5.20 习题课

梁梓航

May 2024

1 作业题

[Stein] P145-1.

证明. **(a)** 好核要求满足以下条件:
i).$\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x)dx = 1$
ii).$\int_{\mathbb{R}^d} |K_\delta(x)|dx \le A$, $\forall \delta > 0$
iii). 对每个给定的 $\eta > 0$,

$$\int_{|x|\ge\eta} |K_\delta(x)|dx \to 0 \text{ as } \delta \to 0$$

依次验证满足以上条件即可:
由积分换元公式, 和 φ 可积性

$$\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx = 1$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |K_\delta(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|dx \le A$$

由控制收敛定理，因为 $|\varphi(x)|I_{\{|x|\ge\eta/\delta\}} \le |\varphi(x)| \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 所以

$$\int_{|x|\ge\eta} |K_\delta(x)|dx = \int_{|x|\ge\eta/\delta} |\varphi(x)|dx \to 0$$

(b) 恒同逼近要求满足:
i).$\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x)dx = 1$
ii').$|K_\delta(x)| \le A\delta^{-d}$, $\forall \delta > 0$
iii').$|K_\delta(x)| \le A\delta/|x|^{d+1}$, $\forall \delta > 0, x \in \mathbb{R}^d$
条件 ii') 直接由 φ 有界可推出
iii') 由 φ 支撑在一个有界集中，所以 $|x/\delta|^{d+1}|K_\delta(x)| \le A$(有界）.
(c) 设 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 是一族好核，则

$$\begin{aligned}
||f * K_\delta - f||_{L^1(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} |f * K_\delta(x) - f(x)|dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |\int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x))K_\delta(y)dy|dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)||K_\delta(y)|dydx \\
&= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d}\int_{|y|\ge\eta} |f(x-y) - f(x)||K_\delta(y)|dydx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d}\int_{|y|<\eta} |f(x-y) - f(x)||K_\delta(y)|dydx}_{I_2}
\end{aligned}$$

分别估计 I_1, I_2:

$$I_1=\int_{|y|\geq\eta}||f(\cdot-y)-f||_{L^1(\mathbb{R}^d)}|K_\delta(y)|dy\leq 2||f||_{L^1}\int_{|y|\geq\eta}|K_\delta(y)|dy\to 0$$

$$I_2=\int_{|y|<\eta}||f(\cdot-y)-f||_{L^1(\mathbb{R}^d)}|K_\delta(y)|dy$$

对任意给定的 $\epsilon>0$，现在我们首先取定 η 充分小，由积分绝对连续性可以知道，当 $|y|<\eta$ 时，$||f(\cdot-y)-f||_{L^1(\mathbb{R}^d)}<\epsilon$，所以有

$$I_2=\int_{|y|<\eta}||f(\cdot-y)-f||_{L^1(\mathbb{R}^d)}|K_\delta(y)|dy\leq\epsilon\int_{\mathbb{R}^d}|K_\delta(y)|dy\leq\epsilon A$$

$$\limsup_{\delta\to 0}||f*K_\delta-f||_{L^1(\mathbb{R}^d)}\leq\epsilon A$$

再由 ϵ 任意性即证 □

[Stein] P145-2

证明. 因为

$$|f*K_\delta(x)|\leq\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)-f(x)||K_\delta(y)|dy$$

余下的证明与课本上的证明一样 □

[Stein] P145-3

证明. 首先我们容易知道，若点 x 是一个集合 E 的密度点，那么可以找到一列 $\{x_n\}\in E$ 使得 $x_n\to x$，这是因为如果不成立，则可以取充分小的球使得小球与 E 无交. 所以题目就变成要找相应的集合使得 0 仍为新集合的 Lebesgue 点.

(a) 我们希望 0 是 $E\cap(-E)$ 的 Lebesgue 点.

因为 0 为 E 的 Lebesgue 点，所以对任意的 $1/2<\alpha<1$ 存在 r_0 使得对任意 $0<r<r_0$，

$$m(E\cap B_r(0))\geq\alpha m(B_r(0))=2\alpha r$$

由 $B_r(0)$ 关于原点的对称性可以知道，同样有

$$m(-E\cap B_r(0))\geq\alpha m(B_r(0))=2\alpha r$$

所以

$$m(E\cap(-E)\cap B_r(0))=m(E\cap B_r(0))+m(-E\cap B_r(0))-m((E\cup(-E))\cap B_r(0))\geq 2\alpha r+2\alpha r-2r=(2\alpha-1)m(B_r(0))$$

因此 0 是 $E\cap(-E)$ 的 Lebesgue 点.

(b) 我们希望 0 是 $E\cap 2E$ 的 Lebesgue 点.

同上，只需注意到

$$m(2E\cap B_r(0))=2m(E\cap B_{r/2}(0))\geq 2\alpha m(B_{r/2}(0)=2\alpha r$$

□

[Stein] P146-4

证明. 由极大函数的定义 $f^*(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{m(B_r(x))}\int_{m(B_r(x))}|f(y)|dy$, 所以对 $|x|>1$

$$\begin{aligned}f^*(x)&\geq\frac{1}{m(B_{2|x|}(x))}\int_{m(B_{2|x|}(x))}|f(y)|dy\\&\geq\frac{C}{|x|^d}\int_{m(B_1(0))}|f(y)|dy\geq\frac{C'}{|x|^d}\end{aligned}$$

最后一步我们不妨假设了 $\int_{m(B_1(0))}|f(y)|dy>0$, 由上面的估计也可以知道 $f^*\notin L^1(\mathbb{R}^d)$.
最后，

$$m(\{x:f^*(x)>\alpha\})\geq m(\{|x|\geq 1:\frac{C}{|x|^d}>\alpha\})=C/\alpha$$

□

[Stein] P146-5

证明. **(a)**

$$\int_0^{1/2}\frac{1}{x(\log(1/x))^2}dx=\int_{\log 2}^{\infty}\frac{1}{t^2}dt<+\infty$$

(b)

$$f^*(x)\geq\frac{1}{m(B_{|x|}(x))}\int_{m(B_{|x|}(x))}|f(y)|dy=\frac{C}{|x|\log(1/|x|)}$$

□

[Stein] P146-6

证明. 令 $F(x)=\int_0^x|f(y)|dy-\alpha x$, 那么若 $x\in E_\alpha^+$, 这表明存在 $h_x>0$ 使得 $\int_x^{x+h_x}|f(y)|dy-\alpha h_X>0$ 也即 $F(x+h_x)>F(x)$, 利用引理 3.5，可知 $E=\bigcup_i(a_i,b_i)$, 且 $F(a_i)=F(b_i)$, 展开即可. □

[Stein] P147-7

证明. 由 Lebesgue 微分定理，我们有

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}\int_{(x-r,x+r)}|\chi_E(y)|dy\overset{a.e.}{=}\chi_E(x)$$

由条件，有

$$\frac{1}{2r}\int_{(x-r,x+r)}|\chi_E(y)|dy=\frac{m(E\cap I)}{m(I)}\geq\alpha$$

所以 $\chi_E(x)\geq\alpha$, 所以 $\chi_E(x)\overset{a.e.}{=}1$, 即 $m(E)=1$ □

[Stein] P147-11

证明. 本题我们总结一般情况：

$$\begin{gathered}f(x)\in BV[0,1]\Longleftrightarrow a>b>0\\ f(x)\in AC[0,1]\Longleftrightarrow a>b>0\\ f(x)\in Lip[0,1]\Longleftrightarrow a\geq b+1>1\\ f(x)\in C^1[0,1]\Longleftrightarrow a>b+1>1\end{gathered}$$

我们知道有空间的包含:

$$C^1[0,1]\subset Lip[0,1]\subset AC[0,1]\subset BV[0,1]$$

首先证明第一，二条：f 的奇性出现在 $x=0$ 处，除此之外不难知道 f 在 $[\epsilon,1]$ 上是 C^1 的. 而且在 $[0,1]$ 上连续求导

$$f'(x)=ax^{a-1}\sin x^{-b}-bx^{a-b-1}\cos x^{-b}$$

在 $[\epsilon,1]$ 上，因为是 C^1 函数，有一般的微积分基本定理:

$$f(x)-f(\epsilon)=\int_\epsilon^x f'(t)dt$$

若 $a>b$, 则 f' 会被一个 L^1 函数控制:

$$|f'(x)| \leq ax^{a-1} + bx^{a-b-1} \in L^1[0,1]$$

由控制收敛定理, 令 $\epsilon \to 0$, 有

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt$$

所以 $f(x) \in AC[0,1] \subset BV[0,1]$.
若 $0 < a \leq b$, 则

$$|x^{a-b-1}\cos x^{-b}| \geq \frac{\cos^2 x^{-b}}{x^{b+1-a}} = \frac{1+\cos 2x^{-b}}{2x^{b+1-a}}$$

在 $[\epsilon, 1]$ 上积分，因为 f' 在区间上连续，所以这个积分有意义:

$$\int_\epsilon^1 |x^{a-b-1}\cos x^{-b}|dx \geq \int_\epsilon^1 \frac{1+\cos 2x^{-b}}{2x^{b+1-a}}$$
$$\overset{换元}{=} C\int_1^{\epsilon^{-1/b}} \frac{1+\cos 2t}{2t^{a/b}}dt$$

令 $\epsilon \to 0$, 由单调收敛定理, 右边:

$$\int_0^1 |x^{a-b-1}\cos x^{-b}|dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 |x^{a-b-1}\cos x^{-b}|dx$$

左边:

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^{a/b}}dt = \infty$$
$$\int_1^\infty \frac{\cos 2t}{t^{a/b}} < \infty$$

最后一行是数学分析中 Dirichlet 判别法，此积分收敛 (因为连续性，这里有限区间中 Lebesgue 积分和 Riemann 积分等同，当 $\epsilon \to 0$ 时，这正是 Riemann 积分意义下的广义积分.) 所以这时候 $f' \notin L^1[0,1]$，所以 $f \notin BV[0,1]$(否则 $f' \in L^1$)，因此也不在 $AC[0,1]$ 中
综上所述, 我们证明了第一，二条.
第四条是显然的，因此我们只证明第三条：这时候 $a \geq b+1 \Longrightarrow f \in Lip[0,1]$ 显然.
反之，设 $f \in Lip[0,1]$, 则存在 $M>0$ 使得

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$$

这表明 f' 在可微处的导数应该有界，但 $a < b+1$ 时可以找到无界的点列，矛盾.

现在取 $a = b$ ，下证 $f \in C^\alpha[0,1]$, 但 $f \notin BV[0,1]$:
Case1: $x^{a+1} > h$, h 小, 考虑中值定理.
由微分中值定理:

$$|f(x+h) - f(x)| = |f'(\xi)|h$$

这里 $h > 0, 0 \leq x \leq \xi \leq x+h \leq 1$. 所以问题转化为对导数的估计.

$$|f'(x)| = |ax^{a-1}\sin x^{-a} - ax^{-1}\cos x^{-a}| \leq |ax^{a-1}\sin x^{-a}| + |ax^{-1}\cos x^{-a}| \leq C/x$$

综上，$|f'(\xi)|h \leq Ch/\xi \leq Ch/x < Ch^{\frac{a}{a+1}}$
Case2: $x^{a+1} \leq h$
直接估计:

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |f(x+h)| + |f(x)| \leq C(x+h)^a$$

所以 $|f(x+h) - f(x)| \leq C(h^{\frac{1}{a+1}} + h)^a \leq C'h^{\frac{a}{a+1}}$.
综上，$f \in C^{\frac{a}{a+1}}$, 但我们证明了 $f \notin BV[0,1]$. $\square$

[Stein] P147-12

证明. 此题证明已包含在上一题中. $\square$

[Stein] P148-14(a)

证明.

$$D^+(F)(x)=\lim_{n\to\infty}\sup_{0<h<\frac{1}{n}}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

所以问题变成 $\sup_{0<h<\frac{1}{n}}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ 是否可测.
由 F 连续性，容易证明

$$\sup_{0<h<\frac{1}{n}}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\sup_{h\in\mathbb{Q}\cap(0,1/n)}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

后者是可数个可测的 sup，因此可测. $\square$

[Stein] P148-15

证明. 令 $G(x)=\bigvee_a^x F$, 因为 $F\in BV[a,b]\cap C[a,b]$, 所以 $G(x)$ 是良定义的，以下只需证明 $G(x)$ 是连续的，这是一个重要的结论, 它能帮助我们计算许多函数的有界变差:

Proposition 1. $F\in BV[a,b]$, 则

$$\begin{gathered}F \text{ 在 } x_0\in[a,b] \text{ 处左连续} \iff \bigvee_a^x F \text{ 在 } x_0 \text{ 处左连续}\\ F \text{ 在 } x_0\in[a,b] \text{ 处右连续} \iff \bigvee_x^b F \text{ 在 } x_0 \text{ 处右连续}\\ F \text{ 在 } x_0\in[a,b] \text{ 处连续} \iff \bigvee_a^x F \text{ 在 } x_0 \text{ 处连续}\end{gathered}$$

证明. 第一，二条证明是类似的，令 $h>0$，因为

$$|f(x+h)-f(x)|\le\bigvee_x^{x+h}F=|\bigvee_a^{x+h}F-\bigvee_a^{x}F|$$

所以充分性显然，下面主要证明必要性.
因为 $\bigvee_a^{x_0-h}F\le\bigvee_a^{x_0}F$, 所以

$$\limsup_{h\to0^+}\bigvee_a^{x_0-h}F\le\bigvee_a^{x_0}F$$

另一方面，取 $[a,b]$ 的任一分割，$a=a_0<a_1<...<a_{n-1}<a_n=x_0$, 不失一般性，假设 a_n-a_{n-1} 足够小，使得 $|F(x_0)-F(a_{n-1})|<\epsilon$, 所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|F(a_i)-F(a_{i-1})|&\le\sum_{i=1}^{n-1}|F(a_i)-F(a_{i-1})|+\epsilon\\&\le\liminf_{h\to0^+}\bigvee_a^{x_0-h}F+\epsilon\end{aligned}$$

由分割任意性，就有

$$\bigvee_a^{x_0}F\le\liminf_{h\to0^+}\bigvee_a^{x_0-h}F\le\limsup_{h\to0^+}\bigvee_a^{x_0-h}F\le\bigvee_a^{x_0}F$$

所以

$$\lim_{h\to0^+}\bigvee_a^{x_0-h}F=\bigvee_a^{x_0}F$$

也即 F 的左连续性推出了 $\bigvee_a^x F$ 的左连续性.
类似地，我们有 F 的右连续性推出 $\bigvee_x^b F$ 的右连续性
结合起来: F 在 x_0 处连续，那么 (左连续性)

$$\lim_{h\to 0^+}\bigvee_a^{x_0-h} F=\bigvee_a^{x_0} F$$

(右连续性)

$$\lim_{h\to 0^+}\bigvee_a^{x_0+h} F=\bigvee_a^{b} F-\lim_{h\to 0^+}\bigvee_{x_0+h}^{b} F=\bigvee_a^{b} F-\bigvee_{x_0}^{b} F=\bigvee_a^{x_0} F$$

□

现在回到原题，原题是这个命题的直接推论. □

Remark 1. *我们用 11 题的总结来验证我们这个结论: 令 $f=x^a\sin x^{-b}$, 则由在 $[\epsilon,1]$ 上的连续可微性，我们有 (作业 16 题)*

$$\bigvee_\epsilon^1 f=\int_\epsilon^1 |f'(t)|dt$$

令 $\epsilon\to 0$, 左边用我们证明的有界变差连续性，右边用单调收敛定理，我们获得了

$$\bigvee_0^1 f=\int_0^1 |f'(t)|dt$$

这表明 $f\in BV[0,1]\iff f\in AC[0,1]\iff f'\in L^1[0,1]$, 与第 11 题的总结相同.
同时，也不难发现这里只用到了 f 在 $[\epsilon,1],\forall\epsilon>0$ 上连续可微，和在 $[0,1]$ 上的连续性，就能推出 $f\in BV[0,1]\iff f\in AC[0,1]\iff f'\in L^1[0,1]$，因此要判断一大类函数是否有界变差，就能由此结论归根结底到 $|f'|$ 是否可积的问题

2 期中考试

期中考试 T5(1) 本题可以推广到任意维数 $\mathbb{R}^d$ ，只需把区间改成方体/球体即可. 以下给出几种方法.
solution1：

证明. 不妨设 E 有界，反证法，若 $\sup_{I\text{非退化矩体}}\frac{m(I\cap E)}{m(I)}=\lambda<1$, 显然 $\lambda>0$. $\forall\epsilon>0$, 取开矩体 I_k, 由外测度的定义，有 $E\subset\bigcup_k I_k$ 且 $m(E)\le\sum_k m(I_k)\le m(E)+\epsilon$, 所以

$$m(E)\le m(\bigcup_k(I_k\cap E))\le\sum_k m(I_k\cap E)\le\lambda(\sum_k m(I_k))\le\lambda(m(E)+\epsilon)$$

所以只要先取 ϵ 足够小，就得到矛盾. □

solution2:

证明. 由 Lebesgue 微分定理:

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}\int_{(x-r,x+r)}\chi_E(y)dy\overset{a.e.}{=}\chi_E(x)$$

因为 $m(E)>0$, 所以存在 x 使得

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{m(B_r(x))}\int_{B_r(x)}\chi_E(y)dy=1$$

即可以找到球体 $B_r(x)$(方体也可以，因为方体是 shrink regularly 的）使得 $\frac{m(B\cap E)}{m(B)}>1-\epsilon$ □

期中考试 T5(2)

首先给一个简单的方法，该方法在一般局部紧拓扑群上也有效 (见 Hewitt–Ross, Abstract Harmonic Analysis I, Corollary 20.17 , page 296.)

证明. 不妨设 E,F 都有限测度, 令

$$f(x)=\chi_E*\chi_F(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\chi_E(x-y)\chi_F(y)dy$$

则

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)dx&=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\chi_E(x-y)\chi_F(y)dydx\\&\overset{\text{Tonelli}}{=}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\chi_E(x-y)\chi_F(y)dxdy\\&=m(E)m(F)>0\end{aligned}$$

这表明 $f(x)\neq 0$, 所以 $\{x:f(x)>0\}\neq\varnothing$, 另外，若 $x\in\{x:f(x)>0\}$, 那么必须存在 $y\in\mathbb{R}^d$, 使得 $\chi_E(x-y)>0,\chi_F(y)>0$, 即 $x-y\in E,y\in F$. 所以

$$\{x:f(x)>0\}\subset E+F$$

所以我们只需要在 $\{x:f(x)>0\}$ 中找开区间即可. 由作业 **Stein P95，24**, $\chi_E*\chi_F(x)$ 连续，因此 $\{x:f(x)>0\}$ 是开集，显然包含开区间. □

另一个方法:

证明. 用第一问: 可以找区间 I_1,I_2，使得 $m(E\cap I_1)\geq\frac{3}{4}m(I_1)$,$m(F\cap I_2)\geq\frac{3}{4}m(I_2)$.
同时通过等分大区间，可以限制区间长度，不妨设 $m(I_2)\leq m(I_1)\leq 2m(I_2)$, 通过平移，不妨设 $I_2\subset I_1$.
令 $d=m(I_2)$, 对 $0\leq a<d/8$, 则 $|I_1\cap(I_2+\alpha)|>7d/8$，令 $I'=I_1\cap(I_2+\alpha)$，则

$$\begin{aligned}&\frac{3}{4}m(I_1)\leq m(E\cap I_1)\leq m(E\cap I')+m(I_1-I')<m(E\cap I')+m(I_1)-7d/8\\&\frac{3}{4}m(I_2)\leq m(F\cap I_2)=m((F+\alpha)\cap(I_2+\alpha))\leq m((F+\alpha)\cap I')+m((I_2+\alpha)-I')<m((F+\alpha)\cap I')+m(I_2)-7d/8\end{aligned}$$

所以若 $E\cap(F+\alpha)=\varnothing$，则有

$$\frac{3}{4}m(I_1)+\frac{3}{4}m(I_2)<m(I')+m(I_1)+m(I_2)-7d/4\leq m(I_1)+d/4$$

整理得

$$d/2<\frac{1}{4}m(I_1)\leq d/2$$

矛盾，所以有 $(-d/8,d/8)\subset E-F$ □

期中考试 T7

本题思路来自于 Borel–Cantelli Lemma(作业）考虑一个新测度

$$\mu(A)\overset{\text{def}}{=}\int_A f(x)dx \tag{1}$$

它关于 Lebesgue 测度相互绝对连续:

$$m(A)=0\iff\mu(A)=0$$

证明. 反证法，若有一列 $\{E_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to 0}\int_{E_n}f(x)dx=0$$

不妨设对每个 n，有

$$\int_{E_n} f(x)dx < \frac{1}{2^n}$$

则

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x)dx < \infty$$

所以对充分大 n, 有

$$\int_{\bigcup_{k\geq n} E_k} f(x)dx \leq \sum_{k=n}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx < \epsilon$$

所以由单调收敛定理 (这里虽然是单调递减，但是在 E_1 上积分是有限的，可以用第一项减去第 n 项得单调增序列)

$$\int_{\limsup_{n\to\infty} E_n} f(x) = 0$$

因为 $f(x) > 0$, 这表明只能 $m(\limsup_{n\to\infty} E_n) = 0$, 但这与 $m(E_n) \geq q$ 矛盾. $\square$