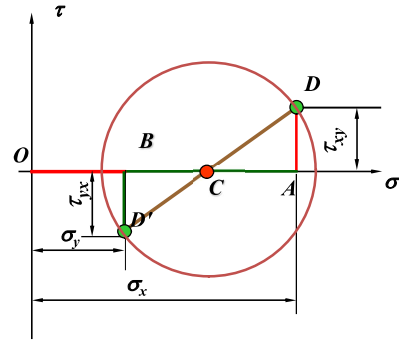
$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

(2) 该圆半径为

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\overline{OC} = \overline{OB} + \frac{1}{2}(\overline{OA} - \overline{OB}) = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{\overline{CA}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

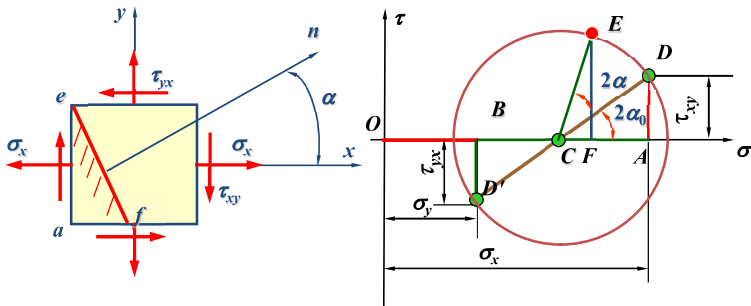


## 三、应力圆的应用 (Application of stress-circle)

### 1. 求单元体上任一截面上的应力 (Determine the stresses on any inclined plane by using stress-circle)

从应力圆的半径  $CD$  按方位角  $\alpha$  的转向转动  $2\alpha$  得到半径  $CE$ 。

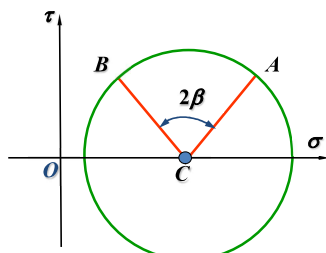
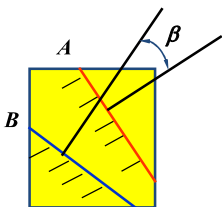
圆周上  $E$  点的坐标就依次为斜截面上的正应力  $\sigma_\alpha$  和切应力  $\tau_\alpha$ 。



### 说明

(1) 点面之间的对应关系: 单元体某一面上的应力, 必对应于应力圆上某一点的坐标。

(2) 夹角关系: 圆周上任意两点所引半径的夹角等于单元体上对应两截面夹角的两倍, 两者的转向一致。



证明:

$$\overline{OF} = \overline{OC} + \overline{CF} = \overline{OC} + \overline{CE} \cos(2\alpha_0 + 2\alpha) =$$

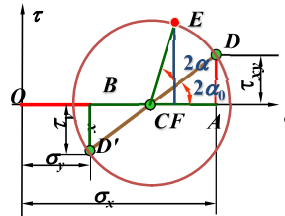
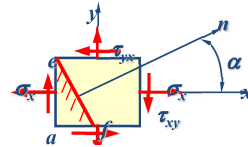
$$\overline{OC} + \overline{CD} \cos 2\alpha_0 \cos 2\alpha - \overline{CD} \sin 2\alpha_0 \sin 2\alpha =$$

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha = \sigma_\alpha$$

$$\overline{FE} = \overline{CE} \sin(2\alpha_0 + 2\alpha) =$$

$$\overline{CD} \sin 2\alpha_0 \cos 2\alpha + \overline{CD} \cos 2\alpha_0 \sin 2\alpha =$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = \tau_\alpha$$



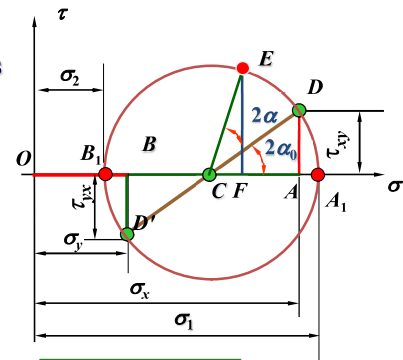
### 2. 求主应力数值和主平面位置 (Determine principle stress and the direction of principle plane by using stress circle)

(1) 主应力数值

$A_1$  和  $B_1$  两点为与主平面对应的点, 其横坐标为主应力  $\sigma_1, \sigma_2$

$$\overline{OA_1} = \overline{OC} + \overline{CA_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{\max} = \sigma_1$$

$$\overline{OB_1} = \overline{OC} - \overline{CB_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{\min} = \sigma_2$$



**(2) 主平面方位**

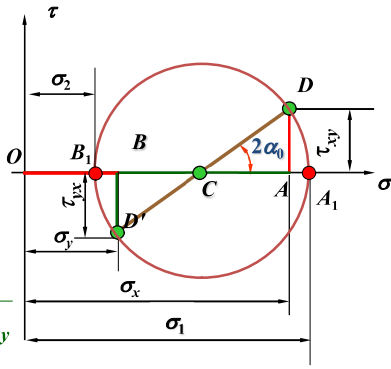
由  $CD$  顺时针转  $2\alpha_0$  到  $CA_1$

所以单元体上从  $x$  轴顺时针转  $\alpha_0$  (负值) 即到  $\sigma_1$  对应的主平面的外法线

$$\tan(-2\alpha_0) = \frac{DA}{CA} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad 2\alpha_0 = \arctan\left(\frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$$

$\alpha_0$  确定后,  $\sigma_1$  对应的主平面方位即确定



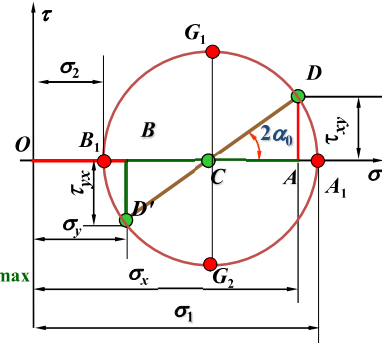
**3. 求最大切应力 (Determine maximum shearing stress by using stress circle)**

$G_1$  和  $G_2$  两点的纵坐标分别代表最大和最小切应力

$$\overline{CG_1} = +\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \tau_{\max}$$

$$\overline{CG_2} = -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \tau_{\min}$$

因为最大、最小切应力等于应力圆的半径  $\begin{cases} \tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \\ \tau_{\min} \end{cases}$



**例题7** 从水坝体内某点处取出的单元体如图所示,  $\sigma_x = -1\text{MPa}$ ,  $\sigma_y = -0.4\text{MPa}$ ,  $\tau_{xy} = -0.2\text{MPa}$ ,  $\tau_{yx} = 0.2\text{MPa}$ ,

(1) 绘出相应的应力圆

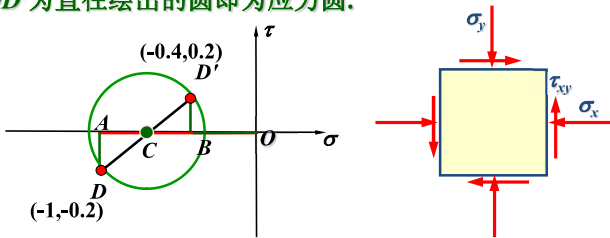
(2) 确定此单元体在  $\alpha = 30^\circ$  和  $\alpha = -40^\circ$  两斜面上的应力。

**解:** (1) 画应力圆

量取  $OA = \sigma_x = -1$ ,  $AD = \tau_{xy} = -0.2$ , 定出  $D$  点;

$OB = \sigma_y = -0.4$  和,  $BD' = \tau_{yx} = 0.2$ , 定出  $D'$  点。

以  $DD'$  为直径绘出的圆即为应力圆。



(2) 确定  $\alpha = 30^\circ$  斜截面上的应力

将半径  $CD$  逆时针转动  $2\alpha = 60^\circ$  到半径  $CE$ ,  $E$  点的坐标就代表  $\alpha = 30^\circ$  斜截面上的应力。

(3) 确定  $\alpha = -40^\circ$  斜截面上的应力

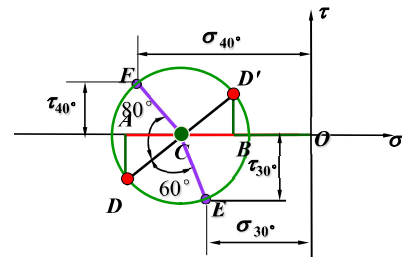
将半径  $CD$  顺时针转  $2\alpha = 80^\circ$  到半径  $CF$ ,  $F$  点的坐标就代表  $\alpha = -40^\circ$  斜截面上的应力。

$$\sigma_{30^\circ} = -0.68\text{MPa}$$

$$\tau_{30^\circ} = -0.36\text{MPa}$$

$$\sigma_{-40^\circ} = -0.95\text{MPa}$$

$$\tau_{-40^\circ} = -0.26\text{MPa}$$

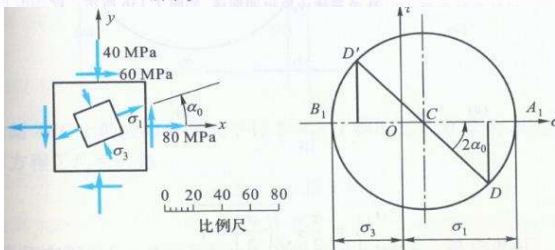


**例 7.6** 已知图 7.11a 所示单元体的  $\sigma_x = 80\text{MPa}$ ,  $\sigma_y = -40\text{MPa}$ ,  $\tau_{xy} = -60\text{MPa}$ ,  $\tau_{yx} = 60\text{MPa}$ 。试用应力圆求主应力, 并确定主平面的方位。

**解:** 按选定的比例尺, 以  $\sigma_x = 80\text{MPa}$ ,  $\tau_{xy} = -60\text{MPa}$  为坐标确定  $D$  点(图 7.11b)。以  $\sigma_y = -40\text{MPa}$ ,  $\tau_{yx} = 60\text{MPa}$  为坐标确定  $D'$  点。连接  $D, D'$ , 与横坐标轴交于  $C$  点。以  $C$  为圆心,  $DD'$  为直径作应力圆, 如图 7.11b 所示。按所用比例尺量出

$$\sigma_1 = \overline{OA_1} = 105\text{MPa}, \quad \sigma_3 = \overline{OB_1} = -65\text{MPa}$$

在这里另一个主应力  $\sigma_2 = 0$ 。在应力圆上由  $D$  到  $A_1$  为逆时针方向, 且  $\angle DCA_1 = 2\alpha_0 = 45^\circ$ 。所以, 在单元体中从  $x$  以逆时针方向量取  $\alpha_0 = 22.5^\circ$ , 确定  $\sigma_1$  所在主平面的法线, 如图 7.11a 所示。



**例 7.7** 在横力弯曲以及今后将要讨论的扭转组合变形中, 经常遇到图 7.12a 所示的应力状态。设  $\sigma$  及  $\tau$  已知, 试确定主应力和主平面的方位。

**解:** 如用解析法求解, 7.12a 所示的单元体应力可表示为

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma, & \tau_{xy} &= \tau \\ \sigma_y &= 0, & \tau_{yx} &= -\tau \end{aligned}$$

代入公式 (7.6),

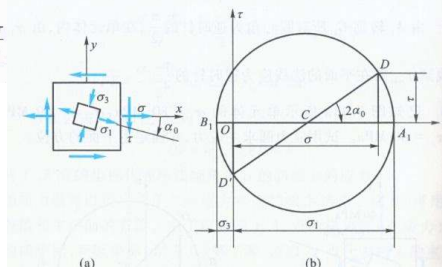
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

由于在根号前取“-”号的主应力总为负值, 即总为压应力, 故记为  $\sigma_3$ 。

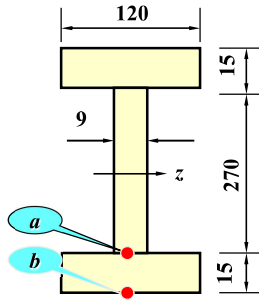
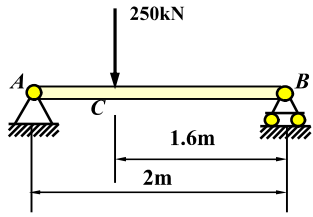
由公式 (7.5),

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau}{\sigma}$$

由此可以确定主平面的位置。



例题8 两端简支的焊接工字钢梁及其荷载如图所示,梁的横截面尺寸示于图中.试绘出截面C上a, b两点处的应力圆,并用应力圆求出这两点处的主应力.



解: (1) 首先计算支反力, 并作出梁的剪力图和弯矩图

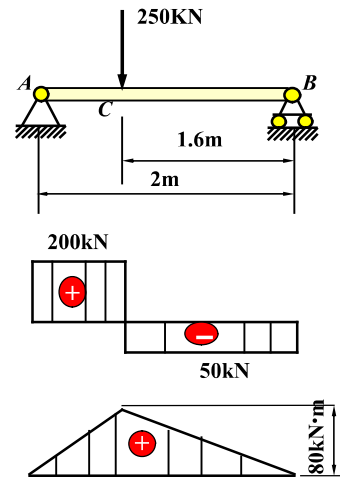
$$F_{S\max} = F_{C\text{左}} = 200 \text{ kN}$$

$$M_{\max} = M_C = 80 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\sigma = \frac{My}{I_z} \quad \tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z d}$$

$$I_z = \frac{120 \times 300^3}{12} - \frac{111 \times 270^3}{12} = 88 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$y_a = 135 \text{ mm}$$



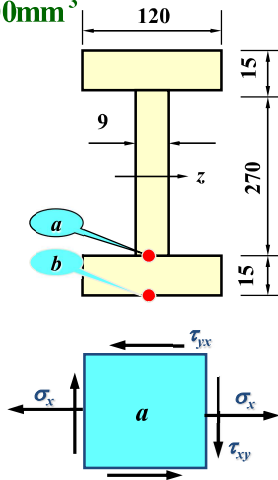
$$S_{za}^* = 120 \times 15 \times (150 - 7.5) = 256000 \text{ mm}^3$$

(2) 横截面 C 上 a 点的应力为

$$\sigma_a = \frac{M_C}{I_z} y_a = 122.5 \text{ MPa}$$

$$\tau_a = \frac{F_S S_{za}^*}{I_z d} = 64.6 \text{ MPa}$$

a 点的单元体如图所示



(3) 做应力圆

$$\sigma_x = 122.5 \text{ MPa}, \tau_{xy} = 64.6 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 0, \tau_{yx} = -64.6 \text{ MPa}$$

由  $\sigma_x, \tau_{xy}$  定出 D 点 由  $\sigma_y, \tau_{yx}$  定出 D' 点

以 DD' 为直径作应力圆

$A_1, A_2$  两点的横坐标分别代

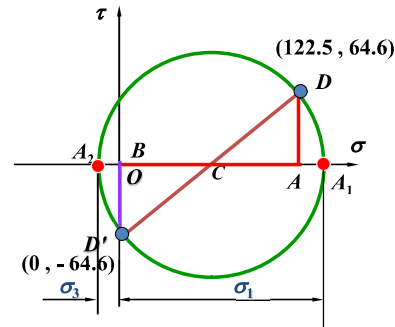
表 a 点的两个主应力  $\sigma_1$  和  $\sigma_3$

$$\sigma_1 = OA_1 = 150 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = OA_2 = -27 \text{ MPa}$$

$A_1$  点对应于单元体上  $\sigma_1$  所在的主平面

$$2\alpha_0 = -45^\circ \quad \alpha_0 = -22.5^\circ$$



$$\sigma_1 = 150 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -27 \text{ MPa}$$

$$\alpha_0 = -22.5^\circ$$

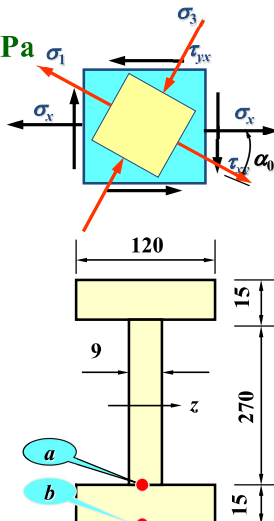
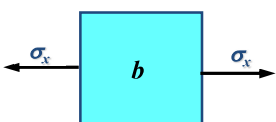
(4) 横截面 C 上 b 点的应力

$$y_b = 150 \text{ mm}$$

$$\sigma_b = \frac{M_C}{I_z} y_b = 136.5 \text{ MPa}$$

$$\tau_b = 0$$

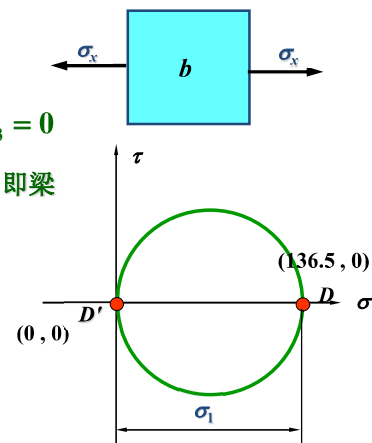
b 点的单元体如图所示



b 点的三个主应力为

$$\sigma_1 = 136.5 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$\sigma_1$  所在的主平面就是 x 平面, 即梁的横截面 C





《辅导》p131

例 7-3 已知单元体应力状态如图 7-5(a)所示, 试求:

- (1) 主应力及主平面, 并画出主单元体;
- (2) 最大剪应力。

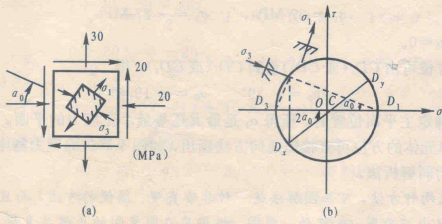


图 7-5

解: (1) 解析法:

由公式 (7-2) 得主应力

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{-20 + 30}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-20 - 30}{2}\right)^2 + (-20)^2} = \pm \frac{37}{27} \text{ MPa}$$

按主应力记号规定, 得

$$\sigma_1 = 37 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -27 \text{ MPa}$$

由 (7-3) 式得主平面方位

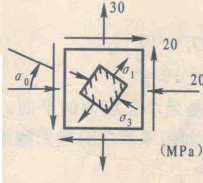
$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times (-20)}{(-20) - 30} = -0.8$$

$$\alpha_0 = -19.33^\circ \quad \text{或} \quad 70.40'$$

其中一个为  $\sigma_1$  的作用平面, 另一个为  $\sigma_3$  (或  $\sigma_2$ ) 的作用平面。至于哪一个为  $\sigma_1$  的作用平面, 可将  $\alpha_0$  值代入 (7-1) 式进行计算, 加以确定, 画主单元体如图 7-5(a) 所示。实际上,  $\sigma_1$  的作用平面可根据单元体由剪应力引起的变化趋势来确定, 即两相互垂直面上剪应力箭头所对的象限一定是最大主应力作用线所在的象限, 其正应力的大小及指向仅影响角度  $\alpha_0$  的大小。

由 (7-4) 式求最大剪应力

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{37 - (-27)}{2} = 32 \text{ MPa}$$



(2) 图解法。

作应力圆如图 7-5(b) 所示, 应力圆与  $\sigma$  轴相交的两点即为单元体的两个主应力值, 由图中量得

$$\sigma_1 = 37 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -27 \text{ MPa}$$

另一个主应力  $\sigma_2 = 0$ 。

主平面的方位可由  $CD_1$  (或  $CD_2$ ) 量到  $CD_1$  (或  $CD_2$ ), 得

$$2\alpha_0 = -39^\circ \quad \alpha_0 = -19.5^\circ$$

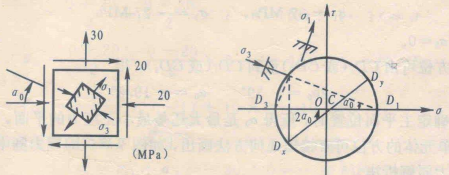
用图解法确定主平面位置时, 所得  $\alpha_0$  是最大还是最小正应力的平面, 是一目了然的, 而且, 主应力单元体的方位可直接由几何方法画出, 如图 7-5(b) 应力圆中所示。

最大剪应力同解析法。

讨论: 比较两种方法, 可知图解法是一种非常直观、简便的方法, 而且不需要记公式。若不能精确地画出应力圆, 也可画一草图, 根据应力圆草图的几何关系得到主应力、主平面方位的计算公式, 例

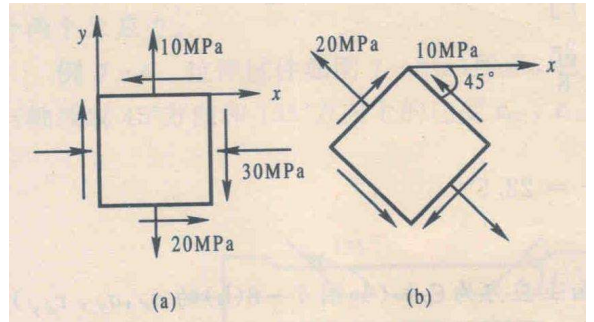
$$\sigma_1 = \overline{OD_1} = \overline{OC} + \overline{CD_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

即圆心坐标与半径之和。同样还可得到其它的计算公式, 建议读者自行推导。



《辅导》p132

例 7-4 已知某平面应力状态对于第一组载荷引起的应力如图 7-6(a) 所示, 对于第二组载荷引起的应力如图 7-6(b) 所示, 试求两组载荷共同作用下主应力值及主平面位置。



解: 把图 7-6(b) 所示的应力单元体图转换到  $x-y$  方向, 然后叠加求出主应力和主方向。根据应力的转换关系 (两坐标轴关系见图 7-6(c)), 第二组载荷下的应力分量  $\sigma_{x_2}$ ,  $\sigma_{y_2}$  和  $\tau_{x_2y_2}$  分别为

$$\sigma_{x_2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(-90^\circ) - \tau_{xy} \sin(-90^\circ)$$

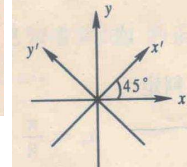
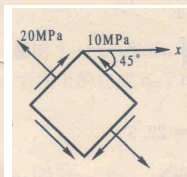
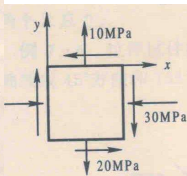
$$= \frac{0 + 20}{2} + \frac{0 - 20}{2} \times 0 - (-10) \times (-1) = 0$$

$$\sigma_{y_2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(-90^\circ) + \tau_{xy} \sin(-90^\circ)$$

$$= \frac{0 + 20}{2} + \frac{0 - 20}{2} \times 0 + (-10) \times (-1) = 20 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x_2y_2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(-90^\circ) + \tau_{xy} \cos(-90^\circ)$$

$$= \frac{0 - 20}{2} \times (-1) + 10 \times 0 = 10 \text{ MPa}$$



将两组载荷引起的应力叠加 (将图 7-6(a) 和 (b) 叠加) 得

$$\sigma_x = \sigma_{x_1} + \sigma_{x_2} = -30 + 0 = -30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \sigma_{y_1} + \sigma_{y_2} = 10 + 20 = 30 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{x_1y_1} + \tau_{x_2y_2} = 20 + 10 = 30 \text{ MPa}$$

叠加后单元体应力状态如图 7-6(d) 所示。其主应力为

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{-30 + 30}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-30 - 30}{2}\right)^2 + 30^2}$$

$$= \pm 30\sqrt{2} = \pm 42.43 \text{ MPa}$$

主方向为

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{-\tau_{xy}}{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)} \right] = \frac{1}{2} \arctan \left[ -\frac{30}{-30} \right]$$

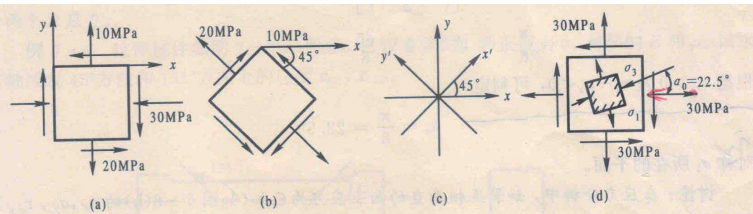
$$= \frac{\pi}{8} \quad \text{或} \quad -\frac{3\pi}{8}$$

根据  $\tau_{xy} > 0$  及  $\sigma_x - \sigma_y < 0$ , 可判定

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{8} = 22.5^\circ$$

对称  $\sigma_3$  所在的平面。

讨论: 在应力分析中, 如果互相垂直的面上应力为已知 (如图 7-6(b) 的  $\sigma_{x'}$ ,  $\sigma_{y'}$ ,  $\tau_{x'y'}$ ), 根据公式可求任意斜面上的应力 (本题中的  $\sigma_{x_2}$ ,  $\sigma_{y_2}$ ,  $\tau_{x_2y_2}$ ), 再利用叠加法求总的应力。在用解析公式计算时, 应注意判别应力与角度的正负。



作业: 7.3d, 7.4f, 7.8, 7.10, 7.16

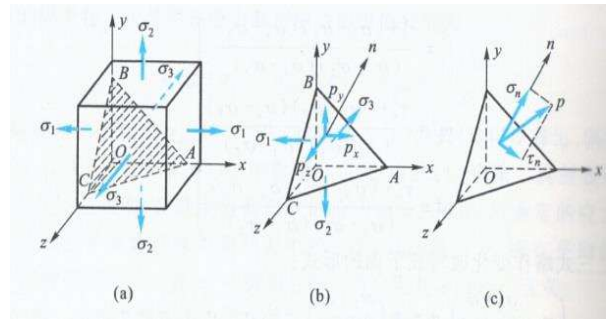
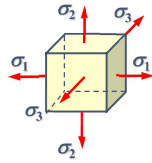
## § 7-4 三向应力状态分析

### (analysis of three-dimensional stress-state)

#### 一、空间应力状态下的最大正应力和最大切应力 (the maximum normal stress and shear stress in three-dimensional stress-state)

已知受力物体内某一点处三个主应力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

利用应力圆确定该点的最大正应力和最大切应力。



对三向应力状态, 这里只讨论当三个主应力已知时(图 7.13a), 任意斜截面上的应力计算。

以任意斜截面  $ABC$  从单元体中取出四面体, 如图 7.13b 所示。设  $ABC$  的法线  $n$  的三个方向余弦为  $l, m, n$ , 它们应满足关系式  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ 。若  $ABC$  的面积为  $dA$ , 则四面体其余三个面的面积应分别为  $OBC$  的面积 =  $l dA$ ,  $OCA$  的面积 =  $m dA$ ,  $OAB$  的面积 =  $n dA$ 。

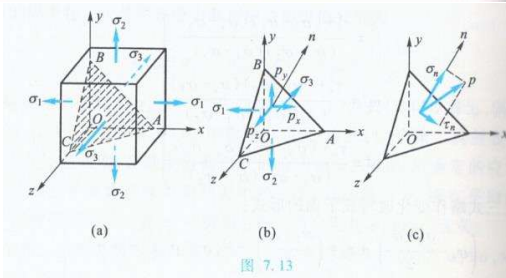


图 7.13

现将斜截面  $ABC$  上的应力分解成平行于  $x, y, z$  轴的三个分量  $p_x, p_y, p_z$ 。由四面体的平衡方程  $\sum F_x = 0$ , 得

$$p_x dA - \sigma_1 l dA = 0$$

$$p_x = \sigma_1 l$$

同理, 由平衡方程  $\sum F_y = 0$  和  $\sum F_z = 0$ , 又可求得  $p_y$  和  $p_z$ 。最后得出

$$p_x = \sigma_1 l, \quad p_y = \sigma_2 m, \quad p_z = \sigma_3 n \quad (b)$$

由以上三个分量求得斜截面  $ABC$  上的总应力为

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = \sqrt{\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2} \quad (c)$$

还可以把总应力分解成与斜截面垂直的正应力  $\sigma_n$  和相切的切应力  $\tau_n$  (图 7.13c)。显然有

$$p^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \quad (d)$$

如把  $\sigma_n$  看作是总应力  $p$  在斜截面法线上的投影, 则  $\sigma_n$  应等于  $p$  的三个分量  $p_x, p_y, p_z$  在法线方向上投影的代数和, 即

$$\sigma_n = p_x l + p_y m + p_z n$$

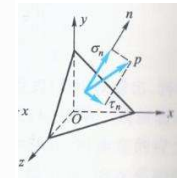
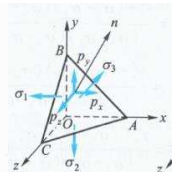
将式 (b) 代入上式, 得

$$\sigma_n = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \quad (e)$$

此外, 把式 (e) 代入式 (d), 还可求出

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - \sigma_n^2 \quad (f)$$

把式 (a), 式 (e), 式 (f) 三式看作是含有  $l^2, m^2, n^2$  的联立方程组, 从中可以解出  $l^2, m^2$  和  $n^2$ , 结果是  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

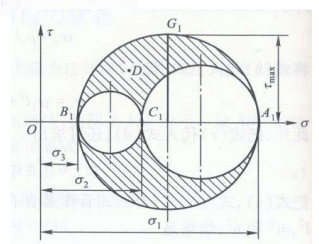


$$\left. \begin{aligned} l^2 &= \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ m^2 &= \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ n^2 &= \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{aligned} \right\}$$

再将以上三式略作变化改写成下面的形式:

$$\left. \begin{aligned} \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_n^2 &= \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 + l^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) \\ \left(\sigma_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)^2 + \tau_n^2 &= \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 + m^2(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) \\ \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_n^2 &= \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + n^2(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_n^2 &= \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 + l^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) \\ \left(\sigma_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)^2 + \tau_n^2 &= \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 + m^2(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) \\ \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_n^2 &= \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + n^2(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) \end{aligned} \right\}$$



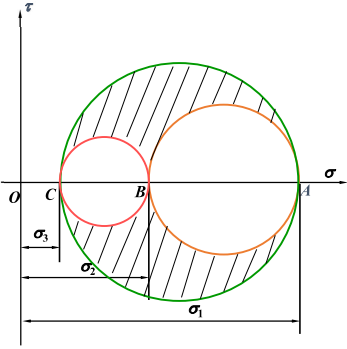


**结论**

三个应力圆圆周上的点及由它们围成的阴影部分上的点的坐标代表了空间应力状态下所有截面上的应力

该点处的最大正应力(指代数值)应等于最大应力圆上A点的横坐标 $\sigma_1$

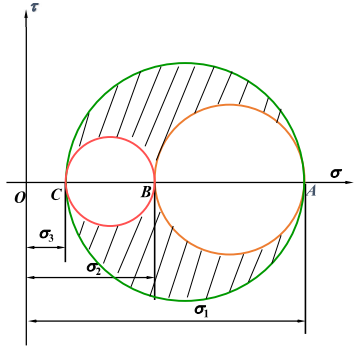
$$\sigma_{\max} = \sigma_1$$



最大切应力则等于最大的应力圆的半径

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

最大切应力所在的截面与 $\sigma_2$ 所在的主平面垂直,并与 $\sigma_1$ 和 $\sigma_3$ 所在的主平面成 $45^\circ$ 角。



**与平面应力的比较**

的纵坐标。于是得正应力和切应力的极值分别为

$$\sigma_{\max} = \sigma_1, \quad \sigma_{\min} = \sigma_3, \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (7.10)$$

若所取斜截面平行于 $\sigma_2$ , 则 $m = 0$ 。这时从式(e)及式(f)可以看出, 斜截面上的应力与 $\sigma_2$ 无关, 只受 $\sigma_1$ 和 $\sigma_3$ 的影响。同时, 由式(h)中第二式所表示的圆变成圆 $A_1B_1$ 。这表明, 在这类斜截面上的应力由 $\sigma_1$ 和 $\sigma_3$ 所确定的应力圆来表示。 $\tau_{\max}$ 所在平面就是这类斜截面中的一个, 其法线与 $\sigma_1$ 所在平面的法线成 $45^\circ$ 。同理, 平行于 $\sigma_1$ 或 $\sigma_3$ 的截面上的应力分别与 $\sigma_1$ 或 $\sigma_3$ 无关。

如将二向应力状态看作是三向应力状态的特殊情况, 当 $\sigma_1 > \sigma_2 > 0, \sigma_3 = 0$ 时, 按公式(7.10),

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2} \quad (i)$$

这里所求得的最大切应力, 显然大于由公式(7.9)所得的

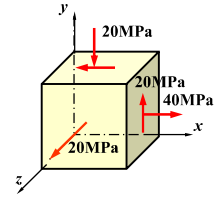
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

这是因为在§7.4中, 只是考虑了平行于 $\sigma_3$ 的各截面, 在这类截面中切应力的最大值是 $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ 。但如果再考虑到平行于 $\sigma_2$ 的那些截面, 就得到由式(i)所表示的最大切应力。

**例题9** 单元体的应力如图所示, 作应力圆, 并求出主应力和最大切应力值及其作用面方位。

解: 该单元体有一个已知主应力  
 $\sigma_z = 20\text{MPa}$

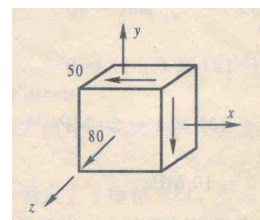
因此与该主平面正交的各截面上的应力与主应力 $\sigma_z$ 无关, 依据x截面和y截面上的应力画出应力圆, 求另外两个主应力



$\sigma_x = 40\text{MPa} \quad \tau_{xy} = -20\text{MPa}$  由 $\sigma_x, \tau_{xy}$  定出 D 点  
 $\sigma_y = -20\text{MPa} \quad \tau_{yx} = 20\text{MPa}$  由 $\sigma_y, \tau_{yx}$  定出 D' 点  
以 DD' 为直径作应力圆  
 $A_1, A_2$  两点的横坐标分别代表另外两个主应力  $\sigma_1$  和  $\sigma_3$   
 $\sigma_1 = 46\text{MPa} \quad \sigma_3 = -26\text{MPa}$   
该单元体的三个主应力  
 $\sigma_1 = 46\text{MPa} \quad \sigma_2 = 20\text{MPa} \quad \sigma_3 = -26\text{MPa}$   
根据上述主应力, 作出三个应力圆  
 $\tau_{\max} = 36\text{MPa}$

**《辅导》p134**

例 7-5 单元体的应力状态如图 7-7(a)所示, 试用图解法求三个主应力值, 画出三向应力图, 并求最大剪应力。



## § 7-5 平面应变状态分析 (Analysis of plane strain-state)

平面应力状态下，已知一点的应变分量 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ ，欲求 $\alpha$ 方向上的线应变 $\epsilon_\alpha$ 和切应变 $\gamma_\alpha$ ，可根据弹性小变形的几何条件，分别找出微单元体（长方形）由于已知应变分量 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ 在此方向上引起的线应变及切应变，再利用叠加原理。

### 一、任意方向的应变 (The strain of any direction)

在所研究的 $O$ 点处， $Oxy$  坐标系内的线应变 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  为已知。求该点沿任意方向的线应变 $\epsilon_\alpha$ 。

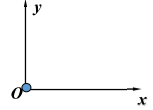


图 7-7

解：这是一个三向应力状态单元体，注意到前、后平面上无剪应力，即为主平面，故另外两个垂平面必垂直于 $xy$ 平面。沿已知主应力(图中 $z$ 轴)平行截取任意斜截面，此时可得到类似平面应力状态的单元体，利用图解法画 $D_1, D_2$ 两点，作应力圆如图7-7(b)所示，从图中可知 $D_1, D_2$ 点坐标为主应力，比较已知主应力，可得三个主应力值分别为：  
 $\sigma_1 = 80 \text{ MPa}, \sigma_2 = 50 \text{ MPa}, \sigma_3 = -50 \text{ MPa}$   
 最大剪应力为  

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{80 - (-50)}{2} = 65 \text{ MPa}$$
  
 由 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 作三向应力圆如图7-7(b)所示。从图中也可量得最大剪应力值。

图 7.15

式中 $i, j$ 是沿 $x, y$ 方向的单位矢。根据变形固体的连续性假设，位移分量 $u$ 和 $v$ 都是坐标 $x$ 和 $y$ 的连续函数，即  

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \quad (b)$$
  
 与 $M$ 点相比， $N$ 点的纵坐标未变，但横坐标有一增量 $\Delta x$ ，所以 $N$ 点的位移分量应为

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \quad \text{和} \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x$$

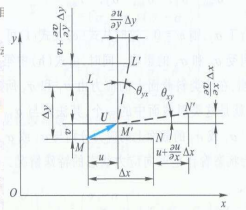
其中， $\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x$ 和 $\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x$ 是函数 $u$ 和 $v$ 因 $x$ 有一增量 $\Delta x$ 而引起的增量的情况下，位移 $v$ 的增量 $\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x$ 只是引起线段 $M'N'$ 的轻微转动长度。于是可以认为 $M'N'$ 的长度是

$$M'N' = \Delta x + u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - u = \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x$$

按公式(1.3)给出的应变的定义， $M$ 点沿 $x$ 方向的应变是

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{M'N' - MN}{MN} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

同理，如在 $M$ 点沿 $y$ 方向取微分线段 $ML = \Delta y$ ，仿照上述推导，可以得出沿 $y$ 方向的应变分量为



$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}]$

由图7.15看出， $M'N'$ 对其原位置 $MN$ 的倾角 $\theta_{yx}$ 为  

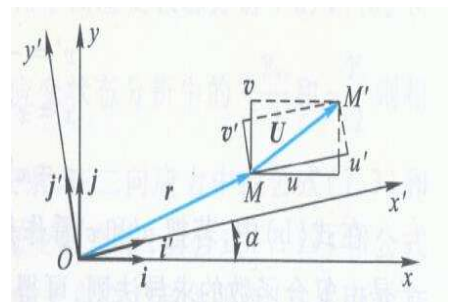
$$\theta_{yx} \approx \tan \theta_{yx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x}{\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x}$$
  
 在小变形的情况下，分母中的 $\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x$ 与1相比，是个小量，是有  

$$\theta_{yx} \approx \frac{\partial u}{\partial x}$$
  
 同理，  

$$\theta_{xy} \approx \frac{\partial v}{\partial y}$$
  
 按照公式(1.4)给出的切应变的定义，  

$$\gamma_{xy} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\pi}{2} - \angle L'M'N' \right) = \frac{\pi}{2} - \left( \frac{\pi}{2} - \theta_{yx} - \theta_{xy} \right) = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$
  
 规定使直角 $\angle LMN$ 减小的切应变为正。至此，我们求得了在 $x-y$ 平面内，由位移的偏导数表达的三个应变分量，它们是  

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (7.11)$$



$$U = u'i' + v'j' \quad (a)$$

式中  $i'$  和  $j'$  分别是沿  $x'$  和  $y'$  方向的单位矢。像导出式(7.11)一样,重复上节的讨论,便可得到沿  $x'$  和  $y'$  方向的应变  $\epsilon_{x'}$  和  $\epsilon_{y'}$ , 以及  $x'-y'$  平面内的切应变  $\gamma_{x'y'}$ , 它们分别是

$$\epsilon_{x'} = \frac{\partial u'}{\partial x'}, \quad \epsilon_{y'} = \frac{\partial v'}{\partial y'}, \quad \gamma_{x'y'} = \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \quad (b)$$

以旧坐标系  $Oxy$  为参考坐标系时, 曾于 §7.6 求出  $M$  点位移  $U$  为

$$U = ui + vj \quad (c)$$

式中  $i$  和  $j$  是沿  $x, y$  方向的单位矢。 $M$  点的位移  $U$  应与坐标的选择无关, 所以由式(a)和式(c)两式表达的  $U$  是相等的, 即

$$u'i' + v'j' = ui + vj \quad (d)$$

还有, 如  $M$  点在旧坐标系中的坐标为  $x, y$ , 在新坐标系中为  $x', y'$ , 则  $M$  点在新旧两坐标系中矢径  $r$  的表达式分别是

$$r = xi + yj, \quad r = x'i' + y'j'$$

一点的矢径也应该与坐标的选择无关, 故又有

$$xi + yj = x'i' + y'j'$$

若以  $j'$  点乘式(d)两端, 得

$$u'i'j' + v'j'j' = ui'j' + vj'j'$$

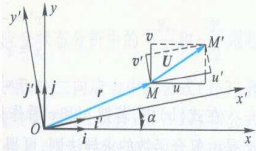
由于  $i'$  和  $j'$  都是单位矢, 且相互正交, 故

$$j'j' = 1, \quad i'j' = 0$$

再由图 7.16 看出

$$i'j' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, \quad j'j' = \cos \alpha$$

这样, 由式(f)得出



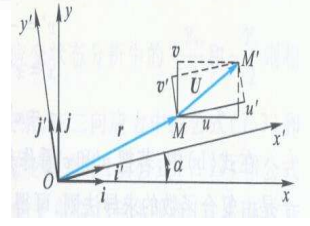
用相同的方法, 以  $i'$  点乘式(d), 并分别以  $i$  和  $j$  点乘式(e), 又可求出  $u', x$  和  $y$ .

最终结果是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \begin{cases} u' = u \cos \alpha + v \sin \alpha \\ v' = -u \sin \alpha + v \cos \alpha \end{cases} \quad (e)$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$$

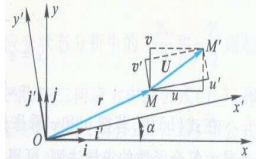
在式(b)中, 若把  $u'$  和  $v'$  看作是  $x$  和  $y$  的函数, 而  $x$  和  $y$  又是  $x'$  和  $y'$  的函数, 于是由复合函数的求导法则, 可得



$$\left. \begin{aligned} u' &= u \cos \alpha + v \sin \alpha \\ v' &= -u \sin \alpha + v \cos \alpha \\ x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \epsilon_{x'} &= \frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial x} \sin \alpha, \quad \frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \alpha \\ \epsilon_{y'} &= \frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \alpha, \quad \frac{\partial v'}{\partial x'} = -\frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha \\ \gamma_{x'y'} &= \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} = \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \alpha - \frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha \end{aligned} \right\}$$

上式中的一些偏导数可由式(g)求出为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial x} \sin \alpha, \quad \frac{\partial x}{\partial x'} = \cos \alpha \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial y'} = \cos \alpha \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha, \quad \frac{\partial x}{\partial y'} = -\sin \alpha \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial x'} = \sin \alpha \end{aligned} \right\}$$



代入式(h), 并利用式(7.11)进行整理, 得

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{x'} &= \epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \gamma_{x'y'} &= -2(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \alpha \cos \alpha + \gamma_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{x'} &= \epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \gamma_{x'y'} &= -2(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \alpha \cos \alpha + \gamma_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

上式就是坐标变换时应变分量的变换规律。 $\epsilon_x$  同样可照上述方法导出, 但如用  $(\alpha + \frac{\pi}{2})$  代替第一式中的  $\alpha$ , 也就求得了  $\epsilon_{y'}$ 。将  $\epsilon_x$  和  $\gamma_{x'y'}$  分别记为  $\epsilon_\alpha$  和  $\gamma_\alpha$ , 并将右端的三角函数略作简化, 公式(7.12)又可写成

$$\epsilon_\alpha = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha \quad (7.13)$$

$$\frac{\gamma_\alpha}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\alpha \quad (7.14)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \right. \Rightarrow \begin{aligned} \epsilon_\alpha &\Leftrightarrow \sigma_\alpha \\ -\frac{\gamma_\alpha}{2} &\Leftrightarrow \tau_\alpha \\ 2\alpha &\Leftrightarrow 2\alpha \end{aligned}$$

$$\epsilon_\alpha = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\frac{\gamma_\alpha}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cos 2\alpha$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji} + u_{k,i} u_{k,j})$$

## 二、主应变数值及其方位 (The principal strains and its direction)

$$\epsilon_\alpha = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\alpha \quad \epsilon_\alpha \Leftrightarrow \sigma_\alpha$$

$$\frac{\gamma_\alpha}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cos 2\alpha \quad -\frac{\gamma_\alpha}{2} \Leftrightarrow \tau_\alpha$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \quad 2\alpha \Leftrightarrow 2\alpha$$

从上式解出  $\alpha_0$ , 代入公式(7.13), 就得出主应变。当然, 也得出计算主应变的公式为

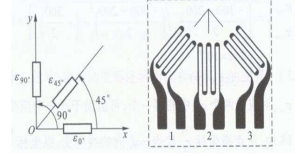
$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_{\max} &= \frac{1}{2} [(\epsilon_x + \epsilon_y) + \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}] \\ \epsilon_{\min} &= \frac{1}{2} [(\epsilon_x + \epsilon_y) - \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}] \end{aligned} \right.$$



**应变圆** 利用上述相似关系,在二向应力中使用应力圆的图解法,也可推广为平面应变分析中使用应变圆的图解法。作图时以横坐标表示线应变,以纵坐标表示切应变的二分之一。由于问题的显而易见,所以对应变圆我们将不再多作陈述,就直接使用。

**应变的实测** 使用以上各公式或作应变圆时,应首先求得一点处的三个应变分量  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  和  $\gamma_{xy}$ 。用应变仪直接测定应变时,因切应变  $\gamma_{xy}$  不易测量,所以一般先测出在三个选定方向  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  上的线应变  $\varepsilon_{\alpha_1}, \varepsilon_{\alpha_2}, \varepsilon_{\alpha_3}$ , 然后由公式(7.13) 得出以下三式:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha_1} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha_1 + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha_1 \\ \varepsilon_{\alpha_2} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha_2 + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha_2 \\ \varepsilon_{\alpha_3} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha_3 + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha_3 \end{aligned} \right\} (7.17)$$



**例 7.8** 用直角应变花(图 7.17)测得一点处的三个线应变为  $\varepsilon_{0^\circ} = -300 \times 10^{-6}$ ,  $\varepsilon_{45^\circ} = -200 \times 10^{-6}$ ,  $\varepsilon_{90^\circ} = 200 \times 10^{-6}$ , 试求主应变及其方向。

**解:** 在公式(7.17)中,令  $\alpha_1 = 0^\circ, \alpha_2 = 45^\circ, \alpha_3 = 90^\circ$ , 得

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0^\circ} &= -300 \times 10^{-6} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \\ \varepsilon_{45^\circ} &= -200 \times 10^{-6} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \varepsilon_{90^\circ} &= 200 \times 10^{-6} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \end{aligned}$$

由此求得

$$\varepsilon_x = -300 \times 10^{-6}, \quad \varepsilon_y = 200 \times 10^{-6}, \quad \gamma_{xy} = -300 \times 10^{-6}$$

代入公式(7.15), 得

$$\begin{aligned} \tan 2\alpha_0 &= \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{-300}{-300 - 200} = 0.6 \\ 2\alpha_0 &= 31^\circ \text{ 或 } 211^\circ \\ \alpha_0 &= 15^\circ 30' \text{ 或 } 105^\circ 30' \end{aligned}$$

以  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  的值和  $\alpha_0 = 15^\circ 30'$  代入公式(7.13), 得

$$\varepsilon_{15^\circ 30'} = \frac{-300 + 200}{2} \times 10^{-6} + \frac{-300 - 200}{2} \times 10^{-6} \cos 31^\circ + \frac{-300}{2} \times 10^{-6} \sin 31^\circ = -342 \times 10^{-6}$$

同理,

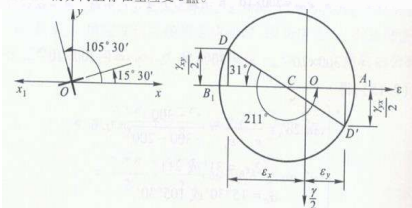
$$\varepsilon_{105^\circ 30'} = \frac{-300 + 200}{2} \times 10^{-6} + \frac{-300 - 200}{2} \times 10^{-6} \cos 211^\circ + \frac{-300}{2} \times 10^{-6} \sin 211^\circ = 242 \times 10^{-6}$$

所以在  $\alpha_0 = 105^\circ 30'$  的方向上, 存在主应变  $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_{105^\circ 30'} = 242 \times 10^{-6}$ , 在  $\alpha_0 = 15^\circ 30'$  的方向上, 存在主应变  $\varepsilon_{\min} = \varepsilon_{15^\circ 30'} = -342 \times 10^{-6}$ 。

也可以用公式(7.16)计算主应变:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\max} &= \left[ \frac{-300 + 200}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{-300 - 200}{2} \right)^2 + \left( \frac{-300}{2} \right)^2} \right] \times 10^{-6} \\ &= \left[ \begin{array}{l} 242 \times 10^{-6} \\ -342 \times 10^{-6} \end{array} \right] \end{aligned}$$

至于主应变  $\varepsilon_{\min}$  对应着两个  $\alpha_0$  中的哪一个, 可借助于作一个应变圆的草图来判断。在图 7.18 中,  $D$  点横坐标  $\varepsilon_x$  代表  $x$  方向的线应变, 纵坐标  $\frac{\gamma_{xy}}{2}$  是直角  $\angle xOy$  的切应变的二分之一。  $D'$  的横坐标  $\varepsilon_y$  代表  $y$  方向的线应变, 纵坐标  $\frac{\gamma_{xy}}{2} = -\frac{\gamma_{xy}}{2}$  代表直角  $\angle yOx$  的切应变的二分之一。以  $\overline{DD'}$  为直径作圆即为应变圆。在应变圆上,  $A_1$  点的横坐标为  $\varepsilon_{\max}$ 。由  $D$  到  $A_1$  所张圆心角为  $2\alpha_0 = 211^\circ$ , 故从  $x$  量起在  $\alpha_0 = 105^\circ 30'$  的方向上存在主应变  $\varepsilon_{\max}$ 。



## § 7-6 广义胡克定律

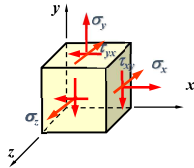
### (Generalized Hooke's law)

#### 一、各向同性材料的广义胡克定律

##### (Generalized Hooke's law for isotropic materials)

##### 1. 符号规定 (Sign convention)

- (1) 正应力: 拉应力为正, 压应力为负
- (2) 切应力: 对单元体内任一点取矩, 若产生的矩为顺时针, 则 $\tau$ 为正; 反之为负
- (3) 线应变: 以伸长为正, 缩短为负;
- (4) 切应变: 使直角减者为正, 增大者为负.



应力和三组纯剪切的组合。对于各向同性材料, 当变形很小且在线弹性范围内时, 线应变只与正应力有关, 而与切应力无关; 切应变只与切应力有关, 而与正应力无关。这样, 我们就可利用式

#### 2. 各向同性材料的广义胡克定律

##### (Generalized Hooke's law for isotropic materials)

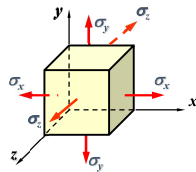
用叠加原理, 分别计算出 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 分别单独存在时,  $x, y, z$ 方向的线应变 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ , 然后代数相加.

$x$ 方向的线应变

$$\sigma_x \text{ 单独存在时 } \varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\sigma_y \text{ 单独存在时 } \varepsilon''_x = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\sigma_z \text{ 单独存在时 } \varepsilon'''_x = -\mu \frac{\sigma_z}{E}$$



在 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 同时存在时,  $x$ 方向的线应变 $\varepsilon_x$ 为

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

同理, 在 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 同时存在时,  $y, z$ 方向的线应变为

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x)]$$

在 $xy, yz, zx$ 三个面内的切应变为

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  —— 沿 $x, y, z$ 轴的线应变

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  —— 在 $xy, yz, zx$ 面上的角应变

上式称为**广义胡克定律 (Generalized Hooke's law)**

对于**平面应力状态 (in plane stress-state)**

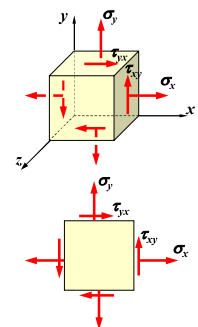
(假设 $\sigma_z = 0, \tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = 0$ )

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_y + \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$



### 3. 主应力-主应变的关系 (Principal stress-principal strain relation)

已知  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  为主应变

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

二向应力状态下 (in plane stress-state) 设  $\sigma_3 = 0$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu\sigma_2) \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu\sigma_1) \quad \varepsilon_3 = -\frac{\mu}{E} (\sigma_2 + \sigma_1)$$

体积应变 (volumetric strain) 为

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{V_1 - V}{V} \\ &= \frac{dx(1+\varepsilon_1) \cdot dy(1+\varepsilon_2) \cdot dz(1+\varepsilon_3) - dx \cdot dy \cdot dz}{dx \cdot dy \cdot dz} \\ &\approx \frac{dx \cdot dy \cdot dz(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - dx \cdot dy \cdot dz}{dx \cdot dy \cdot dz} \\ &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ &= \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ &\quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned}$$

### 1. 纯剪切应力状态下的体积应变 (Volumetric strain for pure shearing stress-state)

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_{xy} \quad \sigma_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0$$

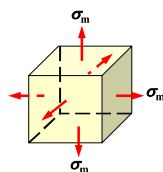
即在小变形下, 切应力不引起各向同性材料的体积改变。

### 2. 三向等值应力单元体的体积应变 (The volumetric strain of triaxial-equal stress element body)

三个主应力为  $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$

单元体的体积应变

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_m + \sigma_m + \sigma_m) \\ &= \frac{1-2\mu}{E} \cdot 3\sigma_m \end{aligned}$$



### 二、各向同性材料的体积应变 (The volumetric strain for isotropic materials)

构件每单位体积的体积变化, 称为体积应变用  $\theta$  表示。

各向同性材料在三向应力状态下的体应变

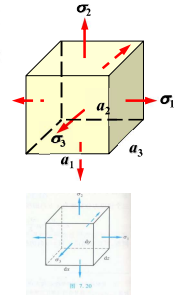
如图所示的单元体, 三个边长为  $dx, dy, dz$

变形后的边长分别为

$$dx(1+\varepsilon_1), dy(1+\varepsilon_2), dz(1+\varepsilon_3)$$

变形后单元体的体积为

$$V_1 = dx(1+\varepsilon_1) \cdot dy(1+\varepsilon_2) \cdot dz(1+\varepsilon_3)$$



$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (7.21)$$

把公式 (7.21) 写成以下形式:

$$\theta = \frac{3(1-2\mu)}{E} \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_m}{K} \quad (7.22)$$

式中  $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ ,  $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$

$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = I$   
应力第一不变量

$K$  称为体积弹性模量,  $\sigma_m$  是三个主应力的平均值。公式 (7.22) 说明, 单位体积的体积改变  $\theta$  只与三个主应力之和有关, 至于三个主应力之间的比例, 对  $\theta$  并无影响。所以, 无论是作用三个不相等的主应力, 还是都代以它们的平均应力  $\sigma_m$ , 单位体积的体积改变仍然是相同的。公式 (7.22) 还表明, 体应变  $\theta$  与平均应力  $\sigma_m$  成正比, 此即体积胡克定律。

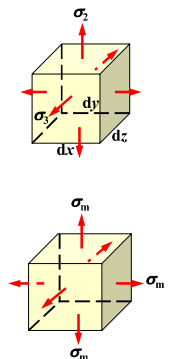
这两个单元体的体积应变相同

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} \cdot 3\sigma_m$$

单元体的三个主应变为

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_m - \mu(\sigma_m + \sigma_m)] \\ &= \frac{(1-2\mu)}{E} \cdot \sigma_m \end{aligned}$$





如果变形前单元体的三个棱边成某种比例,由于三个棱边应变相同,则变形后的三个棱边的长度仍保持这种比例.所以在三向等值应力 $\sigma_m$ 的作用下,单元体变形后的形状和变形前的相似,称这样的单元体是形状不变的.

在最一般的空间应力状态下,材料的体积应变只与三个线应变 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ 有关,仿照上述推导有

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

在任意形式的应力状态下,各向同性材料内一点处的体积应变与通过该点的任意三个相互垂直的平面上的正应力之和成正比,而与切应力无关.

$$\text{解得 } \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu^2}\sigma_3 = \frac{0.34(1+0.34)}{1-0.34^2}(-30) = -15.5\text{MPa}$$

铜块的主应力为

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -15.5\text{MPa} \quad \sigma_3 = -30\text{MPa}$$

体积应变为

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-2 \times 0.34}{100 \times 10^3}(-15.5 \times 2 - 30) = -1.95 \times 10^{-4}$$

$$\text{最大切应力 } \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = 7.25\text{MPa}$$

例题10 边长 $a=0.1\text{m}$ 的铜立方块,无间隙地放入体积较大,变形可略去不计的钢凹槽中,如图所示.已知铜的弹性模量 $E=100\text{GPa}$ ,泊松比 $\mu=0.34$ ,当受到 $F=300\text{kN}$ 的均布压力作用时,求该铜块的主应力,体积应变以及最大切应力.

解:铜块横截面上的压应力为

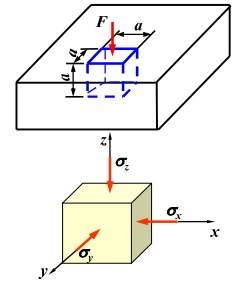
$$\sigma_3 = -\frac{F}{A} = -\frac{300 \times 10^3}{0.1^2} = -30\text{MPa}$$

铜块受力如图所示

变形条件为

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

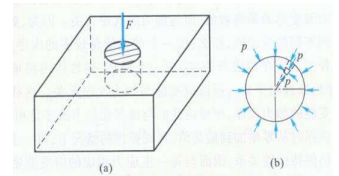


例 7.9 在一个体积比较大的钢块上有一直径为 50.01 mm 的圆柱形凹座,凹座内放置一个直径为 50 mm 的钢制圆柱(图 7.22a),圆柱受到  $F=300\text{ kN}$  的轴向压力。假设钢块不变形,试求圆柱的主应力。取  $E=200\text{ GPa}, \mu=0.30$ 。

解:在柱体横截面上的压应力为

$$\sigma_3 = -\frac{F}{A} = -\frac{300 \times 10^3 \text{ N}}{\frac{1}{4}\pi(50 \times 10^{-3} \text{ m})^2} = -153 \times 10^6 \text{ Pa} = -153 \text{ MPa}$$

这是柱体内各点的三个主应力中绝对值最大的一个。



在轴向压缩下,圆柱将产生横向膨胀。当它胀到塞满凹座后,凹座与柱体之间将产生径向均匀压力 $p$ (图 7.22b)。在柱体横截面内,这是一个二向均匀应力状态(参看习题 7.6)。这种情况下,柱体中任一点的径向和周向应力皆为 $-p$ 。又由于假设钢块不变形,所以柱体在径向只能发生由于塞满凹座而引起的应变,其数值为

$$\varepsilon_2 = \frac{5.001 \text{ cm} - 5 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 0.0002$$

于是由广义胡克定律,

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} = -\frac{p}{E} + \mu \frac{153 \times 10^6 \text{ Pa}}{E} + \mu \frac{p}{E} = 0.0002$$

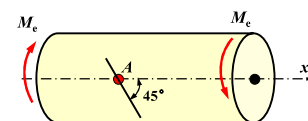
由此求得

$$p = \frac{(153 \times 10^6 \text{ Pa})0.3 - 0.0002(200 \times 10^9 \text{ Pa})}{1 - 0.3} = 8.43 \times 10^6 \text{ Pa} = 8.43 \text{ MPa}$$

所以柱体内各点的三个主应力为

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -p = -8.43 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -153 \text{ MPa}$$

例题11 一直径 $d=20\text{mm}$ 的实心圆轴,在轴的两端加扭矩 $M_c=126\text{N}\cdot\text{m}$ .在轴的表面上某一点 $A$ 处用变形仪测出与轴线成 $-45^\circ$ 方向的应变 $\varepsilon=5.0 \times 10^{-4}$ ,试求此圆轴材料的剪切弹性模量 $G$ .



解:围绕A点取一单元体

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} = \pm \tau$$

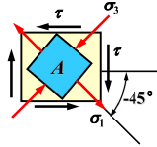
$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} = \pm \tau$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \tau \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -\tau$$

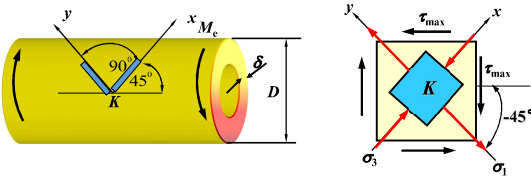
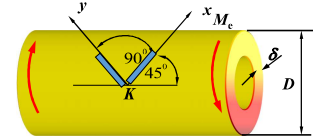
$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} = -\infty \Rightarrow \alpha_0 = -45^\circ \quad \alpha_1 = 45^\circ$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_3) = \frac{1+\mu}{E} \cdot \tau \Rightarrow \frac{E}{1+\mu} = \frac{\tau}{\varepsilon_1}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau}{\varepsilon_1} = \frac{1}{2\varepsilon_1} \cdot \frac{M_c}{W_t} = \underline{80.2\text{MPa}}$$



例题12 壁厚  $\delta=10\text{mm}$ , 外径  $D=60\text{mm}$  的薄壁圆筒, 在表面上K点与其轴线成  $45^\circ$  和  $135^\circ$  角, 即  $x, y$  两方向分别贴上应变片, 然后在圆筒两端作用矩为  $M_c$  的扭转力偶, 如图所示, 已知圆筒材料的弹性常数为  $E=200\text{GPa}$  和  $\mu=0.3$ , 若该圆筒的变形在弹性范围内, 且  $\tau_{\max}=100\text{MPa}$ , 试求K点处的线应变  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  以及变形后的筒壁厚度.



解:从圆筒表面K点处取出单元体, 其各面上的应力分量如图所示可求得

$$\sigma_y = \sigma_1 = \tau_{\max} = 80\text{MPa}$$

$$\sigma_x = \sigma_3 = -\tau_{\max} = -80\text{MPa}$$

$$\sigma_z = 0$$

K点处的线应变  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  为

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) = \frac{1}{E}(-\tau_{\max} - \mu\tau_{\max})$$

$$= -\frac{(1+\mu)}{E} \tau_{\max} = -5.2 \times 10^{-4} \quad (\text{压应变})$$

$$\varepsilon_y = -\varepsilon_x = 5.2 \times 10^{-4} \quad (\text{拉应变})$$

圆筒表面上K点处沿径向 ( $z$ 轴) 的应变和圆筒中任一点 (该点到圆筒横截面中心的距离为  $\rho$ ) 处的径向应变为

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\mu}{E}(-\tau_{\max} + \tau_{\max}) = 0$$

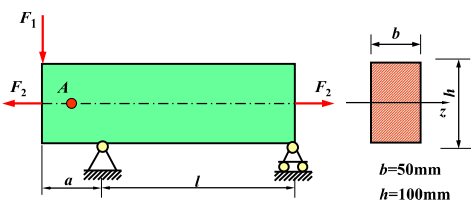
$$\varepsilon_{\rho} = -\frac{\mu}{E}(-\tau_{\rho} + \tau_{\rho}) = 0$$

因此, 该圆筒变形后的厚度并无变化, 仍然是  $\delta=10\text{mm}$ .

例题13 已知矩形外伸梁受力  $F_1, F_2$  作用. 弹性模量  $E=200\text{GPa}$ , 泊松比  $\mu=0.3$ ,  $F_1=100\text{KN}, F_2=100\text{KN}$ .

求: (1) A点处的主应变  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

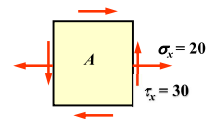
(2) A点处的线应变  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$



解: 梁为拉伸与弯曲的组合变形. A点有拉伸引起的正应力和弯曲引起的切应力.

$$\sigma = \frac{F_2}{A} = 20\text{MPa} \quad (\text{拉伸})$$

$$\tau = \frac{3F_S}{2A} = 30\text{MPa} \quad (\text{负})$$



(1) A点处的主应变  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} = 41.4\text{MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} = -21.4\text{MPa}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 41.4 \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -21.4$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_3) = 2.4 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_3) = -3 \times 10^{-5}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \mu\sigma_1) = -1.7 \times 10^{-4}$$

(2) A点处的线应变  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$

$$\sigma_x = 20 \quad \sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\mu}{E}\sigma_x = -3 \times 10^{-5}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}\sigma_x = -3 \times 10^{-5}$$

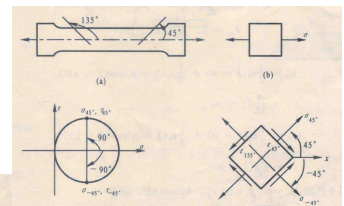
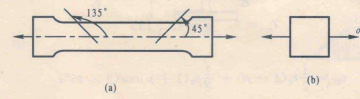
解：可采用两种方法求解：

(1) 通过应力应变关系求解。

$$\sigma_{45^\circ} = \sigma \cos 45^\circ \quad \text{以及} \quad \varepsilon_{45^\circ} = \frac{1}{E}\sigma_{45^\circ}$$

### 《辅导》p135

例 7-6 拉伸试件如图 7-8(a)所示，已知横截面上的正应力  $\sigma$ 、材料的  $E$  和  $\mu$ 。试求与轴线成  $45^\circ$  方向和  $135^\circ$  方向上的应变  $\varepsilon_{45^\circ}, \varepsilon_{135^\circ}$ 。



解：可采用两种方法求解：

(1) 通过应力应变关系求解。

由应力分析知(图 7-8(b)、(c)、(d))，在  $45^\circ, 135^\circ$  方向上有正应力

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma}{2}, \quad \sigma_{135^\circ} = \sigma_{-45^\circ} = \frac{\sigma}{2}$$

故必须用广义胡克定律

$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{1}{E}(\sigma_{45^\circ} - \mu\sigma_{-45^\circ}) = \frac{\sigma}{2E}(1 - \mu)$$

$$\varepsilon_{135^\circ} = \frac{1}{E}(\sigma_{-45^\circ} - \mu\sigma_{45^\circ}) = \frac{\sigma}{2E}(1 - \mu)$$

解题思路是：首先分析所求应变方向的应力，再由广义胡克定律计算所求应变。容易产生的错误是

(2) 直接代公式求解。

采用如下代法： $\varepsilon_x = \varepsilon_0, \varepsilon_y = 0, \gamma_{xy} = 0, \alpha = 45^\circ$ ，则有

$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \cos(2 \times 45^\circ) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 = \frac{\sigma}{2E}$$

$$\sigma_{45^\circ} = \sigma \cos 45^\circ \quad \text{以及} \quad \varepsilon_{45^\circ} = \frac{1}{E}\sigma_{45^\circ}$$

前一错误在于以应力投影关系代替应力分析中的力的平衡关系，后一错误是以单向胡克定律代替复杂应力状态下的广义胡克定律。

(2) 直接代公式求解。

由公式(7-10)求解，此时应弄清在已知条件下的  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  及  $\alpha$  角。由图 7-8(b)知

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 = \frac{\sigma}{E}, \quad \varepsilon_y = -\mu\varepsilon_0 = -\mu \frac{\sigma}{E}$$

$$\gamma_{xy} = 0, \quad \alpha = 45^\circ, 135^\circ$$

于是

$$\begin{aligned} \varepsilon_{45^\circ} &= \frac{1}{2}\varepsilon_0(1 - \mu) + \frac{1}{2}\varepsilon_0(1 + \mu)\cos(2 \times 45^\circ) \\ &= \frac{\sigma}{2E}(1 - \mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{135^\circ} &= \frac{1}{2}\varepsilon_0(1 - \mu) + \frac{1}{2}\varepsilon_0(1 + \mu)\cos(2 \times 135^\circ) \\ &= \frac{\sigma}{2E}(1 - \mu) \end{aligned}$$

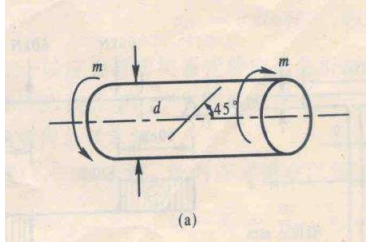
若采用如下代法： $\varepsilon_x = \varepsilon_0, \varepsilon_y = 0, \gamma_{xy} = 0, \alpha = 45^\circ$ ，则有

$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \cos(2 \times 45^\circ) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 = \frac{\sigma}{2E}$$

其错误在于忽略了横向变形。

《辅导》 p137

例 7-8 一受扭圆轴(图 7-10(a)), 直径  $d=20\text{ mm}$ , 圆轴的材料为钢,  $E=200\text{ GPa}$ ,  $\mu=0.3$ 。现测得圆轴表面上与母线成  $45^\circ$  方向的应变力为  $\epsilon=5.2 \times 10^{-4}$ , 试求圆轴所承受的转矩  $m$ 。



解: 已知圆轴表面任一点的应力状态为纯剪切(图 7-10(b)), 其中

$$\tau = \frac{m}{W_t} = \frac{16m}{\pi d^3}$$

受扭圆轴表面与母线成  $45^\circ$  方向为主应力  $\sigma_1$  方向(图(b)所示), 且在  $\sigma_1$  方向的主应变为

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1 + \mu}{E} \tau$$

$$\epsilon = \epsilon_1 = \frac{1 + \mu}{E} \frac{16m}{\pi d^3}$$

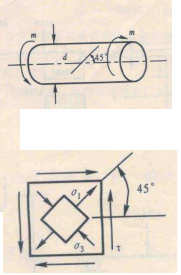
得转矩

$$m = \frac{\epsilon E \pi d^3}{16(1 + \mu)}$$

$$= \frac{(5.2 \times 10^{-4}) \times (200 \times 10^9) \pi (2 \times 10^{-2})^3}{16(1 + 0.3)}$$

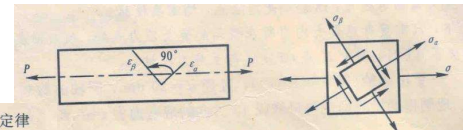
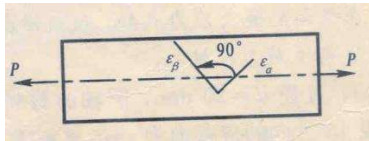
$$= 125.7\text{ N} \cdot \text{m}$$

在截取单元体时要注意剪应力的方向。



《辅导》 p138

例 7-9 图 7-11(a)所示拉杆, 弹性模量为  $E$ , 泊松比为  $\mu$ , 横截面积为  $A$ , 若用电阻应变仪测得杆表面一点任意两个成  $90^\circ$  方向的应变力为  $\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta$ , 试求拉力  $P$ 。



解: 由广义胡克定律

$$E\epsilon_\alpha = \sigma_\alpha - \mu\sigma_\beta \quad (1)$$

$$E\epsilon_\beta = \sigma_\beta - \mu\sigma_\alpha \quad (2)$$

两式相加

$$E(\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta) = (1 - \mu)(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)$$

由一点应力状态不变量, 有

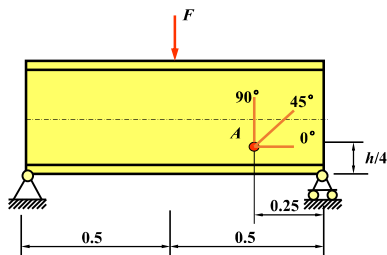
$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma = \frac{P}{A}$$

$$P = A(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) = \frac{EA}{1 - \mu}(\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta)$$

讨论: 利用一点相互垂直的面上正应力之和是一个不变量(即  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sigma_\gamma$ ) 可使问题的求解简单。此题也可由图 7-11(b) 求出  $\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha$ ,  $\sigma_\beta = \sigma \cos^2 \beta = \frac{P}{A} \cos^2 \beta$ , 代入(1)、(2)式求解, 并注意  $\cos^2 \beta = \sin^2 \alpha$ 。

例题14 简支梁由18号工字钢制成, 其上作用有力  $F=15\text{ kN}$ , 已知  $E=200\text{ GPa}$ ,  $\mu=0.3$ 。

求:  $A$  点沿  $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  方向的线应变  $\epsilon_{0^\circ}, \epsilon_{45^\circ}, \epsilon_{90^\circ}$



$$\text{解: } M_A = \frac{F}{2} \times 0.25 \quad F_{SA} = -\frac{F}{2}$$

$$\sigma_A = \frac{M_A}{I_z} y_A = 50.8\text{ MPa}$$

$$\tau_A = \frac{F_{SA} S_{zA}^*}{I_z d} = 68.8\text{ MPa } (-)$$

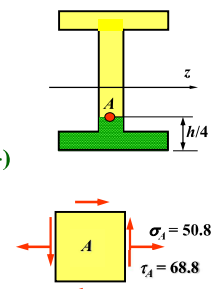
$y_A, I_z, d$  查表得出

$S_{zA}^*$  为图示面积对中性轴  $z$  的静矩

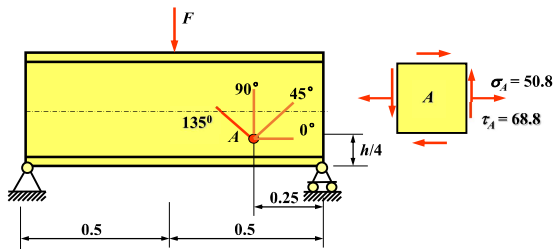
$$\sigma_{0^\circ} = \sigma_A = 50.8$$

$$\sigma_{90^\circ} = \sigma_y = 0$$

$$\epsilon_{0^\circ} = \frac{\sigma_0}{E} \quad \epsilon_{90^\circ} = -\mu \frac{\sigma_0}{E}$$







$$\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 90^\circ - \tau_x \sin 90^\circ = 94.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{135^\circ} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 270^\circ - \tau_x \sin 270^\circ = -43.3 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{1}{E} (\sigma_{45^\circ} - \mu \sigma_{135^\circ}) = 536 \times 10^{-6}$$



### 三. 各向异性材料

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7.23)$$

上式中  $6 \times 6$  的矩阵称为刚度阵, 是对称的且是正定的矩阵, 因此刚度阵是可逆的, 它的逆矩阵称为柔度阵。由于刚度矩阵是对称的, 即  $c_{ij} = c_{ji}$ , 因此各向异性材料的独立材料常数是 21 个。这种晶体材料在结晶学中称为三斜晶系。从公式 (7.23) 可以看出, 此时存在拉伸与剪切间的耦合效应, 即正应变不仅与正应力有关, 而且还与切应力有关; 同样, 切应变不仅与切应力有关, 而且还与正应力有关, 因此各向异性材料一点处的主应力方向与主应变的方向不一致。

### 四. 正交各向异性材料

对于正交各向异性材料, 此时材料的每点都有三个相互垂直的对称面, 当坐标方向选为材料主方向时, 广义胡克定律按矩阵的形式写为:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

图 7.21

此时独立材料常数只有 9 个。这种的晶体材料在结晶学中称为正交晶系。从公式 (7.24) 可以看出, 若坐标方向选为材料主方向时, 则正应力只引起正应变, 切应力只引起切应变, 即不存在拉伸与剪切间的耦合效应。各种长纤维增强复合材料就是典型的正交各向异性材料, 其纤维铺设的方向和与纤维相垂直的方向即为材料的主方向 (图 7.21)。

### 2. 三个主应力同时存在时, 单元体的应变能密度为 (Strain-energy density for simple stress-state)

$$v_\varepsilon = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3)$$

将广义胡克定律代入上式, 经整理得

$$v_\varepsilon = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]$$

用  $v_v$  表示单元体体积改变相应的那部分应变能密度, 称为 **体积改变能密度** (the strain-energy density corresponding to the volumetric)

用  $v_d$  表示与单元体形状改变相应的那部分应变能密度, 称为 **畸变能密度** (the strain-energy density corresponding to the distortion.)

应变能密度  $v_\varepsilon$  等于两部分之和  $v_\varepsilon = v_v + v_d$

## § 7-7 复杂应力状态的应变能密度 (Strain-energy density in general stress-state)

### 一、应变能密度的定义

(Definition of Strain-energy density)

物体在单位体积内所积蓄的应变能。

### 二、应变能密度的计算公式

(Calculation formula for Strain-energy density)

#### 1. 单向应力状态下, 物体内所积蓄的应变能密度为 (Strain-energy density for simple stress-state)

$$v_\varepsilon = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E}{2} \varepsilon^2$$

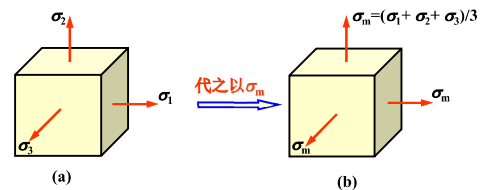


图 (a) 所示单元体的三个主应力不相等, 因而, 变形后既发生体积改变也发生形状改变。

图 (b) 所示单元体的三个主应力相等, 因而, 变形后的形状与原来的形状相似, 即只发生体积改变而无形状改变。

$$(v_\varepsilon)_a = (v_V)_a + (v_d)_a \quad (v_\varepsilon)_b = (v_V)_b$$

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \Leftrightarrow (v_V)_a = (v_V)_b$$

图 b 所示单元体的体积改变比能密度

$$\begin{aligned} (v_V)_b = (v_\varepsilon)_b &= \frac{1}{2E}[(\sigma_m^2 + \sigma_m^2 + \sigma_m^2 - 2\mu(\sigma_m^2 + \sigma_m^2 + \sigma_m^2))] \\ &= \frac{3(1-2\mu)}{2E}\sigma_m^2 \\ &= \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \end{aligned}$$

a 单元体的比能为

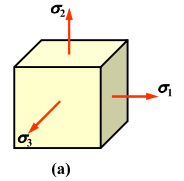
$$v_\varepsilon = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

a 所示单元体的体积改变比能

$$(v_V)_a = (v_V)_b = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

空间应力状态下单元体的畸变能密度

$$\begin{aligned} v_d &= v_\varepsilon - v_V \\ &= \frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \end{aligned}$$



**例 7.10** 导出各向同性线性弹性材料的弹性常数  $E, G, \mu$  间的关系。

**解:** 纯剪切(图 7.23)的应变能密度已于 § 3.3 中求出为

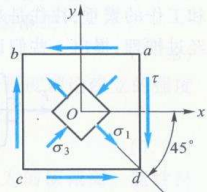
$$v_\varepsilon = \frac{\tau^2}{2G}$$

此外,按照例 7.4 的分析,纯剪切的主应力是:  $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$ 。把主应力代入公式(7.26)又可算出应变能密度为

$$v_\varepsilon = \frac{\tau^2(1+\mu)}{E}$$

按两种方式算出的应变能密度同为纯剪切的应变能密度,应相等.从而导出三个弹性常数间的关系为

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$



## § 7-8 强度理论(The failure criteria)

### 一、强度理论的概念 (Concepts of failure criteria)

#### 1. 引言 (introduction)

**正应力强度条件**

(strength condition for normal stress)

**切应力强度条件**

(strength condition for shear stress)

轴向拉压  $\sigma_{\max} = \frac{F_{N\max}}{A} \leq [\sigma]$

弯曲  $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$

剪切  $\tau = \frac{F_S}{A} \leq [\tau]$

扭转  $\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} \leq [\tau]$

弯曲  $\tau_{\max} = \frac{F_{S\max} \cdot S_{z\max}^*}{I_z b} \leq [\tau]$

上述强度条件具有如下特点

(1) 危险点处于单向应力状态或纯剪切应力状态;

(2) 材料的许用应力,是通过拉(压)试验或纯剪试验测定试件在破坏时其横截面上的极限应力,以此极限应力作为强度指标,除以适当的安全因数而得,即根据相应的试验结果建立的强度条件.

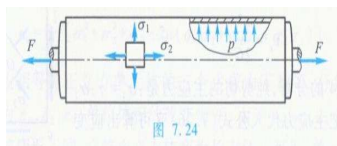


图 7.24

### 2. 强度理论的概念(Concepts for failure criteria)

是关于“构件发生强度失效起因”的假说.

根据材料在复杂应力状态下破坏时的一些现象与形式,进行分析,提出破坏原因的假说.在这些假说的基础上,可利用材料在单向应力状态时的试验结果,来建立材料在复杂应力状态下的强度条件.

#### 基本观点

构件受外力作用而发生破坏时,不论破坏的表面现象如何复杂,其破坏形式总不外乎几种类型,而同一类型的破坏则可能是某一个共同因素所引起的.

## 二、材料破坏的两种类型（常温、静载荷）

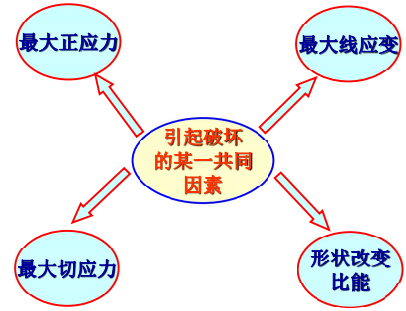
(Two failure types for materials in normal temperature and static loads)

### 1. 屈服失效 (Yielding failure)

材料出现显著的塑性变形而丧失其正常的工作能力。

### 2. 断裂失效 (Fracture failure)

- (1) 脆性断裂: 无明显变形下突然断裂。
- (2) 韧性断裂: 产生大量塑性变形后断裂。



## 三、四个强度理论 (Four failure criteria)

1. 伽利略播下了第一强度理论的种子;
2. 马里奥特关于变形过大引起破坏的论述, 是第二强度理论的萌芽;
3. 杜塞特 (C. Duguet) 提出了最大切应力理论;
4. 麦克斯威尔最早提出了最大畸变能理论, 这是后来人们在他的书信出版后才知道的。

- (1) 第一类强度理论—以脆断作为破坏的标志  
包括: 最大拉应力理论和最大伸长线应变理论
- (2) 第二类强度理论—以出现屈服现象作为破坏的标志  
包括: 最大切应力理论和形状改变比能理论

#### 四、第一类强度理论 (The first types of failure criteria)

##### 1. 最大拉应力理论 (第一强度理论)

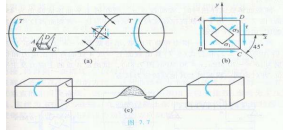
(Maximum-normal-stress criterion)

根据:当作用在构件上的外力过大时,其危险点处的材料就会沿最大拉应力所在截面发生脆断破坏。

基本假说:最大拉应力  $\sigma_1$  是引起材料脆断破坏的因素。

脆断破坏的条件:  $\sigma_1 = \sigma_b$

强度条件:  $\sigma_1 \leq [\sigma]$



#### 五、第二类强度理论

(The second types of failure criterion)

##### 1. 最大切应力理论 (第三强度理论)

(Maximum-shear-stress criterion)

根据:当作用在构件上的外力过大时,其危险点处的材料就会沿最大切应力所在截面滑移而发生屈服失效。

基本假说:最大切应力  $\tau_{max}$  是引起材料屈服的因素。

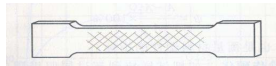
屈服条件  $\tau_{max} = \frac{\sigma_s}{2}$

$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$

在复杂应力状态下一点处的最大切应力为

$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$

强度条件  $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$



##### 2. 最大伸长线应变理论 (第二强度理论)

(Maximum-normal-strain criterion)

根据:当作用在构件上的外力过大时,其危险点处的材料就会沿垂直于最大伸长线应变方向的平面发生破坏。

基本假说:最大伸长线应变  $\epsilon_1$  是引起材料脆断破坏的因素。

脆断破坏的条件:  $\epsilon_1 = \frac{\sigma_b}{E}$

最大伸长线应变:  $\epsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$

强度条件:  $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$

##### 2. 畸变能密度理论 (第四强度理论)

(Maximum-distortion-energy criterion)

基本假说:畸变能密度  $v_d$  是引起材料屈服的因素。

单向拉伸下,  $\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , 材料的极限值

$$v_d = \frac{1+\mu}{6E} \cdot 2\sigma_s^2$$

屈服准则:  $v_d = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$

$$= \frac{1+\mu}{6E} \cdot 2\sigma_s^2$$

强度条件:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]$$

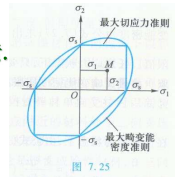


图 7.25

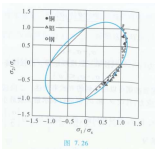


图 7.26

#### 六、相当应力 (Equivalent stress)

把各种强度理论的强度条件写成统一形式  $\sigma_r \leq [\sigma]$

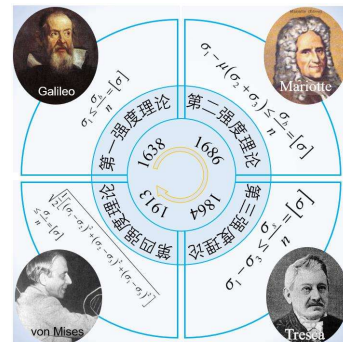
$\sigma_r$  称为复杂应力状态的相当应力。

$$\sigma_{r1} = \sigma_1$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$





## § 7-9 莫尔强度理论 (Mohr's failure criterion)

### 一、引言 (Introduction)

莫尔认为:最大切应力是使物体破坏的主要因素,但滑移面上的摩擦力也不可忽略(莫尔摩擦定律)。综合最大切应力及最大正应力的因素,莫尔得出了他自己的强度理论。



阿托·莫尔(O.Mohr),1835~1918

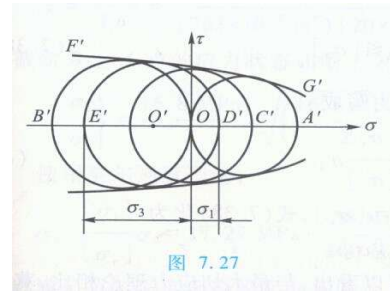


图 7.27

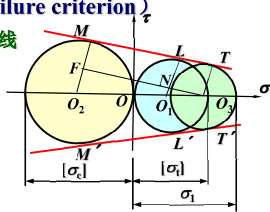
### 二、莫尔强度理论 (Mohr's failure criterion)

任意一点的应力圆若与极限曲线相接触,则材料即将屈服或剪断。

公式推导

$$\left. \begin{aligned} \overline{O_1 N} &= \frac{[\sigma_t]}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \\ \overline{O_2 F} &= \frac{[\sigma_c]}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \\ \overline{O_3 O_1} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{[\sigma_t]}{2} \\ \overline{O_3 O_2} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{[\sigma_c]}{2} \end{aligned} \right\} \text{代入 } \frac{\overline{O_1 N}}{\overline{O_2 F}} = \frac{\overline{O_3 O_1}}{\overline{O_3 O_2}}$$

$$\Rightarrow \text{强度条件 } \sigma_1 - \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} \sigma_3 \leq [\sigma_t]$$



### 三、各种强度理论的适用范围及其应用 (The appliance range and application for all failure criteria)

#### 1. 适用范围 (The appliance range)

- (1) 一般脆性材料选用第一或第二强度理论;
- (2) 塑性材料选用第三或第四强度理论;
- (3) 在二向和三向等拉应力时,无论是塑性还是脆性都发生脆性破坏,故选用第一或第二强度理论;
- (4) 在二向和三向等压应力状态时,无论是塑性还是脆性材料都发生塑性破坏,故选用第三或第四强度理论。

$$\frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma_t] \quad (7.38)$$

仿照公式(7.37),莫尔强度理论的相当应力写成

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} \sigma_3 \quad (c)$$

对抗拉和抗压强度相等的材料,  $[\sigma_t] = [\sigma_c]$ , 式(7.38)化为

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

这也就是最大切应力理论的强度条件。可以看出,与最大切应力理论相比,莫尔理论考虑了材料抗拉和抗压强度不相等的情况。

因为由莫尔理论可以得出第三理论的强度条件,所以往往把它看作是第三强度理论的推广。其实,莫尔理论是以实验资料为基础,经合乎逻辑的综合得出的,并不像前面的强度理论以对失效提出假说为基础。无疑,莫尔理论的方法是比较正确的。譬如,今后如能提出更多更准确的实验资料,就可进一步修正图 7.27 中的包络线,提出更切合实际的强度条件。

$$\sigma_{eq} \leq [\sigma] \quad (7.36)$$

式中  $\sigma_{eq}$  称为相当应力。它由三个主应力按一定形式组合而成。按照从第一强度理论到第四强度理论的顺序,相当应力分别为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{eq} &= \sigma_1 \\ \sigma_{eq} &= \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \\ \sigma_{eq} &= \sigma_1 - \sigma_3 \\ \sigma_{eq} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \end{aligned} \right\} \quad (7.37)$$

以上介绍了四种常用的强度理论。铸铁、石料、混凝土、玻璃等脆性材料,通常以断裂的形式失效,宜采用第一和第二强度理论。碳钢、铜、铝等塑性材料,通常以屈服的形式失效,宜采用第三和第四强度理论。

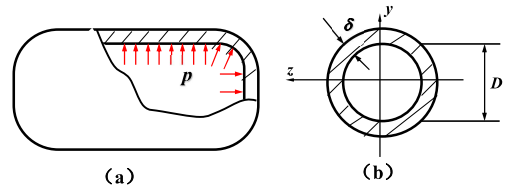
应该指出,不同材料固然可以发生不同形式的失效,但即使是同一材料,在不同应力状态下也可能有不同的失效形式。例如,碳素钢材在单向拉伸下以屈服的形式失效,但碳素钢制成的螺钉受拉时,螺纹根部因应力集中引起三向拉伸,就会出现断裂。这是因为当三向拉伸的三个主应力数值接近时,由屈服准则式(7.32)或式(7.34)看出,屈服将很难出现。又如,铸铁棒材单向受拉时以断裂的形式失效。但如以淬火钢球压在铸铁板上,接触点附近的材料处于三向受压状态,随着压力的增大,铸铁板会出现明显的凹坑,这表明已出现屈服现象。以上例子说明材料的失效形式与应力状态有关。无论是塑性或脆性材料,在三向拉应力相近的情况下,都将以断裂的形式失效,宜采用最大拉应力理论。在三向压应力相近的情况下,都可引起塑性变形,宜采用第三或第四强度理论。

2. 强度计算的步骤 (Steps of strength calculation)

- (1) 外力分析: 确定所需的外力值;
- (2) 内力分析: 画内力图, 确定可能的危险面;
- (3) 应力分析: 画危险面应力分布图, 确定危险点并画出单元体, 求主应力;
- (4) 强度分析: 选择适当的强度理论, 计算相当应力, 然后进行强度计算.

3. 应用举例 (Examples)

例题15 一蒸汽锅炉承受最大压强为 $p$ , 圆筒部分的内径为 $D$ , 厚度为 $\delta$ 且 $\delta$ 远小于 $D$ . 试用第四强度理论校核圆筒部分内壁的强度. 已知 $p=3.6\text{MPa}$ ,  $\delta=10\text{mm}$ ,  $D=1\text{m}$ ,  $[\sigma]=160\text{MPa}$ .



$$\sigma' = \frac{pD}{4t} = 90\text{MPa}$$

$$\sigma'' = \frac{pD}{2t} = 180\text{MPa}$$

内壁的强度校核

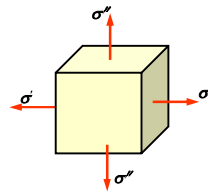
$$\sigma_1 = \sigma'' = 180\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma' = 90\text{MPa}$$

用第四强度理论校核圆筒内壁的强度

$$\begin{aligned} \sigma_{r4} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \\ &= 155\text{MPa} < [\sigma] \end{aligned}$$

所以圆筒内壁的强度合适.



例题16 根据强度理论, 可以从材料在单轴拉伸时的 $[\sigma]$ 可推知低碳钢类塑性材料在纯剪切应力状态下的 $[\tau]$ .

解: 纯剪切应力状态下

$$\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$$

按第三强度理论得强度条件为:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \tau - (-\tau) = 2\tau \leq [\sigma] \quad \tau \leq \frac{[\sigma]}{2}$$

另一方面, 剪切的强度条件是:  $\tau \leq [\tau]$

所以  $[\tau] = 0.5 [\sigma]$

按第四强度理论得强度条件为:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{2}[(\tau - 0)^2 + (0 - (-\tau))^2 + (-\tau - \tau)^2]} &= \sqrt{3}\tau \leq [\sigma] \\ \tau &\leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$[\sigma]$ 为材料在单向拉伸时的许用拉应力.

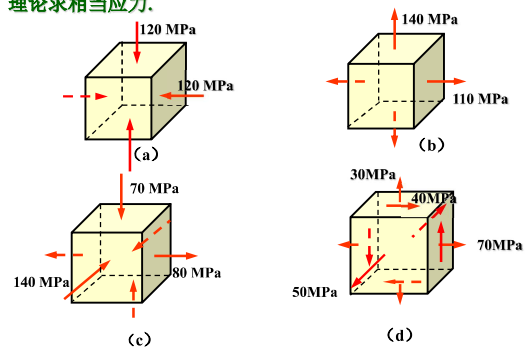
材料在纯剪切应力状态下的许用切应力为 $[\tau]$ .

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = 0.577[\sigma] \approx 0.6[\sigma]$$

按第三强度理论得到:  $[\tau] = 0.5 [\sigma]$

按第四强度理论得到:  $[\tau] \approx 0.6 [\sigma]$

例题17 对于图示各单元体, 试分别按第三强度理论及第四强度理论求相当应力.

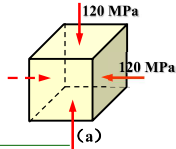


解: (1) 单元体 (a)

$$\sigma_1 = 0 \quad \sigma_2 = \sigma_3 = -120 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 0 - (-120) = 120 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(0+120)^2 + (-120+120)^2 + (-120-0)^2]} = 120 \text{ MPa}$$

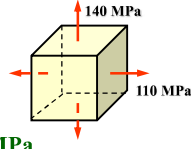


(2) 单元体 (b)

$$\sigma_1 = 140 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = 110 \text{ MPa} \quad \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 140 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[30^2 + 110^2 + (-140)^2]} = 128 \text{ MPa}$$



(3) 单元体 (c)

$$\sigma_1 = 80 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = -70 \text{ MPa} \quad \sigma_3 = -140 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r3} = 220 \text{ MPa} \quad \sigma_{r4} = 195 \text{ MPa}$$

(4) 单元体 (d)

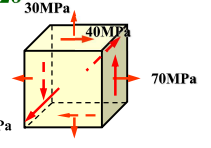
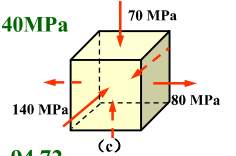
$$\sigma_{\max} = \frac{70+30}{2} + \sqrt{\left(\frac{70-30}{2}\right)^2 + 40^2} = 94.72$$

$$\sigma_{\min} = \frac{70+30}{2} - \sqrt{\left(\frac{70-30}{2}\right)^2 + 40^2} = 5.28$$

$$\sigma_1 = 94.72 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = \sigma_z = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 5.28 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r3} = 89.44 \text{ MPa} \quad \sigma_{r4} = 77.5 \text{ MPa}$$



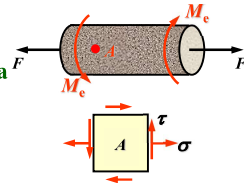
(d)

例题18 直径为 $d=0.1\text{m}$ 的圆杆受力如图,  $M_e=7\text{kN}\cdot\text{m}$ ,  $F=50\text{kN}$ , 材料为铸铁,  $[\sigma]=40\text{MPa}$ , 试用第一强度理论校核杆的强度.

解: 危险点A的应力状态如图

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{4 \times 50}{\pi \times 0.1^2} \times 10^3 = 6.37 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{T}{W_t} = \frac{16 \times 7000}{\pi \times 0.1^3} = 35.7 \text{ MPa}$$



$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{6.37}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6.37}{2}\right)^2 + 35.7^2} = 39$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{6.37}{2} - \sqrt{\left(\frac{6.37}{2}\right)^2 + 35.7^2} = -32$$

$$\sigma_1 = 39 \text{ MPa}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -32 \text{ MPa} \quad \sigma_1 < [\sigma] \quad \text{故安全.}$$

例题19 薄壁圆筒受最大内压时, 测得 $\varepsilon_x=1.88 \times 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_y=7.37 \times 10^{-4}$ , 已知钢的 $E=210\text{GPa}$ ,  $[\sigma]=170\text{MPa}$ , 泊松比 $\mu=0.3$ , 试用第三强度理论校核其强度.



解: 由广义胡克定律

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y)$$

$$= \frac{2.1}{1-0.3^2}(1.88 + 0.3 \times 7.37) \times 10^7 = 94.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) =$$

$$\frac{2.1}{1-0.3^2}(7.37 + 0.3 \times 1.88) \times 10^7 = 183.1 \text{ MPa}$$

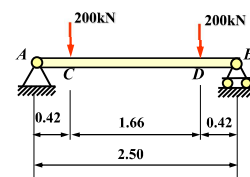
$$\text{主应力} \quad \sigma_1 = 183.1 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 94.4 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = 0$$

$$\text{相当应力} \sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 183.1 \text{ MPa} > [\sigma]$$

$$\frac{\sigma_{r3} - [\sigma]}{[\sigma]} = \frac{183.1 - 170}{170} = 7.7\%$$

所以, 此容器不满足第三强度理论, 不安全.

例题20 两端简支的工字钢梁承受载荷如图所示已知其材料Q235钢的许用为 $[\sigma] = 170\text{MPa}$ ,  $[\tau] = 100\text{MPa}$ . 试按强度条件选择工字钢的型号.



解：作钢梁的内力图。

C, D 为危险截面

(1) 按正应力强度条件选择截面

取 C 截面计算

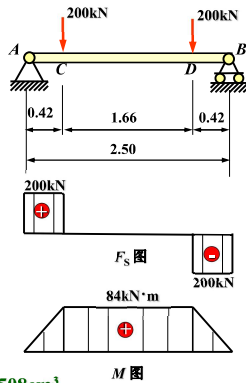
$$F_{SC左} = F_{Smax} = 200\text{kN}$$

$$M_C = M_{max} = 84\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

$$W_z = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = 494 \times 10^{-6} \text{m}^3$$

选用 28a 工字钢, 其截面的  $W_z = 508\text{cm}^3$



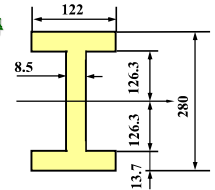
(2) 按切应力强度条件进行校核

对于 28a 工字钢的截面, 查表得

$$I_z = 7114 \times 10^{-8} \text{m}^4$$

$$d = 0.85 \times 10^{-2} \text{m}$$

$$\frac{I_z}{S_z^*} = 24.62 \times 10^{-2} \text{m}$$



最大切应力为

$$\tau_{max} = \frac{F_{Smax} \cdot S_z^*}{I_z d} = \frac{F_{Smax}}{S_z^*} = 95.5 \text{MPa}$$

选用 28a 工字钢能满足切应力的强度要求。

(3) 腹板与翼缘交界处的的强度校核

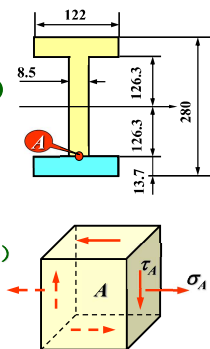
取 A 点分析

$$\sigma_A = \frac{M_{max} \cdot y_A}{I_z} = 149.1 \text{MPa}(+)$$

$$S_A^* = 122 \times 13.7 \times (126.3 + \frac{13.7}{2}) = 223 \times 10^{-6} \text{m}^3$$

$$\tau_A = \frac{F_{Smax} S_A^*}{I_z \cdot d} = 73.8 \text{MPa} (+)$$

A 点的应力状态如图所示



A 点的三个主应力为

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{(\frac{\sigma}{2})^2 + \tau^2} \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{(\frac{\sigma}{2})^2 + \tau^2}$$

由于材料是 Q235 钢, 所以在平面应力状态下, 应按第四强度理论来进行强度校核。

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = 197 \text{MPa} > [\sigma]$$

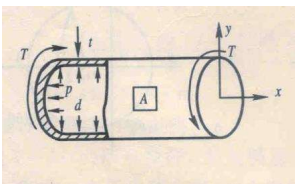
$$\frac{\sigma_{r4} - [\sigma]}{[\sigma]} \times 100\% = 15.9\% \quad \text{应另选较大的工字钢。}$$

若选用 28b 号工字钢, 算得  $\sigma_{r4} = 173.2 \text{MPa}$ , 比  $[\sigma]$  大 1.88% 可选用 28b 号工字钢。

### 《辅导》p140

例 7-11 图 7-13(a) 所示铸铁薄壁筒承受内压  $p = 6 \text{MPa}$ , 两端受力偶矩  $T = 1 \text{kN}\cdot\text{m}$  的作用。已知内径  $d = 60 \text{mm}$ , 壁厚  $t = 1.5 \text{mm}$ , 试确定圆筒外壁一点 A 处的以下各量:

- (1) 主应力及主平面(用主单元体表示);
- (2) 最大剪应力。
- (3) 若容器发生破坏时, 它是由什么因素引起破坏的? 破坏面发生在何方向?

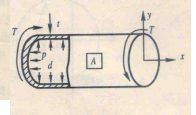


解: (1) 根据小变形条件下的叠加原理, 进行应力分析时, 圆筒可看成是单独承受内压和单独承受扭转变形的叠加, 如图 7-13(a), 围绕 A 点用一对横截面, 一对径向面和一对圆柱面(包括外表面)截取应力单元体如图 7-13(b), 轴向应力与周向应力分别为

$$\sigma_x = \frac{pd}{4t} = \frac{6 \times 60}{4 \times 1.5} = 60 \text{MPa}$$

$$\sigma_\theta = \frac{pd}{2t} = \frac{6 \times 60}{2 \times 1.5} = 120 \text{MPa}$$

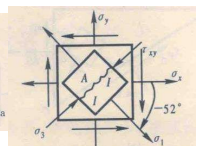
注意到, 在  $t \ll d$  条件下, 忽略  $t$  的高次项后



$$I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) \approx \frac{\pi d^4}{4}$$

$$W_t = \frac{I_p}{D/2} \approx \frac{\pi d^3}{2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{T}{W_t} = \frac{2T}{\pi d^3} = \frac{2 \times 10^3}{\pi (1.5 \times 10^{-3})^3 (60 \times 10^{-3})^2} = 118 \text{MPa}$$





主应力为

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{60 + 120}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60 - 120}{2}\right)^2 + (118)^2} = 212 \text{ MPa}$$

主应力依次排列为

$$\sigma_1 = \sigma_1' = 212 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \sigma_3' = -32 \text{ MPa}$$

主平面方位

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2 \times 118}{60 - 120} = 3.93$$

故

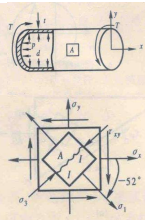
$$\alpha_0 \approx 38^\circ, \quad \alpha_0' \approx -52^\circ$$

由图 7-13(b) 所示单元体剪应力方向, 可判断  $\alpha_0$  对应  $\sigma_1$  所在平面,  $\alpha_0'$  对应  $\sigma_3$  所在主平面, 主单元体如图 7-13(b)。由计算

(2) 最大剪应力为

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{212 - (-32)}{2} = 122 \text{ MPa}$$

(3) 确定容器破坏方向。因制作容器的材料是铸铁。它属于脆性材料, 又处于二向应力状态, 由第一强度理论, 容器因最大拉应力作用而引起破坏。若容器发生破坏时, 则破坏面与主平面 1 平行, 见图 7-13(b) 所示。



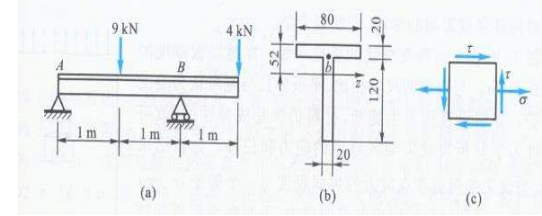
**例 7.13** 在例 5.3 中, 铸铁梁的截面  $B$  上, 弯矩为  $M = -4 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , 剪力为  $F_s = -6.5 \text{ kN}$ 。试用莫尔强度理论校核腹板与翼缘交界处的强度。设铸铁的拉力和抗压许用应力分别为  $[\sigma_t] = 30 \text{ MPa}$ ,  $[\sigma_c] = 160 \text{ MPa}$ 。

**解:** 校核  $b$  点的强度时, 首先要算出该点的弯曲正应力和切应力。根据截面尺寸, 求得

$$I_z = 763 \text{ cm}^4, \quad S_z^* = 67.2 \text{ cm}^3$$

从而算出

$$\sigma = \frac{My}{I_z} = \frac{(-4 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(-32 \times 10^{-3} \text{ m})}{763 \times 10^{-8} \text{ m}^4} = 16.8 \times 10^6 \text{ Pa} = 16.8 \text{ MPa}$$



$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{I_z b} = \frac{(6.5 \times 10^3 \text{ N})(67.2 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(763 \times 10^{-8} \text{ m}^4)(20 \times 10^{-3} \text{ m})} = 2.86 \times 10^6 \text{ Pa} = 2.86 \text{ MPa}$$

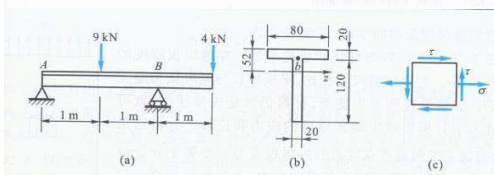
在截面  $B$  上,  $b$  点的应力状态如图 7.29 c 所示。求出主应力为

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\} = \frac{16.8 \text{ MPa}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{16.8 \text{ MPa}}{2}\right)^2 + (2.86 \text{ MPa})^2} = \begin{cases} 17.27 \text{ MPa} \\ -0.47 \text{ MPa} \end{cases}$$

使用莫尔强度理论,

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} \sigma_3 = 17.27 \text{ MPa} - \frac{30 \text{ MPa}}{160 \text{ MPa}}(-0.47 \text{ MPa}) = 17.4 \text{ MPa} \leq [\sigma_t]$$

所以满足莫尔强度理论的强度条件。



## 构件含裂纹时的断裂准则

图 7.30 表示一带有裂纹的受拉平板。穿透平板厚度的裂纹长为  $2a$ 。与裂纹的尺寸相比, 平板的长与宽可认为是无限大的。如假设直到发生脆断, 材料仍然是线弹性的, 就可用弹性力学分析裂纹尖端区域内的应力和位移。分析结果表明, 裂纹尖端附近各点应力的强弱程度与一个等于  $\sigma\sqrt{\pi a}$  的量有关。即裂纹尖端附近各点的应力, 不是随平板所受拉力  $\sigma$  成比例地增长或减少, 而是随  $\sigma\sqrt{\pi a}$  成比例地增长或减少。 $\sigma\sqrt{\pi a}$  称为应力强度因子, 并记为  $K_I$ , 即

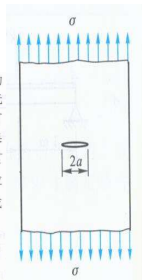
$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (7.39)$$

$K_I$  的单位为  $\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 。

随着载荷的增加, 应力强度因子  $K_I$  也逐渐增加。实验结果表明, 当它达到某一临界值  $K_{Ic}$  时, 裂纹将发生失稳扩展, 导致试样断裂。 $K_{Ic}$  称为断裂韧性。如同材料的屈服极限、强度极限一样,  $K_{Ic}$  也是材料固有的力学性能。确定了断裂韧性  $K_{Ic}$  后, 只要构件的应力强度因子  $K_I$  低于  $K_{Ic}$ , 构件就不会发生裂纹的失稳扩展。而出现裂纹失稳扩展的条件是

$$K_I = K_{Ic} \quad (7.40)$$

这就是构件含裂纹时的断裂准则。



**例 7.14** 铝合金 2219-T 851 的抗拉强度极限为  $\sigma_b = 454 \text{ MPa}$ , 断裂韧性  $K_{Ic} = 32 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 。合金钢 AISI 4340 的  $\sigma_b = 1827 \text{ MPa}$ ,  $K_{Ic} = 59 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 。若由两种材料制成的尺寸相同的平板都有  $2a = 2 \text{ mm}$  的穿透裂纹, 且设两种材料都可近似地作为线弹性材料, 试求使裂纹失稳扩展的应力  $\sigma_u$ 。

**解:** 根据公式 (7.39) 和公式 (7.40), 断裂准则可写成

$$K_I = \sigma_u \sqrt{\pi a} = K_{Ic}$$

$$\sigma_u = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a}}$$

对铝合金 2219-T 851,

$$\sigma_u = \frac{32 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}}{\sqrt{\pi(1 \times 10^{-3} \text{ m})}} = 571 \text{ MPa}$$

对合金钢 AISI 4340,

**例 7.14** 铝合金 2219-T 851 的抗拉强度极限为  $\sigma_b = 454 \text{ MPa}$ , 断裂韧性  $K_{Ic} = 32 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 。合金钢 AISI 4340 的  $\sigma_b = 1827 \text{ MPa}$ ,  $K_{Ic} = 59 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 。若由

$$\sigma_u = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a}}$$

对铝合金 2219-T 851,

$$\sigma_u = \frac{32 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}}{\sqrt{\pi(1 \times 10^{-3} \text{ m})}} = 571 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = 454 \text{ MPa}$$

对合金钢 AISI 4340,

$$\sigma_u = \frac{59 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}}{\sqrt{\pi(1 \times 10^{-3} \text{ m})}} = 1053 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = 1827 \text{ MPa}$$

从以上结果看出, 在所给裂纹尺寸下, 铝合金 2219-T851 发生脆断时的应力  $\sigma_u$  略高于强度极限  $\sigma_b$ 。表明它在拉断之前不会因裂纹失稳扩展而脆断,  $\sigma_b$  仍然是失效应力。这与传统的强度概念并不矛盾。相反, 合金钢 AISI 4340 脆断时的应力  $\sigma_u$  仅为  $\sigma_b$  的 57%。表明它在远未达到  $\sigma_b$  之前, 就已因裂纹扩展而脆断。用传统的强度概念, 无法解释拉应力仅为  $\sigma_b$  的 57% 时, 就发生脆断的现象。还可看出, 合金钢 AISI 4340 虽然有很高的强度极限, 但因受  $K_{Ic}$  的限制, 在有裂纹的情况下, 高强度特性并不能充分发挥。相比之下, 铝合金 2219-T 851 的强度却得到了充分利用, 况且它的自重又小。对飞机等结构更为适宜。



## 第九章 组合变形

### (Combined deformation)

- ▶ § 9-1 组合变形和叠加原理  
(Combined deformation and superposition method)
- ▶ § 9-2 拉伸(压缩)与弯曲的组合  
(Combined axial and flexural loads)
- ▶ § 9-3 拉扭组合
- ▶ § 9-4 扭转与弯曲的组合  
(Combined torque and flexural loads)

### § 9-1 组合变形和叠加原理 (Combined deformation and superposition method)

#### 一、组合变形的概念 (Concepts of combined deformation)

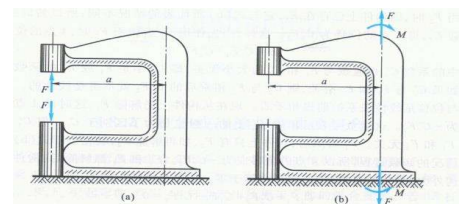
构件在荷载作用下发生两种或两种以上的的基本变形, 则构件的变形称为组合变形。

#### 二、解决组合变形问题的基本方法—叠加法

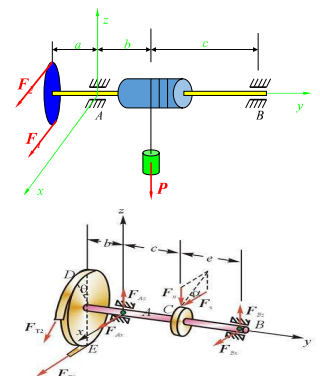
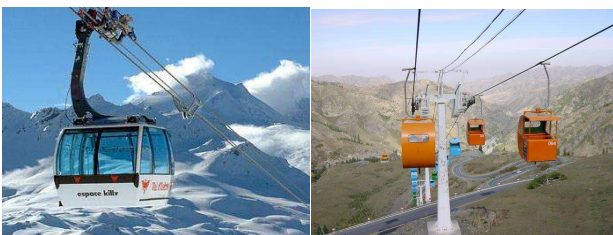
(Basic method for sloving combined deformation—superposition method)

叠加原理的成立要求: 内力、应力、应变、变形等与外力之间成线性关系。

以前各章分别讨论了杆件的拉伸(压缩)、剪切、扭转、弯曲等基本变形。工程结构中的某些构件又往往同时产生几种基本变形。例如, 图 8. 1a 表示小型压力机的框架。为分析框架立柱的变形, 将外力向立柱的轴线简化(图 8. 1b), 便可看出, 立柱承受了由  $F$  引起的拉伸和由  $M = Fa$  引起的弯曲。这类由两种或两种以上基本变形组合的情况, 称为组合变形。



#### 三、工程实例 (Engineering examples)



出很多,可综合为,构件A点因载荷  $F_1$  引起的位移  $\delta_1$  与  $F_1$  的关系是线性的,即

$$\delta_1 = C_1 F_1 \quad (a)$$

这里  $C_1$  是一个系数,在  $F_1$  的作用点和方向给定后,  $C_1$  与  $F_1$  的大小无关,亦即  $C_1$  不是  $F_1$  的函数。同理,A点因另一载荷  $F_2$  引起的位移为

$$\delta_2 = C_2 F_2 \quad (b)$$

系数  $C_2$  也不是  $F_2$  的函数。若在构件上先作用  $F_1$ ,然后再作用  $F_2$ 。因为在未受力时开始作用  $F_1$ ,这与式(a)所表示的情况相同,所以A点的位移为  $C_1 F_1$ 。再作用  $F_2$  时,因构件上已存在  $F_1$ ,它与式(b)所代表的情况不同,所以暂时用  $C_2'$  代替  $C_2$ ,得A点的位移为  $C_2' F_2$ 。这样,当先作用  $F_1$  后作用  $F_2$  时,A点的位移为

$$\delta = C_1 F_1 + C_2' F_2 \quad (c)$$

式中的系数  $C_2'$  也应该与  $F_1$  和  $F_2$  的大小无关,即  $C_2'$  不是  $F_1$  或  $F_2$  的函数。因为如果  $C_2'$  与  $F_1$  和  $F_2$  有关,则  $C_2'$  与  $F_2$  相乘后的  $C_2' F_2$  就不再是线性的。这与力与位移是线性关系的前提相矛盾。现在从构件上先解除  $F_1$ ,这时设A点的位移为  $-C_1' F_1$ 。这里负号表示卸载,  $C_1'$  上的一撇也是为了区别于  $C_1$ 。但  $C_1'$  也应与  $F_1$  和  $F_2$  无关。 $F_1$  解除后,构件上只有  $F_2$ ,如再解除  $F_2$ ,就相当于式(b)代表的情况的卸载过程,所以A点的位移应为  $-C_2 F_2$ 。 $F_1$  和  $F_2$  都解除后,构件上无任何外力,是它的自然状态,位移应等于零。于是

$$C_1 F_1 + C_2' F_2 - C_1' F_1 - C_2 F_2 = 0$$

或者写成

$$(C_1 - C_1') F_1 + (C_2' - C_2) F_2 = 0$$

根据上面的论述,式中两个系数都不是载荷的函数,而且  $F_1$  和  $F_2$  为任意值时,上式都应该得到满足。这就只有两个系数都等于零,才有可能,即

$$C_1 - C_1' = 0, \quad C_2' - C_2 = 0$$

$$C_1 = C_1', \quad C_2' = C_2$$

于是式(c)化为

$$\delta = C_1 F_1 + C_2 F_2 \quad (d)$$

比较式(a)、式(b)和式(d)三式,可见  $F_1$  和  $F_2$  共同作用下的位移,等于  $F_1$  和  $F_2$  分别单独作用时位移的叠加。如果颠倒上述加力次序,先加  $F_2$  后加  $F_1$ ,用完全相似的方法,必然仍得到式(d)。这表明位移与加力的次序无关。以上结论自然可以推广到外力多于两个的情况,也可推广到应变、应力、内力与外力成线性关系的情况。

可见,叠加原理的成立,要求位移、应力、应变和内力等与外力成线性关系。当不能保证上述线性关系时,叠加原理不能使用。

$$EI \frac{d^2 w_f}{dx^2} = M_f, \quad EI \frac{d^2 w_q}{dx^2} = M_q \quad (b)$$

若  $F$  和  $q$  共同作用下的挠度为  $w$ ,则  $w$  与  $M$  的关系也应该是

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M \quad (c)$$

将式(a)代入式(c),并利用式(b),得

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M_f + M_q = EI \frac{d^2 w_f}{dx^2} + EI \frac{d^2 w_q}{dx^2}$$

$$= EI \frac{d^2 (w_f + w_q)}{dx^2}$$

*W = W\_f + W\_q + Cx + d*  
*这不能这样写! 应写为 Cx + d*

可见  $F$  和  $q$  联合作用下的挠度  $w$ ,就是两个载荷单独作用下的挠度  $w_f$  和  $w_q$  的代数和。这一结论显然可以推广到载荷多于两个的情况。所以,当梁上同时作用几个载荷时,可先分别求出每一载荷单独引起的变形,然后把所得变形叠加即得为这些载荷共同作用时的变形。这就是计算弯曲变形的叠加法。

#### 四、处理组合变形的的基本方法

##### (Basic method for solving combined deformation)

##### 1. 外力分析 (Analysis of external force)

将外力简化并沿主惯性轴分解,将组合变形分解为基本变形,使之每个力(或力偶)对应一种基本变形

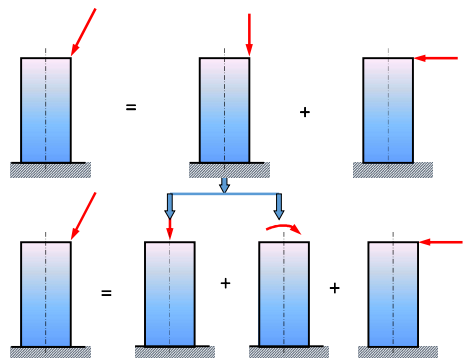
##### 2. 内力分析 (Analysis of internal force)

求每个外力分量对应的内力方程和内力图,确定危险截面,分别计算在每一种基本变形下构件的应力和变形

##### 3. 应力分析 (Stress analysis)

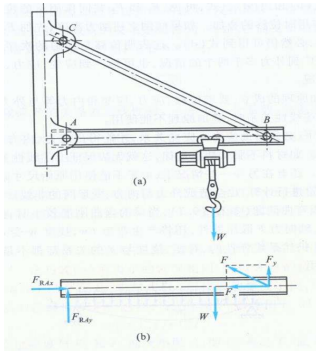
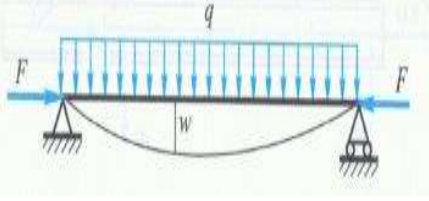
画出危险截面的应力分布图,利用叠加原理将基本变形下的应力和变形叠加,建立危险点的强度条件

分析组合变形时,可先将外力进行简化或分解,把构件上的外力转化成几组静力等效的载荷,其中每一组载荷对应着一种基本变形。例如,在上面的例子中,把外力转化为对应着轴向拉伸的  $F$  和对应着弯曲的  $M$ 。这样,可分别计算每一基本变形各自引起的应力、内力、应变和位移,然后将所得结果叠加,得到构件在组合变形下的应力、内力、应变和位移,这就是叠加原理。这一原理前面曾





某些情况下,必须借助应力-应变关系,才能得出应力、内力和变形等与外力之间的关系。如材料不服从胡克定律,这就无法保证上述线性关系,破坏了叠加原理的前提。还有在另外一些情况下,由于不能使用原始尺寸原理,须用构件变形以后的位置进行计算,也会造成外力与内力、变形间的非线性关系。例如图8.2所示的纵横弯曲问题(参看§9.7),当梁的弯曲刚度较小时,由于需用变形后的位置计算,轴向力 $F$ 除压缩外,还将产生弯矩 $Fw$ ,挠度 $w$ 受 $q$ 和 $F$ 的共同影响,即使杆件仍然是线弹性的,弯矩、挠度与 $F$ 的关系却都不是线性的,叠加原理便不能使用。



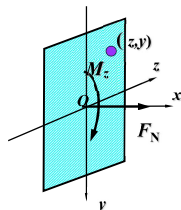
#### 四、应力分析 (Analysis of stress)

横截面上任意一点 $(z, y)$ 处的正应力计算公式为

1. 拉伸正应力  $\sigma' = \frac{F_N}{A}$   
(Axial normal stress)

2. 弯曲正应力  $\sigma'' = \frac{M_z \cdot y}{I_z}$   
(Bending normal stress)

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = \frac{F_N}{A} + \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$



### § 9-2 拉伸 (或压缩) 与弯曲的组合 (Combined axial loading and bending)

#### 一、受力特点 (Character of external force)

作用在杆件上的外力既有轴向拉(压)力,还有横向力

#### 二、变形特点 (Character of deformation)

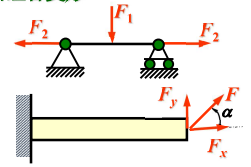
杆件将发生拉伸 (压缩) 与弯曲组合变形

示例1  $F_1$  产生弯曲变形

$F_2$  产生拉伸变形

示例2  $F_y$  产生弯曲变形

$F_x$  产生拉伸变形



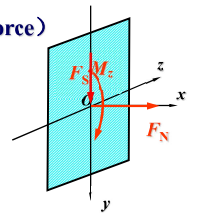
#### 三、内力分析 (Analysis of internal force)

横截面上内力 (internal force on cross section)

1. 拉(压): 轴力  $F_N$  (axial force)

2. 弯曲  $\left\{ \begin{array}{l} \text{弯矩 } M_z \text{ (bending moment)} \\ \text{剪力 } F_s \text{ (shear force)} \end{array} \right.$

因为引起的切应力较小,故一般不考虑。



#### 3. 危险截面的确定 (Determine the danger cross section)

作内力图

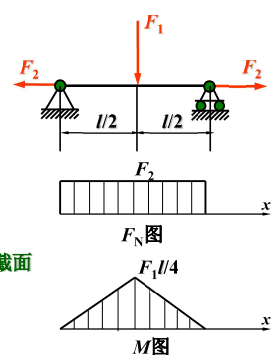
轴力 (axial force)

$$F_N = F_2$$

弯矩 (bending moment)

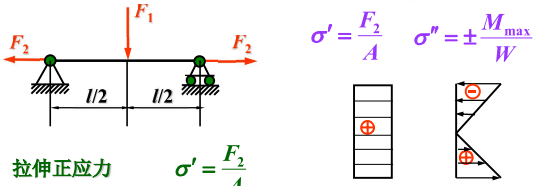
$$M_{\max} = \frac{F_1 l}{4}$$

所以跨中截面是杆的危险截面





#### 4. 计算危险点的应力 (Calculating stress of the danger point)



拉伸正应力  $\sigma' = \frac{F_2}{A}$

最大弯曲正应力  $\sigma''_{\max} = \pm \frac{M_{\max}}{W} = \pm \frac{F_1 l}{4W}$

杆危险截面 下边缘各点处上的拉应力为

$$\sigma_{t\max} = \sigma' + \sigma''_{\max} = \frac{F_2}{A} + \frac{F_1 l}{4W}$$

例题1 悬臂吊车如图所示,横梁用20a工字钢制成. 其抗弯刚度 \$W\_z = 237\text{cm}^3\$, 横截面积 \$A=35.5\text{cm}^2\$, 总荷载 \$F=34\text{kN}\$, 横梁材料的许用应力为 \$[\sigma]=125\text{MPa}\$. 校核横梁 \$AB\$ 的强度.

解: (1) 分析 \$AB\$ 的受力情况

$$\sum M_A = 0 \quad F_{NAB} \sin 30^\circ \times 2.4 - 1.2F = 0$$

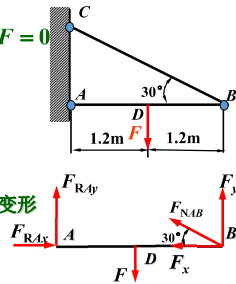
$$F_{NAB} = F$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{RAx} = 0.866F$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{RAy} = 0.5F$$

\$AB\$ 杆为平面弯曲与轴向压缩组合变形

中间截面为危险截面. 最大压应力发生在该截面的上边缘



#### 五、强度条件 (Strength condition)

由于危险点处的应力状态仍为单向应力状态, 故其强度条件为:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$$

当材料的许用拉应力和许用压应力不相等时, 应分别建立杆件的抗拉和抗压强度条件.

$$\sigma_{t\max} \leq [\sigma_t]$$

$$\sigma_{c\max} \leq [\sigma_c]$$

(2) 压缩正应力

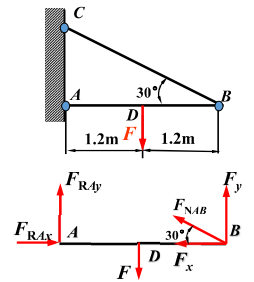
$$\sigma' = -\frac{F_{RAx}}{A} = -\frac{0.866F}{A}$$

(3) 最大弯曲正应力

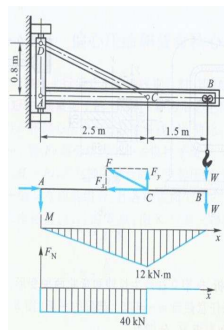
$$\sigma''_{\max} = \pm \frac{1.2F_{RAy}}{W_z} = \pm \frac{0.6F}{W_z}$$

(4) 危险点的应力

$$\sigma_{c\max} = \left| \frac{0.866F}{A} + \frac{0.6F}{W_z} \right| = 94.37\text{MPa} < [\sigma]$$



例 8.1 最大吊重 \$W = 8\text{ kN}\$ 的起重机如图 8.4a 所示. 若 \$AB\$ 杆为工字钢, 材料为 Q235 钢, \$[\sigma] = 100\text{ MPa}\$, 试选择工字钢型号.



解: 先求出 \$CD\$ 杆的长度为

$$l = \sqrt{(2.5\text{ m})^2 + (0.8\text{ m})^2} = 2.62\text{ m}$$

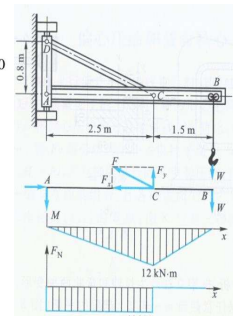
\$AB\$ 杆的受力简图如图 8.4b 所示. 设 \$CD\$ 杆的拉力为 \$F\$, 由平衡方程 \$\sum M\_A = 0\$, 得

$$F \times \frac{0.8\text{ m}}{2.62\text{ m}} \times 2.5\text{ m} - (8\text{ kN}) \times (2.5 + 1.5)\text{ m} = 0$$

$$F = 41.9\text{ kN}$$

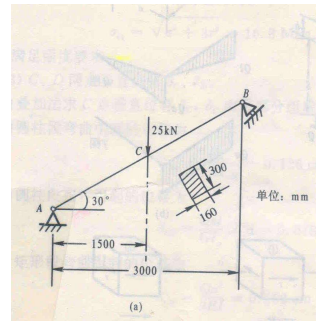
$$F_x = F \times \frac{2.5\text{ m}}{2.62\text{ m}} = 40.0\text{ kN}$$

$$F_y = F \times \frac{0.8\text{ m}}{2.62\text{ m}} = 12.8\text{ kN}$$



《辅导》 p154

例 8-2 AB 梁尺寸及受载情况如图 8-4(a)所示。试求梁承受的最大应力。

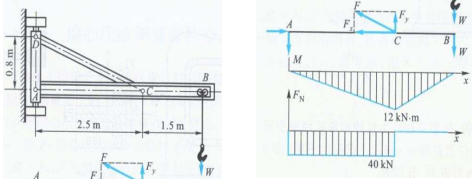


$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{12 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}}{100 \times 10^6 \text{ Pa}} = 12 \times 10^{-5} \text{ m}^3 = 120 \text{ cm}^3$$

查型钢表, 选取 No.16 工字钢,  $W = 141 \text{ cm}^3$ ,  $A = 26.131 \text{ cm}^2$ 。选定工字钢后, 同时考虑轴力  $F_N$  及弯矩  $M$  的影响, 再进行强度校核。在危险截面  $C$  的下边缘各点上发生最大压应力, 且为

$$|\sigma_{\max}| = \left| \frac{F_N}{A} + \frac{M_{\max}}{W} \right| = \left| -\frac{40 \times 10^3 \text{ N}}{26.131 \times 10^{-4} \text{ m}^2} - \frac{12 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}}{141 \times 10^{-6} \text{ m}^3} \right| = 100.4 \times 10^6 \text{ Pa} = 100.4 \text{ MPa}$$

结果表明, 最大压应力与许用应力几乎相等, 故无需重新选择截面的型号。



解: 将外力分解为  $P_x$ 、 $P_y$ (图 8-4(b))

$$P_x = P \sin \alpha = 25 \times \sin 30^\circ = 12.5 \text{ kN}$$

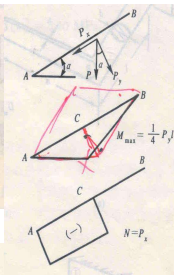
$$P_y = P \cos \alpha = 21.6 \text{ kN}$$

故 AB 梁发生压弯组合变形, 作内力图如图 8-4(b),

$$N = -P_x, \quad M_{\max} = \frac{1}{4} P_y l = 18.7 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\sigma' = \frac{N}{A} = \frac{12.5 \times 10^3}{30 \times 16 \times 10^{-4}} = -0.26 \text{ MPa}$$

$$\sigma'' = \frac{M}{W} = \frac{M_{\max}}{bh^2} = \frac{18.7 \times 10^3}{16 \times 30^2 \times 10^{-6}} = 7.8 \text{ MPa}$$



故最大压应力发生在 C 左侧截面上边缘, 其值为

$$\sigma_{\max} = \sigma' - \sigma'' = -0.26 - 7.8 = -8.05 \text{ MPa}$$

最大拉应力发生在 C 点右侧截面下边缘点, 其值为

$$\sigma_{\max} = 0 + \sigma'' = 7.8 \text{ MPa}$$