数理方程 A - 2020 春

02-19: 课程综述

Zheng Yin

阅读任务: §1.1,1.2

书面作业 2/28 交: ch1: 1,5,9

课件是辅助补充，同学们还需读教材预复习

请经常查看讨论板论坛、学习资源、作业区

修正版添加: 群体动态学例子、提醒、标准基等

颜色代码

- 任务与作业
- 强调与重点
- 数物文化熏陶，提供 motivation，除非特别标注不会考到

课程介绍

- 课程信息
- 本课特色
- 为什么要上这门课
- 为什么要解方程
- 为什么要学特殊函数

课程介绍

- 课程信息
- 本课特色
- 为什么要上这门课
- 为什么要解方程
- 为什么要学特殊函数

课程介绍和概述

- 这门课的内容
  - 偏微分方程
  - SL 理论、eigenvalue 问题
  - 积分变换
  - 特殊函数
  - 广义函数
  - Green's 函数、基本解

为什么要学习数理方程?

- 自然现象观测量化为数据 (变量、自由度)
- 自然规律被抽象为科学理论: 相关各种数据的关系式 (方程)
- 很多数据适合用连续的量来理想化 (时空坐标) 或近似 (大数目)
- 经常需要考虑不同连续量之间的变化比例: 微分
- 关于它们的关系式 $\rightarrow$ODE、PDE$\rightarrow$ 数理方程

例：群体动态学的常微分方程 (ODE)

- 研究物种数目的变化
- 把整数数目 N 近似为实数
- 方程由数目的变化规律决定: $\dot{N} = f(N, t)$
- Malthusian 发展模型和定律: $\dot{N} = aN$

$$N(t) = N_0 e^{at},\ N(0) = N_0$$

- Logistics 定律:
  $\dot{N} = aN - bN^2 \implies d_t N^{-1} + aN^{-1} = b$

$$N(t) = aN_0/[bN_0 + (a - bN_0)e^{-at}]$$
$$N^{-1}(t) = e^{-at}N_0^{-1} + (1 - e^{-at})N_\infty^{-1}$$
$$N_\infty := a/b = N(t \to \infty)$$

- 数理方程涉及解方程和分析方程与解的性质
- 方程合理性、数据真实可靠性需另外考虑

例：物理的偏微分方程 (PDE)

- 场：刻画时空上自由度的函数，例如
  琴弦的位移、电磁场、电势、
  Hamilton's principal/characteristic functions 等
- 物理定律描述场沿时空各方向变化相互间
  的关系 $\rightarrow$ PDE，例如
  - Klein-Gordon/wave eq.: $\partial_t^2\phi - \vec{\nabla}^2\phi + m^2\phi = 0$
  - Schrödinger eq.: $\partial_t\psi = (-\frac{\vec{\nabla}^2}{2m} + V)\psi$
    Heat eq. $\partial_t u = k\vec{\nabla}^2 u + Q$
  - Laplace/Poisson eq.: $\vec{\nabla}^2\Phi = -N$
  - Hamilton-Jacobi eq.:
    $0 = \partial_t S + H(p, q, t)\,|^{p=\frac{\partial S}{\partial q}}$

归纳本课主题思想

- 本课主要围绕如何解线性 PDE $L\phi = N$。
  ϕ 未知函数,N 已知, 都是无穷维向量。
  L 是线性微分算子
- 参考线性代数求解 $Mv = w$ 时,
  解是 $v = M^{-1}w$
- 通过求算子 L 的逆 L^{-1} 求得 $\phi = L^{-1}N$
- 用分离变量法将 PDE 降解为 ODE
- 把 ODE 写成 Sturm-Liouville 标准形式
- SL 的解是特殊函数, 用于构造将偏微分算子对角化的基
- 把函数看成向量, 用不同的基展开是积分变换
- 由此求得 L^{-1}:L 的 Green's 函数、基本解

- 总而言之就是用线性代数的思想解 PDE
- 注意从线性代数借用的是概念和想法
- 而不是具体计算方法
- 这样本课的各种解题方法得到统一

概念：把物理中场看作向量

- 电动力学和量子力学的基本方程都是线性的
- 叠加原理适用；都有干涉和衍射现象
- 可以应用很多线性代数的概念和想法
- QM 的物理态：波函数
  是线性 (Hilbert) 空间的矢量
- QM 的可观测量是作用在态上面的线性算子
- 其特征值是量子测量可以得到的值，
  对应的特征函数组成正交完备的基，

第二章: 分离变量,Sturm-Liouville 理论

- 分离变量法将 PDE 降解为 ODE
- 得到的是若干含待定 (特征) 值的 ODE:
  $L_t T(t) = \lambda T(t)$, $L_x X(x) = -\lambda X(x)$
- 与此相似的是线性代数的特征值问题:
  Hermitian 矩阵的特征向量构成正交完备基
- 函数空间也是一个 (无穷维) 线性空间。
  函数是向量，相互间有加减、与标量可相乘。
  对函数的线性操作 (如微分算子) 相当于矩阵
- S-L 问题的特征函数构成正交完备的基

第三章: 特殊函数

- 不同问题需要用不同的基
- $\{e^{ikx}\}$ 是最简单重要的基，适合用直角坐标解 PDE，也是最简单和特殊的特殊函数
- 其它坐标下 PDE 分离变量后的 SL 问题 $\rightarrow$ 其它特殊函数
- 解 PDE 时将条件和解用特殊函数展开得到系数间关系，再用逆变换得到最终答案
- 特殊函数真的很特殊
  又称 functions of mathematical physics

第四章: 积分变换

- 线性代数：选一组基后向量用展开系数表示。$\{e_i\}$ 是基，$v = v^i e_i$
- 函数空间也类似：将函数转换成对应的系数
- (逆) 变换需要改求和为积分，故称积分变换
  - 圆周上的函数：$f(x) = f(x + 2\pi)$

    基：$\{e^{inx}\}, n \in \mathbb{Z}$;　$f(x) = \sum_n \tilde{f}_n \, e^{inx}$
  - 实轴上的函数，基：$\{e^{ikx}\}$

$$f(x) = \int dk \, \tilde{f}(k) e^{ikx}$$

第五章: 广义函数

- 向量空间 $\mathbb{R}^n$ 有个特殊基 $e_i = (0, \ldots 1, 0, \ldots)$, 仅第 i 个为非零项。$v = (v^1, \ldots v^n) = v^i e_i$
- 函数空间找类似的基 $\{\delta(x, y)\}_y$ 使任何函数

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\ \delta(x, y) f(y)$$

注意: $\delta(x, y)$ 类似单位矩阵

- 考虑 $f(x) = 1$ 当 $x \in [a, b]$ 否则为 0 的情形

$$f(x) = \int_a^b dy\, \delta(x, y) \implies$$

$\delta(x, y)$ 非零仅当 $x = y$, 仅依赖 $x - y$, 写成 $\delta(x - y)$, 和 x 轴间面积为 $1 \Rightarrow \delta(0)$ 无穷大

- 普通函数是 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的映射 (或 $\mathbb{C}$)，δ 不是
- 为了在函数空间上做积分变换的巨大方便引入用积分来定义的广义函数
- 量子力学里 $\delta(x-a)$ 做为自变量为 x 的波函数是描述在确切位置 a 的粒子的量子态
- 自从 Fourier 提出他的变换后数学家就一直为函数空间不够用而困扰。而理论物理学家 Dirac 在还没有任何现成数学框架的情况下脑补出了他的 δ 函数，启发了之后广义函数的严格数学构造
- 这是物理与数学共同演变、理论物理导致数学重大进步的一个著名例子

Green's 函数、基本解

- 非齐次方程 $\vec{\nabla}^2\Phi = N$
  可以看成 $L\Phi = N$ 的特例，L 是微分算子
- 在这个意义下其实 Dirac 的 δ 函数也就是电静力学中的点源的数学构造
- 参考线性代数求解 $M\,v = w$ 时，
  解是 $v = M^{-1}w$
- 如何求算子 L 的逆 L^{-1}?

线性代数的启发

设有组基e_i，做展开$v = v^i e_i$， $w = w^i e_i$，

、设 $f_i := M^{-1} e_i = G_i{}^j e_j \implies M f_i = e_i$.

则 $M(w^i f_i) = w^i M f_i = w^i e_i = w$.

$$\therefore v = w^i f_i = w^i G_i{}^j e_j$$

是 $Mv = w$ 的解，且 $v^j = w^i G_i{}^j$.

(这里用了 Einstein 求和记号)

从有限维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 到函数空间

- 作为向量空间 $\mathbb{R}^n$ 有组标准基 $(\delta_i)^j = (\delta_i)^j$
- 同时一列列排在一起这个基就成了单元矩阵: Kornecker 的 δ
- 在函数空间里 Dirac 的 $\delta(x-y)$ 函数扮演同样的角色
- $\delta_x(y) := \delta(x-y)$ 是标准基
- $\delta(x,y) := \delta(x-y)$ 是单元算子
- Dirac 的 bra、ket 记号清楚体现了这些

Green's 函数、基本解的解释

- 以 $\delta(x-y)$ 为基，求 $G(x,y)$ 使得 $L_x G(x,y) = \delta(x-y)$. 则
  $L_x \int dy\, G(x,y) N(y) = \int dy \delta(x-y) N(y) = N(x)$
- 因此 $L\Phi = N$ 的解就是
  $$\Phi(x) = \int dy\ G(x,y) N(y)$$
- $G(x,y)$ 称为 Green's function 或基本解
- ▸ 数学上可以参照线性代数看成算子 L 的逆，相当于 ${G_i}^j$ 连续统形式
- ▸ 物理解释：发自点 y 的源作用于点 x 的力场

总结

- 从物理以及其它学科得到偏微分方程
- PDE 经分离变量拆成 SL 问题
- 函数为向量，SL 问题 $\rightarrow$ 求算子的特征函数
- 积分变换：以特征函数 (特殊函数) 为基展开
- 用积分变化把 PDE 简化，用逆变换得到定解
- 函数空间做积分变换不够大，引入广义函数
- 用偏微分算子的逆 (Green's 函数) 解 PDE

参考书

- 与本课有关
  - Courant, Hilbert - Methods of Mathematical Physics
  - Lebedev - Special Functions and Their Applications
  - Sommerfeld - Partial Differential Equations in Physics
  - Vladimirov - Equations of Mathematical Physics
- 与本课无关
  - Bamberg, Sternberg - A Course in Mathematics for Students of Physics

关于阅读的建议

- 上面每本书我都只因为有需要而读过一小部分。有那么多东西要学要读，专业书又不是小说，没有特殊原因别立志全读完
- 这门课从初级角度讲一百多年以前的数学物理。上面最后列的书从很初级角度讲了些比较现代的，可提供一点感觉
- 做练习对于理解很重要，但专门刷习题集是本末倒置。有时能根据正常书的内容里给自己编个练习做，其乐无穷，也很有意义

- 阅读建议仅供参考。需要自己努力看懂，包括书中难免有的错误。不要迷信任何书，更不要迷信任何人包括自己。只有自己把逻辑都想通才算理解
- 读书应该是为了通过理解、体验与思考获得满足与充实，而不是炫耀或者自我欺骗
- 社交媒体提供一些有用的便利（比如上课的群)，但大多数时候造成大脑短路。为了你的头脑，请放下手机，远离 sns
- 在很多知识领域，“wikipedia 通常是（学习的）最佳起点和最糟终点”
- 科学是通过思考、推理、试验去探索发现 truth、发明有用方法的过程