中科大2022年数学分析(B3)期末考试

2022.01.11. 14:30-16:30

姓名：_____ 学号：_____ 得分：_____

$\mathbb{R}^n$为n维欧氏空间，$|\cdot|$为它上面的欧氏范数.

1. (40分) 设$M(n)$为$n\times n$实矩阵全体, 它上面的算子范数定义为

$$\|A\| := \sup_{0\neq x\in\mathbb{R}^n} \frac{|Ax|}{|x|}, \quad A\in M(n).$$

   (a) 从定义出发证明$\Omega := \big\{A\in M(n) : A\text{可逆}\big\}$是赋范空间$\big(M(n), \|\cdot\|\big)$的开子集。

   (b) 设I为$M(n)$中的单位矩阵, 证明: 以I为心、半径为1的开球

$$B_1(I) := \{A\in M(n) : \|A-I\| < 1\}$$

   包含于Ω.

   (c) 求$\sup\big\{r>0 : \text{以}I\text{为心、以}r\text{半径的开球}B_r(I)\subset\Omega\big\}$, 要说明理由。

   (d) 给定$A\in M(n)$, 求映射$\varphi:\Omega\to M(n)$, $\varphi(P)=P^{-1}AP$ 在I处微分$\mathrm{d}\varphi_I$的显示表达式。

2. (40分) 设$D \subset \mathbb{R}^2$是有面积(Jordan可测)的集合, $f : D \to \mathbb{R}$是D上的黎曼可积函数。

   (a) 设D的面积(Jordan测度)$\sigma(D)$为零。用定义证明$\displaystyle\int_D f \mathrm{d}\sigma = 0$。

   (b) 设$E := \{P \in D : f(P) \neq 0\}$的面积为零。证明$\displaystyle\int_D f \mathrm{d}\sigma = 0$。

   (c) 设f在D上恒为非负，且$\displaystyle\int_D f \mathrm{d}\sigma = 0$。证明: 对于任意$\delta > 0$,

   $$E_\delta := \{P \in D : f(P) \geq \delta\}$$

   的面积是零。

   (d) 设f在D上恒大于零且$\displaystyle\int_D f \mathrm{d}\sigma = 0$。证明$\sigma(D) = 0$。

3. (20分) 设$\varphi_1,\, \varphi_2,\, \varphi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$为$C^1$函数, 它们在$\mathbb{R}^3$上处处满足

$$\frac{\partial(\varphi_1,\, \varphi_2)}{\partial(x_1,\, x_2)} \neq 0, \quad \frac{\partial(\varphi_1,\, \varphi_2,\, \varphi_3)}{\partial(x_1,\, x_2,\, x_3)} = 0.$$

这里$(x_1,\, x_2,\, x_3)$是$x \in \mathbb{R}^3$中的直角坐标。

(a) 证明$\mathbb{R}^3$到自身的映射$\Phi(x_1,\, x_2,\, x_3) = \big(\varphi_1(x_1, x_2, x_3),\, \varphi_2(x_1, x_2, x_3),\, x_3\big)$的微分处处可逆。

(b) 证明: 任给$P \in \mathbb{R}^3$，存在P的开邻域U，使得$\varphi_3|_U$是关于$\varphi_1|_U,\, \varphi_2|_U$的$C^1$函数。

参考答案与评分标准

1. 每小问10分。

   (a)的证明见课本pp.148-149 的定理17.2的第一部分。

   (b)由$\|I\| = 1$(4分)与(a)的证明过程即得(6分)。

   (c)的答案是1。事实上，先由(b)知上确界不小于1(4分), 而不可逆阵

$$\mathrm{diag}(0, 1, 1, \cdots, 1)$$

   和I的距离恰好等于1，所以上确界不大于1(6分)。

   (d) 先说明映射$\psi_1 : \Omega \to \Omega$, $\psi(P) = P^{-1}$在I处的微分为$-\mathrm{Id}_{M(n)}$。事实上，由于对于任意$P \in \Omega$, $I = P^{-1} \cdot P = \psi_1(P) \cdot P$, 两边求微分得: 对于任意$P \in \Omega$与任意$H \in M(n)$,

$$0 = \mathrm{d}\psi_P(H) \cdot P + P^{-1} \cdot H, \quad \text{i.e.} \quad \mathrm{d}\psi_P(H) = -P^{-1}HP^{-1}.$$

   将上式在$P = I$处取值即可。(3分)

   由上面事实得: 当$H \to 0$时，成立$(I + H)^{-1} = I - H + o(\|H\|)$(2分)。
   还有一个方法可证明上述估计: 当$\|H\| < 1$时，

$$(I + H)^{-1} = I - H + (I + H)^{-1}H^2 = I - H + o(\|H\|).$$

   此时直接给5分。
   接下来做如下计算: 当$H \to 0$时，

$$\begin{aligned}
\varphi(I + H) - \varphi(I) &= (I + H)^{-1}A(I + H) - A \\
&= \big(I - H + o(\|H\|)\big)A(I + H) - A \\
&= AH - HA + o(\|H\|).
\end{aligned}$$

   于是我们得到$\mathrm{d}\varphi_I(H) = [A, H] := AH - HA$(5分)。

2. 每小问10分。(a)的证明见课本p.206的性质18.18。

   (b) 观察到$g = f\chi_D$是平面$\mathbb{R}^2$上的有界紧支集黎曼可积函数，并且$E = \{P \in \mathbb{R}^2 : g(P) \neq 0\}$的面积等于零，只需证明$\int g \, \mathrm{d}\sigma = 0$. 设$M > 0$为$|g|$的

一个上界。由于E的面积等于零，则它的外面积等于零(2分)。任取$\epsilon > 0$, 存在平面的分割$\pi = \{I\}$, 使得$\sigma_\pi^+(E) \le \epsilon$。记$M_I = \sup_I g$, $m_I = \inf_I g$, 那么有

$$\begin{aligned} S_\pi^+(g) &= \sum_{I\cap E\neq\emptyset} M_I(g)\sigma(I) + \sum_{I\cap E=\emptyset} M_I(g)\sigma(I) \\ &\le M\sigma_\pi^+(E) + 0 \le M\epsilon; \\ S_\pi^-(g) &= \sum_{I\cap E\neq\emptyset} m_I(g)\sigma(I) + \sum_{I\cap E=\emptyset} m_I(g)\sigma(I) \\ &\ge -M\sigma_\pi^+(E) + 0 \ge -M\epsilon. \quad (6分) \end{aligned}$$

令$\epsilon \to 0^+$得g的上积分与下积分都是零(2分)。

(c) 因为$f \ge 0$且在D上的积分为零，依照定义，我们知道f在$\mathbb{R}^2$上零延拓$g := f\chi_D$也非负且在$\mathbb{R}^2$上的积分为零。给定$\delta > 0$, 我们有$E_\delta = \{P \in \mathbb{R}^2 : g(P) \ge \delta\}$。因为$g$的上积分为零，对于任意$\epsilon > 0$, 存在平面的分割$\pi = \{I\}$, 使得

$$\begin{aligned} \epsilon \ge S_\pi^+(g) &= \sum_{I\cap E_\delta\neq\emptyset} M_I(g)\sigma(I) + \sum_{I\cap E_\delta=\emptyset} M_I(g)\sigma(I) \quad (4分) \\ &\ge \sigma_\pi^+(E_\delta)\cdot\delta \quad (3分，用到 g \ge 0). \end{aligned}$$

从而得到$\sigma_\pi^+(E_\delta) \le \dfrac{\epsilon}{\delta}$(3分)。

(d) 因为D有面积，那么∂D的面积为零。因为$D \subset D^\circ \cup \partial D$, 所有只需证明$D^\circ = \emptyset$(2分)。(反证法) 假设$P$是$D$的内点，那么存在以$P$为心的正方形$I$, 它包含于$D^\circ$。因为$f$ 在D上黎曼可积，利用黎曼可积的上下积分相等的定义，得到$f|_I$亦黎曼可积(2分)。

Claim $f|_I$在I中有连续点。

Proof. 因为$f|_I$黎曼可积，由课本p.215的推论18.24.知$f|_I$上的不连续点集合是Lebesgue零测集。而利用紧致集合I的Heine-Borel性质以及$\sigma(I) > 0$, 容易证明I不是Lebesgue零测集。Q.E.D. (4分)

由Claim以及$f|_I$恒大于零，存在I中的一个小正方形J以及$\epsilon_0 > 0$使得f在J上的取值恒大于ϵ_0。那么f在D上的积分不小于f在J上的积分，而后者不小

于$\epsilon_0\sigma(J) > 0$. (2分)

3. 每小问10分。

(a) $\mathrm{d}\Phi$的行列式等于$\dfrac{\partial(\varphi_1,\,\varphi_2,\,x_3)}{\partial(x_1,\,x_2,\,x_3)} = \dfrac{\partial(\varphi_1,\,\varphi_2)}{\partial(x_1,\,x_2)}$, 处处不为零。

(b) 考虑$\mathbb{R}^3$到自身的C^1映射$f = (\varphi_1,\,\varphi_2,\,\varphi_3)$, 那么由假设条件, $\mathrm{d}f$的秩处处等于2。任取$P \in \mathbb{R}^3$, 由(a)与逆映射定理, 存在P的开邻域U, 使得$V = \Phi(U)$为$\mathbb{R}^3$ 的开集，并且

$$\varphi|_U : U \to V,\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (u_1, u_2, u_3) = \big(\varphi_1(x_1, x_2, x_3),\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3),\ x_3\big)$$

是C^1同胚(4分)。

由于$\mathrm{d}(f \circ \Phi)$ 的秩处处等于2, 可以模仿课本pp.175-176 关于秩定理的证明或者用微分的不变性证得: 在V 上, $f \circ \Phi^{-1}$ 的第三个分量$g_3 := \varphi_3 \circ \Phi^{-1}$关于$u_3 = x_3$的偏导数恒为零(4分)。后一种方法的细节如下: 由已知条件以及微分的不变性得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g_3 &= \mathrm{d}\varphi \\ &= c_1\mathrm{d}\varphi_1 + c_2\mathrm{d}\varphi_2 \\ &= c_1\mathrm{d}u_1 + c_2\mathrm{d}u_2. \end{aligned}$$

因此，g_3是$u_1 = \varphi_1,\ u_2 = \varphi_2$的$C^1$函数，从而在$U$上成立

$$\begin{aligned} \varphi_3(x_1, x_2, x_3) &= g_3 \circ \Phi(x_1, x_2, x_3) = g_3(u_1,\ u_2) \\ &= g_3\big(\varphi_1(x_1, x_2, x_3),\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3)\big)\ (2\text{分}). \end{aligned}$$