

第二章

求解时域响应、传递函数

例：电动机的动态特性

(1) 磁场控制

励磁、力矩计算：(i_a 为定值)

$$\Phi = K_f i_f(t)$$

$$T_{em} = C_t \Phi i_a$$

$$\Rightarrow T_{em}(s) = K_m I_f(s)$$

励磁绕组：

$$V_f(s) = (R_f + L_f s) I_f(s)$$

转矩平衡方程：

$$T_{em}(s) = T_L(s) + T_d(s)$$

机械部分：

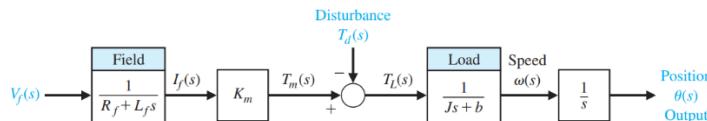
$$T_L(s) = J s^2 \Theta(s) + b s \Theta(s)$$

联立各式，忽略扰动 $T_d(s)$

$$\frac{\Theta(s)}{V_f(s)} = \frac{K_m}{s(Js + b)(L_f s + R_f)} \quad K_m = C_t K_f i_a \quad \Rightarrow \frac{\Theta(s)}{V_f(s)} = \frac{C_t K_f i_a}{s(\tau_s s + 1)(\tau_f s + 1)}$$

机械时间常数： $\tau_s = J/b$

电磁时间常数： $\tau_f = L_f/R_f$



(2) 电枢控制

励磁、力矩计算：(i_f 为定值)

$$\Phi = K_f i_f$$

$$T_{em} = C_t \Phi i_a(t)$$

$$\Rightarrow T_{em}(s) = K_t I_a(s)$$

电枢回路方程：

$$V_a(s) = (R_a + L_a s) I_a(s) + E_a(s)$$

$$E_a(s) = K_e s \Theta(s)$$

转矩平衡方程：

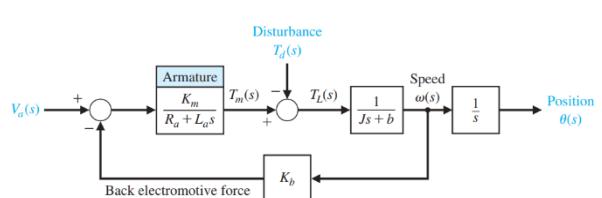
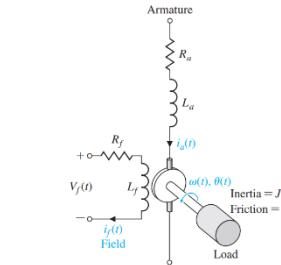
$$T_{em}(s) = T_L(s) + T_d(s)$$

机械部分：

$$T_L(s) = J s^2 \Theta(s) + b s \Theta(s)$$

联立各式，忽略扰动 $T_d(s)$

$$\frac{\Theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_t}{s[(J s + b)(L_a s + R_a) + K_e K_t]}$$



例：由 $Y(s)$ 获得 $y(t)$

$$Y(s) = \frac{1}{s(0.5s+1)^2(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{1.5}{0.5s+1} + \frac{0.5}{(0.5s+1)^2}$$

$$y(t) = (1 - 4e^{-t} + 3e^{-2t} + 2te^{-2t})u(t)$$

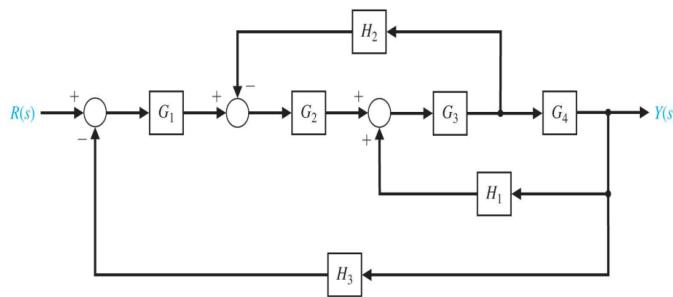
常用的几个公式：

$$t^n e^{-at} u(t) \Leftrightarrow \frac{n!}{(s+a)^n}$$

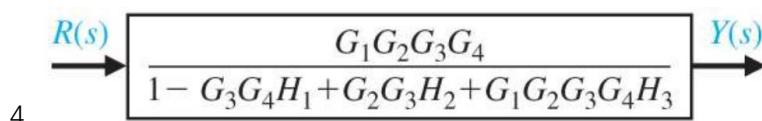
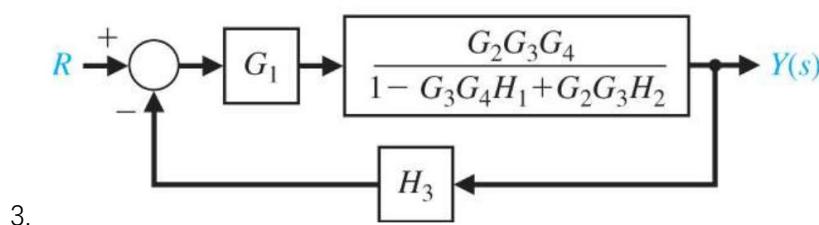
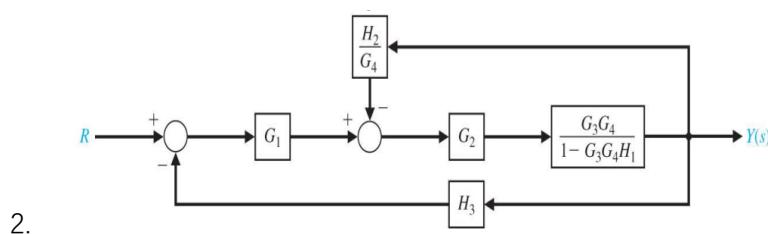
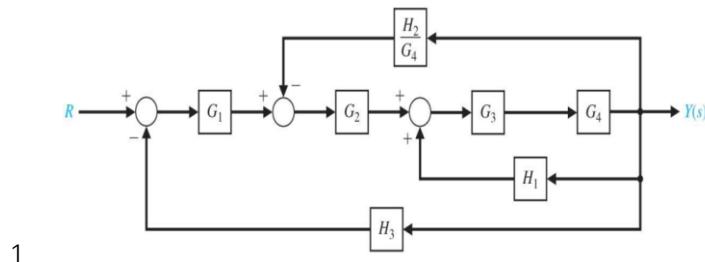
$$\cos \omega t e^{-at} u(t) \Leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

$$\sin \omega t e^{-at} u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

例：方框图化简



解：



第四章

1. 系统灵敏度、稳态误差计算

性共振的隐患。大型天线的伺服机构如图 P4.5 所示，天线、驱动电机和电机放大器的传递函数近似为

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

其中， $\zeta = 0.707$, $\omega_n = 15$ 。功率放大器的传递函数近似为

$$G_1(s) = \frac{k_a}{\tau s + 1}$$

其中， $\tau = 0.15$ s。

- (a) 确定系统对 k_a 的灵敏度。
- (b) 当干扰信号为 $T_d(s) = 10/s$, 输入为 $R(s) = 0$ 时, 选择 k_a 的合适取值, 使系统的稳态误差小于 0.10° 。
- (c) 当系统工作在开环状态下(即 $k_s = 0$), 且输入为 $R(s) = 0$ 时, 试计算干扰信号 $T_d(s) = 10/s$ 导致的系统误差。

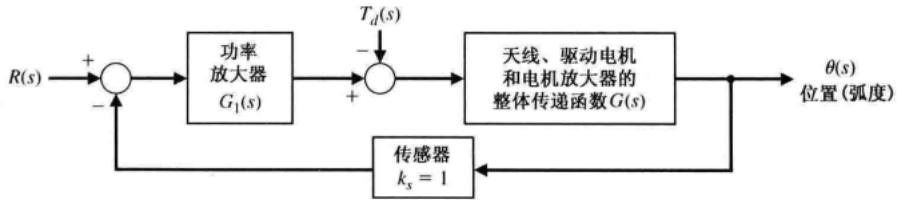


图 P4.5 天线控制系统

P4.5 The closed-loop transfer function is

$$T(s) = \frac{G_1 G(s)}{1 + G_1 G(s)} .$$

- (a) The sensitivity of $T(s)$ to changes in k_a is

$$S_{k_a}^T = \frac{1}{1 + G_1 G(s)} .$$

- (b) The transfer function from $T_d(s)$ to $\theta(s)$ is

$$\theta(s) = \frac{G(s)}{1 + G_1 G(s)} T_d(s) .$$

Since we want $\theta(s)$ due to a disturbance, $E(s) = -\theta(s)$ and

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{-G(s)}{1 + G_1 G(s)} \right) \frac{10}{s} = \frac{-10}{k_a} .$$

Since our maximum desired error magnitude is

$$e_{ss} = \frac{0.10^\circ \cdot \pi}{180} = 0.001745 \text{ rad} ,$$

we select

$$k_a \geq 5730 .$$

- (c) The open-loop transfer function is

$$\theta(s) = G(s) T_d(s) .$$

So,

$$e_{ss} = - \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) \left(\frac{10}{s} \right) \rightarrow \infty .$$

2. 增益波动导致的稳态误差波动 (略)

第五章

1.由阶跃响应性能指数估算系统阻尼比、自然震荡频率

10. 某系统的闭环传递函数 $T(s)$ 为

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2500}{(s+20)(s^2+10s+125)}$$

利用主导极点的概念，估计系统的超调量。

- a. P. O. $\approx 5\%$ b. P. O. $\approx 20\%$ c. P. O. $\approx 50\%$ d. 没有超调

附加实极点远离虚轴，忽略

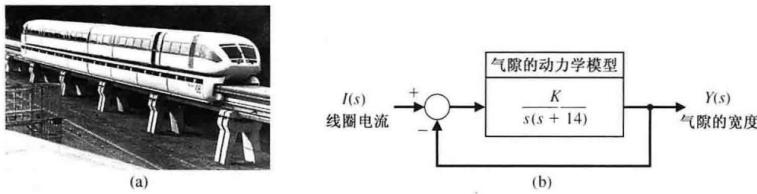
$$T(s) = \frac{125}{s^2 + 10s + 125} \Rightarrow \omega_n = 5\sqrt{5} \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad P.O. = 20.79\%$$

2. ITAE 最优准则

磁悬浮控制系统的框图如图 E5.3(b) 所示。若输入为阶跃信号，

- (a) 利用表 5.6, 确定增益 K 的值, 使系统成为 ITAE 指标意义下的最优系统。
(b) 利用图 5.8, 确定系统对阶跃输入 $I(s)$ 的超调量 P. O.。

答案: (a) $K = 100$ (b) P. O. = 4.6%



$$T(s) = \frac{K}{s^2 + 14s + K}$$

(a) 二阶 ITAE 最优: $s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2$

因此 $14 = 1.4\sqrt{K}$ $K = 100$

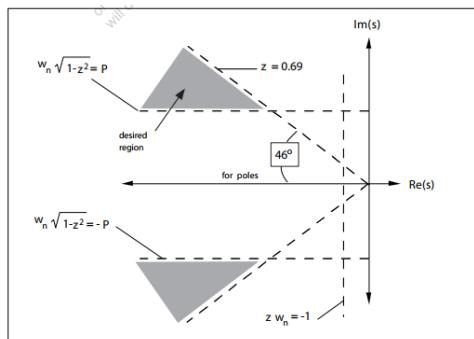
(b) $\omega_n = 10, \zeta = 0.7, P.O. = 4.60\%$

3. 根据超调量、调节时间等设计系统传递函数

E5.10 二阶系统的闭环传递函数为 $T(s) = Y(s)/R(s)$, 系统阶跃响应的设计指标要求为:

- (1) 超调量 P. O. $\leq 5\%$ 。
(2) 调节时间 $T_s < 4$ s (按 2% 准则)。
(3) 峰值时间 $T_p < 1$ s。

试确定 $T(s)$ 的极点配置范围, 以便获得预期的响应特性。



$$(1) \zeta \geq 0.69 \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \zeta \leq 46.4^\circ$$

$$(2) \zeta \omega_n > 1$$

$$(3) \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n > \pi$$

二阶系统的极点表达式: $s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n$

4. 根据超调量、调节时间设计 PID 参数

AP5.9 某单位负反馈控制系统如图 AP5.9 所示, 其中受控对象为

$$G(s) = \frac{1}{s(s+15)(s+25)}$$

若采用比例积分控制器, 且增益分别为 K_p 和 K_I , 试设计增益 K_p 和 K_I , 使得主导极点对应的阻尼比 ζ 为 0.707, 并计算此时系统单位阶跃响应的峰值时间和调节时间(按 2% 准则)。

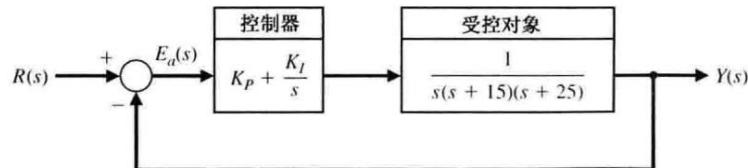


图 AP5.9 带有比例积分控制器的反馈控制系统

AP5.9 The closed-loop characteristic equation is

$$s^4 + 40s^3 + 375s^2 + K_P s + K_I = 0.$$

The desired characteristic equation is

$$(s+a)(s+b)(s^2 + \sqrt{2}\omega_n s + \omega_n^2) = 0.$$

Expanding the desired characteristic equation and equating terms to the actual characteristic equation yields

$$ab\omega_n^2 = K_I, \quad \omega_n^2(a+b) + \sqrt{2}ab\omega_n = K_P$$

$$\sqrt{2}(a+b)\omega_n + ab = 375, \quad \sqrt{2}\omega_n + a + b = 40$$

This represents 4 equations with 5 unknowns (a , b , K_P , K_I , and ω_n). We can choose one variable as part of the controller design. Let $K_I = 0.1K_P$. Then, solving the 4 equations for the remaining 4 variables yields $a = 29.15$, $b = 0.1$, $K_P = 1720$, $K_I = 172$, and $\omega_n = 7.6$. The resulting $T_s = 1.1$ s and $P.O. = 6.4\%$, as shown in Figure AP5.9.

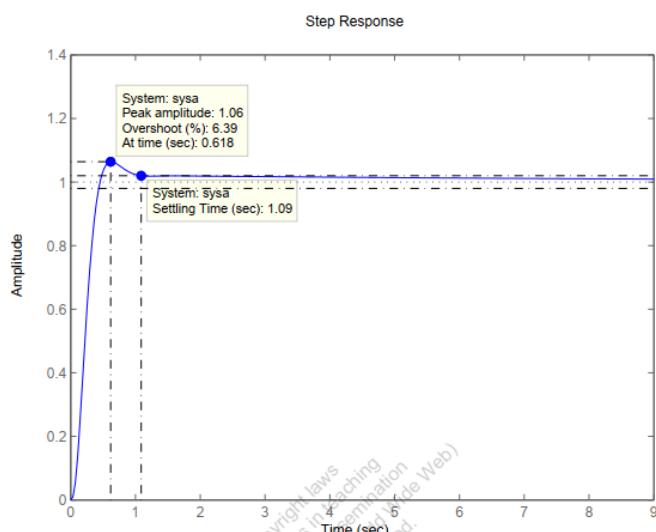


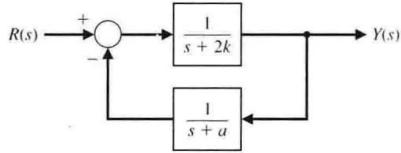
FIGURE AP5.9

Step response for $K_P = 1720$ and $K_I = 172$.

5.根据超调量、调节时间设计控制器、传感器参数

P5.21 考虑图 P5.21 所示的闭环系统, 试确定参数 k 和 a 的合适取值, 使

- (a) 闭环系统单位阶跃响应的稳态误差为零。
- (b) 闭环系统单位阶跃响应的超调量小于 5%。



P5.21 The closed-loop transfer function is

$$T(s) = \frac{s + a}{s^2 + (2k + a)s + 2ak + 1}.$$

- (a) If $R(s) = 1/s$, we have the tracking error

$$E(s) = R(s) - Y(s) = [1 - T(s)]R(s)$$

or

$$E(s) = \frac{s^2 + (2k + a - 1)s + 2ak + 1 - a}{s^2 + (2k + a)s + 2ak + 1} \cdot \frac{1}{s}.$$

From the final value theorem we obtain

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{2ak + 1 - a}{2ak + 1}.$$

Selecting $k = (a - 1)/(2a)$ leads to a zero steady-state error due to a unit step input.

- (b) To meet the percent overshoot specification we desire $\zeta \geq 0.69$. From $T(s)$ we find $\omega_n^2 = 2ak + 1$ and $2\zeta\omega_n = 2k + a$. Therefore, solving for a and k yields

$$a = 1.5978 \text{ and } k = 0.1871$$

when we select $\zeta = 0.78$. We select $\zeta > 0.69$ to account for the zero in the closed-loop transfer function which will impact the percent overshoot. With a and k , as chosen, we have

$$T(s) = \frac{s + 1.598}{s^2 + 1.972s + 1.598}$$

and the step response yields $P.O. \approx 4\%$.

第六章

1.用劳斯表辅助因式分解

$$q(s) = s^5 + 2s^4 + 25s^3 + 50s^2 + 24s + 48 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 25 & 24 \\ s^4 & 2 & 50 & 48 \\ s^3 & 0 & 0 & \end{array}$$

由四次方对应行找到子式 $2s^4 + 50s^2 + 48$

$$q(s) = (s^5 + 25s^3 + 24s) + (2s^4 + 50s^2 + 48) = (s + 2)(s^2 + 24)(s^2 + 1)$$

2.用劳斯表辅助因式分解

$$q(s) = s^3 + 5s^2 + 11s + 15$$

劳斯表

s3	1	11
s2	5	15
s1	8	0
s0	15	

稳定

向左移动虚轴一格 (移动多少? 一格一格试呗!)

$$q(s_n) = (s_n - 1)^3 + 5(s_n - 1)^2 + 11(s_n - 1) + 15 = s_n^3 + 2s_n^2 + 4s_n + 8$$

劳斯表

s3	1	4
s2	2	8
s1	0	0
s0	0	

由第二行知道子式 $q(s_n) = (s_n^2 + 4)(s_n + 2)$

代回去 $q(s) = (s + 1 + j2)(s + 1 - j2)(s + 3)$

3.用劳斯表作稳定性设计

12. 考虑图 6.31 所示的单位反馈控制系统, 其中,

$$G(s) = \frac{1}{(s - 2)(s^2 + 10s + 45)}, \quad G_c(s) = \frac{K(s + 0.3)}{s}$$

系统稳定时, K 的取值范围为

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a. $K < 260.68$ | b. $50.06 < K < 123.98$ |
| c. $100.12 < K < 260.68$ | d. 对所有的 $K > 0$, 系统均不稳定 |

$$s(s - 2)(s^2 + 10s + 45) + K(s + 0.3) = 0$$

劳斯表

s4	1	25	0.3K
s3	8	K-90	0
s2	b1	0.3K	0
s1	c1	0	
s0	0.3K		

$$b_1 = \frac{290 - K}{8} > 0 \Rightarrow K < 290$$

$$c_1 = K - 90 - 2.4K \frac{8}{290 - K} > 0 \Rightarrow K^2 - 360.8K + 26100 < 0$$

$$\Leftrightarrow 100.12 < K < 260.68$$

4.混合设计

DP6.3 某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G_c(s)G(s) = \frac{K(s+2)}{s(1+\tau s)(1+2s)}$$

其中, K 和 τ 为两个待定参数。

- 确定参数 K 和 τ 的取值区域, 以便保证系统稳定, 并绘制 K - τ 的稳定域。
- 确定 K 和 τ 的取值, 使系统斜坡响应的稳态误差小于或等于输入信号斜率的 25%。
- 在(b)所得结果的基础上, 计算系统阶跃响应的超调量。

DP6.3 (a) The closed-loop characteristic equation is

$$2\tau s^3 + (\tau + 2)s^2 + (K + 1)s + 2K = 0.$$

The Routh array is

s^3	2 τ	$K + 1$
s^2	$\tau + 2$	$2K$
s^1	b	
s^0	2 K	

where

$$b = \frac{(\tau + 2)(K + 1) - 4K\tau}{(\tau + 2)}.$$

Examining the first column of the Routh array, we determine that for stability $\tau > 0$, $K > 0$ and setting $b > 0$ yields the relationships:

$$(1) K < \frac{\tau + 2}{3\tau - 2} \text{ when } \tau > \frac{2}{3} \quad (2) K > 0 \text{ when } 0 < \tau \leq \frac{2}{3}.$$

The plot of τ versus K is shown in Figure DP6.3a.

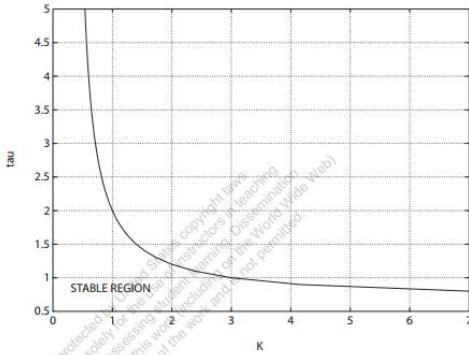


FIGURE DP6.3

(a) The plot of τ versus K .

(b) The steady-state error is

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v}, \quad \text{where } K_v = 2K.$$

So,

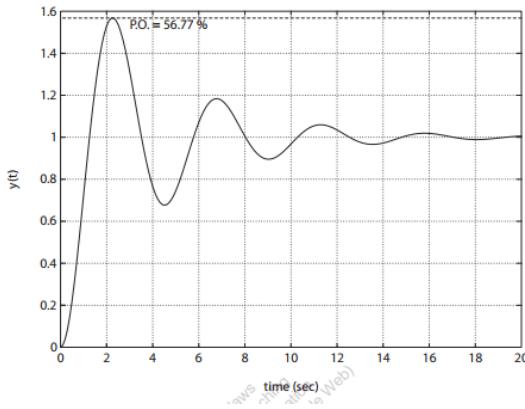
$$\frac{e_{ss}}{A} = \frac{1}{2K}.$$

We require that $e_{ss} \leq 0.25A$, therefore

$$K \geq 2.$$

One solution is to select $\tau = 0.5$, then we remain within the stable region.

(c) The step response is shown in Figure DP6.3b. The percent overshoot is $P.O. = 57\%$.



第七章

1.绘制正增益根轨迹

考虑某磁带录音机的速度控制系统，其负反馈回路的传递函数为 $H(s) = 1$ ，前向传递函数为

$$L(s) = G_c(s)G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s^2+4s+5)}$$

- (a) 绘制以 K 为参数的根轨迹，并验证，当 $K=6.5$ 时，主导极点为 $s = -0.35 \pm j0.80$ 。
 (b) 根据(a)给出的主导极点，估算系统阶跃响应的调节时间和超调量。

(a) 绘图：

- 【1】确定零极点：零点：无穷远，极点：0, -2, -2+j, -2-j
 【2】确定实轴上的根轨迹：-2 和 0 之间
 【3】确定渐近线交点，渐近线斜率

$$\sigma_A = \frac{0 - 2 - 2 - 2}{4} = -1.5 \quad \Phi_A = 45^\circ, 135^\circ, 215^\circ, 305^\circ$$

【4】确定根轨迹与虚轴交点

s4	1	13	K
s3	6	10	0
s2	34/3	K	0
s1	c1	0	
s0	K		

$$K > 0 \quad c1 = 10 - 18K/34 > 0$$

$$K < 170/9$$

$K=170/9$ 时，特征方程为 $(s^2 + \frac{5}{3})(s^2 + 6s + \frac{34}{3})$ 与虚轴交点为： $\pm\sqrt{\frac{5}{3}}j = \pm 1.291j$

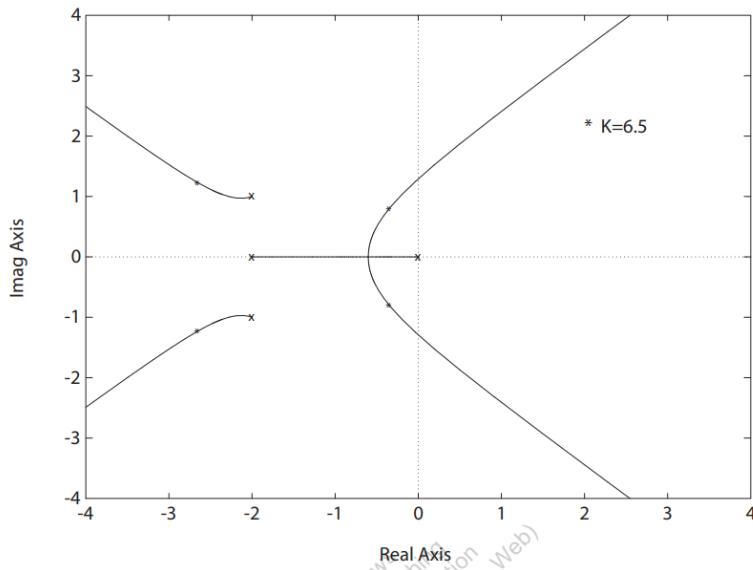
【5】确定轨迹交界点

$$\frac{d}{ds}[s(s+2)(s^2+4s+5)] = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -0.602$$

【6】确定出射角入射角

对极点 $-2+j$ ，出射角：

$$-90^\circ - 90^\circ - 153.4^\circ + 180^\circ + 360^\circ = 206.6^\circ$$



$$\text{验证 } K=6.5 \text{ 时, } 1+L(s)=0 \quad s(s+2)(s^2+4s+5)+6.5=0$$

$$\text{解得 } s_{1,2} = -0.349 \pm j0.800 \quad s_{3,4} = -2.651 \pm j1.228$$

(b) 取离虚轴更近的极点作为主要的共轭复极点对系统

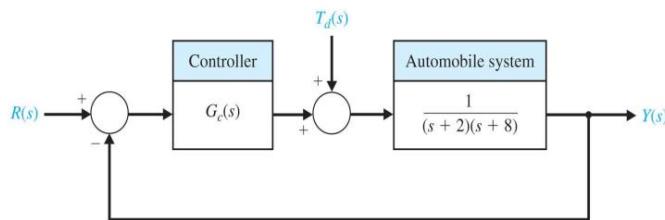
$$s_{1,2} = -0.349 \pm j0.80$$

$$(s + 0.349 + j0.800)(s + 0.349 - j0.80) = (s^2 + 0.698s + 0.7618)$$

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n = 0.698 \\ \omega_n^2 = 0.7618 \end{cases} \Rightarrow \zeta = 0.40 \quad \omega_n = 0.873$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 11.46 \text{ sec} \quad P.O. = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} (\%) = 25.38\%$$

2. 用根轨迹设计 PID 器



- DS1 阶跃输入稳态误差为零
- DS2 跟踪等速度输入信号时, 稳态的位移误差在数值上小于设定值信号的速度幅值的25%
- DS3 阶跃输入的百分比超调量小于5%
- DS4 阶跃输入的调整时间小于1.5 s (2%准则)

【1】由 DS1, 采用 PI 控制器

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+8)}$$

$$G_c(s) = \frac{K_P s + K_I}{s} = K_P \frac{s + \frac{K_I}{K_P}}{s}$$

➤ 为满足DS2, 速度误差系数为:

$$[2] \quad K_v = \frac{A}{e_{ss}} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) \geq \frac{A}{0.25A} = 4$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_P \left(s + \frac{K_I}{K_P} \right)}{s} \frac{1}{(s+2)(s+8)} \\ = \frac{K_I}{16} > 4$$

➤ 为满足DS2, 积分增益必须满足 $K_I > 64$

➤ 为满足DS3, $P.O. \leq 5\%$, 阻尼比必须为 $\zeta \geq 0.69$

➤ 为满足调整时间DS4:

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} \leq 1.5$$

则: $\zeta \omega_n \geq 2.6$

[3] [4]

【5】稳定性

➤ 闭环传递函数为:

$$T(s) = \frac{K_P s + K_I}{s^3 + 10s^2 + (16 + K_P)s + K_I}$$

➤ Routh阵列:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 16 + K_P \\ s^2 & 10 & K_I \\ s & \frac{10(K_P + 16) - K_I}{10} & 0 \\ 1 & K_I \end{array}$$

$$K_P > \frac{K_I}{10} - 16, \quad K_I > 0$$

➤ DS4要求主导极点在 $S = -2.6$ 的左边。开环系统有 3 个极点, $S = 0, -2, -8$; 1 个零点, $S = -K_I/K_P$

➤ 两条无穷远处根轨迹的渐近线的延长线与正实轴的夹角 $\Phi = -90^\circ$ 和 $+90^\circ$, 因此必须保证渐近线的延长线与实轴交点的坐标 $\sigma_A < -2.6$, 使两条根轨迹分支弯曲进入期望区域:

$$\sigma_A = \frac{\sum(-p_i) - \sum(-z_i)}{n - M} = \frac{-2 - 8 - \left(-\frac{K_I}{K_P} \right)}{2} = -5 + \frac{1}{2} \frac{K_I}{K_P} \\ < -2.6$$

$$[6] \quad \therefore \frac{K_I}{K_P} < 4.8$$

(因为根轨迹会在这条渐近线的右边, 所以得确保渐近线在 -2.6 左边才能确保可能有点在 -2.6 的左边)

$$\begin{aligned}
 K_I &> 64 \\
 K_P &> \frac{K_I}{10} - 16 \\
 \frac{K_I}{K_P} &< 4.8
 \end{aligned}
 \quad [7]$$

据此估算 $K_P=26$, $K_I=65$

► 得到 PI 控制器:

$$G_c(s) = 26 + \frac{65}{s}$$

[8] 验算结果

3. 用根轨迹设计参数 (emmm 手画不出来的根轨迹究竟有什么用?)

6. 考虑图 7.74 所示的控制系统, 其开环传递函数为

$$L(s) = G_c(s)G(s) = \frac{K(s^2 + 5s + 9)}{s^2(s + 3)}$$

利用根轨迹法, 确定增益 K 的合适取值, 使得系统主导极点的阻尼比为 $\zeta = 0.5$ 。

$$\begin{array}{llll} \text{a. } K = 1.2 & \text{b. } K = 4.5 & \text{c. } K = 9.7 & \text{d. } K = 37.4 \end{array}$$

$$1 + L(s) = 0 \Rightarrow s^2(s + 3) + K(s^2 + 5s + 9) = 0$$

用附加极点的系统去设计 $(s + p_3)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = 0$

令 $\zeta = 0.5$ 对照系数

$$\begin{cases} p_3 + \omega_n = 3 + K \\ p_3\omega_n + \omega_n^2 = 5K \\ p_3\omega_n^2 = 9K \end{cases}$$

(没有 matlab 而用 911 解方程要手动化简成一个式子)

$$\text{将 1 式代入 2 式得 } \omega_n = \frac{5K}{3+K} \quad p_3 = 3 + K - \frac{5K}{3+K}$$

$$\text{代入 3 式, 方程: } \frac{25K^2(K^2+K+9)}{(3+K)^3} = 9K$$

解得 $K=4.5$

(当 ζ 不是 0.5 时, 无法代入, 联立 1、2 式可能解出的结果含有根式, 计算量会急增)

4. 用根轨迹进行 PID 整定

AP7.14 考虑图 AP7.14 所示的单位反馈控制系统, 其受控对象的传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s(s + 10)(s + 7.5)}$$

利用齐格勒-尼科尔斯方法为该系统设计一个 PID 控制器。计算系统的单位阶跃响应和单位脉冲扰动的响应。当输入为单位阶跃信号时, 计算系统输出的最大超调量和调节时间。

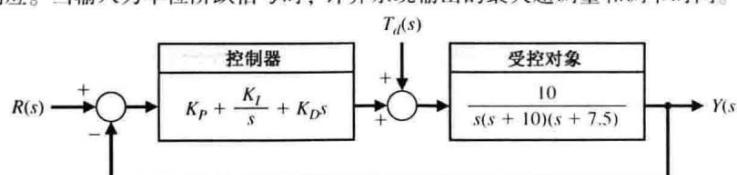


图 AP7.14 带有 PID 控制器的单位反馈控制系统

AP7.14 The root locus of the uncompensated transfer function is shown in Figure AP7.14a. It can be seen that the system is unstable for $K_u = 131.25$ with a period of $T_u = 0.72$, as illustrated in Figure AP7.14b. Using the Ziegler-Nichols design formulas yields $K_P = 0.6K_u = 78.75$, $K_I = 1.2K_u/T_u = 218.75$, and $K_D = 0.6K_uT_u = 7.0875$ where

- (1) 首先 P 控制器, 绘制关于 K_P 的根轨迹图 (额…其实不绘制也没问题)
- (2) 找到与虚轴的交点

$$L(s) = \frac{10K}{s(s+7.5)(s+10)}$$

$$1 + K \frac{10}{s(s+7.5)(s+10)} = 0 \Rightarrow s^3 + 17.5s^2 + 75s + 10K = 0$$

劳斯表

s3	1	75
s2	17.5	$10K$
s1	b_1	0
s0	10K	

$$\begin{cases} K > 0 \\ b_1 = 75 - \frac{10K}{17.5} > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < K < 131.25$$

$K=131.25$ 时, $s^3 + 17.5s^2 + 75s + 1312.5 = (s^2 + 75)(s + 17.5)$

此时, 系统闭环传递函数为:

$$T(s) = \frac{1312.5}{(s^2 + 75)(s + 17.5)} = \frac{-\frac{210}{61}s + \frac{3675}{61}}{s^2 + 75} + \frac{\frac{210}{61}}{s + 17.5}$$

其中第二项为瞬态反应, 第一项对应 \cos 的稳态响应, 且角频率为 $\omega = \sqrt{75} \text{ rad/s}$

$$\text{故 } K_u = 131.25 \quad T_u = \frac{2\pi}{\sqrt{75}} = 0.72 \text{ sec}$$

- (3) 套公式

$$K_P = 0.6K_u = 78.75 \quad K_I = \frac{1.2K_u}{T_u} = 218.75 \quad K_D = \frac{0.6K_uT_u}{8} = 7.0875$$

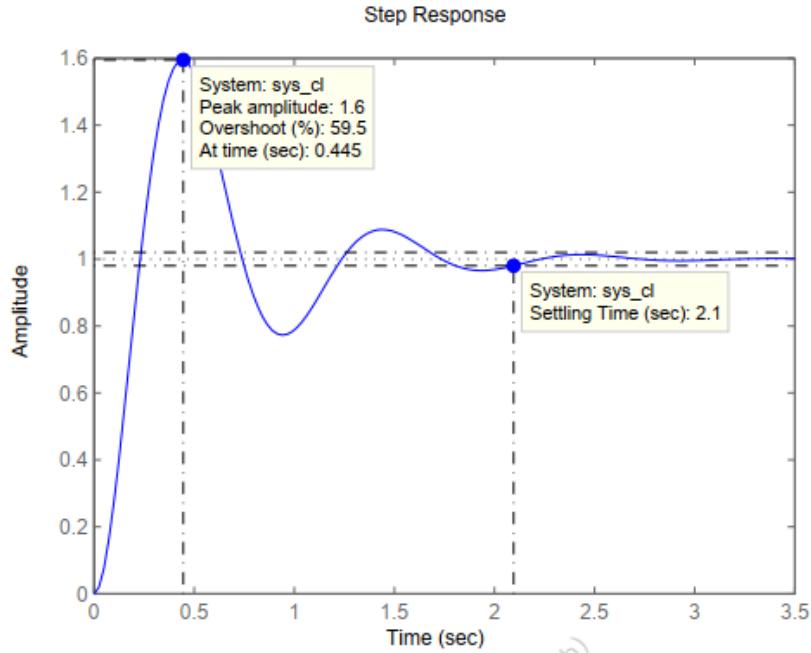
- (4) 验证阶跃响应超调量、调节时间等。

$$L(s) = \frac{10(7.0875s^2 + 78.75s + 218.75)}{s^2(s+7.5)(s+10)} = \frac{70.875(s + \frac{50}{9})^2}{s^2(s+7.5)(s+10)}$$

$$T(s) = \frac{70.875(s + \frac{50}{9})^2}{s^2(s+7.5)(s+10) + 70.875(s + \frac{50}{9})^2}$$

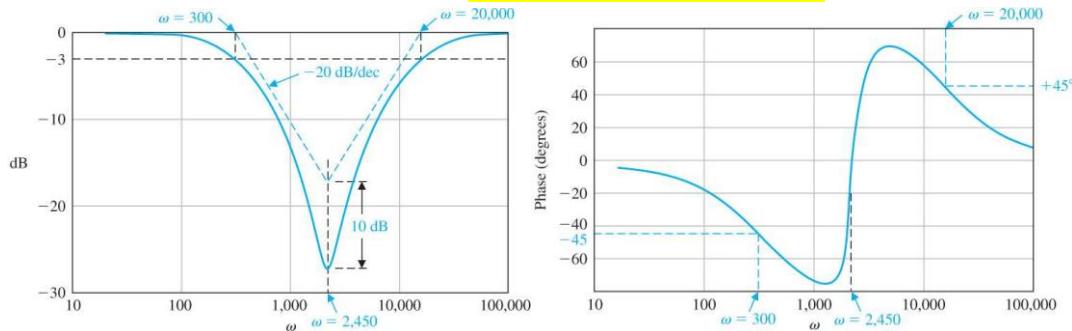
$$= \frac{70.875(s + \frac{50}{9})^2}{(s + 1.9 - j6.3)(s + 1.9 + j6.3)(s + 6.85 - j1.8)(s + 6.85 + j1.8)}$$

零极点都不能忽略。



第八章/第九章/第十章

1. 根据 Bode 图写传递函数 (有谐振) 【扫频仪: 闭环 Bode 图!】



(1) 起始平直, 无纯积分环节, $K_b=1$

(2) 下降点, $\omega=300\text{rad/s}$ 对应一个极点 300

上升点, $\omega=2450\text{rad/s}$ 对应共轭复零点或者二重零点

看相频图, $\omega=2450\text{rad/s}$ 对应点不是 0° , 故为共轭复零点 (或者看幅频图渐近线与实际线并不是很重合可以确定)

平缓点, $\omega=20000\text{rad/s}$ 对应一个极点 20000

(3) 确定共轭复零点的阻尼比

幅值渐近线与最低幅值之差为 10dB, 意即谐振峰值为 $\sqrt{10}$

套公式

► 当 $\zeta < 0.707$ 时:

$$M_{po} = 10^{\frac{1}{2}} = |G(j\omega_r)|$$

$$= \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$\zeta \approx 0.16$, $\zeta \approx 0.99$ (舍去)

(4) 确定传递函数

➤ 传递函数：

$$T(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1}{\left(\frac{s}{p_1} + 1\right)\left(\frac{s}{p_2} + 1\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{s}{2450}\right)^2 + 0.32\frac{s}{2450} + 1}{\left(\frac{s}{300} + 1\right)\left(\frac{s}{20000} + 1\right)}$$

2. 根据 Bode 图写传递函数

15. 图 8.58 所示伯德图对应的传递函数为

a. $G(s) = \frac{100(s + 10)(s + 5000)}{s(s + 5)(s + 6)}$

b. $G(s) = \frac{100}{(s + 1)(s + 20)}$

c. $G(s) = \frac{100}{(s + 1)(s + 50)(s + 200)}$

d. $G(s) = \frac{100(s + 20)(s + 5000)}{(s + 1)(s + 50)(s + 200)}$

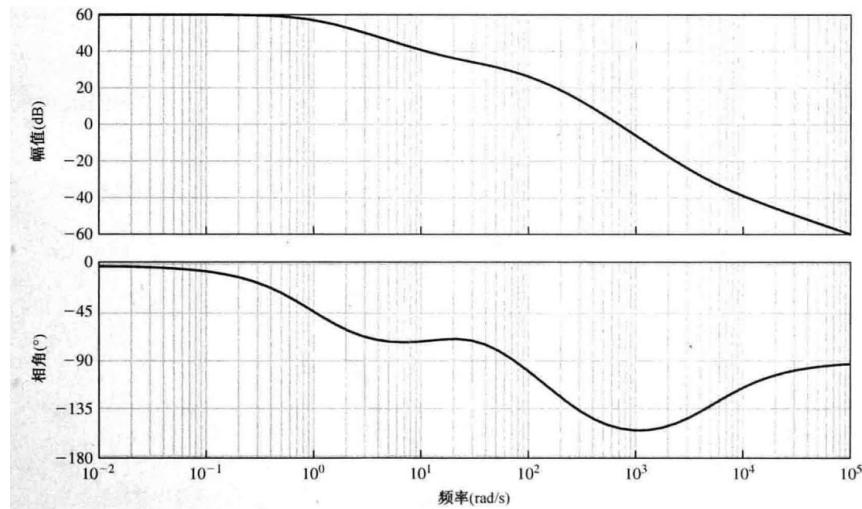


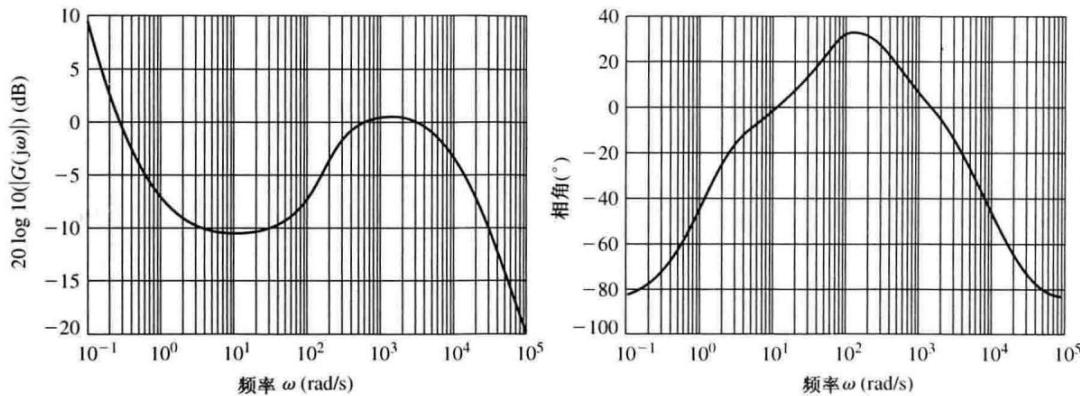
图 8.58 $G(j\omega)$ 的伯德图

增益 60dB、相角 0° 平缓开始：无纯积分环节，增益为正，且为 $60\text{dB} = 1000$

据此便可以选 d

在高频段，增益 -20dB/dev，相角 -90°：极点数比零点数多 1

3. 根据 Bode 图写传递函数



$$G(s) = \frac{10000(s+1)(s+80)}{s(s+300)(s+9000)}$$

解：

- [1] 0.1rad/s->1rad/s 频段, -20dB/dev: 系统有一个位于原点的实极点, 开环增益为-10dB 即 $K_b=0.316$
- [2] 1rad/s 左右, 增益较平缓, 相位增加且在 1rad/s 时大致为-45°: 有一个零点: -1
- [3] 其它的点……就看不出来了, 但可以推断出有两个零点 (相角超过 0°), 三个极点 (相角最后是-90°) (其中一个位于原点)

4. 根据 Bode 图写传递函数

P8.24 薄膜传输闭环系统 $T(s)$ 的伯德图如图 P8.24 所示^[17], 假设 $T(s)$ 有两个主导共轭极点。

- (a) 确定系统的最佳二阶近似模型;
- (b) 确定系统的带宽;
- (c) 求系统对阶跃输入信号的超调量和调节时间(按 2% 准则)。

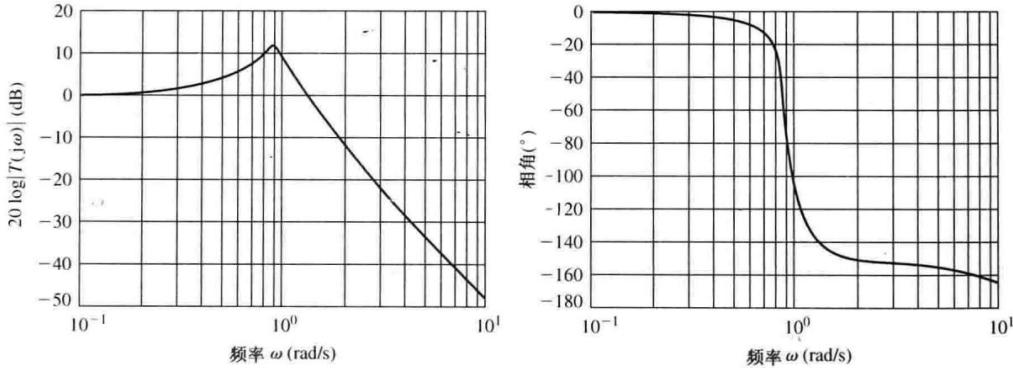


图 P8.24 薄膜传输闭环系统的伯德图

P8.24 (a) From the Bode plot we see that

$$20 \log_{10} M_{p\omega} = 12$$

or $M_{p\omega} = 3.981$. For a second-order system we know that

$$M_{p\omega} = (2\zeta\sqrt{1-\zeta^2})^{-1}.$$

Solving for ζ (with $M_{p\omega} = 3.981$) yields $\zeta = 0.12$. Also, from the Bode plot,

$$\omega_r = 0.9 \text{ rad/sec}.$$

So,

$$\omega_n = \frac{\omega_r}{\sqrt{1-2\zeta^2}} = 0.91.$$

Therefore, the second-order approximate transfer function is

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{0.83}{s^2 + 0.22s + 0.83}.$$

- (b) The predicted overshoot and settling time are $P.O. = 68\%$ and $T_s = 37$ sec.

5.根据开环传递函数绘制 Bode 图

P8.27 某单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$L(s) = G_e(s)G(s) = \frac{K(s + 50)}{s^2 + 10s + 25}$$

试绘制相应的伯德图，并说明对数幅频特性曲线 $20 \log|L(j\omega)|$ 如何随 K 的变化而变化。当 $K = 0.75, 1$ 和 10 时，列表说明与每个 K 相应的穿越频率（当 $20 \log|L(j\omega)| = 0$ dB 时的频率 ω_c ），低频段的对数幅值（当 $\omega \ll 1$ 时的对数幅值 $20 \log|L(j\omega)|$ ），并确定闭环带宽。

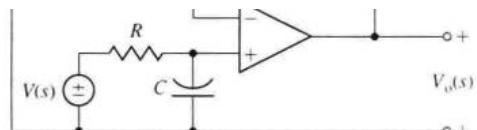


图 P8.26 运算放大器

【1】绘制 Bode 图

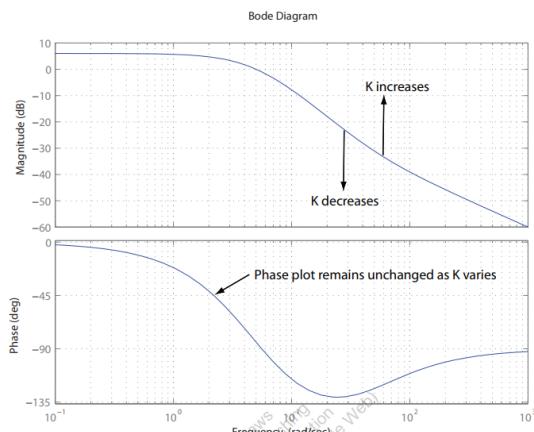


FIGURE P8.27
Bode plot for $K = 1$

手绘的折线图略

【2】计算带宽、增益交界频率

P8.27 The frequency response is shown in Figure P8.27.

K	0.75	1	10
$ L(j\omega) _{j\omega=0}$, dB	3.52	12.04	26.02
ω_b , rad/s	8.3	14.0	33.4
ω_c , rad/s	3.5	8.7	22.9

TABLE P8.27 System performance as K varies.

穿越频率

$$\frac{K^2(\omega^2 + 2500)}{(25 - \omega^2)^2 + 100\omega^2} = 1$$

闭环带宽（截止频率） $\omega_b = 1.6\omega_c$ $0.2 \leq \zeta \leq 0.8$

$K=0.75$ 时， $\omega_c = 3.55\text{rad/s}$ $\omega_b = 5.68\text{rad/s}$

（闭环带宽和答案不太一样…毕竟近似的）

6.用 Bode 图设计参数

麻醉过程的模型如图 DP8.4 所示，试确定增益 K 的合适取值，使谐振峰值满足 $M_{p\omega} \leq 1.5$ 时，闭环系统的带宽达到最大，并确定此时的带宽。

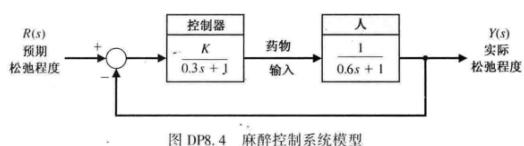


图 DP8.4 麻醉控制系统模型

DP8.4 We have a second-order loop transfer function

$$G_c(s)G(s) = \frac{K}{(0.3s+1)(0.6s+1)}.$$

With $M_{p\omega} = 1.5$, we determine that

$$M_{p\omega} = (2\zeta\sqrt{1-\zeta^2})^{-1} \quad \text{or} \quad \zeta = 0.3568.$$

Now the characteristic equation is

$$s^2 + 5s + 5.56(1+K) = 0.$$

So, solving $2\zeta\omega_n = 5$ yields $\omega_n = 7$. Therefore,

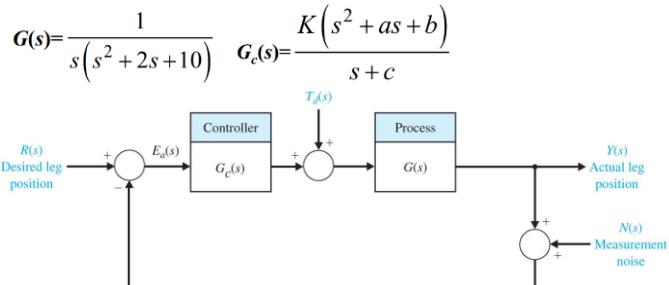
$$K = 0.18\omega_n^2 - 1 = 7.82.$$

The closed-loop transfer function is

$$T(s) = \frac{K}{K+1} \frac{5.56(K+1)}{s^2 + 5s + 5.56(K+1)}.$$

So, the overall gain of the standard second-order system will be attenuated by the factor $K/(K+1)$. To compensate, we amplify the gain by a small factor. Thus we choose $K = 10$. The bandwidth is $\omega_b = 11.25$ rad/sec and the peak magnitude is $M_{p\omega} = 1.5$.

7. 用 Bode 图设计 PID



► 设计指标:

- **DS1:** 闭环带宽大于1Hz
- **DS2:** 阶跃输入百分比超调量小于15%
- **DS3:** 对阶跃输入信号的稳态跟踪误差为零

► 开环传递函数:

$$G_c(s)G(s) = \frac{K(s^2 + as + b)}{s(s^2 + 2s + 10)(s + c)}$$

► 闭环传递函数:

$$T(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

$$= \frac{K(s^2 + as + b)}{s^4 + (2+c)s^3 + (10+2c+K)s^2 + (10c+Ka)s + Kb}$$

► 闭环系统特征方程:

$$s^4 + (2+c)s^3 + (10+2c+K)s^2 + (10c+Ka)s + Kb = 0$$

- 闭环系统为四阶系统, 选择参数 K 、 a 、 b 、 c , 使其中一个或者两个极点为主导极点, 并配置到能够满足性能指标的位置

► 假设期望的特征多项式:

$$P_d(s) = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s^2 + d_1 s + d_0)$$

► 选择 ζ 、 ω_n 满足性能指标, 使 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ 的根为主导极点, 它们与虚轴水平距离 $s = -\zeta\omega_n$

► 对 $s^2 + d_1 s + d_0 = 0$, 令: $d_1 = 2\alpha\zeta\omega_n$, $\alpha > 1$. 如果为共轭复极点, 则与虚轴水平距离 $s = -\alpha\zeta\omega_n$

► 若取 $d_0 = \alpha^2\zeta^2\omega_n^2$, 则: $s^2 + d_1 s + d_0 = (s + \alpha\zeta\omega_n)^2 = 0$

► 这两个重实极点与虚轴的水平距离 $s = -\alpha\zeta\omega_n$. 增大 α , 可以使这两个根远离虚轴和主导极点, 成为非主导极点

► 如 $\alpha = 12$, 非主导重实极点响应衰减快且无振荡

➤ 选非主导极点为重实极点, 特征多项式为:

$$\begin{aligned} S^4 + (2+c)S^3 + (10+2c+K)S^2 + (10c+Ka)S + Kb &= \\ = S^4 + 2\zeta\omega_n(1+\alpha)S^3 + \omega_n^2\{1+\alpha\zeta^2(4+\alpha)\}S^2 + \\ + 2\alpha\omega_n^3(1+\zeta^2\alpha)S + \alpha^2\zeta^2\omega_n^4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

➤ 对应项系数相等, K 、 a 、 b 、 c 为:

$$\begin{aligned} 2\zeta\omega_n(1+\alpha) &= 2+c \\ \omega_n^2\{1+\alpha\zeta^2(4+\alpha)\} &= 10+2c+K \\ 2\alpha\omega_n^3(1+\zeta^2\alpha) &= 10c+Ka \\ \alpha^2\zeta^2\omega_n^4 &= Kb \end{aligned}$$

➤ 由性能指标DS1:

$$\begin{aligned} f_B &= 1 \text{ Hz} \\ \omega_B &= 2\pi f_B = 6.28 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

➤ 闭环系统主导极点的无阻尼自然振荡频率、闭环幅频特性谐振峰值、闭环幅频特性谐振频率为:

$$\omega_n = \frac{\omega_B}{-1.1961\zeta + 1.8508} = 5.11 \text{ rad/s}$$

➤ 由百分比超调量指标DS2:

$$P.O. = 100 \frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \leq 15\% \quad = 1.125, \quad \zeta < 0.707$$

$$\zeta \geq 0.52 \quad \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$\text{可以选择 } \zeta = 0.52 \quad = 3.46 \text{ rad/s}, \quad \zeta < 0.707$$

➤ 取 $\zeta = 0.52$, $\omega_n = 5.11$, $\alpha = 12$, 可得控制器:

$$K = 1239.2, \quad a = 5.17, \quad b = 21.48, \quad c = 67.13$$

$$G_c(s) = 1239 \frac{s^2 + 5.17s + 21.48}{s + 67.13}$$

百分比超调量 P.O.=14%, 调整时间 0.96 秒

8. 用 Bode 图设计 PID

DP8.7 考虑图 DP8.7 所示的控制系统, 其中的控制器采用比例-积分-微分 (PID) 控制器。控制器的传递函数为

$$G_c(s) = K_P + K_Ds + \frac{K_I}{s}$$

试设计确定该控制器的各项增益系数, 使得系统满足:

- (a) 加速度误差常数 $K_a = 2$;
- (b) 相角裕度 P. M. $\geq 45^\circ$;
- (c) 系统带宽 $\omega_h \geq 3.0$ 。

并绘制闭环系统对单位阶跃输入信号的响应。

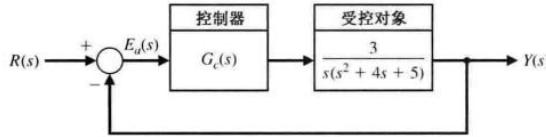


图 DP8.7 闭环反馈系统

$$\text{开环传递函数: } L(s) = \frac{3(K_Ds^2 + K_Ps + K_I)}{s^2(s^2 + 4s + 5)}$$

$$\text{由指标 1, } K_a = \frac{3}{5}K_I = 2 \quad \Rightarrow \quad K_I = \frac{10}{3}$$

$$\text{闭环传递函数: } T(s) = \frac{3(K_Ds^2 + K_Ps + \frac{10}{3})}{s^2(s^2 + 4s + 5) + 3(K_Ds^2 + K_Ps + \frac{10}{3})}$$

$$\text{特征方程: } s^4 + 4s^3 + (5 + 3K_D)s^2 + 3K_Ps + 10 = 0$$

$$\text{目标方程: } (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + a\zeta\omega_n)^2 = 0$$

匹配系数

$$\begin{aligned} 2\zeta\omega_n(1+a) &= 4 \\ \omega_n^2(1+4a\zeta^2+a^2\zeta^2) &= 5+3K_D \\ 2a\zeta\omega_n^3(1+a\zeta^2) &= 3K_P \\ a^2\zeta^2\omega_n^4 &= 10 \end{aligned}$$

由指标 2: $\Phi_{PM} \geq 45^\circ$, 得 $\zeta \geq 0.45$

由指标 3: $\omega_b \geq 3.0$, 得 $\omega_n \approx \frac{\omega_b}{-1.19\zeta+1.85}$

综上, 取 $a = 1.2$, 则由 1 式、4 式解得 $\zeta = 0.313$ $\omega_n = 2.90 rad/s$
…… (大伙自己看着办吧)

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = 5.5 + \frac{3.33}{s} + 3.5s.$$

以下, 用根轨迹设计

$$L(s) = \frac{3(K_D s^2 + K_P s + \frac{10}{3})}{s^2(s^2 + 4s + 5)}$$

取定 $\zeta = 0.5$ $\omega_n = 2.5 rad/s$

希望配置的闭环极点 $s_{1,2} = -1.25 \pm j2.165$

绘制零极点图 (略), 确定各个开环极点到期望闭环极点的角度

确定根轨迹增益

验算

(因此赌一手考的 PI 控制器而不是 PID⋯⋯)

9. 绘制 Nyquist 图、Nyquist 判定稳定性

7. 考虑图 9.70 所示的闭环系统框图, 受控对象的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{(1+0.25s)(0.5s+1)}$$

控制器的传递函数为

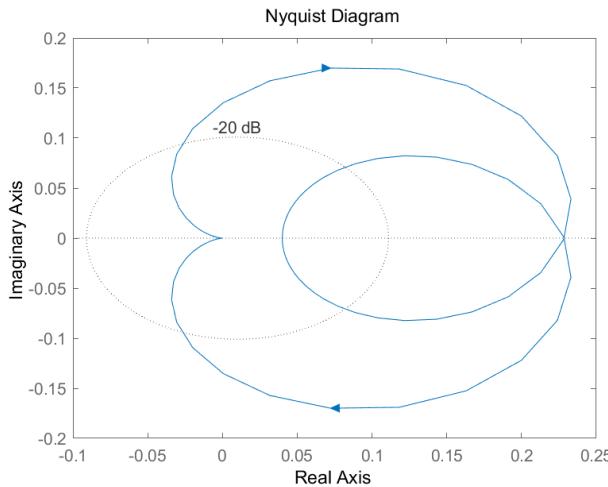
$$G_c(s) = \frac{s+0.2}{s+5}$$

试利用奈奎斯特稳定性判据分析系统的稳定性。

- a. 闭环系统稳定
- b. 闭环系统不稳定
- c. 闭环系统临界稳定
- d. 以上都不对

$$\begin{aligned} L(j\omega) &= \frac{j\omega + 0.2}{1 - 1.375\omega^2 + j(3.75\omega - 0.125\omega^3)} \\ &= \frac{(j\omega + 0.2)[1 - 1.375\omega^2 - j(3.75\omega - 0.125\omega^3)]}{(1 - 1.375\omega^2)^2 + (3.75\omega - 0.125\omega^3)^2} \\ L(j0) &= 0.2 \quad L(j\infty) = 0 \end{aligned}$$

实部等于 0 的点和虚部等于 0 的点解出来;



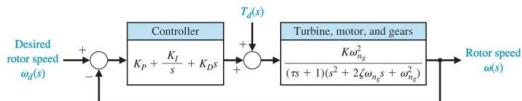
10. 根轨迹图设计 PID

➤ 涡轮机的三阶模型：

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \frac{K \omega_{n_g}^2}{s^2 + 2\zeta_g \omega_{n_g} s + \omega_{n_g}^2}$$

➤ $K = -7000$, $\tau = 5$ 秒, $\zeta_g = 0.005$, $\omega_{n_g} = 20$ rad/s

➤ 涡轮机模型的输入是桨距角控制指令(单位: 弧度)与扰动之和, 输出是转子转速(单位: rpm)



➤ 舵距控制采用PID控制器：

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_D \frac{s^2 + \frac{K_p}{K_D} s + \frac{K_I}{K_D}}{s}$$

➤ 设计目标：选择 K_p , K_I , K_D , 使系统响应快速、准确

➤ 控制指标：

- 增益裕量 $G.M. \geq 6$ dB
- 相位裕量 $30^\circ \leq P.M. \leq 60^\circ$
- 10%~90% 的上升时间 $T_{r_1} < 4$ 秒
- 峰值时间 $T_p < 10$ 秒

➤ 回路传递函数为：

$$L(s) = K \omega_{n_g}^2 K_D \frac{s^2 + \frac{K_p}{K_D} s + \frac{K_I}{K_D}}{s(\tau s + 1)(s^2 + 2\zeta_g \omega_{n_g} s + \omega_{n_g}^2)}$$

➤ 假定闭环系统存在一对主导极点。用相位裕量确定主导极点阻尼比 ζ 。目标相位裕量为 30° 时：

$$\zeta = \frac{P.M.}{100} = 0.3$$

➤ 用上升时间确定主导极点无阻尼自然振荡频率：

$$T_{r_1} = \frac{2.16\zeta + 0.6}{\omega_n} < 4 \text{ 秒}$$

➤ 当 $\zeta = 0.3$ 时, $\omega_n > 0.31$

➤ 根据设计目标选定闭环主导极点 $\zeta = 0.3$ 、 $\omega_n = 0.4$, 此时上升时间、峰值时间满足设计指标：

$$T_{r_1} = \frac{2.16\zeta + 0.6}{\omega_n} = 3 \text{ 秒} < 4 \text{ 秒}$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = 8 \text{ 秒} < 10 \text{ 秒}$$

➤ 采用根轨迹设计, ω_n 、 ζ 确定了左半 S 平面的期望性能区域, 选择 K_p/K_D 、 K_I/K_D (PID 控制器零点), 将闭环主导极点移到期望性能区域; 采用 Bode 图设计, 选择 K_D , 满足相位裕量、增益裕量

➤ $K_p/K_D = 5$ 、 $K_I/K_D = 20$ 、 $K_D = -6.22 \times 10^{-6}$ 时：

$$G_c(s) = -6.22 \times 10^{-6} \frac{s^2 + 5s + 20}{s}$$

➤ 相位裕量 $P.M. = 32.9^\circ$, 增益裕量 $G.M. = 13.9$ dB, 上升时间 $T_{r_1} = 3.2$ 秒, 峰值时间 $T_p = 7.6$ 秒。满足所有设计指标

➤ 闭环主导极点 $\zeta = 0.29$, $\omega_n = 0.41$

11. 根轨迹设计 PID

► 例10.5 单位负反馈温度控制系统

未校正系统传递函数:

$$G(s) = \frac{1}{(2s+1)(0.5s+1)} = \frac{1}{(s+0.5)(s+2)}$$

► 设计指标:

- 阶跃响应稳态误差为0
- 阶跃响应百分比超调量 $P.O. \leq 20\%$
- 按2%准则的调整时间 $T_s \leq 16/3$ 秒

► 采用PI校正, 开环I型系统, 满足第1个指标:

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = K_P \frac{s + \frac{K_I}{K_P}}{s} = K_P \frac{s + \frac{1}{0.5}}{s} = K_P \frac{s + 2}{s}$$

► 按超调量指标, 期望闭环主导极点阻尼比为:

$$P.O. = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \leq 20$$

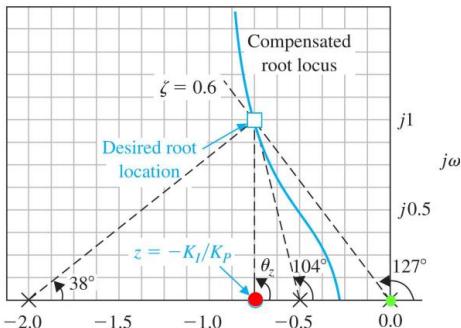
$$\zeta \geq 0.46$$

► PI控制器的零点将成为闭环系统零点, 增大超调量。为保证超调量, 将期望闭环主导极点阻尼比选的稍微大一些, 如 $\zeta=0.6$

以下, 用根轨迹图设计PI

$$\text{传递函数: } L(s) = \frac{K_P(s + \frac{K_I}{K_P})}{s(s+0.5)(s+2)}$$

【1】配置PI控制器的零点



绘制零极点图, 三个极点到期望配置的闭环极点的夹角为 $127^\circ, 104^\circ, 38^\circ$

由相角条件: $\theta_z - 127^\circ - 104^\circ - 38^\circ = -180^\circ$

$$\text{得 } \theta_z = 89^\circ, \text{ 故配置 } \frac{K_P}{K_I} = -0.75$$

【2】确定根轨迹增益

$$K_P = \frac{1.25 \times 1.03 \times 1.6}{1.0}$$

由幅值条件得 $= 2$

【3】验算

$$T(s) = \frac{K_P(s + \frac{K_P}{K_I})}{s(s+0.5)(s+2) + K_P(s + \frac{K_P}{K_I})} = \frac{2(s + 0.75)}{(s + 1.5)(s^2 + 1.5s + 1.56)}$$

► 超调量 $16\% \leq 20\%$; 调整时间 4.9 秒 $\leq 16/3$ 秒 (假装验算了)

12. 求增益裕量、相角裕量

P9. 28 在图 P9. 28 给出的反馈控制系统中, 受控对象的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

假设采用比例控制器:

$$G_c(s) = K_p$$

(a) 当系统相角裕度约为 45° 时, 试确定比例控制器的参数 K_p 。

(b) 利用相角裕度, 估算单位负反馈闭环系统的超调量。

(c) 绘制系统的阶跃响应曲线, 比较估计的超调量和真实的超调量。

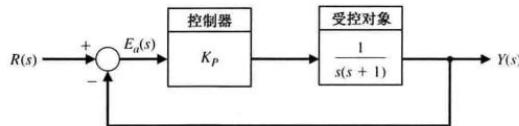


图 P9. 28 具有比例控制器的单位负反馈控制系统

13.

星际漫游车的位置控制系统模型如图 AP9. 5 所示。试确定增益 K 的取值, 使闭环系统的相角裕度取得最大值, 并估算此时阶跃响应的超调量。

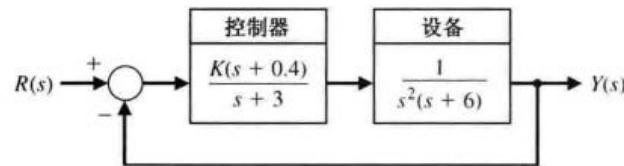


图 AP9. 5 火星漫游车的位置控制系统